Задача №1

- Показать, что $\varnothing \in \mathcal{D}$

Доказательство:

1. Из D_1 следует, что $X \in \mathcal{D}$
2. Из D_2 следует, что $X^c = \varnothing \in \mathcal{D}$
3. Ч.Т.Д.

- Показать, что сигма алгебра замкнута относительно объединения попарно непересекающихся множеств

Доказательство:

1. Пусть $A_1, A_2 \in \mathcal{D}$ так, что $A_1 \cap A_2 = \varnothing$
2. Пусть $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$ попарно непересекаются. Поскольку $\varnothing \in \mathcal{D}$, мы можем положить, что $\forall k > 2, A_k = \varnothing$.
3. Из D_3 следует, что $\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \mathcal{D}$
4. Из (2) следует, что $\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 \sqcup A_2 \subset \mathcal{D}$
5. Ч.Т.Д.

- Показать, что любая сигма алгебра - система Дынкина.

Доказательство:

1. $\sum_1$ эквивалентно D_1
2. $\sum_2$ эквивалентно D_2
3. Пусть $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$.
4. Поскольку сигма алгебра замкнута относительно разности, то из посылки (3) можно сформировать последовательность $D_1 = A_1, D_2 = A_2 - A_1, ...D_n = A_n - A_{n-1}$ такую, что $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$.
5. Поскольку $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$, то по равенству из (4) следует, что $\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} D_n \in \mathcal{A}$. Поэтому выполняется D_3
6. Из (1) (2) и (5) следует, что $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$
7. Ч.Т.Д.

Задача №2

- Пусть $X = \{1, 2, 3, ..., 4k-1, 4k\}$ с произвольным $k \in \mathbb{N}$. Показать, что $\mathcal{D} = \{A \subset X : |A| - \text{четно}\}$ - система Дынкина, но не сигма алгебра

Доказательство:

1. Покажем, что при $k \in \mathbb{N}$ $|X| = 4k$ - четно.

(a) Легко видеть, что $|X| = 4k = 2\,(2k) = 2b$. Поскольку $k \in \mathbb{N}$, то по определению четности $|X| = 4k$ - четно.

(b) Поскольку $|X|$ - четно, следовательно $X \in \mathcal{D}$. Поэтому верно D_1

2. Чтобы показать, что система $\mathcal{D}$ замкнута относительно дополнения, необходимо показать, что для каждого четного по мощности $A \in \mathcal{D}$ мощность $A^c \in \mathcal{D}$ также четна

   (a) Рассмотрим произвольный элемент $A \in \mathcal{D}$.

   (b) По определению $\mathcal{D}$ мощность $|A|$ - четна. Положим $|A| = 2n$, $n \in \mathbb{N}$

   (c) Из (1) известно, что $\forall k \in \mathbb{N}, |X| = 2k$ - четно.

   (d) Мощность дополнения можно представить как $|A^c| = |X| - |A| = 2k - 2n = 2\,(k - n)$.

   (e) Поскольку $k - n \in \mathbb{N}$, следовательно $|A^c|$ - четно

   (f) Поэтому $A^c \in \mathcal{D}$. Поэтому верно D_2

3. Рассмотрим последовательность множеств $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$. Положим, что они попарно не пересекаются.

   (a) По определению $\mathcal{D}$ это значит, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ $|A_n|$ - четна.

   (b) По формуле включений и исключений верно, что $\left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right| = \sum_{n\in\mathbb{N}} |A_n|$

   (c) Из (a) следует, что $\left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right| = \sum_{n\in\mathbb{N}} k_n = 2\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} k_n\right)$

   (d) Поскольку для каждого $n \in \mathbb{N}$ $k_n \in \mathbb{N}$, очевидно, что $\sum_{n\in\mathbb{N}} k_n \in \mathbb{N}$. Поэтому $\left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right| \in \mathcal{D}$

   (e) Из (d) следует, что выполнено D_3

4. Покажем, что система Дынкина может не быть сигма алгеброй.

   (a) Пусть $\mathcal{D}$ - сигма алгебра. Пусть $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$ так, что $A_1 = \{1, 2\} \in \mathcal{D}$, $A_2 = \{2, 3\} \in \mathcal{D}$. Очевидно, что оба мощность обоих множеств четна.

