Задача №1

Расширить свойства аддитивности, строгой аддитивности и субаддитивности меры μ на конечный набор элементов N

Доказательство аддитивности:

1. Пусть $A_1, A_2, ..., A_N \in \Lambda$ - попарно непересекаются множества.
2. Докажем по индукции.
3. База индукции - аддитивность меры: $\mu\left(A_1 \sqcup A_2\right) = \mu\left(A_1\right) + \mu\left(A_2\right)$
4. Предположим $\mu\left(A_1 \sqcup A_2 \sqcup ... \sqcup A_{k-1}\right) = \sum_{i=1}^{N-1} \mu\left(A_i\right)$
5. Пусть $A_1 \sqcup A_2 \sqcup ... \sqcup A_{N-1} = B$. Тогда $\mu\left(A_1 \sqcup A_2 \sqcup ... \sqcup A_{N-1}\right) = \mu\left(B\right)$
6. Поскольку все элементы попарно непересекаются, следовательно $B \cap A_N = \varnothing$
7. Шаг индукции, используя (5): $\mu\left(B \sqcup A_N\right) = \mu\left(B\right) + \mu\left(A_N\right) = \sum_{i=1}^{N-1} \mu\left(A_i\right) + \mu\left(A_N\right) = \sum_{i=1}^{N} \mu\left(A_i\right)$
8. Поэтому $\mu\left(A_1 \sqcup A_2 \sqcup ... \sqcup A_N\right) = \sum_{i=1}^{N} \mu\left(A_i\right)$

Доказательство строгой аддитивности:

1. Пусто

Доказательство субаддитивности:

1. Пусть $A_1, A_2, ..., A_N \in \Lambda$ - элементы сигма алгебры
2. Докажем субаддитивность по индукции
3. База индукции - субаддитивность меры: $\mu\left(A_1 \cup A_2\right) \leq \mu\left(A_1\right) + \mu\left(A_2\right)$
4. Предположим $\mu\left(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{N-1}\right) \leq \sum_{i=1}^{N-1} \mu\left(A_i\right)$
5. Пусть $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{N-1} = B$, тогда $\mu\left(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{N-1}\right) = \mu\left(B\right)$
6. Шаг индукции. Из субаддитивности понятно, что $\mu\left(B \cup A_N\right) \leq \mu\left(B\right) + \mu\left(A_N\right) = \sum_{i=1}^{N-1} \mu\left(A_i\right) + \mu\left(A_N\right) = \sum_{i=1}^{N} \mu\left(A_i\right)$
7. Ч.Т.Д.

Задача №2

Пусть $(X, \mathcal{A})$ - измеримо. Пусть $x \in A \in \mathcal{A}$ - произвольная точка из элемента сигма алгебры $\mathcal{A}$

- Доказать, что $\delta\left(A\right) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$ - мера

Доказательство:

1. M_0 выполнено автоматически

2. Пусть $A = \varnothing$. Это значит, что не существует точки x, такой что $x \in \varnothing$.

   (a) Поэтому $x \notin \varnothing$. Это в свою очередь означает, что $\delta(\varnothing) = 0$. Поэтому выполнено M_1.

3. Пусть $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ - попарно непересекающиеся множества.

   (a) Пусть $k \in \mathbb{N}$ произвольный. Пусть $x \in A_k$. Если $x \in A_k$, следовательно $x \in \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. По определению δ это означает, что $\delta\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1$.

   (b) Если $x \in A_k$ и множества $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ попарно не пересекаются, то не существует другого множества в котором лежит x.

   (c) Из (b) следует, что $\sum_{n\in\mathbb{N}} \delta(A_n) = 1$

   (d) Это означает, что выполнено M_2.

- Доказать, что $\gamma(A) := \begin{cases} 0 & A - \text{счетно} \\ 1 & A - \text{несчетно} \end{cases}$ - мера

Доказательство:

- Пусто

Доказательство:

1. M_0 выполнено автоматически.

2. Пусть $A = \varnothing$. Воспользуемся тем фактом, что $|\varnothing| = 0$. Следовательно, выполнено M_1

3. Пусть $(A_n)_{n\in N} \in \mathcal{A}$ - попарно непересекающиеся множества.

