Задача № 1

Пусть Λ - это σ - алгебра.

- Показать, что если $A_1, A_2, ..., A_n \in \Lambda$, то $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n \in \Lambda$

Доказательство:

1. Пусть $A_1, A_2, ..., A_n \in \Lambda$. Λ - это σ - алгебра.
2. Пусть $\forall k \in N, k > n, A_k = \varnothing$
3. Из (2) и (3) следует, что $(A_i)_{i \in N} \in \Lambda$.
4. Из счетной аддитивности σ - алгебры следует, что $\bigcup_{i \in N} A_k = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \Lambda$
5. Следующая цепочка импликаций приводит к доказательству: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \Lambda \xrightarrow{\sum_2} \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} \in \Lambda \xrightarrow{DeMorgan} \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} \in \Lambda \xrightarrow{\sum_2} \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \Lambda$
6. Ч.Т.Д.

- $A \in \Lambda$ тогда и только тогда, когда $\overline{A} \in \Lambda$

Доказательство:

1. С одной стороны. Предположим $A \in \Lambda$. Тогда из $\sum_2$ следует, что $\overline{A} \in \Lambda$
2. С другой стороны. Предположим $\overline{A} \in \Lambda$. Тогда из $\sum_2$ следует, что $(A^c)^c \in \Lambda \Longrightarrow A \in \Lambda$
3. Ч.Т.Д

- Если $A, B \in \Lambda$, то $A - B \in \Lambda$ и $A \Delta B \in \Lambda$

Доказательство:

1. Пусть $A, B \in \Lambda$
2. Мы уже показали, что $A \cap B \in \Lambda$
3. Из $\sum_2$ следует, что $A \cap B^c \in \Lambda$. Из $A \cap B^c = A - B$ и посылки следует, что $A - B \in \Lambda$.
4. По определению $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$
5. Поскольку мы только что показали, что $A, B \in \Lambda \Longrightarrow A - B \in \Lambda$, понятно, что $B - A \in \Lambda$

6. Из счетной аддитивности легко вид $A, B \in \Lambda \Longrightarrow A \cup B \in \Lambda$.
7. Обозначив $A - B = C \in \Lambda$ и $B - A = D \in \Lambda$ из (6) следует, что $C \cup D = (A - B) \cup (B - A) \in \Lambda$
8. Ч.Т.Д

Задача № 2

- Показать, что $\mathcal{A} = \{\varnothing, X, B\}, B \neq X$ не сигма алгебра

Доказательство:

1. Так как $B^c \notin \mathcal{A}$ не выполняется свойство $\sum_2$.

- Пусть $E \subset X$ и $\mathcal{A}$ - σ-алегбра на X. Доказать, что $\mathcal{A}_E := E \cap \mathcal{A} = \{E \cap A : A \in \mathcal{A}\}$ снова сигма алгебра, только на E. (Индуцированная сигма-алгебра)

Доказательство:

1. Рассмотрим $X \in \mathcal{A}$. Поскольку $E \subset X$, тогда $E \cap X = E$ - единица сигма алгебры
2. Пусть $E \cap A \in \mathcal{A}_E$. Рассмотрим его дополнение $E - (E \cap A)$. $E - (E \cap A) = E \cap \overline{(E \cap A)} = E \cap \left(\overline{E} \cup \overline{A}\right) = \left(E \cap \overline{E}\right) \cup \left(E \cap \overline{A}\right) = E \cap \overline{A}$. Поскольку $\overline{A} \in \mathcal{A}$, то $E \cap \overline{A} \in \mathcal{A}_E$
3. Пусть $(E \cap A_n)_{n \in N} \in \mathcal{A}_E$, Рассмотрим счетное объединение $\bigcup_{n \in N} E \cap A_n$. По закону дистрибутивности следует, что $E \cap \bigcup_{n \in N} A_n$. Очевидно, что это элемент $\mathcal{A}_E$
4. Ч.Т.Д

