Задача № 1

Показать напрямую, что условие (i) леммы 8.1 эквивалентно одному из условий (ii), (iii) или (iv)

Доказательство:

1. Пусть $\forall a \in \mathbb{R}$или $\forall a \in \mathbb{Q}$ $\{u \geq a\} \in \mathcal{A}$. По определению означает, что $\{u \geq a\} := \{x \in X : u(x) \geq a\} = \{x \in X : u(x) \in [a, \infty)\} = u^{-1}[a, \infty)$

2. Поскольку $u : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ поскольку $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ сигма алгебры, то $\{x \in X : u(x) \in (-\infty, a)\} := \{u < a\}$. А это в точности (iv)

Задача № 2

Проверить, что $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ определенная в (8.5) - сигма алгебра. Показать, что $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cap \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$

Доказательство:

1. Уравнение (8.5) говорит, что $B^* \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ тогда и только тогда, когда $B^* = B \cup S$ для произвольного $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ и $S \in \mathcal{S} := \{\{\varnothing\}, \{+\infty\}, \{-\infty\}, \{-\infty, +\infty\}\}$. Чтобы доказать, что $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ - сигма алгебра, мы покажем, что выполняются $\sum_1 - \sum_3$

2. По определению.$B^* = \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. И это свойство $\sum_1$

3. Предположим $B \cup S \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Докажем, что дополнение $\overline{B \cup S} = \overline{B} \cap \overline{S} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

   (a) Пусть $S = \{\varnothing\}$. Тогда $S^c = [-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Отсюда следует, что $\overline{B} \cap (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}) = \left(\overline{B} \cap \mathbb{R}\right) \cup \left(\overline{B} \cap \{-\infty, +\infty\}\right) = \overline{B} \cup \overline{B} = \overline{B} \cup \{\varnothing\} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$

   (b) Пусть $S = \{-\infty\}$. Тогда $S^c = (-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Отсюда следует, что $\overline{B} \cap (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}) = \left(\overline{B} \cap \mathbb{R}\right) \cup \left(\overline{B} \cap \{+\infty\}\right) = \overline{B} \cup \{\varnothing\} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Аналогично и для $S = \{+\infty\}$

   (c) Пусть $S = \{-\infty, +\infty\}$. Тогда $S^c = \mathbb{R}$. Отсюда следует, что $\overline{B} \cap \mathbb{R} = \overline{B} \cup \{\varnothing\} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$

   (d) Из (a) (b) и (c) следует, что выполнено $\sum_2$

4. Пусть $(B_n \cup S_n)_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Тогда $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \cup S_n = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n\right)$. Поскольку Борелевская сигма алгебра замкнута относительно счетного объединения и легко видеть, что $\mathcal{S}$ - также замкнута относительно счетного объединения, следовательно $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \cup S_n \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Что в свою очередь означает, что выполнено $\sum_3$

Далее мы покажем, что $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cap \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

1. Легко заметить $\mathbb{R} \cap \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) := \left\{\mathbb{R} \cap B^* : B^* \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\right\}$. Легко заметить, что $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ след сигма алгебры $\mathbb{R} \cap \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Тогда из (3.3 iv) $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ - сигма алгебра

Задача № 3

- Пусть $(X, \mathcal{A})$ - измеримо. Пусть $f, g : X \to \mathbb{R}$ - измеримые функции. Показать, что для всех $A \in \mathcal{A}$ функция $h(x) := f(x)$, если $x \in A$ и $h(x) := g(x)$, если $x \notin A$, измеримая функция (речь про $h(x)$)

Доказательство:

1. Представим искомую функцию как $h(x) = f(x) 1_A(x) + g(x) 1_{A^c}(x)$. Поскольку следствие 8.11 также выполняется для $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$, то fg и $f + g$ - измеримы. Следовательно $h(x)$ - измеримо.

- Пусть $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$последовательность измеримых функций. Пусть $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ так что $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$. Предположим, что $f_n|_{A_n\cap A_k} = f_k|_{A_n\cap A_k}$ для всех $k, n \in \mathbb{N}$ и множество $f(x) := f_n(x)$, если $x \in A_n$. Показать, что $f : X \to \mathbb{R}$ измеримо.

Доказательство:

1. Пусто

Задача № 4

Доказательство:

1. Пусто

Задача № 5

Показать, что если $f \in \mathcal{E}$, то $f^{\pm} \in \mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ - множество простых функций.