4. Пусть $\forall n \in N$ A_n - конечны.

   (a) Рассмотрим $A = \bigsqcup_{n\in N} A_n$

   (b) По свойству мощности объединения: $|A| = \left|\bigsqcup_{n\in N} A_n\right| = \sum_{n\in N} |A_n|$. Это в точности, тоже самое что и M_2

5. Пусть $\exists k \in N$ такой, что $|A_k| = \infty$ и также $\forall n \neq k, n \in N, |A_k| < \infty$

   (a) По свойству мощности объединения:$|A| = \left|\bigsqcup_{n\in N} A_n\right| = \sum_{n\in N} |A_n| = \infty$. Это в точности, тоже самое что и M_2

   (b) Если рассмотреть два и более бесконечных по мощности множеств, то результат будет аналогичен (a)

6. Из (1) (2) и (5) верно, что$|A|$ - мера

7. Ч.Т.Д

- Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_1, ...\}$ - счетно, $(p_n)_{n\in N}$- последовательность множеств $p_n \in [0,1]$, такая что $\sum_{n\in N} p_n = 1$. Показать, что на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ ф-я множества $\mathbb{P}(A) = \sum_{n\in N} p_n \delta(A)$ - мера

Доказательство:

1. Известен тот факт, что $\mathcal{P}(\Omega)$ - сигма алгебра. Следовательно выполнено M_0
2. Пусть $A = \varnothing$. Поскольку $\delta(A)$ - мера, следовательно $\delta(\varnothing) = 0$. Таким образом $\mathbb{P}(\varnothing) = \sum_{n\in N} p_n \delta(\varnothing) = 0$. Поэтому выполнено M_1
3. Пусть $(A_k)_{k\in N} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ последовательность попарно непересекающихся множеств.
   (a) Поскольку $\delta(A)$ - мера, отсюда следует, что $\delta\left(\bigsqcup_{n\in N} A_n\right) = \sum_{n\in N} \delta(A_n)$.
   (b) Подставляя (a) в $\mathbb{P}(A)$ получим, что $\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{k\in N} A_n\right) = \sum_{n\in N}\sum_{k\in N} p_n \delta(A_k)$
   (c) Поскольку $\forall n \in \mathbb{N}\ p_n \geq 0$ по условию и $\forall k \in \mathbb{N}\ \delta(A_k) \geq 0$ по определению δ, то $\forall n, k \in \mathbb{N}\ p_n\delta(A_k) \geq 0$
   (d) Тогда по теореме Фубини-Тонелли: $\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{k\in N} A_n\right) = \sum_{n\in N}\sum_{k\in N} p_n\delta(A_k) \overset{def}{=} \sum_{k\in N}\sum_{n\in N} p_n\delta(A_k)$. А это в точности, тоже самое, что и M_2
4. Из (1) (2) и (3) $\mathbb{P}(A) = \sum_{n\in N} p_n\delta(A)$ - мера
5. Ч.Т.Д.

Задача №3

Является ли функция из примера 4.5 мерой μ на измеримом пространстве $(R, B(R))$. Является ли такая функция мерой на $(Q, Q \cap B(R))$?

Доказательство 1

1. Нет, такая функция не является мерой.
2. Предположим дано измеримое пространство $(R, B(R))$
3. Поскольку Борелевская система множеств $B(R)$ содержит в себе полуоткрытые интервалы, то в него включен интервал $A = (-\infty, a]$ с произвольным $a \in R$
4. Из $\sum_2$ верно, что$A^c = (a, \infty) \in B(R)$
5. Рассмотрим свойство M_2. $\mu(A \cup A^c) = \mu(R) = 1$. Однако $\mu(A) + \mu(A^c) = 1 + 1 = 2$
6. Поскольку $1 \neq 2$, то это контрпример

Доказательство 2

1. Пусто

Задача №6

Пусть $(X, \mathcal{A})$ - измеримо. Приведите пример сигма-финитной меры μ, которая сопоставляет каждому полуоткрытому интервалу $[a, b)$ такому, что $b - a > 2$ конечную массу.