- Пусть $f : X \to X'$. Пусть $\mathcal{A}'$ - сигма алгебра на X'. Показать, что $\mathcal{A} := f^{-1}\left(\mathcal{A}'\right) := \left\{f^{-1}\left(A'\right) : A' \in \mathcal{A}'\right\}$ - сигма алгебра на X

Доказательство

1. Пусть $f : X \to X'$.
2. Пусть $\mathcal{A}'$ - сигма алгебра на X'.
3. Рассмотрим $X' \in \mathcal{A}'$
   (a) Из (1) следует, что $f^{-1} : X' \to X$. Поэтому $X \in \mathcal{A}$
4. Рассмотрим $A' \in \mathcal{A}$'.

(a) Пусть $f^{-1}(A') = A \in \mathcal{A}$.

(b) Рассмотрим отображение $f^{-1}(X - A')$ из (2.6: $f^{-1}(A - B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$) следует, что $f^{-1}(X' - A') = f^{-1}(X') - f^{-1}(A') = X - f^{-1}(A') = X - A = \overline{A}$

5. Пусть $(A'_n)_{n \in N} \in \mathcal{A}$ и $\left(f^{-1}[A'_n]\right)_{n \in N} \in \mathcal{A}$.

   (a) Поскольку $\mathcal{A}'$ - сигма алгебра, следовательно $(A'_n)_{n \in N} \in \mathcal{A}' \Longrightarrow \bigcup_{n \in N} A'_n \in \mathcal{A}'$

   (b) Из (2.6) верно равенство: $\bigcup_{n \in N} f^{-1}(A'_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n \in N} A'_n\right)$

   (c) Тогда из (a) $\bigcup_{n \in N} f^{-1}(A'_n) \in \mathcal{A}$

6. Ч.Т.Д.

Задача № 4

1. Если G - это σ - алгебра, то $G = \sigma(G)$, $\sigma(G)$ - минимальная сигма алгебра
2. Для произвольного включения $A \subset X \Longrightarrow \sigma(\{A\}) = \left\{\varnothing, X, A, A^C\right\}$
3. Если Λ сигма алгебра и $F \subset G \subset \Lambda$ то $\sigma(F) \subset \sigma(G) \subset \sigma(\Lambda) \overset{4.1}{=} \Lambda$

Доказательство 1:

1. $G \subset \sigma(G)$ по теореме 3.4 (ii)
2. Также известно, что $\sigma(G) = \bigcap F$, где F все возможные сигма алгебры, такие что $G \subset F$.
3. G - сигма алгебра и $G \subset F$, тогда одним из элементов $\bigcap F$ является G. Поэтому $G \supset \sigma(G)$
4. Тогда из (1) и (3) $G = \sigma(G)$
5. Ч.Т.Д.

Доказательство 2:

1. Пусть $\sigma(\{A\}) = \left\{\varnothing, X, A, A^C\right\}$
2. Предположим $\{\varnothing\} \notin \sigma(\{A\})$, тогда не выполняется свойство $\sum_2$ для X
3. Предположим $\{X\} \notin \sigma(\{A\})$, тогда не выполняется свойство $\sum_1$
4. Предположим $\{A\} \notin \sigma(\{A\})$, тогда не выполняется Теорема 3.4 **(ii)**
5. Предположим $\{A^c\} \notin \sigma(\{A\})$, тогда не выполняется свойство $\sum_2$ для A
6. Из (2) (3) (4) (5) $\sigma(\{A\})$ - сигма алгебра

7. Добавив произвольное B в $\sigma\left(\{A\}\right)$, и расширяя $\sigma\left(\{A\}\right)$ до Λ, очевидно, что $\sigma\left(\{A\}\right) \subset \Lambda$. Поэтому $\sigma\left(\{A\}\right)$ минимальна

8. Ч .Т. Д.

