Задача № 13.1

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - пространство с конечной мерой и $1 \leq q < p < \infty$

- Показать, что $\|u\|_q \leq \mu(X)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|u\|_p$
- Показать, что $\forall p \geq q \geq 1 \mathcal{L}^p(\mu) \subset \mathcal{L}^q(\mu)$
- Показать, что последовательность Коши в $\mathcal{L}^p$ также является последовательностью Коши в $\mathcal{L}^q$

Доказательство #1

1. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - пространство с конечной мерой и $1 \leq q < p < \infty$
2. Рассмотрим $\|u\|_q^q = \int |u|^q \, d\mu \leq \|u\|_r^q \|1\|_s = \left(\int |u|^{qr} \, d\mu\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int d\mu\right)^{\frac{1}{s}} = \left(\int |u|^{qr} \, d\mu\right)^{\frac{1}{r}} \mu(X)^{\frac{1}{s}}$ из неравенства Гёльдера при $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$
3. Положим $qr = p$ и $\frac{1}{r} = \frac{q}{p}$ и $\frac{1}{s} = 1 - \frac{1}{r} = 1 - \frac{q}{p}$. Тогда $\left(\int |u|^{qr} \, d\mu\right)^{\frac{1}{r}} \mu(X)^{\frac{1}{s}} = \left(\int |u|^p \, d\mu\right)^{\frac{q}{p}} \mu(X)^{1-\frac{q}{p}}$ и выполнено следующее: $\|u\|_q^q \leq \left(\int |u|^p \, d\mu\right)^{\frac{q}{p}} \mu(X)^{1-\frac{q}{p}}$
4. Поскольку $x \mapsto x^{\frac{1}{q}}$ монотонно не убывает, то $\|u\|_q \leq \left(\int |u|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \mu(X)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} = \|u\|_p \, \mu(X)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$
5. Ч.Т.Д.

Доказательство #2

1. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - пространство с конечной мерой и $p \geq q \geq 1$
2. По определению $\mathcal{L}^p(\mu) := \left\{u : X \to \mathbb{R} : u \in \mathcal{M}(\mathcal{A}), \int |u|^p \, d\mu < \infty\right\}$, таким образом нужно показать, что $\forall p \geq q > 1 \int |u|^p \, d\mu < \infty \implies \int |u|^q \, d\mu < \infty$
3. Мы можем представить интеграл$|u|^q$ как
$$\int |u|^q \, d\mu = \int |u|^q \, \mathbb{1}_{\{x \in X : |u| < 1\}} d\mu + \int |u|^q \, \mathbb{1}_{\{x \in X : |u| \geq 1\}} d\mu$$
.
4. Используя неравенство $|u|^q \, \mathbb{1}_{\{x \in X : |u| < 1\}} \leq 1$ по свойству монотонности интеграла выполнено следующее:
$$\int |u|^q \, \mathbb{1}_{\{x \in X : |u| < 1\}} d\mu + \int |u|^q \, \mathbb{1}_{\{x \in X : |u| \geq 1\}} d\mu \leq \mu(X) + \int |u|^q \, \mathbb{1}_{\{x \in X : |u| \geq 1\}} d\mu$$
5. Так как $|u|^q \leq |u|^p$ на множестве $\{x \in X : |u| \geq 1\}$ выполнено неравенство.
$$\int |u|^q \, \mathbb{1}_{\{x \in X : |u| < 1\}} d\mu + \int |u|^q \, \mathbb{1}_{\{x \in X : |u| \geq 1\}} d\mu = \int |u|^q \, d\mu \leq \mu(X) + \int |u|^p \, \mathbb{1}_{\{x \in X : |u| \geq 1\}} d\mu < \infty$$
когда $\mu(X) < \infty$.
6. Ч.Т.Д.

Доказательство #3

1. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - пространство с конечной мерой и $p \geq q \geq 1$
2. Предположим, что дана последовательность Коши в $\mathcal{L}^p$. По определению это означает, что $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n, k \in \mathbb{N}$ и $n, k > N_\varepsilon : \|u_n - u_k\|_p < \varepsilon$
3. Подставим в неравенство из задачи №13.1 Доказательства #1 и получим, что $\|u_n - u_k\|_q \leq \mu(X)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|u_n - u_k\|_p < \varepsilon \mu(X)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \implies \|u_n - u_k\|_q < \varepsilon_1 = \varepsilon \mu(X)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$
4. Откуда следует, что любая последовательность Коши в $\mathcal{L}^p$ является последовательностью Коши в $\mathcal{L}^q$ при $p \geq q \geq 1$
5. Ч.Т.Д.

Задача № 13.2

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ пространство с мерой и $1 \leq p \leq q \leq r \leq \infty$. Доказать, что $\mathcal{L}^p(\mu) \cap \mathcal{L}^q(\mu) \subset \mathcal{L}^r(\mu)$, доказав неравенство

$$\|u\|_r \leq \|u\|_p^\lambda \|u\|_q^{1-\lambda}$$

$\forall u \in \mathcal{L}^p(\mu) \cap \mathcal{L}^q(\mu)$, где $\lambda = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right) / \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$

Доказательство:

1. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ пространство с мерой и $1 \leq p \leq q \leq r \leq \infty$
2. Рассмотрим $\int |u|^r \, d\mu = \int |u|^{r\lambda - r\lambda + r} \, d\mu = \int |u|^{r\lambda} |u|^{r(\lambda-1)} \, d\mu$
3. Из неравенства Гёльдера
$$\int |u|^r \, d\mu \leq \left(\int |u|^{r\lambda\alpha} \, d\mu\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int |u|^{r(\lambda-1)\beta} \, d\mu\right)^{\frac{1}{\beta}}$$
, где $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$
4. Поскольку $a \leq b \implies a^{\frac{1}{r}} \leq b^{\frac{1}{r}}$, то
$$\left(\int |u|^r \, d\mu\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\int |u|^{r\lambda\alpha} \, d\mu\right)^{\frac{1}{\alpha r}} \left(\int |u|^{r(\lambda-1)\beta} \, d\mu\right)^{\frac{1}{\beta r}}$$
5. Положим, что
   (a) $r\lambda\alpha = p$
   (b) $\frac{1}{\alpha r} = \frac{\lambda}{p}$
   (c) $r(\lambda - 1)\beta = q$
   (d) $\frac{1}{\beta r} = \frac{\lambda - 1}{q}$
6. Тогда $\|u\|_r \leq \|u\|_p^\lambda \|u\|_q^{1-\lambda}$ при $\lambda = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right) / \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ и поэтому $\mathcal{L}^p(\mu) \cap \mathcal{L}^q(\mu) \subset \mathcal{L}^r(\mu)$
7. Ч.Т.Д.

Задача № 13.3

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - пространство с мерой и $u, v \in \mathcal{L}^p(\mu)$

- Найти условия, которые гарантируют, что $uv \in \mathcal{L}^p(\mu)$ $u+v \in \mathcal{L}^p(\mu)$ $\alpha u \in \mathcal{L}^p(\mu)$ при $\alpha \in \mathbb{R}$
- Показать, что $\mathcal{L}^1(\mu)$ и $\mathcal{L}^2(\mu)$ - не алгебры
- Показать, что выполнено следующее неравенство: $\left|\|u\|_p - \|v\|_p\right| \leq \|u-v\|_p$

Доказательство #1:

1. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - пространство с мерой и $u, v \in \mathcal{L}^p(\mu)$
2. Из неравенства Гёльдера $\int |uv|^p \, d\mu = \int |u^p v^p| \, d\mu \leq \left(\int |u|^{p\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int |u|^{p\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}$, откуда следует, что, если $|u| \in \mathcal{L}^{\alpha p}(\mu)$ и $|u| \in \mathcal{L}^{\beta p}(\mu)$, где $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, то $uv \in \mathcal{L}^p(\mu)$
3. Из неравенства Минковского $\|u+v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$, следует, что если $u, v \in \mathcal{L}^p(\mu)$, то $u+v \in \mathcal{L}^p(\mu)$
4. Поскольку $\int |\alpha u|^p \, d\mu = |\alpha|^p \int |u|^p \, d\mu < \infty$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, то $\alpha u \in \mathcal{L}^p(\mu)$, при $u \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $\alpha \in \mathbb{R}$,$p \in [1, \infty)$

Доказательство #2:

1. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - пространство с мерой
2. Из табличного интеграла:$\int_0^1 x^{-m} dx = \frac{0^{1-m}}{1-m} - \frac{1^{1-m}}{1-m}$, при $m \neq 1$. Откуда следует, что $\frac{0^{1-m}}{1-m} = 0$ при $m < 1$ и $\frac{0^{1-m}}{1-m} = \infty$ при $m > 1$
3. Рассмотрим три интеграла $\int_0^1 x^{-m_1} x^{-m_2} dx = \int_0^1 x^{-m_1 - m_2} dx$ и $\int_0^1 x^{-m_1} dx$ и $\int_0^1 x^{-m_2} dx$. Мы потребуем, чтобы $-m_1 - m_2 < 0$ $m_1 > 1$ и $m_1 < 1$. Тогда не выполняется свойство ассоциативности $\int \alpha uv d\mu = \alpha \int uv d\mu \neq \alpha \left(\int u d\mu\right) \left(\int v d\mu\right)$, при $m < 1$ из интеграла в (2)
4. Для пространств $\mathcal{L}^2(\mu)$ - доказывается аналогично.
5. Ч.Т.Д.