Решение:

1. Мера Лебега на R σ-конечна. $R = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} [-(i+1), i)$ - единица.$\forall i \in N\ \lambda[-(i+1), i) = 2i + 1$ - конечна. Также выполнено $\forall i \in \mathbb{N},\ 2i + 1 > 2$

Задача №7

Пусть $(X, \mathcal{A})$ - измеримо.

- Пусть μ и ν - меры на $(X, \mathcal{A})$. Показать, что функция множеств $\rho(A) := a\mu(A) + b\nu(A)$, $A \in \mathcal{A}$ для $a, b \geq 0$ является мерой

Доказательство:

1. Свойство M_0 выполняется автоматически, поскольку $\mathcal{A}$ - сигма-алгебра
2. Пусть $A = \varnothing$. Поскольку μ и ν - меры, следовательно $\rho(\varnothing) := a\mu(\varnothing) + b\nu(\varnothing) = a\mu(\varnothing) + b\nu(\varnothing) = 0$. Поэтому выполняется свойство M_2
3. Пусть $(A_n)_{n\in N} \subset \mathcal{A}$. Поскольку μ и ν - меры, то $\rho\left(\bigsqcup_{i\in N} A_i\right) = a\mu\left(\bigsqcup_{i\in N} A_i\right) + b\nu\left(\bigsqcup_{i\in N} A_i\right) = a\sum_{i\in N}\mu(A_i) + b\sum_{i\in N}\nu(A_i) = \sum_{i\in N}\left[a\mu(A_i) + b\nu(A_i)\right] \overset{def}{=} \sum_{i\in N}\rho(A_i)$. Поэтому выполняется свойство M_2

- Пусть $\mu_1, \mu_2, ...$ - счетно много мер на измеримом $(X, \mathcal{A})$. Пусть $(\alpha_i)_{i\in N}$ - последовательность положительных чисел. Показать, следующая ф-я множеств мера: $\mu(A) := \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\mu_i(A)$ $A \in \mathcal{A}$

Доказательство:

1. Пусть $\mu_1, \mu_2, ...$ - счетно много мер на измеримом $(X, \mathcal{A})$
2. Пусть $(\alpha_i)_{i\in N}$ - последовательность положительных чисел.
3. Мы покажем, что $\mu(A) := \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\mu_i(A)$ $A \in \mathcal{A}$ удовлетворяет свойствам $M_0 - M_2$
4. μ -функция множества и $\mu_1, \mu_2, ...$ определены на одной и той же системе множеств. Поскольку $\mu_1, \mu_2, ...$ меры, а меры определены на сигма алгебре, следовательно μ также определена на сигма алгебре$\mathcal{A}$. Поэтому для μ выполнено M_0
5. Пусть $A = \varnothing$. Поскольку $\mu_1, \mu_2, ...$ меры, следовательно $\mu(\varnothing) := \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\mu_i(\varnothing) = 0$. Поэтому для μ выполнено M_1
6. Докажем сигма-аддитивностьм меры.
   (a) Поскольку $\forall i \in N, \mu_i(A) \geq 0$ и $\forall i \in N, \alpha_i > 0$ - следовательно $\forall_i \alpha_i\mu_i(A) \geq 0$
   (b) Рассмотрим $\bigcup_{n\in N} A_n \subset \mathcal{A}$.
   (c) Из (b) следует, что $\mu\left(\bigcup_{n\in N} A_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\mu_i\left(\bigcup_{n\in N} A_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\sum_{n=1}^{\infty}\mu_i(A_n) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_i\mu_i(A_n)$
   (d) Поскольку выполнено (a), то по теореме Тонелли-Фубини следует, что $\mu\left(\bigcup_{n\in N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\mu_i(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_i\mu(A_n)$
   (e) Следовательно выполнено M_2
7. Тогда из (4) (5) и (6.e) следует, что μ - мера.
8. Ч.Т.Д.

