ПРОИЗВОДЯЩИЙ ОПЕРАТОР ДИФФУЗИИ ИТО

Определение №1:

Однородная во времени диффузия Ито - это стохастический процесс $X_t(\omega) = X(t,\omega) : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющий стохастическому дифференциальному уравнению вида:

$$dX_t = b(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dB_t$$

где

1. $t \geq s$
2. $X_s = x$
3. B_t - m - мерное Броуновское движение
4. $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
5. $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times m}$

Такой процесс обязан удовлетворять свойству:

$$|b(x) - b(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq D\,|x - y|\,; x, y \in \mathbb{R}^n$$

и $|\sigma|^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |\sigma_{i,j}|^2$

Определение №2:

Пространство C^k - пространство функций, в котором k - ая производная непрерывна.

Определение №3:

Носитель функции $u : X \to \mathbb{R}$ - замыкание подмножества X на котором вещественнозначная функция u не обращается в 0.

$$supp(u) = \overline{\{x : u(x) \neq 0\}}$$

Определение №4:

Пусть $\{\mathcal{N}_t\}$ возрастающее семейство сигма-алгебр помножеств Ω. Функция $\tau : \Omega \to [0,\infty]$ называется моментом остановки относительно $\{\mathcal{N}_t\}$ если

$$\{\omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{N}_t; \forall t \geq 0$$

Определение №5:

Пусть $\{X_t\}$ - однородная во времени диффузия Ито на $\mathbb{R}^n$. Производящий оператор A случайного процесса X_t при $x \in \mathbb{R}^n$ определяется формулой:

$$Af(x) \quad = \quad \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathbb{E}^x[f(X_t)] - f(x)}{t}$$

Определение №6:

Пусть $S \subseteq \mathbb{R}$. Пусть $\xi \in \mathbb{R}$ и пусть $S_\xi := \{x : x \in S, x \neq \xi\}$, тогда ξ - предельная точка, тогда и только тогда, когда ξ нулевое расстояние от S_ξ. Под расстоянием подразумевается - расстояние $d(x, S_\xi) = \underset{y \in S_\xi}{inf}\, d(x, y)$ в некотором метрическом пространстве.

Определение №7:

Пусть $M = (S, d)$ - метрическое пространство. Пусть τ - топология, индуцированная, метрикой d. Пусть $A \subseteq S$ - подмножество S. Положим $\alpha \in S$. α является предельной точкой A тогда и только тогда, когда каждая проколотая ϵ - окрестность $B_\epsilon(\alpha) - \{\alpha\}$ содержит точку в A.

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0} : (B_\epsilon(\alpha) - \{\alpha\}) \cap A \neq \varnothing$$

То есть

$$\forall \epsilon \in \mathbb{E}_{>0} : \{x \in A : 0 < d(x, \alpha) < \epsilon\} \neq \varnothing$$

Заметим, что α не обязан быть элементом из A, чтобы являться предельной точкой.

Определение №7:

Пусть $(X, \mathcal{T})$ - топологическое пространство. Пусть $A \subseteq X$. Мы называем множество $\overline{A}$ замыканием, если $x \in \overline{A}$, тогда и только тогда, когда для любого открытого множества U, содержащего $U \cap A \neq \varnothing$. Или символьно:

$$\overline{A} := \{x \in X : \forall U \in \mathcal{T} : x \in U, U \cap A \neq \varnothing\}$$

Лемма №8:

Пусть $Y_t = Y_t^x$ - процесс Ито на $\mathbb{R}^n$ в форме (B - m-мерный процесс)

$$Y_t^x(\omega) = x + \int_0^t u(s, \omega)\, ds + \int_0^t v(s, \omega)\, dB_s(\omega)$$

Пусть $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ - пространство дважды дифференцируемых функций, для которых вторая производная непрерывна и для которых существует компактный носитель. Пусть τ - момент остановки относительно $\left\{\mathcal{F}_t^{(m)}\right\}$ и пусть $\mathbb{E}^x[\tau] < \infty$. Пусть $u(t, \omega)$и $v(t, \omega)$ ограничены на множестве (t, ω), так, что Y_t принадлежит носителю f. Тогда

$$\mathbb{E}^x[f(Y_\tau)] = f(x) + \mathbb{E}^x\left[\int_0^\tau \left(\sum_i u_i(s, \omega) \frac{\partial f}{\partial x_i}(Y_s) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(vv^T\right)_{i,j}(s, \omega) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(Y_s)\right) ds\right]$$

где $\mathbb{E}^x$- ожидание относительно естественного закона вероятности R^x процесса Y_t, с инициализацией в точке x:

$$R^x[Y_{t_1} \in F_1, ..., Y_{t_k} \in F_k] = \mathbb{P}^0\left[Y_{t_1}^x \in F_1, ..., Y_{t_k}^x \in F_k\right]$$

где F_i - Борелевское множество:

Доказательство:

1. Пусть $Y_t = Y_t^x$ - процесс Ито на $\mathbb{R}^n$ для m-мерного Броуновского движения в следующей форме:

$$Y_t^x(\omega) = x + \int_0^t u(s, \omega)\, ds + \int_0^t v(s, \omega)\, dB_s(\omega)$$