Доказательство #3:

1. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - пространство с мерой.
2. Покажем, что выполнено следующее: $\left|\|u\|_p - \|v\|_p\right| \leq \|u-v\|_p$ $-\|u-v\|_p \leq \|u\|_p - \|v\|_p \leq \|u-v\|_p$
3. $\|u\|_p = \|u - v + v\|_p \leq \|u-v\|_p + \|v\|_p \implies \|u\|_p - \|v\|_p \leq \|u-v\|_p$ - из неравенства Минковского
4. $\|v\|_p = \|u + v - u\|_p \leq \|u\|_p + \|v-u\|_p \implies \|u\|_p - \|v\|_p \leq -\|u-v\|_p$ - из неравенства Минковского
5. Комбинируя (4) и (5) вместе из определения абсолютной функции получим, что $\left|\|u\|_p - \|v\|_p\right| \leq \|u-v\|_p$
6. Ч.Т.Д.

Задача № 13.5

Обобщенное неравенство Гёльдера. Показать, что при $\forall p_n \in (1, \infty)$ $\sum_{n=1}^{N} p_n^{-1} = 1$ и $\forall u_n \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ выполнено неравенство

$$\int |u_1 u_2 ... u_N| \, d\mu \leq \|u_1\|_{p_1} \|u_2\|_{p_2} \cdot ... \cdot \|u_N\|_{p_N}$$

1. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - пространство с мерой.
2. Мы воспользуемся правилом индукции, чтобы доказать обобщенное неравенство Гёльдера, где в качестве базы используем само неравенство Гёльдера $\int |uv| \, d\mu \leq \|u\|_p \|v\|_q$ при $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
3. Предположим $\int |u_1 u_2 ... u_{N-1} u_N| \, d\mu \leq \|u_1\|_{p_1} \|u_2\|_{p_2} \cdot ... \cdot \|u_{N-1} u_N\|_{p_{N-1,N}}$, где $\sum_{n=1}^{N-2} p_n^{-1} + \frac{1}{p_{N-1,N}} = 1$
4. По определению $\|u_{N-1} u_N\|_{p_{N-1,N}} = \left(\int |u_{N-1} u_N|^{p_{N-1,N}} \, d\mu\right)^{\frac{1}{p_{N-1,N}}}$
5. Из базы индукции следует, что

$$\left(\int |u_{N-1} u_N|^{p_{N-1,N}} \, d\mu\right)^{\frac{1}{p_{N-1,N}}} \leq \left(\left\|u_{N-1}^{p_{N-1,N}}\right\|_{\alpha}\right)^{\frac{1}{p_{N-1,N}}} \left(\left\|u_N^{p_{N-1,N}}\right\|_{\beta}\right)^{\frac{1}{p_{N-1,N}}} = \left(\int |u_{N-1}|^{\alpha p_{N-1,N}} \, d\mu\right)^{\frac{1}{\alpha p_{N-1,N}}}$$

6. Положим, что $\alpha p_{N-1,N} = p_{N-1} \implies \frac{1}{\alpha p_{N-1,N}} = \frac{1}{p_{N-1}}$ и $\beta p_{N-1,N} = p_N \implies \frac{1}{\beta p_{N-1,N}} = \frac{1}{p_N}$. Тогда
   (a) $\left(\int |u_{N-1} u_N|^{p_{N-1,N}} \, d\mu\right)^{\frac{1}{p_{N-1,N}}} \leq \left(\int |u_{N-1}|^{p_{N-1}} \, d\mu\right)^{\frac{1}{p_{N-1}}} \left(\int |u_N|^{p_N} \, d\mu\right)^{\frac{1}{p_N}} = \|u_{N-1}\|_{p_{N-1}} \|u_N\|_{p_N}$
   (b) $\frac{1}{\alpha} = \frac{p_{N-1,N}}{p_{N-1}}$ и $\frac{1}{\beta} = \frac{p_{N-1,N}}{p_N}$ $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 = \frac{p_{N-1,N}}{p_{N-1}} + \frac{p_{N-1,N}}{p_N} \implies \frac{1}{p_{N-1,N}} = \frac{1}{p_{N-1}} + \frac{1}{p_N}$
7. Из (3) и (6) следует, что

$$\int |u_1 u_2 ... u_{N-1} u_N| \, d\mu \leq \|u_1\|_{p_1} \|u_2\|_{p_2} \cdot ... \cdot \|u_N\|_{p_N}$$

   где $\sum_{n=1}^{N} p_n^{-1} = 1$
8. Ч.Т.Д.

Задача № 13.6

Функции Янга. Пусть $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ строго возрастающая функция, такая, что $\phi(0) = 0$ и $\lim_{\xi \to \infty} \phi(\xi) = \infty$. Обозначим $\psi(\eta) = \phi^{-1}(\eta)$ - обратной функцией. Функции $\Phi(A) := \int_{[0,A)} \phi(\xi) \lambda^1(d\xi)$ и $\Psi(B) := \int_{[0,B)} \psi(\eta) \lambda^1(d\eta)$ называются сопряженными функциями Янга. Адаптировать доказательство Леммы 13.1, чтобы показать обобщенное неравенство Янга $AB \leq \Phi(A) + \Psi(B)$ $\forall A, B \geq 0$

Доказательство:

1. Пусть $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ строго возрастающая функция, такая, что $\phi(0) = 0$ и $\lim_{\xi \to \infty} \phi(\xi) = 0$.
2. Обозначим $\psi(\eta) = \phi^{-1}(\eta)$ - обратной функцией.
3. Пусть $\Phi(A) := \int_{[0,A)} \phi(\xi) \lambda^1(d\xi) =$ и $\Psi(B) := \int_{[0,B)} \psi(\eta) \lambda^1(d\eta)$
4. Рассмотрим следующий график:

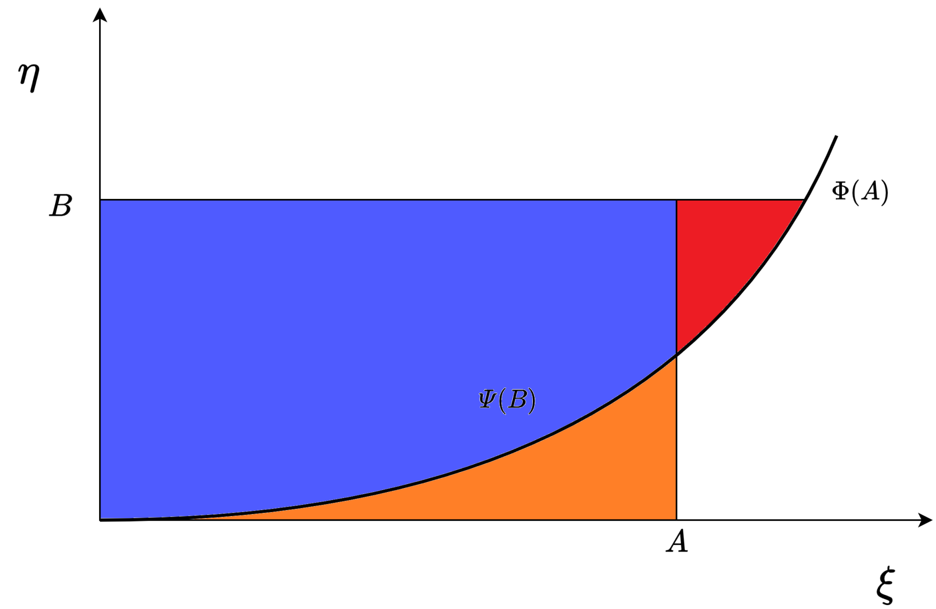

Figure 1:

5. Заметим, что интеграл $\Phi(A)$ - это площадь оранжевой части, $\Psi(B)$ - площадь синей и красной частей вместе. А площадь прямоугольника AB - Синия плюс оранжевая часть. Откуда следует, что $AB \le \Phi(A) + \Psi(B)$

6. Ч.Т.Д.