Доказательство:

1. Поскольку $f \in \mathcal{E}$, то $f(x) = \sum_{m=1}^{M} y_m 1_{A_m}(x)$, где $M \in \mathbb{N}$, $y_m \in \mathbb{R}$ $A_m \in \mathcal{A}$ - попарно непересекаются.
2. Мы можем извлечь коэффициенты y_m из $f(x)$ следующим образом.
3. $f^{+}(x) = \sum_{m=1}^{M} y_m^{+} 1_{A_m}(x)$, где $y_m^{+} = y_m$, для всех $y_m \geq 0$, в ином случае $y_m^{+} = 0$
4. $f^{-}(x) = \sum_{m=1}^{M} y_m^{-} 1_{A_m}(x)$, где $y_m^{-} = y_m$, для всех $y_m \leq 0$, в ином случае $y_m^{-} = 0$
5. Легко заметить, что $f^{\pm} \in \mathcal{E}$
6. Ч.Т.Д.

Задача № 6

Показать, что $f = f^{+} - f^{-}$ и $|f| = f^{+} + f^{-}$

1. По определению $f(x) = \sum_{m=1}^{M} y_m 1_{A_m}(x)$, где $M \in \mathbb{N}$, $y_m \in \mathbb{R}$ $A_m \in \mathcal{A}$ - попарно непересекаются.
2. По определению $f^{+}(x) = \sum_{m=1}^{M} max\{y_m, 0\} 1_{A_m}(x)$ и $f^{-}(x) = -\sum_{m=1}^{M} min\{y_m, 0\} 1_{A_m}(x)$
3. Из 2 следует, что $f^{+}(x) - f^{-}(x) = \sum_{m=1}^{M} (max\{y_m, 0\} + min\{y_m, 0\}) 1_{A_m}(x)$
4. Покажем, что $max\{y_m, 0\} + min\{y_m, 0\} = y_m$
   (a) По определению $max\{y_m, 0\} = \left\{\begin{array}{c} y_m, y_m > 0 \\ 0, y_m \leq 0 \end{array}\right.$ и $min\{y_m, 0\} = \left\{\begin{array}{c} 0, y_m > 0 \\ y_m, y_m \leq 0 \end{array}\right.$. Тогда $max\{y_m, 0\} + min\{y_m, 0\} = \left\{\begin{array}{c} y_m, y_m > 0 \\ y_m, y_m \leq 0 \end{array}\right.$. Поэтому верно (4)
5. Из (3) и (4) следует, что $f^{+}(x) - f^{-}(x) = \sum_{m=1}^{M} y_m 1_{A_m}(x)$ а это тоже самое, что и (1)
6. Покажем, что $max\{y_m, 0\} - min\{y_m, 0\} = |y_m|$

(a) По определению $max\{y_m,0\} = \begin{cases} y_m, y_m > 0 \\ 0, y_m \le 0 \end{cases}$ и $-min\{y_m,0\} = \begin{cases} 0, y_m > 0 \\ -y_m, y_m \le 0 \end{cases}$. Тогда $max\{y_m,0\} - min\{y_m,0\} = \begin{cases} y_m, y_m > 0 \\ -y_m, y_m \le 0 \end{cases}$. Поэтому верно (6)

7. Из (6) следует, что $f^+(x) + f^-(x) = \sum_{m=1}^{M} y_m 1_{A_m}(x)$ а это тоже самое, что $|f| = f^+ + f^-$

Задача № 7

Показать, что каждая непрерывная функция $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{B}(\mathbb{R})/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ измерима
Доказательство:

1. Все непрерывные отображения (Пример 7.3) $\mathcal{B}(\mathbb{R})/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ измеримы

Задача № 8

Показать, что $x \mapsto max\{x,0\}$ и $x \mapsto min\{x,0\}$ непрерывны и используя пример 7.3 показать что они измеримые функции $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Заключить, что на любом измеримом пространстве $(X, \mathcal{A})$ положительные и отрицательные компоненты $u^{\pm}$ измеримой функции $u : X \to \mathbb{R}$ измеримы.
Доказательство:

1. Пусть $x \mapsto max\{x,0\}$. Мы представим искомую функцию как $max\{x,0\} = \frac{1}{2}(x + |x|)$.
2. Чтобы доказать, что функция непрерывна, необходимо доказать, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, такой что $|x - y| < \delta$ имплицирует за собой $\left|\frac{1}{2}(x + |x|) - \frac{1}{2}(y + |y|)\right| < \varepsilon$
   (a) Пусть $\delta = \varepsilon$. Тогда$\left|\frac{1}{2}(x - y + |x - y|)\right| = \frac{1}{2}\left|x - y + |x - y|\right| \le \frac{1}{2}|x - y| + \frac{1}{2}|x - y| \le |x - y| < \delta = \varepsilon$.
   (b) Таким образом если $|x - y| < \delta = \varepsilon$, то$|x - y| < \varepsilon$
   (c) Поэтому $x \mapsto max\{x,0\}$ непрерывная функция
   (d) Поскольку $x \mapsto max\{x,0\}$ функция вида $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и непрерывна, то отсюда следует, что она измерима.
3. Пусть $x \mapsto min\{x,0\}$. Мы представим искомую функцию как $min\{x,0\} = \frac{1}{2}(x - |x|)$.
   (a) Пусть $\delta = \varepsilon$. Пусть $|x - y| < \delta$. Поэтому $\frac{1}{2}\left|x - y - |x - y|\right| \le |x - y| < \varepsilon$
   (b) Поэтому $x \mapsto min\{x,0\}$ непрерывна.
   (c) Тогда из (примера 7.3) $x \mapsto min\{x,0\}$ непрерывна
4. Из (2) и (3) следует, что $u^{\pm}$ измеримы.
5. Ч.Т.Д

Задача № 9

- Доказать, что $\{sup_i f_i > \lambda\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{f_i > \lambda\}$

Доказательство:

1. $\{sup_i f_i > \lambda\} \iff \left\{x \in X : \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f_i(x) > \lambda\right\} \iff \left\{x \in X : \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f_i(x) \in (\lambda, \infty)\right\} \iff \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{x \in X : f_i(x) \in (\lambda, \infty)\} \iff \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{f_i > \lambda\}$

- Доказать, что $\{sup_i f_i \geq \lambda\} \supseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{f_i \geq \lambda\}$

Доказательство:

1. Доказывается так же как и предыдущий пример, поскольку $\{sup_i f_i \geq \lambda\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{f_i \geq \lambda\}$ то $\{sup_i f_i \geq \lambda\} \supseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{f_i \geq \lambda\}$

- Доказать, что $\{inf_i f_i > \lambda\} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \{f_i > \lambda\}$

Доказательство:

1. $\{inf_i f_i > \lambda\} \iff \left\{x \in X : \bigcap_{i \in \mathbb{N}} f_i(x) > \lambda\right\} \iff \left\{x \in X : \bigcap_{i \in \mathbb{N}} f_i(x) \in (\lambda, \infty)\right\} \iff \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \{x \in X : f_i(x) \in (\lambda, \infty)\} \iff \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \{f_i > \lambda\}$

- Доказать, что $\{inf_i f_i \geq \lambda\} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \{f_i \geq \lambda\}$

Доказательство:

1. Аналогичо предыдущему примеру

Задача № 10

Проверить, что аппроксимационная последовательность $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ для u в теореме 8.8 состоит из $\sigma(u)$ - измеримых функций.

Доказательство:

1. Пусто

Задача № 11

- Функция u $\mathcal{A}/\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$ измерима тогда и только тогда, когда $u^{\pm}$ $\mathcal{A}/\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$ измеримы

Доказательство:

1. С одной стороны:
   (a) Пусть функция u $\mathcal{A}/\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$ измерима, тогда $u^+ = max\{u, 0\}$. Поскольку $f(x) = c$ измерима и поточечный максимум измерим (Corollary 8.11), то u^+ $\mathcal{A}/\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$ измерима
   (b) Пусть функция u $\mathcal{A}/\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$ измерима, тогда $u^- = max\{u, 0\}$. Поскольку $f(x) = c$ измерима и поточечный максимум измерим (Corollary 8.11), то u^- $\mathcal{A}/\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$ измерима
2. С другой стороны:
   (a) Пусть $u^{\pm}$ $\mathcal{A}/\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$ измеримо. Поскольку $u^+ - u^-$ измеримо (Corollary 8.11), и $u^+ - u^- = u$ то u $\mathcal{A}/\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$ измерима
3. Ч.Т.Д.