Задача №8

Пусть $(X, \mathcal{A})$ - измеримо. Пусть $\mu : A \to [0, \infty]$ конечно аддитивная и субаддитивная ф-я множества. Показать, что μ сигма-аддитивна.
Доказательство:

1. Пусть $(X, \mathcal{A})$ - измеримо. Пусть $\mu : A \to [0, \infty]$ (конечно аддитивна и субаддитивна)
2. Пусть $(A_n)_{n \in N} \subset \mathcal{A}$ - последовательность множеств, таких, что $A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n$
3. Пусть $F_1 = A_1, F_2 = A_2 - A_1, ..., F_n = A_n - A_{n-1}$, поэтому $\bigsqcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.
4. Докажем, что $\forall i, j \in N, j < i$ $F_i \cap F_j = \varnothing$
   (a) Можно заметить, что$F_i \overset{(3)}{=} (A_i - A_{i-1}) = \left(A_i \cap \overline{A_{i-1}}\right) \overset{(2)}{=} \left(A_i \cap \overline{\bigcup_{n=1}^{i-1} A_n}\right)$
   (b) Поскольку $j < i$, следовательно $A_j \subset \bigcup_{n=1}^{i-1} A_n$.
   (c) Если $A \subset B$, то $\overline{A} \supset \overline{B}$. Тогда (b) имплицирует за собой: $\overline{A_j} \supset \overline{\bigcup_{n=1}^{i-1} A_n}$.
   (d) Известно, что если $A \subset B$, то $A \cap B = A$. Тогда (c) имплицирует за собой: $\overline{A_j} \cap \overline{\bigcup_{n=1}^{i-1} A_n} = \overline{\bigcup_{n=1}^{i-1} A_n}$.
   (e) Воспользовавшись свойством (d) можно изменить (a) так: $F_i = A_i \cap \overline{\bigcup_{n=1}^{i-1} A_n} \cap \overline{A_j}$
   (f) Из определения (3) следует, что $F_i \cap F_j \subset F_i \cap A_j$
   (g) Подставляя (e) в RHS (f) получим, что $F_i \cap A_j = A_i \cap \overline{\bigcup_{n=1}^{i-1} A_n} \cap \overline{A_j} \cap A_j = \varnothing$
   (h) Поскольку $F_i \cap F_j \subset F_i \cap A_j$ и $F_i \cap A_j = \varnothing$, то $F_i \cap F_j = \varnothing$
5. Из предельного перехода в (3) можно утверждать, что: $\bigsqcup_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.
6. Запишем LHS (5) по свойству субаддитивности: $\mu\left(\bigsqcup_{i \in N} F_i\right) \leq \sum_{i \in N} \mu(F_i)$
7. По индукции из аддитивности можно показать, что: $\mu\left(\bigsqcup_{i \in N} F_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(F_i) + \mu\left(\bigsqcup_{i=n+1}^{\infty} F_i\right)$
8. Тогда из (7) очевидно, что $\mu\left(\bigsqcup_{i \in N} F_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu(F_i)$.
9. Используя передельный переход можно представить, неравенство (8) как $\mu\left(\bigsqcup_{i \in N} F_i\right) \geq \underset{n \to \infty}{lim} \sum_{i=1}^{n} \mu(F_i) = \sum_{i \in N} \mu(F_i)$.
10. Тогда из (6) и (9) $\mu\left(\bigsqcup_{i \in N} F_i\right) = \sum_{i \in N} \mu(F_i)$.
11. Ч.Т.Д.

Задача №9

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$- пространство с мерой. Пусть $F \in \mathcal{A}$. Показать, что $\mathcal{A} \ni A \mapsto \mu(A \cap F)$ тоже мера.
Доказательство:

1. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$- пространство с мерой.
2. Пусть $F \in \mathcal{A}$.
3. Из (1) следует, что $\mathcal{A}$ - сигма алгебра. Поэтому выполненоM_0.
4. Пусть $A = \varnothing$. Тогда $f(\varnothing) = \mu(\varnothing \cap F) = \mu(\varnothing) = 0$. Поэтому выполнено$M_1$.