Задача № 13.7

Пусть $1 \le p < \infty$ и $u, u_n \in \mathcal{L}^p(\mu)$, такая что $\sum_{n=1}^{\infty} \|u - u_n\|_p < \infty$. Показать, что последовательность сходится поточечно почти всюду: $\underset{n\to\infty}{lim} u_n(x) = u(x)$.

Доказательство:

1. Пусть $1 \le p < \infty$ и $u, u_n \in \mathcal{L}^p(\mu)$

2. Положим $\sum_{n=1}^{\infty} \|u - u_n\|_p = L < \infty$

   (a) Рассмотрим, $S_k = \sum_{n=1}^{k} \|u - u_n\|_p$. Заметим, что $\forall n \in \mathbb{N}$ $\|u - u_n\|_p \ge 0$ из определения $\mathcal{L}^p(\mu)$ нормы

   (b) Рассмотрим $\|u - u_k\|_p = S_{k+1} - S_k = L - L = 0$ при $k \to \infty$. То есть $\underset{n\to\infty}{lim} \|u - u_n\|_p = 0 \iff \mathcal{L}^p \underset{n\to\infty}{lim} u_n = u$

3. Из (2) и 13.8 следует, что существует некоторая подпоследовательность $\underset{k\to\infty}{lim} u_{n(k)}(x) = u(x)$ почти всюду

4. Мы покажем, что последовательность $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$- сходится.

5. Рассмотрим последовательность $\sum_{j=0}^{\infty}(u_{j+1} - u_j) = \underset{k\to\infty}{lim} u_k$, где $u_0 = 0$

   (a) Воспользуемся леммой 13.6 $\left\|\sum_{j=0}^{\infty}(u_{j+1} - u_j)\right\|_p \le \left\|\sum_{j=0}^{\infty}|u_{j+1} - u_j|\right\|_p \le \sum_{j=0}^{\infty}\|u_{j+1} - u_j\|_p \le \sum_{j=0}^{\infty}\left(\|u_{j+1} - u\|_p + \|u - u_j\|_p\right) < \infty$.

(b) Из (5.a) следует, что последовательность $\underset{k\to\infty}{lim} u_k = \sum_{j=0}^{\infty}(u_{j+1} - u_j)$ сходится.

(c) поскольку, любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к одному пределу, то $\underset{n\to\infty}{lim} u_n(x) = u(x)$

6. Ч.Т.Д.

Задача № 13.8

Пусть λ одномерная мера Лебега на пространстве $[0,1]$. Проверить, что последовательность $u_n(x) := n\mathbb{1}_{\left(0,\frac{1}{n}\right)}$ $n \in \mathbb{N}$ сходится поточечно к функции $u \equiv 0$, но ни одна подпоследовательность u_n не сходится в смысле $\mathcal{L}^p$ $\forall p \geq 1$.

Доказательство:

1. Пусть λ одномерная мера Лебега на пространстве $[0,1]$.

2. Пусть дана последовательность $u_n(x) := n\mathbb{1}_{\left(0,\frac{1}{n}\right)}$ $n \in \mathbb{N}$

3. $\underset{n\to\infty}{lim} u_n(x) = \underset{n\to\infty}{lim} n\mathbb{1}_{\left(0,\frac{1}{n}\right)} = 0$ всюду на $[0,1]$ - последовательность сходится поточечно к функции $u \equiv 0$

4. Однако $\underset{n\to\infty}{lim} \|u_n - u\| = \underset{n\to\infty}{lim} \|u_n\| = \underset{n\to\infty}{lim} \left(\int \left(n\mathbb{1}_{\left(0,\frac{1}{n}\right)}\right)^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} = \underset{n\to\infty}{lim} \left(n^p \int_{\left(0,\frac{1}{n}\right)} d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} = \underset{n\to\infty}{lim} \left(n^{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} = \infty$ $\forall p > 1$, а при $p = 1$ $\underset{n\to\infty}{lim} \left(n^{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} = 1$ поэтому последовательность расходится в смысле $\mathcal{L}^p$ $\forall p \geq 1$.

5. Поскольку, последовательность сходится тогда и только тогда когда ее любая подпоследовательность сходится, то всякая подпоследовательность расходящейся последовательности расходится, поэтому расходится и u_n в смысле $\mathcal{L}^p$

6. Ч.Т.Д.

Задача № 13.9

Пусть $p, q \in [1,\infty]$ - сопряженные. То есть: $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Предположим, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^p$ и $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^q$ - последовательности с пределами u, w в смысле $\mathcal{L}^p, \mathcal{L}^q$ соответственно. Показать, что $u_k w_k$ сходятся в $\mathcal{L}^1$ к пределу uw.

Доказательство:

1. Пусть $p, q \in [1,\infty]$ - сопряженные и $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

2. Пусть $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^p$ и $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^p$ - последовательности с пределами u, w в смысле $\mathcal{L}^p$.

3. Покажем, что данная последовательность является последовательностью Коши:

   (a) $\|u_n w_n - u_k w_k\|_1 = \|u_n w_n - u_n w_k + u_n w_k - u_k w_k\|_1 = \|u_n(w_n - w_k) + w_k(u_n - u_k)\|_1 \leq \|u_n(w_n - w_k)\|_1$ $\|w_k(u_n - u_k)\|_1$ из неравенства Минковского

   (b) $\|u_n(w_n - w_k)\|_1 + \|w_k(u_n - u_k)\|_1 \leq \|u_n\|_p \|w_n - w_k\|_q + \|w_k\|_q \|u_n - u_k\|_p$ - из неравенства Гёльдера

   (c) Поскольку u_n и w_n сходящиеся последовательности, то они ограничены $\|u_n\|_p \leq M_1$ $\|w_k\|_q \leq M_2$. Положим, что $M = max\{M_1, M_2\}$. Тогда $\|u_n\|_p \|w_n - w_k\|_q + \|w_k\|_q \|u_n - u_k\|_p = M\|w_n - w_k\|_q + M\|u_n - u_k\|_p$

(d) Поскольку u_n и w_n - последовательности Коши, то мы можем подобрать такие $n, k \in \mathbb{N}$ $\|u_n - u_k\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2M}$ и $\|w_n - w_k\|_q \leq \frac{\varepsilon}{2M}$, поэтому $M\|w_n - w_k\|_q + M\|u_n - u_k\|_p < M\frac{\varepsilon}{2M} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$

4. Ч.Т.Д.

Задача № 13.10

Показать, что $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^2(\mu)$ сходится в $\mathcal{L}^2(\mu)$ тогда и только тогда, когда $\underset{n,k\to\infty}{lim} \int u_n u_k d\mu$ - существует

1. Заметим, что $\|u - w\|_2^2 = \int |u - w|^2 d\mu = \int \left(u^2 - 2uw + w^2\right) d\mu = \|u\|_2^2 + \|w\|_2^2 - 2\int uw d\mu$
2. С одной стороны пусть $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится в $\mathcal{L}^2(\mu)$
   (a) В таком случае $\underset{n,k\to\infty}{lim} \|u_n - u_k\|_2^2 = \|u\|_2^2 + \|u\|_2^2 - 2\underset{n,k\to\infty}{lim} \int u_n u_k d\mu \implies \underset{n,k\to\infty}{lim} \int u_n u_k d\mu = \|u\|_2^2$ из равенства в (1)
   (b) Если $\|u\|_2^2 < \infty$, то $\underset{n,k\to\infty}{lim} \int u_n u_k d\mu$
3. С другой стороны, пусть, указанный предел существует.
   (a) Это означает, что верно следующее $\underset{n,k\to\infty}{lim} \int u_n u_k d\mu = \underset{n\to\infty}{lim} \int u_n^2 d\mu = \|u\|_2^2 < \infty$
   (b) Используем равенство (1) снова: $\underset{n,k\to\infty}{lim} \|u_n - u_k\|_2^2 = \underset{n\to\infty}{lim} \|u_n\|_2^2 + \underset{n\to\infty}{lim} \|u_k\|_2^2 - 2\|u\|_2^2 = 0$
4. Ч.Т.Д.