Доказательство 3:

1. Пусть $G \subset \Lambda$,

2. Пусть $\sigma\left(G\right) = \bigcap A$, где A все возможные сигма алгебры, такие что $G \subset A$. Следовательно одним из A является $\sigma\left(\Lambda\right)$ Поэтому $\sigma\left(G\right) \subset \sigma\left(\Lambda\right)$

3. Пусть $F \subset G$,

4. Пусть $\sigma\left(F\right) = \bigcap B$, где B все возможные сигма алгебры, такие что $G \subset B$. Следовательно одним из B является $\sigma\left(G\right)$ Поэтому $\sigma\left(F\right) \subset \sigma\left(G\right)$

5. Из (2) и (4) следует, что $\sigma\left(F\right) \subset \sigma\left(G\right) \subset \sigma\left(\Lambda\right)$

Задача № 5

Найти сигма алгебры сгенерированные множествами, где $X = [0, 1]$:

1. $A = (0, 1/2)$

2. $A = [0, 1/4)\,, B = (3/4, 1]$

3. $A = [0, 3/4)\,, B = (1/4, 1]$

Решения:

1. $\sigma\left(\{(0, 1/2)\}\right) = \{\varnothing, [0, 1]\,, (0, 1/2)\,, [1/2, 1]\}$

2. $\sigma\left(\{[0, 1/4)\,, (3/4, 1]\}\right) = \{\varnothing, [0, 1]\,, [0, 1/4)\,, (3/4, 1]\,, [1/4, 1]\,, [0, 3/4]\,, [0, 1/4) \cup (3/4, 1]\,, [1/4, 1) \cup [0, 3/4]\}$

3. $\sigma\left(\{[0, 3/4)\,, (1/4, 1]\}\right) = \{\varnothing, [0, 1]\,, [0, 3/4)\,, (1/4, 1]\,, [3/4, 1]\,, [0, 1/4]\,, [0, 1/4] \cup [3/4, 1]\,, (1/4, 3/4)\}$

Задача № 6

Пусть $A_1, A_2, ..., A_N$ непустые множества из X

1. Если A попарно непересекаются и $\bigsqcup_{i=1}^{N} A_i = X$, тогда $\left|\sigma\left(A_1, A_2, ..., A_N\right)\right| = 2^N$

2. Показать, что $\sigma\left(A_1, A_2, ..., A_N\right)$ содержит конечное атомов

Доказательство 1:

1. Пусть $A_1, A_2, ..., A_N$ непустые множества из X
2. Пусть A попарно непересекаются и $\bigsqcup_{i=1}^{N} A_i = X$
3. Пусть сигма алгебра индуцирована A_1. Тогда из (2) следует, что $X = A_1$. И из этого образуется тривиальная сигма алгебра. Ее мощность 2^1
4. Пусть сигма алгебра индуцирована A_1, A_2. Тогда она имеет вид: $\sigma(A_1, A_2) = \{\varnothing, X, A_1, A_2, A_1^c, A_2^c\}$. Ее мощность 2^2
5. Очевидно, что сигма алгебра индукцированная A_1, A_2, A_3 имеет мощность 2^3
6. Поэтому сигма алгебра индуцированная $A_1, A_2, ..., A_N$ имеет мощность 2^N

Доказательство 2:

1. Пусть $A_1, A_2, ..., A_N$ непустые множества из X
2. Пусть A попарно непересекаются и $\bigsqcup_{i=1}^{N} A_i = X$
3. Пусть сигма алгебра индуцирована A_1. Тогда из (2) следует, что $X = A_1$. Это единственный атом
4. Пусть сигма алгебра индуцирована A_1, A_2. Тогда она имеет вид: $\sigma(A_1, A_2) = \{\varnothing, X, A_1, A_2, A_1^c, A_2^c\}$. Она имеет ровно 2 атома
5. Очевидно, что сигма алгебра индукцированная A_1, A_2, A_3 имеет мощность. Она имеет ровно 3 атома
6. Очевидно, что существует биекция между можностью N и числом атомов в индуцированной ими сигма алгебре. Поскольку по условию N - конечно, следовательно число атомов в Λ

Задача № 7

Пусть (X, Λ) - измеримое пространство. Показать, что не существует сигма алгебры $\mathit{\Lambda}$, которая содержит бесконечное счетное число множеств.