5. Пусть $(A_n)_{n\in N}$ - последовательность попарно непересекающихся множеств. Тогда $f\left(\bigsqcup_{n\in N} A_n\right) = \mu\left(\left(\bigsqcup_{n\in N} A_n\right)\cap F\right)$ $\mu\left(\bigsqcup_{n\in N}(A_n\cap F)\right) = \sum_{i\in N}\mu(A_n\cap F) = \sum_{i\in N} f(A_n)$ Поэтому выполненоM_2

Задача №10

Пусть $(X,\mathcal{A},\mathbb{P})$ - вероятностное пространство. Пусть $(A_n)_{n\in N}\subset\mathcal{A}$ - последовательность множеств таких, что $\mathbb{P}(A_n)=1$ для всех $n\in N$. Показать, что $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in N} A_n\right)=1$
Доказательство:

1. Пусть $(X,\mathcal{A},\mathbb{P})$ - вероятностное пространство.
2. Пусть $(A_n)_{n\in N}\subset\mathcal{A}$ - последовательность множеств таких, что $\mathbb{P}(A_n)=1$ для всех $n\in N$
3. Из (2) следует, что $\forall n\in N, A_n = X$
4. Из (3) следует, что $\bigcap_{n\in N} A_n = X$
5. Из (4) следует, что $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in N} A_n\right)=1$
6. Ч.Т.Д.

Задача №11

Пусть $(X,\mathcal{A},\mu)$ - пространство с финитной мерой. Пусть $(A_n)_{n\in N}, (B_n)_{n\in N}\subset\mathcal{A}$ так, что $\forall n\in N\ A_n\supset B_n$. Показать, что $\mu\left(\bigcup_{i\in N} A_i\right)-\mu\left(\bigcup_{i\in N} B_i\right)\le\sum_{n\in N}(\mu(A_n)-\mu(B_n))$
Доказательство:

1. Пусть $(X,\mathcal{A},\mu)$ - пространство с финитной мерой
2. Пусть $(A_n)_{n\in N}, (B_n)_{n\in N}\subset\mathcal{A}$ так, что $\forall n\in N\ A_n\supset B_n$
3. Покажем, что $\bigcup_i A_i - \bigcup_i B_i \subset \bigcup_i (A_i - B_i)$
   (a) Пусть $x\in\bigcup_i A_i - \bigcup_i B_i$. Это значит что существует $i\in N$ так, что $x\in A_i$ и для каждого $k\in N$ $x\notin B_k$
   (b) Поскольку существует $i\in N$, обозначим его как i_0. Тогда $x\in A_{i_0}$.
   (c) Если $x\in A_{i_0}$ то понятно, что $x\in\bigcup_i A_i$.
   (d) Поскольку не существует такого $k\in N$, что $x\in B_k$, то верно следующее: $x\in\bigcup_i(A_i-B_k)$.
   (e) Поэтому $\bigcup_i A_i - \bigcup_i B_i\subset\bigcup_i(A_i-B_i)$
4. Из монотонности меры $\mu\left[\bigcup_i A_i - \bigcup_i B_i\right]\le\mu\left[\bigcup_i(A_i-B_i)\right]$
5. Докажем, что если $\forall n\in N\ A_n\supset B_n$, то $\bigcup_n A_n\supset\bigcup_n B_n$
   (a) Поскольку $\exists n\in N, x\in B_n$, то мы можем зафиксировать $n_0\in N$, такой что $x\in B_{n_0}$
   (b) Поскольку $x\in B_{n_0}$ и $\forall n\in N\ A_n\supset B_n$, следовательно $x\in A_{n_0}$. Поэтому $x\in\bigcup_n A_n$
   (c) n_0 был произвольный. Поэтому $\bigcup_n A_n\supset\bigcup_n B_n$
6. Посольку мера μ - финитна и $\bigcup_n A_n\supset\bigcup_n B_n$, следовательно $\mu\left[\bigcup_i A_i-\bigcup_i B_i\right]=\mu\left[\bigcup_i A_i\right]-\mu\left[\bigcup_i B_i\right]\le\mu\left[\bigcup_i(A_i-B_i)\right]$

7. Из субаддитивности меры и (4.3-iii), следует, что $\mu\left[\bigcup_i (A_i - B_i)\right] \leq \sum_{n\in N} (\mu(A_n) - \mu(B_n))$

8. Комбинируя (6) и (7) получим $\mu\left(\bigcup_{i\in N} A_i\right) - \mu\left(\bigcup_{i\in N} B_i\right) \leq \sum_{n\in N} (\mu(A_n) - \mu(B_n))$

9. Ч.Т.Д.