Задача № 13.11

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - пространство с мерой. Показать, что каждая измеримая функция $u \geq 0$, такая что $\int exp\left(hu(x)\right)\mu(dx) < \infty$, для некоторого $h > 0$ является элементом $\mathcal{L}^p$ $\forall p \in [1, \infty)$

Доказательство:

1. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - пространство с мерой. Пусть $u \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$
2. Рассмотрим $\int exp\left(hu(x)\right)\mu(dx) < \infty$ при $h > 0$. Используем разложение в ряд Тейлора
$$\int exp\left(hu(x)\right)\mu(dx) = \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|hu(x)|^n}{n!}\mu(dx)$$
   знак модуля используется поскольку $\forall u > 0, h > 0$ $exp\left(hu(x)\right) \geq 0$
3. Из следствия 9.9, поскольку $\forall n \in \mathbb{N}$ $|u(x)|^n \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ мы можем поменять сумму и интеграл местами. То есть $\forall N \in \mathbb{N}$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \int |u(x)|^n \mu(dx) = \mu(X) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \|u\|_n^n < \infty$$
4. Поскольку сумма в (3) состоит из положительных элементов и конечна, следовательно каждый ее элемент конечный и поэтому $\forall n \in \mathbb{N}$ $u \in \mathcal{L}^n$. Комбинируя результат для дробных элементов из задачи 13.1 ii следует цель.

5. Ч.Т.Д.

Задача № 13.12

Пусть λ - мера Лебега на $(0, \infty)$ и $p \geq 1$

- Показать, что $u_n(x) := n^{\alpha}(x+n)^{-\beta}$ $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 1$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ является элементом$\mathcal{L}^p(\lambda)$
- Показать, что $v_n(x) := n^{\gamma}e^{-nx}$ $\gamma \in \mathbb{R}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ является элементом $\mathcal{L}^p(\lambda)$

Доказательство #1:

1. Пусть λ - мера Лебега на $(0, \infty)$ и $p \geq 1$
2. Пусть $u_n(x) := n^{\alpha}(x+n)^{-\beta}$ $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 1$
3. Рассмотрим $u_n^p(x) = n^{\alpha p}(x+n)^{-\beta p}$ и положим, что $\alpha p = a$ и $\beta p = q$, где $a \in \mathbb{R}$ и $q \geq 1$, тогда $u_n^p(x) = n^a(x+n)^{-q}$
4. Заметим, что $\forall n \in \mathbb{N}$ $n^{\alpha p} \in \mathbb{R}$, откуда следует, что необходимо рассмотреть только $(x+n)^{-q}$ так как $a, b \in \mathbb{R} \implies ab \in \mathbb{R}$
5. Заметим, также, что $\forall n \in \mathbb{N}$ и $q \geq 1$ верно неравнество$(x+n)^{-q} \leq (x+1)^{-q}$, поэтому необходимо рассмотреть только случай при $n = 1$
6. Заметим, также, что $(x+1)^{-\beta p} \leq \mathbb{1}_{[0,1)} + x^{-q}\mathbb{1}_{[1,\infty)}$. Правая часть суммы интегрируема по Риману из задачи 12.17 и совпадает с интегралом Лебега из следствия 12.11. То есть $\int \left(\mathbb{1}_{[0,1)}d\lambda + x^{-q}\mathbb{1}_{[1,\infty)}\right)$ $1 + \frac{1}{1-q}x^{1-q}\Big|_1^{\infty} < \infty$ при $q \geq 1$ поэтому $u_n(x) \in \mathcal{L}^p(\lambda)$
7. Ч.Т.Д

Доказательство #2:

1. Пусть λ - мера Лебега на $(0, \infty)$ и $p \geq 1$
2. Пусть $v_n(x) := n^{\gamma}e^{-nx}$ $\gamma \in \mathbb{R}$
3. Рассмотрим $v_n^p(x) = n^{\gamma p}e^{-npx} = n^{\alpha}e^{-\beta x}$ где $\gamma p = \alpha \in \mathbb{R}$ и $np = \beta \geq 1$
4. Заметим, что $n^{\gamma p} < \infty$ при $\gamma p \in \mathbb{R}$, поэтому необходимо рассмотреть $e^{-\beta x}$.
5. Заметим, что $\forall \beta \geq 1$ $e^{-\beta x} \leq e^{-x}$.
6. Интеграл от экспоненты конечен для $(0, \infty)$, поэтому $v_n(x) \in \mathcal{L}^p(\lambda)$
7. Ч.Т.Д.

Задача № 13.14

Пусть $(\Omega = \{1, 2, ..., n\}, \mathcal{F}, \mu)$ - пространство с мерой, где $n \geq 2$, где μ - считающая мера. Показать, что $\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ - норма, при $p \in [1, \infty)$, но не является нормой при $p \in (0, 1)$

Доказательство:

1. Пусть $(\Omega = \{1, 2, ..., n\}, \mathcal{F}, \mu)$ - пространство с мерой при $n \geq 2$, где μ - считающая мера.

2. Покажем, что $\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ частный случай $\mathcal{L}^p$ нормы и является элементом $\mathcal{L}^p(\mathcal{F})$ при $p \in [1,\infty)$

3. По определению, норма соответствует следующей формуле $\|u_n\| := \left(\int |u|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$.

4. Интеграл Лебега для считающей меры имеет вид: $\int f d\mu = \sum_{i=1}^{n} y_i |A_i| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ при $y_i \geq 0$ и $A_i \in \mathcal{F}\ \forall i \in \overline{1,n}$

5. Заметим, что если $\forall i \in \overline{1,n}\ x_i < \infty$, то $\sum_{i=1}^{n}|x_i| < \infty$ откуда следует, что $\forall p \in [1,\infty)$ $\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p < \infty$ и поэтому $\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p \in \mathcal{L}^p(\mathcal{F})$.

6. Таким образом для пространства со считающей мерой $\left(\int |u|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ откуда по определению $\mathcal{L}^p$ нормы следует, что $p \in [1,\infty)$ и поэтому не является нормой при $p \notin (0,1)$.

7. Ч.Т.Д

Задача № 13.15

Пусть $(X,\mathcal{A},\mu)$- пространство с мерой. Пространство $\mathcal{L}^p$ называют сепарабельным, если существует счетное всюду плотное подмножество $\mathcal{D}_p \subset \mathcal{L}^p$. Показать, что $\mathcal{L}^p(\mu)$, $p \in (1,\infty)$ сепарабельно тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}^1(\mu)$ - сепарабельно.

Доказательство:

1. Пусть $(X,\mathcal{A},\mu)$ - пространство с мерой. Положим, что мера μ финитна.