Доказательство:

1. Предположим, что $k \in N, A_k$ попарно непересекающиеся и непустые атомы.
2. Предположим $\forall k \in N, A_k \in \mathit{\Lambda}$.

3. Поскольку A_k проиндексирована натуральными числами, следовательно $|\Lambda| \geq |N|$. Однако сигма алгебра замкнута относительно счетных объединений, следовательно элементов в ней больше чем $|N|$. Это значит, что $|\Lambda| > |N|$

4. Следовательно, мощность такой сигма алгебры больше чем счетная

Задача № 8

Найти пример, который показывает, что $\bigcap_{n \in N} U_n$ закрыт, в том случае, если $\forall n \in N, U_n$ - открыт.

Ответ:

- Синглетоны закрыты. $\bigcap_{n \in N} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n \to \infty} \bigcap_{i=1}^{n} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$

Задача № 9

Проверить свойства O_1, O_2, O_3 для открытых множеств в R^n. Является ли O - σ-алгеброй

Доказательство. Часть 1.

1. Пусть $x \in \varnothing$. Тогда по правилу ex falso следует, что $\varnothing$- открыто. **Поэтому** $\varnothing \in O$

2. Пусть $X = R^n$. Поскольку в любой точке R^n можно включить шар с конечным радиусом, следовательно R^n- открыт. **Поэтому** $R^n \in O$

3. Пусть U, V - открыты. По определению, для U существует $\epsilon_1 > 0$ такой что шар $B_{\epsilon_1}(x) \subset U$. Аналогично и для V

4. Пусть $\epsilon = min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$. Следовательно такой шар впишется в пересечение $U \cap V$. **Поэтому** $U \cap V \in O$

5. Предположим$U_{i \in I} \in O$. Поскольку для каждого из $U_{i \in I}$ существует шар с радиусом $\epsilon_i > 0$, такой что $B_{\epsilon_i}(x) \subset U_i$. Зафиксируем такой шар $B_{\epsilon_{i_0}}(x) \subset U_{i_0}$ с минимальным радиусом ϵ_{i_0}.

6. Из (5) следует, что $\forall i \in I, B_{\epsilon_{i_0}}(x) \subset U_i$.

7. Поскольку $U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Тогда по транзитивности из (6) следует, что $B_{\epsilon_{i_0}}(x) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. **Поэтому** $\bigcup_{i \in I} U_i$ **открыто**

8. Ч.Т.Д.

Доказательство. Часть 2.

1. Предположим $A \in O$.

2. Предположим $A \in \Lambda$, где Λ - сигма алгебра.

3. Поскольку сигма алгебра замкнута относительно дополнения, следовательно $A^c \in \Lambda$

4. Поскольку дополнение к открытому множеству закрыто, следовательно $A^c \notin O$

5. Поэтому система открытых множеств не является сигма-алгеброй

Задача № 12

Обозначим $B_r(x)$ как открытый шар в R^n с центром x и радиусом r. Показать, что Борелевские множества $\mathcal{B}(R^n)$, сгенерированны всеми возможными открытыми шарами $\mathcal{B} := \{B_r(x) : x \in R^n, r > 0\}$. Верно ли это для $\mathcal{B}' := \{B_r(x) : x \in Q^n, r \in Q^+\}$?