2. Пусть $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$

3. Пусть τ - момент остановки относительно $\left\{\mathcal{F}_t^{(m)}\right\}$ для которого $\mathbb{E}^x[\tau] < \infty$

4. Пусть $u(t,\omega)$ и $v(t,\omega)$ - ограничены $\forall (t,\omega) \in [0,\infty) \times \Omega$ таким образом, что Y_t лежит на множестве компактного носителя функции f

5. Пусть $Z = f(Y)$, где $Y = (Y_1, ..., Y_n)$ и $B = (B_1, ..., B_m)$. Применим к этой функции Лемму Ито:

$$\begin{aligned} dZ &= (\nabla_Y f)^T dY + \frac{1}{2} Y^T (H_Y f) Y \\ &= (\nabla_Y f)^T (udt + vdB) + \frac{1}{2}(udt + vdB)^T (H_Y f)(udt + vdB) \\ &= (\nabla_Y f)^T udt + (\nabla_Y f)^T vdB + \frac{1}{2}(vdB)^T (H_Y f)(vdB) \\ &= \left\{(\nabla_Y f)^T udt + \frac{1}{2} Tr\left[v^T (H_Y f) v\right]\right\} dt + (\nabla_Y f)^T vdB \end{aligned}$$

6. Уравнение в (5) - это представление интеграла Ито в дифференциальной форме:

$$f(Y_t) = f(Y_0) + \int_0^t \left\{(\nabla_Y f)^T udt + \frac{1}{2} Tr\left[v^T (H_Y f) v\right]\right\} ds + \int_0^t (\nabla_Y f)^T vdB_s$$

7. Применяя оператор ожидания и теоремы 3.2.1 к (6) получим, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^x[f(Y_\tau)] &= \mathbb{E}^x\left[f(Y_0) + \int_0^\tau \left\{(\nabla_Y f)^T u + \frac{1}{2} Tr\left[v^T (H_Y f) v\right]\right\} ds + \int_0^\tau (\nabla_Y f)^T vdB_s\right] \\ &= f(Y_0) + \mathbb{E}^x\left[\int_0^\tau \left\{(\nabla_Y f)^T u + \frac{1}{2} Tr\left[v^T (H_Y f) v\right]\right\} ds\right] + \mathbb{E}^x\left[\int_0^\tau (\nabla_Y f)^T vdB_s\right] \\ &= f(Y_0) + \mathbb{E}^x\left[\int_0^\tau \left\{(\nabla_Y f)^T u + \frac{1}{2} Tr\left[v^T (H_Y f) v\right]\right\} ds\right] \end{aligned}$$

8. Ч.Т.Д.

Теорема 8

Пусть X_t - диффузионный процесс Ито

$$dX_t = b(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dB_t$$

Если $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, то $f \in \mathcal{D}_A$ и

$$Af(x) = (\nabla_X f)^T b(X_t) + \frac{1}{2} Tr\left[\sigma^T(X_t)(H_X f)\sigma(X_t)\right]$$

Доказательство:

1. Пусть X_t - диффузионный процесс Ито:

$$dX_t = b\left(X_t\right)dt + \sigma\left(X_t\right)dB_t$$

2. Пусть $f \in C_0^2\left(\mathbb{R}^n\right)$

3. По определению $\mathcal{D}_A$ пространство функций, таких, что для любой функции $f \in \mathcal{D}_A$, для любой точке $x \in \mathbb{R}^n$ существует следующий предел:

$$Af\left(x\right) = \lim_{t\downarrow 0}\frac{\mathbb{E}^x\left[f\left(X_t\right)\right] - f\left(x\right)}{t}$$

4. Используя (1), лемму 7, теорему Фубини и теорему Ньютона Лейбница, получим, что

$$\begin{aligned}
Af\left(x\right) &= \lim_{t\downarrow 0}\frac{\mathbb{E}^x\left[f\left(X_t\right)\right] - f\left(x\right)}{t} \\
&= \lim_{t\downarrow 0}\frac{f\left(x\right) + \mathbb{E}^x\left[\int_0^t\left\{\left(\nabla_X f\right)^T b\left(X_s\right) + \frac{1}{2}Tr\left[\sigma^T\left(X_s\right)\left(H_X f\right)\sigma\left(X_s\right)\right]\right\}ds\right] - f\left(x\right)}{t} \\
&= \lim_{t\downarrow 0}\frac{\mathbb{E}^x\left[\int_0^t\left\{\left(\nabla_X f\right)^T b\left(X_s\right) + \frac{1}{2}Tr\left[\sigma^T\left(X_s\right)\left(H_X f\right)\sigma\left(X_s\right)\right]\right\}ds\right]}{t} \\
&\overset{Fubini}{=} \lim_{t\downarrow 0}\frac{\int_0^t \mathbb{E}^x\left\{\left(\nabla_X f\right)^T b\left(X_s\right) + \frac{1}{2}Tr\left[\sigma^T\left(X_s\right)\left(H_X f\right)\sigma\left(X_s\right)\right]\right\}ds}{t} \\
&= \mathbb{E}^x\left\{\left(\nabla_X f\right)^T b\left(X_t\right) + \frac{1}{2}Tr\left[\sigma^T\left(X_t\right)\left(H_X f\right)\sigma\left(X_t\right)\right]\right\}
\end{aligned}$$

5. Ч.Т.Д.