Задача №12

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - пространство с мерой. $N \in \mathcal{A}$ называют нуль-множеством, тогда и только тогда, когда $\mu(N) = 0$. Доказать, что семейство таких множеств $\mathcal{N}_\mu$ отвечает свойствам:

1. $\varnothing \in \mathcal{N}_\mu$

2. Если $N \in \mathcal{N}_\mu$,$M \in \mathcal{A}$ и $M \subset N$, тогда $M \in \mathcal{N}_\mu$

3. Если $(N_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{N}_\mu$, тогда $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n \subset \mathcal{N}_\mu$

Доказательство 1:

1. Пустое множество всегда нуль-множество по M_1

2. Ч.Т.Д.

Доказательство 2:

1. Пусть $N \in \mathcal{N}_\mu$, $M \in \mathcal{A}$ и $M \subset N$.

2. По определению, $\mu(N) = 0$

3. Из монотонности меры $M \subset N \implies \mu(M) \leq \mu(N) = 0$.

4. Поскольку мера нестрого положительна и верно (3), следовательно $\mu(M) = 0$. Это в свою очередь означает, что $M \in \mathcal{N}_\mu$

5. Ч.Т.Д.

Доказательство 3:

1. Пусть $(N_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{N}_\mu$

2. Воспользуемся свойством сигма-субаддитивности меры. Тогда $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(N_n)$

3. Из (1) следует, что $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(N_n) = 0$

4. Поскольку мера положительна, то $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n\right) = 0$. Это в свою очередь означает, что $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n \subset \mathcal{N}_\mu$

5. Ч.Т.Д.

Задача №13

- Пусть λ - одномерная мера Лебега. Показать, что для $x \in R$ множество $\{x\}$ - Борелевское множество, где $\lambda\{x\} = 0$

Доказательство:

1. Пусть $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ - Борелевская сигма-алгебра.
2. Поскольку сигма алгебра замкнута относительно счетных пересечений, следовательно $\{x\} = \bigcap_{k \in N} \left[x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k}\right)$ тоже элемент $\mathcal{B}(\mathbb{R})$
3. Рассмотрим последовательность интервалов $k \in \mathbb{N} \left[x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k}\right)$, покрывающих произвольный синглетон $\{x\}$ Такая последовательность множеств непрерывна снизу и конечна.
4. Тогда из (1), воспользовавшись (vii), следует $\underset{k\to\infty}{lim} \lambda \left[x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k}\right) = \underset{k\to\infty}{lim} \left[x + \frac{1}{k} - x + \frac{1}{k}\right] = \underset{k\to\infty}{lim} \frac{2}{k} = 0$

- Показать, что $\mathbb{Q}$ - Борелевское множество и $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$ (Используя тот, факт, что $\lambda\{x\} = 0$)

Доказательство:

1. Можно представить рациональные числа как объединение синглетонов: $\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{q_n\}$.
2. Воспользуемся свойством сигма-аддитивности меры: $\lambda\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{q_n\}\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda\{q_n\}$
3. Мы уже показали, что $\lambda\{x\} = 0$. Поэтому $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda\{q_n\} = 0$
4. Ч.Т.Д.

- Показать, что $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$, используя $C(\epsilon) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [q_n - \epsilon 2^{-n}, q_n + \epsilon 2^{-n})$, где q_n- нумерация $\mathbb{Q}$

Доказательство:

1. Пусть $C(\epsilon) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [q_n - \epsilon 2^{-n}, q_n + \epsilon 2^{-n})$, где $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$- нумерация $\mathbb{Q}$
2. Можно увидеть, что $\lambda[C(\epsilon)] = \lambda\left[\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [q_n - \epsilon 2^{-n}, q_n + \epsilon 2^{-n})\right] \overset{\sigma-add.}{=} 2\sum_{n \in \mathbb{N}} \epsilon \frac{1}{2^n}$
3. Поскольку $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, то по сумме геометрической прогрессии: $2\sum_{n \in \mathbb{N}} \epsilon 2^{-n} = 2\epsilon \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}}$
4. Тогда $\underset{\epsilon\to 0}{lim} 2\epsilon \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 0$
5. Ч.Т.Д

- Показать, что несчетное объединение нуль множеств не является нуль множеством.