Доказательство:

1. Чтобы доказать, что Борелевские множества $\mathcal{B}(R^n)$ сгенерированы всеми открытыми шарами $\mathcal{B}$, а также шарами из рациональных точек $\mathcal{B}$', необходимо показать, что $\mathcal{B}(O^n) = \sigma(\mathcal{B}) = \sigma(\mathcal{B}')$

2. **С одной стороны**

3. Очевидно, что $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B} \subset O^n$, тогда из задачи 4, следует, что $\sigma(\mathcal{B}') \subset \sigma(\mathcal{B}) \subset \sigma(O^n)$

4. Покажем, что утверждение $U = \bigcup_{b \in B'} B_{B \subset U}(q)$ верно.
   (a) Пусть U - открыто
   (b) **С одной стороны.**
   (c) По определению (4), верно, что $U \supset \bigcup_{b \in B'} B_{B \subset U}(q)$
   (d) **С другой стороны,** верно следующее $B_{\epsilon/3}(q) \subset B_\epsilon(x)$
      i. Из определения открытого множества: $B_\epsilon(x) \subset U$
      ii. Мы уже задали, что $\epsilon \in R^n$. Однако можно положить, что $r \leq \epsilon$ такое что $\epsilon \in Q^+$
      iii. Поскольку Q^n плотно в R^n мы всегда можем найти такой q, что $|q - x| < \epsilon/3$.
   (e) из (i), (ii) и (iii) верно (d) и также верно и $B_{\epsilon/3}(q) \subset B_\epsilon(x) \subset U$

5. **С другой стороны.**

6. Поскольку произвольный $U \in O^n$ образован объединением всех шаров с центрами в рациональных точках, следовательно по теореме 4 верно, что $O^n \subset \sigma(\mathcal{B}')$

7. из (3) и (6) верно, что $O^n = \sigma(\mathcal{B}')$

8. Аналогично можно показать и для $O^n \subset \sigma(\mathcal{B})$

9. Поэтому $\mathcal{B}(O^n) = \sigma(\mathcal{B}) = \sigma(\mathcal{B}')$

Задача № 13

Пусть $\mathcal{O}$- топология в R^n и пусть $A \subset R^n$. Мы определяем топологию $\mathcal{O}_A$ на A следующим образом: Множество $V \subset A$ называется открытым если $V = U \cap A$, для произвольного $U \in \mathcal{O}$. Такая топология называется индуцированной и ее элементы не обязательно открыты.

- Показать, что $\mathcal{O}_A$ - индуцированная топология на A

Доказательство:

1. Пусть $\mathcal{O}$ - топология на X. Пусть $U \in \mathcal{O}$
2. Очевидно, что $V = \varnothing \cap A \in \mathcal{O}_A$. $V = R^n \cap A \in \mathcal{O}_A$.
3. Пусть $U \cap A \in \mathcal{O}_A$ и $E \cap A \in \mathcal{O}_A$ тогда $(E \cap U) \cap A \in \mathcal{O}_A$ поскольку $E \cap U \in \mathcal{O}$
4. Пусть $i \in I$ и $U_i \cap A \in \mathcal{O}$, тогда $\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) \cap A \in \mathcal{O}_A$, поскольку$\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$

- Пусть $A \in B(R^n)$. Показать, что индуцированная сигма алгебра $A \cap B(R^n)$ совпадает с $\sigma(\mathcal{O}_A)$

Доказательство:

1. Пусть $\mathcal{O}$ - топология на X. Пусть $A \in B(R^n)$
2. Из теоремы 3.7, $\sigma(\mathcal{O}) = B(R^n)$.
3. Тогда индуцированная сигма алгебра $\mathcal{A}_E = A \cap B(R^n) = A \cap \sigma(\mathcal{O}_A)$

Задача № 14

1. Повторить доказательство теоремы 3.4, чтобы показать, что существует минимальный монотонный класс $m(\mathcal{F})$, такой что $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$

Доказательство

1. Чтобы доказать, что минимальный монотонный класс существует, необходимо образовать все возможные пересечения монотонных классов $\mathcal{M}$ таких, что $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$. Для этого необходимо доказать, что пересечение монотонных классов $\mathcal{M}_{i\in I}$ образуют монотонный класс.
2. Пусть $\mathcal{M}_{i\in I}$ монотонные классы. Рассмотрим $\mathcal{M} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{M}_i$. Покажем $\mathcal{M}$ - монотонный класс