2. С одной стороны предположим, что $\mathcal{L}^1(\mu)$ - сепарабельно.
   (a) Это означает, что $\forall\varepsilon > 0\ \exists w \in \mathcal{D}_1 \subset \mathcal{L}^1\ \forall u \in \mathcal{L}^1(\mu)$ такое, что $\|u - w\| < \varepsilon$
   (b) Поскольку $\forall p \in (1,\infty)$, то $\mathcal{L}^p(\mu) \subset \mathcal{L}^1(\mu)$, то поскольку выполнено (a) $\forall u \in \mathcal{L}^1(\mu)$, то (a) выполнено и для подмножества $\mathcal{L}^p(\mu) \subset \mathcal{L}^1(\mu)$

3. С другой стороны положим, что $\mathcal{L}^p(\mu)$ $p \in (1,\infty)$ сепарабельно.
   (a) Это означает, что $\forall\varepsilon > 0 \exists u_k \in (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^p(\mu)$, такой что $\forall u \in \mathcal{L}^p(\mu)$ $\|u - u_k\| < \varepsilon$. Полагая, что $\varepsilon \to 0$, и фиксируя все элементы $i > k \in \mathbb{N}$, так, что $u_i = u_k$ сконструируем последовательность $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^p(\mu)$, так, что $\underset{n\to\infty}{lim}\|f_n - u\|_p = 0$
   (b) Любая последовательность, сходящаяся в $\mathcal{L}^p(\mu)$ $p \in (1,\infty)$ сходится в $\mathcal{L}^1(\mu)$. Поэтому $\underset{n\to\infty}{lim}\|f_n - u\|_1 = 0$
   (c) Следовательно $\mathcal{L}^1(\mu)$ сепарабельно

4. Ч.Т.Д

Задача № 13.17

Пусть $(X,\mathcal{A},\mu)$ - пространство с финитной мерой и пусть $u \in \mathcal{L}^1(\mu)$ строго положительна и $\int u d\mu = 1$. Показать, что

$$\int log(u)\, d\mu \leq \mu(X)\, log\left(\frac{1}{\mu(X)}\right)$$

Доказательство:

1. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - пространство с финитной мерой

2. Пусть $u \in \mathcal{L}^1(\mu)$ строго положительна так, что $\int u d\mu = 1$

3. Поскольку $u \in \mathcal{L}^1(\mu)$ и $u > 0$, то $u \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$. Более того, $log(u) \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, поскольку $log : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ - непрерывное отображение.

4. Из неравенства Йенсена: $l(u) := \alpha u + \beta \geq log(u)$. Из монотонности интеграла это за собой имплицирует, то, что $\int log(u)\, d\mathbb{P} \leq l\left(\int (\alpha u + \beta)\, d\mathbb{P}\right) = \int \alpha u d\mathbb{P} + \beta$, где $\mathbb{P}$ - вероятностная мера.

5. Взяв инфимум по всем функциям $\int \alpha x d\mathbb{P} + \beta$ подпирающим сверху функцию $\int log(x)\, d\mathbb{P}$, получим, что $\int log(u)\, d\mathbb{P} \leq log\left(\int u d\mathbb{P}\right)$.

6. Полагая, что $\mathbb{P} := \frac{\mu}{\int d\mu}$ получим, что $\int log(u)\, d\frac{\mu}{\int d\mu} \leq log\left(\int u d\frac{\mu}{\int d\mu}\right) \implies \frac{\int log(u) d\mu}{\mu(X)} \leq log\left(\frac{\int u d\mu}{\mu(X)}\right)$

7. Используя классические свойства логарифма и (2) получим, что $\int log(u)\, d\mu \leq \mu(X)\, log\left(\frac{1}{\mu(X)}\right)$

8. Ч.Т.Д.

Задача № 13.18

Пусть u - положительная измеримая функция на $[0,1]$. Что из следующих интегралов больше:

$$\int_{(0,1)} u(x)\, log(u(x))\, \lambda(dx) \quad \text{и} \quad \int_{(0,1)} u(s)\, \lambda(ds) \cdot \int_{(0,1)} log(u(t))\, \lambda(dt)$$

1. Пусть u - положительная измеримая функция на $[0,1]$

2. Заметим, что $f(x) = xlog(x)$ это выпуклая функция, откуда следует, из неравенства Йенсена для интегралов выполнено:

$$\left(\int_{(0,1)} u(x)\, \lambda(dx)\right) log\left(\int_{(0,1)} u(x)\, \lambda(dx)\right) \leq \int_{(0,1)} u(x)\, log(u(x))\, \lambda(dx)$$

3. Поскольку $f(x) = log(x)$ - вогнутая, то из (2) следует, что

$$\left(\int_{(0,1)} u(x)\, \lambda(dx)\right) \cdot \int_{(0,1)} log(u(x))\, \lambda(dx) \leq \int_{(0,1)} u(x)\, \lambda(dx)\, log\left(\int_{(0,1)} u(x)\, \lambda(dx)\right)$$

   Поэтому

$$\left(\int_{(0,1)} u(x)\, \lambda(dx)\right) \cdot \int_{(0,1)} logu(x)\, \lambda(dx) \leq \int_{(0,1)} u(x)\, log(u(x))\, \lambda(dx)$$

   Откуда следует искомый результат

4. Ч.Т.Д.

Задача № 13.19

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - пространство с мерой и $p \in (0,1)$. Сопряженный индекс задается как $q := \frac{p}{p-1} < 0$. Показать, что для всех $u, v, w : X \to (0, \infty)$, таких что $\int u^p d\mu < \infty$ $\int v^p d\mu < \infty$ и $0 < \int w^q d\mu < \infty$ выполнены неравенства:

$$\int uwd\mu \geq \left(\int u^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int w^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left(\int (u+v)^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\int u^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int w^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

Доказательство #1

1. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - пространство с мерой и $p \in (0,1)$
2. Пусть Сопряженный индекс задается как $q := \frac{p}{p-1} < 0$.
3. Пусть $u, v, w : X \to (0, \infty)$, такие что $\int u^p d\mu < \infty$ $\int v^p d\mu < \infty$ и $0 < \int w^q d\mu < \infty$
4. Из неравенства Гёльдера: $\int (uw)^p \left(\frac{1}{w}\right)^p d\mu \leq \left(\int (uw)^{ps} \, d\mu\right)^{\frac{1}{s}} \left(\int \left(\frac{1}{w}\right)^r d\mu\right)^{\frac{1}{r}}$ $\forall s, r \in [1, \infty)$ и $\frac{1}{s} + \frac{1}{r} = 1$.
5. Положим, что $ps = 1 \implies \frac{1}{s} = p$. Поскольку $\frac{1}{s} + \frac{1}{r} = p + \frac{1}{r} = 1$, то $\frac{1}{r} = 1 - p$ и $r = -\frac{1}{p-1}$. Поэтому
$$\int u^p d\mu \leq \left(\int uwd\mu\right)^p \left(\int (w)^{\frac{p}{p-1}} \, d\mu\right)^{1-p}$$
6. Возводя в $\frac{1}{p}$ - ую степень поулчим, что
$$\left(\int u^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int uwd\mu\right) \left(\int (w)^{\frac{p}{p-1}} \, d\mu\right)^{\frac{1-p}{p}}$$
7. Поскольку $q = \frac{p}{p-1}$, то $-\frac{1}{q} = \frac{1-p}{p}$ и поэтому
$$\left(\int u^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int uwd\mu\right) \left(\int w^q d\mu\right)^{-\frac{1}{q}}$$
$$\left(\int uwd\mu\right) \geq \left(\int u^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int w^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$
8. Ч.Т.Д.

Доказательство #1

1. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - пространство с мерой и $p \in (0,1)$
2. Пусть Сопряженный индекс задается как $q := \frac{p}{p-1} < 0$.
3. Пусть $u, v, w : X \to (0, \infty)$, такие что $\int u^p d\mu < \infty$ $\int v^p d\mu < \infty$ и $0 < \int w^q d\mu < \infty$
4. Рассмотрим
$$\int (u+v)^p \, d\mu = \int (u+v)^{p-1} (u+v) \, d\mu = \int (u+v)^{p-1} \, ud\mu + \int (u+v)^{p-1} \, vd\mu$$

5. Из неравенства Гёльдера при$p \in (0,1)$ (Доказательство #1 задача №13.19)

$$\int (u+v)^p \, d\mu \geq \left(\int (u+v)^{q(p-1)} \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \|u\|_p + \left(\int (u+v)^{q(p-1)} \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \|u\|_p$$

6. Из (2) следует, что $p = q\,(p-1)$ и $\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}$.

$$\int (u+v)^p \, d\mu \geq \left(\int (u+v)^p \, d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}} \|u\|_p + \left(\int (u+v)^p \, d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}} \|u\|_p$$

$$\left(\int (u+v)^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}-1} \int (u+v)^p \, d\mu \geq \|u\|_p + \|u\|_p$$

$$\left(\int (u+v)^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \geq \|u\|_p + \|u\|_p$$

7. Ч.Т.Д.