Доказательство:

1. Рассмотрим несчетное объединение синглетонов $A = \bigcup_{0 \le x \le 1} \{x\}$
2. Легко видеть, что $\bigcup_{0 \le x \le 1} \{x\} = [0, 1]$
3. Поэтому верно следующее: $\lambda\left(\bigcup_{0 \le x \le 1} \{x\}\right) = \lambda[0, 1] = 1 \neq 0$
4. Поэтому $\bigcup_{0 \le x \le 1} \{x\} \notin \mathcal{N}_\mu$
5. Ч.Т.Д

Задача №14

1. Определить все нуль множества для меры $\delta_a + \delta_b$, $a, b \in \mathbb{R}$ на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Решение:

1. Пусть $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ - измеримо
2. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$ - пара точек
3. Пусть $\delta_a + \delta_b$ - мера определенная на $a, b \in \mathbb{R}$
4. Можно видеть, что мера определенная в (3) равна нуль, когда $x \notin \{a\} \wedge x \notin \{b\}$.
5. По аксиоме пары из (4) следует, что $x \in \{a, b\}$
6. Из (5) следует, что нуль множества для меры определенной в (3) это множества $\mathcal{N}_\mu = \{A - \{a, b\} : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$

Задача №15

- Показать, что $\overline{\mathcal{A}} := \{A \cup N : A \in \mathcal{A}, N \subset \mathcal{N}_\mu\}$ – сигма алгебра, такая, что $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}$

Доказательство:

1. Пусть $A = \varnothing \in \mathcal{A}$ и $N = \varnothing \in \mathcal{N}_\mu$. Поскольку $A \cup N \in \overline{\mathcal{A}}$ и $A \cup N = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$, следовательно $\varnothing \in \overline{\mathcal{A}}$. Поэтому выполнено $\sum_1$
2. Пусть $A \cup N \in \overline{\mathcal{A}}$. Рассмотрим дополнение $X - (A \cup N)$
   (a) Воспользуемся стандартным свойством $X - (A \cup N) = X \cap (A \cup N)^c$
   (b) По закону Де Моргана верно, что $X - (A \cup N) = X \cap (A^c \cap N^c)$
   (c) Можно представить (b) как $X \cap (A^c \cap N^c) = (X \cap A^c) \cap (X \cap N^c)$. Тогда $X - (A \cup N) = (X - A) \cap (X - N)$
   (d) Из (c) можно придти к тому, что $X - (A \cup N) = (X - A) \cap [(X - F) \cup (F - N)]$
   (e) Тогда по дистрибутивности $X - (A \cup N) = [(X - A) \cap (X - F)] \cup [(X - A) \cap (F - N)]$
   (f) Сигма алгебра замкнута относительно пересечения и разности, следовательно $(X - A) \cap (X - F) \in \overline{\mathcal{A}}$
   (g) Поскольку $(X - A) \cap (F - N) \subset X \cap F$, следовательно $(X - A) \cap (F - N) \subset F \in \overline{\mathcal{A}}$
3. Пусть $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$. и $(M_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (N_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{N}_\mu$
   (a) Из дистрибутивности, следует, что $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cup M_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (M_n)$
   (b) По $\sum_3$ верно, что $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n) \in \mathcal{A}$.
   (c) Поскольку $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (M_n) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (N_n)_{n \in \mathbb{N}}$, а $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (N_n)_{n \in \mathbb{N}}\right) = 0$. Из монотонности меры, следует, что $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (M_n) \in \mathcal{N}_\mu$
   (d) Поэтому $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cup M_n) \in \overline{\mathcal{A}}$
4. Тогда из (1) (2) и (3) следует, что $\overline{\mathcal{A}}$ - сигма-алгебра.

- Показать, что $\overline{\mu}(A)$ - мера на $\overline{\mathcal{A}}$ и $\overline{\mu}(A) = \mu(A)$ для всех $A \in \mathcal{A}$

Доказательство

1. Пусто