   (b) Поскольку сигма алгебра замкнута относительно разности, отсюда следует, что $A = A_1 - A_2 = \{1, 2\} - \{2, 3\} = \{1\}$

   (c) Но мощность синглетона $\{1\}$ нечетна, и это контрпример. Поэтому $\mathcal{D}$ - не сигма алгебра

Задача №3

Пусть $\mathcal{D}$ - система Дынкина. Показать, что для всех $A, B \in \mathcal{D}$ таких, что $A \subset B$, верно следующее $B - A \in \mathcal{D}$
Доказательство:

1. Пусть $\mathcal{D}$ - система Дынкина.

2. Пусть $A, B \in \mathcal{D}$ так, что $A \subset B$

3. Поскольку $\mathcal{D}$ замкнута относительно пересечения, следовательно $A \cap B \in \mathcal{D}$

4. Поскольку $\mathcal{D}$ замкнута относительно дополнения, следовательно $B^c \in \mathcal{D}$

5. Поскольку $(A \cap B) \cap B^c = \varnothing$, из задачи 1 следует, что $(A \cap B) \sqcup B^c \in \mathcal{D}$

6. Поскольку $\mathcal{D}$ замкнута относительно дополнения, следовательно $[(A \cap B) \sqcup B^c]^c \in \mathcal{D}$

7. Покажем, что $[(A \cap B) \sqcup B^c]^c = B - A$

    (a) $[(A \cap B) \sqcup B^c]^c = (A \cap B)^c \cap B$
    (b) $[(A \cap B) \sqcup B^c]^c = (A^c \cup B^c) \cap B$
    (c) $[(A \cap B) \sqcup B^c]^c = (A^c \cap B) \cup (B^c \cap B)$
    (d) $[(A \cap B) \sqcup B^c]^c = B - A$
    (e) Поэтому (7) верно

8. Следовательно $B - A \in \mathcal{D}$

9. Ч.Т.Д.

Задача №4

1. Пусто

Задача №5

- Пусть $A, B \subset X$. Сравните $\delta(\{A, B\})$ и $\sigma(\{A, B\})$

Решение:

1. Пусть $A, B \subset X$, так, что $A \cap B = \varnothing$. Тогда, $\delta(\{A, B\}) = \sigma(\{A, B\}) = \{X, \varnothing, A, A^c, B, B^c, A \sqcup B, (A \sqcup B)^c\}$

2. Пусть $A, B \subset X$, так, что $A \cap B \neq \varnothing$. Тогда, $\delta(\{A, B\}) = \{X, \varnothing, A, A^c, B, B^c\}$. В этом случае $\delta(\{A, B\}) \neq \sigma(\{A, B\})$, поскольку, например, $A \cap B \in \sigma(\{A, B\})$ и $A \cap B \notin \delta(\{A, B\})$

Задача №6

- Показать, что система Дынкина $\mathcal{D}$ - монотонный класс.

Доказательство:

1. Поскольку выполнено D_1, то $X \in \mathcal{D}$

2. D_3' это тоже самое, что MC_1

3. Рассмотрим $(D_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$, такое, что $F_n \uparrow F$

    (a) Из D_2 следует, что взять дополнения для каждого из $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ так, чтобы получить $(D_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$, такое, что $F_n \downarrow F$
    (b) Из D_3' следует, что $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \in \mathcal{D}$
    (c) Из D_2 следует, что $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n} \in \mathcal{D}$
    (d) По закону Де Моргана $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{F_n} \in \mathcal{D}$
    (e) Из D_2 следует, что $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \in \mathcal{D}$

4. Из (1) (2) и (3) следует, что $\mathcal{D}$ - монотонный класс

Задача №7

- Показать, что Теорема 5.7 верна, если $(G_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{G}$ не возрастающая последовательность, а счетная система множеств, такая, что: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n = X$ и $\nu(G_n) = \mu(G_n) < \infty$

Доказательство:

1. Пусть $(X, \sigma(\mathcal{G}))$ - измеримо
2. Пусть $(G_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{G}$ так, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ $G_n = X$
3. Для теоремы 5.7 пункт (i) выполняется, поскольку если $A, B \in \mathcal{G}$ так, что $A = B = X$, то $X \cap X = X \in \mathcal{G}$
4. $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ невозрастающая, поскольку $X \subset X$
5. $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ исчерпывающая $X = G_n \uparrow X$.
6. Поскольку, по условию $\nu(G_n) = \mu(G_n) < \infty$
7. То из (3) (5) и (6) по теореме 5.7 следует, что