Задача № 13.20

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - пространство с финитной мерой и $u \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ - ограниченная функция, такая что $\|u\|_\infty > 0$. Доказать, что $\forall n \in \mathbb{N}$

- $M_n := \int |u|^n \, d\mu \in (0, \infty)$
- $M_{n-1} M_{n+1} \geq M_n^2$
- $\mu(X)^{-\frac{1}{n}} \|u\|_n \leq \frac{M_{n+1}}{M_n} \leq \|u\|_\infty$
- $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{M_{n+1}}{M_n} = \|u\|_\infty$

Доказательство #1

1. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - пространство с финитной мерой
2. Пусть $u \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ - ограниченная функция, такая что $\|u\|_\infty > 0$.
3. По определению $\|u\|_\infty = inf\{c > 0 : \mu\{|u| > c\} = 0\}$. $\int |u|^n \, d\mu < \infty$ gоскольку $\int |u|^n \, d\mu \leq c \int d\mu = c\mu(X) < \infty$ $n \in \mathbb{N}$, где c - конечна из определения и $\mu(X) < \infty$ по условию
4. Ч.Т.Д.

Доказательство #2

1. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - пространство с финитной мерой
2. Пусть $u \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ - ограниченная функция
3. Воспользуемся неравенством в задаче 13.2

$$\left(\int |u|^r \, d\mu\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\int |u|^p \, d\mu\right)^{\frac{\lambda}{p}} \left(\int |u|^q \, d\mu\right)^{\frac{\lambda-1}{q}}$$

при $1 \leq p \leq r \leq q < \infty$ и $\lambda = \frac{\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right)}{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)}$

4. Из монотонности $x \mapsto x^r$ получим, что

$$\int |u|^r \, d\mu \leq \left(\int |u|^p \, d\mu \right)^{\frac{r\lambda}{p}} \left(\int |u|^q \, d\mu \right)^{\frac{r(1-\lambda)}{q}}$$

5. Пусть

   (a) $r = n$

   (b) $p = n - 1$

   (c) $q = n + 1$

   (d) $\frac{r\lambda}{p} = 1 \implies \lambda = \frac{p}{r}$

   (e) В таком случае $\frac{r}{q}(1-\lambda) = \frac{r}{q}\left(1 - \frac{p}{r}\right) = \frac{r}{q} - \frac{p}{q} = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n+1} = 1$

6. Таким образом

$$\int |u|^n \, d\mu \leq \left(\int |u|^{n-1} \, d\mu \right) \left(\int |u|^{n+1} \, d\mu \right)$$

7. Ч.Т.Д.

Доказательство #3

1. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - пространство с финитной мерой

2. Пусть $u \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ - ограниченная функция, такая что $\|u\|_\infty > 0$.

3. Докажем $\mu(X)^{-\frac{1}{n}} \|u\|_n \leq \frac{M_{n+1}}{M_n}$

   (a) Из неравенства Гёльдера

$$\int |u|^n \, d\mu \leq \left(\int |u|^{pn} \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

   где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

   (b) Полагая, что $pn = n + 1$ получим, что $p = \frac{n+1}{n} \implies \frac{1}{p} = \frac{n}{n+1}$ и $\frac{1}{q} = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$

$$\int |u|^n \, d\mu \leq \left(\int |u|^{n+1} \, d\mu \right)^{\frac{n}{n+1}} \mu(X)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$\left(\int |u|^n \, d\mu \right)^{n+1} \leq \left(\int |u|^{n+1} \, d\mu \right)^n \mu(X)$$

$$\left(\int |u|^n \, d\mu \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\int |u|^{n+1} \, d\mu}{\int |u|^n \, d\mu} \mu(X)^{\frac{1}{n}}$$

$$\mu(X)^{-\frac{1}{n}} \|u\|_n \leq \frac{\int |u|^{n+1} \, d\mu}{\int |u|^n \, d\mu} = \frac{M_{n+1}}{M_n}$$

4. Докажем $\frac{\int |u|^{n+1} d\mu}{\int |u|^n d\mu} = \frac{M_{n+1}}{M_n} \leq \|u\|_\infty$

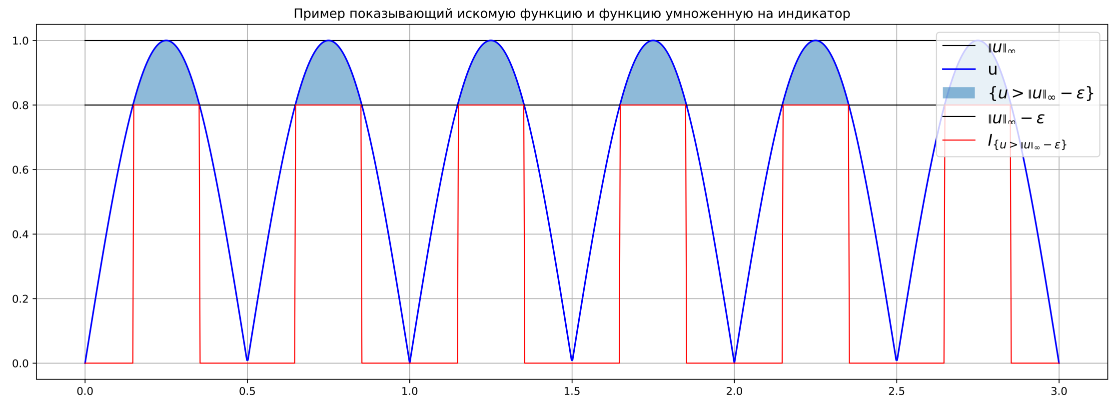

Figure 2:

(a) Из неравенства Гёльдера:

$$\int |u|^n |u| \, d\mu \leq \left(\int |u|^{np} \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |u|^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

(b) Поскольку $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ $p = 1 \implies q \to \infty$. В таком случае

$$\int |u|^{n+1} \, d\mu \leq \int |u|^n \, d\mu \, \|u\|_\infty$$

(c) Откуда следует цель

5. Ч.Т.Д.

Доказательство $\#4$

1. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - пространство с финитной мерой
2. Пусть $u \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ - ограниченная функция, такая что $\|u\|_\infty > 0$.
3. Заметим, что из картинки ниже $\forall \epsilon > 0$ $\int u d\mu \geq \int_{\{u > \|u\|_\infty - \epsilon\}} (\|u\|_\infty - \epsilon) \, d\mu$.
4. Из монотонности $\mathcal{L}^p$ нормы следует, что $\left(\int u^n \mu\right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\int_{\{u > \|u\|_\infty - \epsilon\}} (\|u\|_\infty - \epsilon)^n \, d\mu\right)^{\frac{1}{n}} = \mu\left(\{u > \|u\|_\infty - \epsilon\}\right)^{\frac{1}{n}}$
5. Из монотонности нижнего предела последовательности:

$$\underset{n \to \infty}{liminf} \, \|u\|_n \geq \|u\|_\infty$$

при $\epsilon \to 0$

6. Поскольку мера финитна, то из $\underset{n \to \infty}{liminf} \, (a_n b_n) = \underset{n \to \infty}{lim} \, (a_n) \, \underset{n \to \infty}{liminf} \, (b_n)$ если $\underset{n \to \infty}{lim} \, (a_n)$ существует

$$\underset{n \to \infty}{liminf} \left(\mu\left(\{u > \|u\|_\infty - \epsilon\}\right)^{-\frac{1}{n}} \left(\int u^n \mu \right)^{\frac{1}{n}} \right) = \underset{n \to \infty}{liminf} \, \|u\|_n \geq \|u\|_\infty$$

7. Комбинировав (5) и (6) и равенство в (Доказательстве #3) взяв верхний предел из его монотонности получим, что

$$\|u\|_\infty \leq \underset{n\to\infty}{liminf}\mu(X)^{-\frac{1}{n}}\|u\|_n \leq \underset{n\to\infty}{limsup}\mu(X)^{-\frac{1}{n}}\|u\|_n \leq \underset{n\to\infty}{limsup}\frac{M_{n+1}}{M_n} \leq \|u\|_\infty$$

   Откуда следует, цель

8. Ч.Т.Д

Задача № 13.21

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - пространство с мерой и пусть $u \in \bigcap_{p\geq 1}\mathcal{L}^p(\mu)$. Показать, что

$$\underset{p\to\infty}{lim}\|u\|_p = \|u\|_\infty$$

Доказательство

1. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - пространство с конечной мерой

2. Пусть $u \in \bigcap_{p\geq 1}\mathcal{L}^p(\mu)$

3. Положим $\|u\|_\infty < \infty$ и воспользуемся неравенством $\|u\|_r \leq \|u\|_a^\lambda \|u\|_b^{1-\lambda}$, $\lambda = \frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$, чтобы показать, что $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\|u\|_{p+q_n} \leq \|u\|_\infty^{\frac{q_n}{p+q_n}}\|u\|_p^{\frac{p}{p+q_n}}$$

   (a) Пусть $r = p + q_n$
   (b) $a \to \infty$
   (c) $\lambda = \frac{q_n}{p+q_n} \implies 1 - \lambda = \frac{p+q_n}{p+q_n} - \frac{q_n}{p+q_n} = \frac{p}{p+q_n}$
   (d) $\lambda = \underset{a\to\infty}{lim}\frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} = \frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{r}}{\frac{1}{b}} = \frac{r-b}{r} \implies b = r - \lambda r = p + q_n - (p+q_n)\frac{q_n}{p+q_n} = p$
   (e) Подставляя в равенство (3) получаем подцель.