(a) Поскольку $\forall i \in I, X \in \mathcal{M}_{i \in I}$, следовательно $X \in \mathcal{M}$

(b) Пусть $(A_n)_{n \in N} \subset \bigcap_{i \in I} \mathcal{M}_i$, тогда $\bigcap_{n \in N} A_n \subset \bigcap_{i \in I} \mathcal{M}_i$, поэтому $\bigcap_{n \in N} A_n \subset \mathcal{M}$

(c) Пусть $(A_n)_{n \in N} \subset \bigcap_{i \in I} \mathcal{M}_i$, тогда $\bigcup_{n \in N} A_n \subset \bigcap_{i \in I} \mathcal{M}_i$, поэтому $\bigcup_{n \in N} A_n \subset \mathcal{M}$

(d) из (a) (b) и (c) следует, что пересечение монотонных классов - монотонный класс

3. Пусть $\varnothing \neq \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$. Положим $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$ множество монотонных классов. Пусть $m(\mathcal{F}) := \bigcap\limits_{\substack{\mathcal{F} \subset \mathcal{M} \\ \mathcal{M} - \text{мон.}}} \mathcal{M}$

4. Поскольку $\mathcal{M}$ - монотонны, следовательно пересечение непусто.

5. Пусть $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}'$ - больший монотонный класс такой что $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}'$. Тогда такой класс является элементом $\bigcap\limits_{\substack{\mathcal{F} \subset \mathcal{M} \\ \mathcal{M} - \text{мон.}}} \mathcal{M}$

6. Из (5) следует, что $m(\mathcal{F})$ - минимален

- Показать, что, если $F \in \mathcal{F} \implies F^c \in \mathcal{F}$, следовательно $m(\mathcal{F})$ также замкнут относительно дополнения

Доказательство:

1. Пусть $m(\mathcal{F})$ - монотонный класс с генератором $\mathcal{F}$.

2. Пусть $\mathcal{F}$- замкнута относительно дополнения. Это значит, что $F \in \mathcal{F} \implies F^c \in \mathcal{F}$,

3. Из (1) и (2) следует, что $F \in m(\mathcal{F}) \implies F^c \in m(\mathcal{F})$

4. Рассмотрим $(A_n)_{n \in N} \subset m(\mathcal{F})$, такие что $A_1 \subset A_2 \subset .... \subset A_n \uparrow A = \bigcup_{n \in N} A_n$

   (a) Из (3) следует, что $\overline{\bigcup_{n \in N} A_n} \in m(\mathcal{F})$

   (b) По закону Де Моргана из (a) следует, что $\bigcap_{n \in N} \overline{A_n} \in m(\mathcal{F})$

   (c) Из (b) следует, что$\left(\overline{A_n}\right)_{n \in N} \in m(\mathcal{F})$

   (d) Тогда По MC2 следует, что $\overline{A} \in m(\mathcal{F})$

5. Рассмотрим $(B_n)_{n \in N} \in m(\mathcal{F})$, такие что $B_1 \supset B_2 \supset .... \supset B_n \downarrow B = \bigcap_{n \in N} B_n \in m(\mathcal{F})$

   (a) Из (3) следует, что $\overline{\bigcap_{n \in N} B_n} \in m(\mathcal{F})$

   (b) По закону Де Моргана из (a) следует, что $\bigcup_{n \in N} \overline{B_n} \in m(\mathcal{F})$

(c) Из (b) следует, что $\overline{B_n} \in m\left(\mathcal{F}\right)$

(d) Тогда По МС1 следует, что$\overline{B} \in m\left(\mathcal{F}\right)$

6. Следовательно $m\left(\mathcal{F}\right)$ монотонен

7. Ч.Т.Д