Задача №8

Показать, что полуоткрытые интервалы полукольца $\mathcal{F}$ на $\mathbb{R}^n$ замкнуты относительно конечных пересечений
Доказательство:

1. Пусть $\bigtimes_{i=1}^{n} [a_i, b_i) \cap \bigtimes_{i=1}^{n} [a'_i, b'_i)$ - пересечение на $\mathbb{R}^n$ так, что для каждого $i \in \overline{1,n}$ верны неравенства: $a_i \geq b_i$ и $a'_i \geq b'_i$
2. Это так же значит, что для каждого $i \in \overline{1,n}$, координата x_i вектора x удовлетворяет неравенствам: $a_i \leq x_i < b_i$ и $a'_i \leq x_i < b'_i$
3. Чтобы координата для каждого $i \in \overline{1,n}$ x_i , удовлетворяла неравенствам, достаточно, чтобы $max\{a_i, a'_i\} \leq x_i < min\{b_i, b'_i\}$. Это эквивалентно выражению (1)
4. Поэтому, $\bigtimes_{i=1}^{n} [a_i, b_i) \cap \bigtimes_{i=1}^{n} [a'_i, b'_i) = \bigtimes_{i=1}^{n} [max\{a_i, a'_i\}, min\{b_i, b'_i\})$
5. Ч.Т.Д.

Задача №9

Показать, что $tb = \{tb : b \in B\}$ - Борелевское множество, где произвольный элемент $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ и $t > 0$. Более того, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \forall t > 0$ $\lambda^n(tB) = t^n \lambda^n(B)$
Доказательство:

1. Пусто

Задача №11

Пусть $\mathcal{A}_\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{G})$ и $\mathcal{A}_\mathcal{H} = \sigma(\mathcal{H})$ такие, что $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ замкнуты относительно пересечения.$\mathcal{A}_\mathcal{G}$ и $\mathcal{A}_\mathcal{H}$ независимы тогда и только тогда, когда $\forall G \in \sigma(\mathcal{G})$, $\forall H \in \sigma(\mathcal{H})$ $\mathbb{P}(G \cap H) = \mathbb{P}(G)\mathbb{P}(H)$
Доказательство:

1. Пусто

Задача №12

Пусть $\mathcal{G}$ - алгебра Буля (семейство множеств, такое что $X \in \mathcal{G}$, замкнуто относительно конечных пересечений, объединения и дополнения). Пусть $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{G})$, μ - конечная мера на $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Пусть $A \triangle B = (A - B) \sqcup (B - A)$ - симметрическая разность $A, B \subset X$

- Показать, что для каждого $\epsilon > 0$ и $A \in \mathcal{A}$ существует $G \in \mathcal{G}$ такое что $\mu(A \triangle G) < \epsilon$

Доказательство:

1. Пусть $\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{A} : \forall \epsilon > 0 \exists G \in \mathcal{G} : \mu(A \triangle G) < \epsilon\}$. Мы покажем, что $\mathcal{D}$ - система Дынкина.
2. Докажем D_1
   (a) Поскольку $\mathcal{A}$ - сигма-алгебра, следовательно $X \in \mathcal{A}$.
   (b) По условию $G \in \mathcal{G}$
   (c) Из (a) и (b) следует, что $\mu(A \triangle G) = \mu((X - X) \sqcup (X - X)) = \mu(\varnothing \sqcup \varnothing) = \mu(\varnothing) = 0 < \epsilon$. Где $\epsilon > 0$
3. Докажем D_2
   (a) Пусть $A \in \mathcal{A}$, $G \in \mathcal{G}$. Мы докажем, что $\overline{A} \in \mathcal{A}$, $\overline{G} \in \mathcal{G}$, показав, что $\mu\left(\overline{A} \triangle \overline{G}\right) < \epsilon$
   (b) По условию $\mu\left[\overline{A} \triangle \overline{G}\right] = \mu\left[\left(\overline{A} - \overline{G}\right) \sqcup \left(\overline{G} - \overline{A}\right)\right] = \mu\left[\left(\overline{A} \cap G\right) \sqcup \left(\overline{G} \cap A\right)\right] = \mu\left[\left(A \cap \overline{G}\right) \sqcup \left(G \cap \overline{A}\right)\right] = \mu[A \triangle G]$
   (c) Поскольку $\mu\left[\overline{A} \triangle \overline{G}\right] < \epsilon$, из (b) следует, что $\mu[A \triangle G] < \epsilon$
4. Докажем D_3
   (a) Пусто

Задача №13

1. Пусто