4. При $q_n \to \infty$

$$\underset{q_n\to\infty}{lim}\|u\|_{p+q_n} \leq \|u\|_\infty$$

   Заметим, что при $q_n \to \infty$, то $p + q_n \to \infty$. В таком случае, выполним замену на $p \to \infty$ и получим, что

$$\underset{p\to\infty}{lim}\|u\|_p \leq \|u\|_\infty$$

5. Рассмотрим $\mu(\{|u| > (1-\varepsilon)\|u\|_\infty\})$, где $\varepsilon > 0$. Из неравенства Маркова следует (Задача № 11.3), что

$$\mu(\{|u| > (1-\varepsilon)\|u\|_\infty\}) \leq \frac{1}{((1-\varepsilon)\|u\|_\infty)^{\frac{1}{p}}}\int |u|^p\,d\mu$$

   Из монотонности функции $p \mapsto a^{\frac{1}{p}}$ $p > 0$

$$\mu(\{|u| > (1-\varepsilon)\|u\|_\infty\})^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{(1-\varepsilon)\|u\|_\infty}\left(\int |u|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\mu(\{|u| > (1-\varepsilon)\|u\|_\infty\})^{\frac{1}{p}}(1-\varepsilon)\|u\|_\infty \leq \|u\|_p$$

6. Выполняя предельный переход при $p \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$ получим, что

$$\|u\|_\infty \leq \lim_{p\to\infty} \|u\|_p$$

7. Тогда из теоремы о двух милиционерах по (6) и (4)

$$\lim_{p\to\infty} \|u\|_p = \|u\|_\infty$$

8. Ч.Т.Д.

Задача № 13.22

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ - пространство с вероятностной мерой. Предположим, что $\|u\|_q < \infty$ при некотором $q > 0$. Показать, что $\lim_{p\to 0} \|u\|_p = exp\left(\int ln\,|u|\, d\mu\right)$.

1. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ - пространство с вероятностной мерой
2. Предположим, что $\|u\|_q < \infty$ при некотором $q > 0$.
3. Заметим, что $\int ln\,|u|^p\, d\mu \leq ln\left(\int |u|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = ln\,\|u\|_p \;\forall p \in \mathbb{R}_+$
   (a) Из неравенства Йенсена при следует, что $\int ln\,(|u|^p)\, d\mu \leq ln\left(\int |u|^p\, d\mu\right)$. Поскольку $x \mapsto ln\,(x)$ вогнута.
   (b) Из свойства логарифма о степени следует цель (3)
4. Положим $a = \|u\|_{\frac{1}{n}}$. Заметим, что $\forall a \geq 0$ выполнено неравенство:

$$ln\,(a) \leq n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right)$$

$$ln\,\|u\|_{\frac{1}{n}} \leq n\left(\int |u|^{\frac{1}{n}}\, d\mu - 1\right)$$

   поскольку μ вероятностная мера, то $\int d\mu = \mu\,(X) = 1$ откуда следует, что

$$ln\,\|u\|_{\frac{1}{n}} \leq \int \frac{|u|^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} d\mu$$

5. Известно, что $\|u\|_q < \infty \iff \int |u|^q\, d\mu < \infty$, поскольку $g\left[\frac{1}{n}\right] := \frac{|u|^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} \notin \mathcal{L}^q$ положим, $f\left[\frac{1}{k}\right] = g\left[\frac{1}{n+m}\right]$ $m \in \mathbb{N}$ так что $f\left[\frac{1}{k}\right] \in \mathcal{L}^q$
6. Поскольку $\forall k\; f\left[\frac{1}{k}\right] \in \mathcal{L}^q$ то по теореме монотонной сходимости как при $|u| \leq 1$ так и при $|u| > 1$ предел и интеграл можно поменять местами и следовательно

$$\lim_{k\to\infty}\left(ln\,\|u\|_{\frac{1}{k}}\right) \leq \lim_{k\to\infty} \int \frac{|u|^{\frac{1}{k}} - 1}{\frac{1}{k}} d\mu = \int \lim_{k\to\infty} \frac{|u|^{\frac{1}{k}} - 1}{\frac{1}{k}} d\mu = \int \lim_{k\to\infty} \frac{|u|^{\frac{1}{k}} - 1}{\frac{1}{k}} d\mu = \int ln\,|u|\, d\mu$$

   где предел находится по правилу Лопиталя

7. По теореме о двух милиционерах следует, что

$$\lim_{k\to\infty}\left(ln\,\|u\|_{\frac{1}{k}}\right)=\int ln\,|u|\,d\mu$$

8. Известно, что $x\mapsto exp\,(x)$, тогда из правила $\lim_{x\to\infty} f\,(g\,(x))=f\left(\lim_{x\to\infty} g\,(x)\right)$, где f непрерывна следует, что

$$exp\lim_{k\to\infty}\left(ln\,\|u\|_{\frac{1}{k}}\right)=\lim_{k\to\infty}\|u\|_{\frac{1}{k}}=\lim_{p\to 0}\|u\|_p=exp\left(\int ln\,|u|\,d\mu\right)$$

9. Ч.Т.Д.

Задача № 13.23

Пусть $(X,\mathcal{A},\mu)$ - измеримое пространство и $1\le p<\infty$. Показать, что $f\in\mathcal{E}\,(\mathcal{A})\cap\mathcal{L}^p\,(\mu)$ тогда и только тогда, когда $f\in\mathcal{E}\,(\mathcal{A})$ и $\mu\,\{f\ne 0\}<\infty$

1. Пусть $(X,\mathcal{A},\mu)$ - измеримое пространство и $1\le p<\infty$.
2. С одной стороны положим, что $f\in\mathcal{E}\,(\mathcal{A})\cap\mathcal{L}^p\,(\mu)$. Это означает, что $f\,(x):=\sum_{i=1}^N y_i\mathbb{1}_{A_i}\,(x)$, где $\forall i\in\overline{1,N}$ и $y_i\in\mathbb{R}$ $N\in\mathbb{N}$ и $\int|f\,(x)|^p\,d\mu<\infty$.
   (a) Из неравенства Иенсена поскольку $p\mapsto x^p$ - выпукла

   $$\left(\sum_{i=1}^N|y_i|\,\mu\,(A_i)\right)^p=\left(\int\left|\sum_{i=1}^N y_i\mathbb{1}_{A_i}\,(x)\right|d\mu\right)^p\le\int\left|\sum_{i=1}^N y_i\mathbb{1}_{A_i}\,(x)\right|^p d\mu<\infty$$

   Поэтому $\mu\,\{f\ne 0\}=\mu\left\{x\in X:\sum_{i=1}^N y_i\mathbb{1}_{A_i}\,(x)\ne 0\right\}<\infty$
3. С другой стороны предположим, что $f\in\mathcal{E}\,(\mathcal{A})$ и $\mu\,\{f\ne 0\}<\infty$
   (a) Поскольку $\forall i\in\overline{1,N}$ $y_i\in\mathbb{R}$, то $y_i\mu\,(A_i)<\infty\iff\mu\,(A_i)<\infty$ и так как $\int fd\mu=\sum_{i=1}^N|y_i|\,\mu\,(A_i)$ то из того факта, что $p\mapsto x^p$ выпукла и $x^p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ следует, что

   $$\left(\sum_{i=1}^N|y_i|\,\mu\,(A_i)\right)^p=\left(\int\left|\sum_{i=1}^N y_i\mathbb{1}_{A_i}\,(x)\right|d\mu\right)^p\le\int\left|\sum_{i=1}^N y_i\mathbb{1}_{A_i}\,(x)\right|^p d\mu=\int|f\,(x)|^p\,d\mu<\infty$$

   Поэтому $f\in\mathcal{L}^p\,(\mu)$
   (b) Откуда следует, что $f\in\mathcal{E}\,(\mathcal{A})\cap\mathcal{L}^p\,(\mu)$
4. Ч.Т.Д.