- Если $u, v : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}/\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$ измеримые функции, то $\{u < v\}, \{u \leq v\}, \{u = v\}, \{u \neq v\} \in \mathcal{A}$

Доказательство:

1. $\{u < v\} = \{x \in X : u(x) < v(x)\} = \{x \in X : u(x) - v(x) < 0\}$. Поскольку разность измеримых функций измерима, то по лемме 8.1 выполняется условие $\{u < v\}$.Аналогично доказывается $\{u \leq v\}$

2. $\{u = v\} = \{x \in X : u(x) - v(x) = 0\} = \{x \in X : u(x) - v(x) \leq 0\} \cap \{x \in X : u(x) - v(x) \geq 0\}$. И левая и правая часть пересечения измеримы по лемме 8.1, следовательно они измеримы вместе, а это значит что измеримо их пересечение.

3. Поскольку сигма алгебра замкнута относительно дополнения, то $\{u = v\}^C = \{u \neq v\} \in \mathcal{A}$

4. Заметим, что эти функции $\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ измеримы. Поскольку операция $\infty - \infty$ не определена, следовательно не доказано $\{u \leq v\} \in \mathcal{A}$, когда $u, v = \infty$

5. **Пусто**

Задача № 12

Доказательство:

1. Пусто

Задача № 13

Пусть $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дифференцируема. Пояснить, почему u и $u' = du/dx$ - измеримы

Доказательство:

1. Пусть $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дифференцируема. Поскольку u дифференцируема, следовательно она непрерывна. Поскольку она непрерывна, то она $\mathcal{B}(\mathbb{R})/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ измерима по Example 7.3

2. Рассмотрим последовательность функций $u_n(x) = \frac{u\left(x+\frac{1}{n}\right)-u(x)}{1/n}$. Из Corollary 8.11 сумма измеримых функций измерима и произведение измеримо (зная, что $f(x) = n$ измерима). Тогда по Corollary 8.11 $\lim_{n\to\infty} sup u_n(x) = u_n$ - измерима.

3. Ч.Т.Д.

Задача № 14

- Определить сигма алгебру сгенерированную функциями: $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ и $h(x) = |x|$

Решение:

1. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такое что $f : x \mapsto x$. Поскольку $f(x) = x$ непрерывна, следовательно она (по Example 7.3) $\mathcal{B}(\mathbb{R})/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ измерима. Легко заметить, что $\sigma(f) := \mathcal{B}(\mathbb{R})$

2. Пусть $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такое что $g : x \mapsto x^2$. Тогда $g^{-1} : y \mapsto \pm\sqrt{y}$. Таким образом $g^{-1} : \sqrt{(\mathbb{R} \cap [0, \infty))} \cup -\sqrt{(\mathbb{R} \cap [0, \infty))}$

3. По определению 7.5 $\sigma(g_i : i \in \mathcal{A}) := \sigma\left\{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} g_i^{-1}(\mathcal{A}_i)\right\}$.

4. Из (2) и (3) следует, что $\sigma\left(g^{-1}\right) = \sigma\left\{\sqrt{B} \cup \left(-\sqrt{B}\right) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), B \subset [0, \infty)\right\}$

5. Пусть $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такое, что $h : x \mapsto |x|$. Тогда $g^{-1} : y \mapsto |y|$. Таким образом $g^{-1} : (\mathbb{R} \cap [0, \infty)) \cup (\mathbb{R} \cap -[0, \infty))$
6. Из (5) следует, что $\sigma\left(h^{-1}\right) = \sigma\left\{B \cup (-B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), B \subset [0, \infty)\right\}$

- Определить сигма алгебру сгенерированную функциями: $F, G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, где $F(x, y) = x + y$, $G(x, y) = x^2 + y^2$

Задача № 15

Пусть $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ измеримо и $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Показать, что $\{x\} \in \sigma(u)$ для каждого $x \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда u - инъективно
Доказательство:

1. С одной стороны, предположим $\{x\} \in \sigma(u)$ для каждого $x \in \mathbb{R}$
   (a) Рассмотрим произвольный $\{x_0\} \in \sigma(u) := \{x \in \mathbb{R} : u(x) = a\}$.
   (b) Заметим, что прообраз единственный. Это значит, что если бы $\{x_1\} \neq \{x_0\} \in \{x \in \mathbb{R} : u(x) = a\}$, то прообраз синглетоном не был бы.
   (c) Из (b) следует, что если $u(x_1) = u(x_2)$, то $x_1 = x_1$.А это в точности определение инъективной функции
2. С другой стороны, предположим u - инъективно. Это значит, что, если $u(x_1) = u(x_2)$, то $x_1 = x_2$
   (a) Предположим $\{x_1\} := \{x \in \mathbb{R} : u(x) = a\}$, тогда из (2) следует, что если $\{x_2\} := \{x \in \mathbb{R} : u(x) = a\}$, то $\{x_1\} := \{x_2\}$
   (b) Таким образом если отображение $u -$ инъективно,то $\{x\} \in \sigma(u)$
3. Из (1) и (2) следует цель.

Задача № 16

Пусть λ - одномерная мера Лебега. Найти $\lambda \circ u^{-1}$, если $u(x) = |x|$
Решение:

1. Заметим, что $u^{-1}(a, b) = (-b, -a) \cup (a, b)$. Тогда $\lambda \circ u^{-1} = \lambda((-b, -a) \cup (a, b)) = \lambda(-b, -a) + \lambda(a, b) = -a + b + b - a = 2(b - a)$. Тогда $\lambda \circ u^{-1} = 2\lambda((a, b) \cap \mathbb{R})$

Задача № 17

Пусть $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $Q : E \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x^2$ и $\lambda(E \cap \cdot)$

- Доказать, что Q $\mathcal{B}(E) / \mathcal{B}(\mathbb{R})$ - измеримо

Доказательство:

1. Вспомним, что индуцированная сигма алгебра (Аналог примера 3.3 (iv)) представляет собой систему множеств $\mathcal{B}(E) = E \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}) := \{E \cap B : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ с единицей E, где $E \subset \mathbb{R}$.

2. Из (1) следует, что заданы два измеримых пространства $(E, \mathcal{B}(E))$ и $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Чтобы доказать, что $Q : E \to \mathbb{R}$ - измеримо, необходимо доказать, что для произвольного $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $Q^{-1}(B) \in \mathcal{B}(E)$. Мы воспользуемся леммой 7.2, где в качестве генератора рассмотрим систему полуоткрытых интервалов $\mathcal{F} := \{[a, b) : a \leq b\}$

   (a) $Q^{-1}(B) = E \cap \begin{cases} \varnothing, \text{где } a, b < 0 \\ \left(-\sqrt{b}, \sqrt{b}\right) \text{ где } a < 0, b \geq 0 \\ \left(-\sqrt{b}, \sqrt{a}\right] \cup \left[-\sqrt{a}, \sqrt{b}\right) \text{ где } a \geq 0, b \geq 0 \end{cases}$. Все эти множества лежат $\mathcal{B}(E)$ поэтому по лемме 7.2 измеримы.

Задача № 18

Пусть $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - измеримо. Какие из следующих функций измеримы? $u(x-2)$, $e^{u(x)}$, $sin(u(x)+8)$, $u''(x)$ и $sign[u(x-7)]$

Решение для $u(x-2)$:

1. Представим $u(x-2)$ как $(u \circ f)(x)$, где $f(x) = x - 2$

2. Докажем, что $f(x) = x - 2$ непрерывна и, следовательно, измерима (Example 7.3)

   (a) Чтобы показать, что f непрерывна, необходимо доказать, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что если $|x - y| < \delta$, то $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

   (b) Заметим, что $|f(x) - f(y)| = |x - 2 - y + 2| = |x - y|$. Фиксируя $\delta = \varepsilon$, следует цель.

3. Поскольку f и u измеримы, то по теорему 7.4 $(u \circ f)(x)$ измеримо

Решение для $e^{u(x)}$:

1. Известен тот факт, что e^x - непрерывна и, следовательно, измерима. Тогда по теореме 7.4 $(e \circ u)(x)$ измерима

Решение для $sin(u(x)+8)$:

1. Известен тот факт, что константная функция измерима. Тогда по Corollary 8.11 $u(x) + 8$ измеримая функция

2. $sin(x)$ - непрерывная функция:$|sin(x) - sin(y)| = \left|2cos\left(\frac{x+y}{2}\right) sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \leq |x - y| < \varepsilon$ Фиксируя $\delta = \varepsilon$, доказана непрерывность

3. Таким образом из Example 7.3 следует измеримость цели