Задача № 13.24

Пусть $(X,\mathcal{A},\mathbb{P})$ - вероятностное пространство

- Доказать неравенство Йенсена для выпуклых $V:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
- Доказать неравенство Йенсена для вогнутых $\Lambda:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

- Пусть $-\infty \leq a < b \leq \infty$ и $V : (a,b) \to \mathbb{R}$ выпуклая функция. Показать, что для $u : X \to (a,b)$ такой что $u, V(u) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ выполнено $\int u d\mu \in (a,b)$ и $V\left(\int u d\mu\right) \leq \int V(u)\, d\mu$
- Пусть $-\infty \leq a < b \leq \infty$ и $\mathit{\Lambda} : (a,b) \to \mathbb{R}$ вогнутая функция. Показать, что для $u : X \to (a,b)$ такой что $u, V(u) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ выполнено $\int u d\mu \in (a,b)$ и $\int \mathit{\Lambda}(u)\, d\mu \leq \mathit{\Lambda}\left(\int u d\mu\right)$

Доказательство #1

1. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ - вероятностное пространство
2. Положим $u \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ и $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - выпукла. Любая выпуклая функция непрерывна и следовательно $V(u(x))$ - измерима.
3. Положим $\int V(u)\, d\mathbb{P} < \infty$. Рассмотрим линейную функцию $l(x) := \alpha x + \beta \leq V(x)$.
$$l\left(\int u d\mathbb{P}\right) = \alpha \int u d\mathbb{P} + \beta = \int (\alpha u + \beta)\, d\mathbb{P} \leq \int V(x)\, d\mathbb{P}$$
4. Взяв супремум по всем афинным линейным функциям $l \leq V$ подпирающим интеграл снизу получим, что
$$V\left(\int u d\mathbb{P}\right) \leq \int V(x)\, d\mathbb{P}$$
5. Ч.Т.Д.

Доказательство #2

1. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ - вероятностное пространство
2. Положим $u \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ и $\mathit{\Lambda} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - вогнута. Любая вогнутая функция непрерывна ($V(x) = -\mathit{\Lambda}(x)$) и следовательно $-\mathit{\Lambda}(u(x))$ - измерима.
3. Положим $\int V(u)\, d\mathbb{P} < \infty$. Рассмотрим линейную функцию $l(x) := \alpha x + \beta \geq \mathit{\Lambda}(x)$.
$$\int \mathit{\Lambda}(x)\, d\mathbb{P} \leq \int (\alpha u + \beta)\, d\mathbb{P} = \alpha \int u d\mathbb{P} + \beta = l\left(\int u d\mathbb{P}\right)$$
4. Взяв инфимум по всем афинным линейным функциям $l \geq V$ подпирающим интеграл сверху получим, что
$$\int \mathit{\Lambda}(x)\, d\mathbb{P} \leq \mathit{\Lambda}\left(\int u d\mathbb{P}\right)$$
5. Ч.Т.Д.

Доказательство #3 и #4

1. #3 и #4 доказываются аналогично #1 и #2 соответственно.

Задача № 13.25

- Использовать неравенство Йенсена, чтобы доказать неравенство Гёльдера
- Использовать неравенство Йенсена, чтобы доказать неравенство Минковского

Доказательство #1

1. Пусть $\Lambda(x) := x^{\frac{1}{q}}$ $x \geq 0$ - вогнута

2. Положим $w = |f|^p$ и $u = |g|^q |f|^{-p} \mathbb{1}_{\{f \neq 0\}}$ - измеримы и интегрируемы

3. Рассмотрим неравенство 13.14 ii для вогнутых функций $\Lambda : [0, \infty) \to [0, \infty)$

$$\frac{\int \Lambda(u) w d\mu}{\int w d\mu} \leq \Lambda\left(\frac{\int uw d\mu}{\int w d\mu}\right)$$

4. Подинтегральные выражения измеримы. Положим, что интегралы для функций существуют.

5. Испольуя (1) и (2) для подстановки в (3) получим, что

$$\frac{\int |g| |f|^{-\frac{p}{q}} \mathbb{1}_{\{f \neq 0\}} |f|^p d\mu}{\int |f|^p d\mu} \leq \frac{\left(\int |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}}}$$

6. Полагая, что $p^{-1} + q^{-1} = 1$ видим, что $p^{-1} = \frac{q-1}{q}$ откуда следует,

   (a) Что $|f|^{-\frac{p}{q}} |f|^p = |f|^{\frac{p(q-1)}{q}} = |f|$

   (b) И $\left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{q-1}{q}} = \|f\|_p$

   (c) Подставляя 6.a и 6.б в (5) после умножения (6) на знаменатель левой части неравенства получим, что

$$\int |g| |f| \mathbb{1}_{\{f \neq 0\}} d\mu \leq \|g\|_q \|f\|_p$$

7. Поскольку интеграл от нуля равен нулю, то

$$\int |gf| d\mu \leq \|g\|_q \|f\|_p$$

8. Ч.Т.Д.

Доказательство #2

1. Пусть $\Lambda(x) = \left(x^{\frac{1}{p}} + 1\right)^p$

2. Пусть $u = |f|^{-p} |g|^p \mathbb{1}_{\{f \neq 0\}}$ и $w = |f|^p \mathbb{1}_{\{f \neq 0\}}$

3. Рассмотрим неравенство 13.14 ii для вогнутых функций $\Lambda : [0, \infty) \to [0, \infty)$

$$\frac{\int \Lambda(u) w d\mu}{\int w d\mu} \leq \Lambda\left(\frac{\int uw d\mu}{\int w d\mu}\right)$$

$$\frac{\int \left(\left(|f|^{-p} |g|^p \mathbb{1}_{\{f \neq 0\}}\right)^{\frac{1}{p}} + 1\right)^p |f|^p \mathbb{1}_{\{f \neq 0\}} d\mu}{\int |f|^p \mathbb{1}_{\{f \neq 0\}} d\mu} \leq \left(\left(\frac{\int |f|^{-p} |g|^p \mathbb{1}_{\{f \neq 0\}} |f|^p \mathbb{1}_{\{f \neq 0\}} d\mu}{\int |f|^p \mathbb{1}_{\{f \neq 0\}} d\mu}\right)^{\frac{1}{p}} + 1\right)^p$$

$$\frac{\int \frac{(|g|+|f|)^p}{(|f|)^p \mathbb{1}_{\{f\neq 0\}}} |f|^p \, \mathbb{1}_{\{f\neq 0\}} d\mu}{\int |f|^p \, \mathbb{1}_{\{f\neq 0\}} d\mu} \leq \left(\frac{\left(\int |g|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\int |f|^p \, \mathbb{1}_{\{f\neq 0\}} d\mu\right)^{\frac{1}{p}}} + 1 \right)^p$$

$$\frac{\int (|g| + |f|)^p \, d\mu}{\int |f|^p \, \mathbb{1}_{\{f\neq 0\}} d\mu} \leq \left(\frac{\|g\|_p + \|f\|_p}{\left(\int |f|^p \, \mathbb{1}_{\{f\neq 0\}} d\mu\right)^{\frac{1}{p}}} \right)^p$$

$$\frac{\left(\int (|g| + |f|)^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\int |f|^p \, \mathbb{1}_{\{f\neq 0\}} d\mu\right)^{\frac{1}{p}}} \leq \frac{\|g\|_p + \|f\|_p}{\left(\int |f|^p \, \mathbb{1}_{\{f\neq 0\}} d\mu\right)^{\frac{1}{p}}}$$

$$\left(\int (|g| + |f|)^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|g\|_p + \|f\|_p$$

4. Из неравенства треугольника

$$\left(\int (|g + f|)^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \|g + f\|_p \leq \|g\|_p + \|f\|_p$$

5. Ч.Т.Д.