Задача №3.1

Доказать непосредственно из определения интеграла Ито, что $\int_0^t s dB_s = tB_t - \int_0^t B_s ds$.
Подсказка: $\sum_j \Delta\left(s_j B_j\right) = \sum_j s_j \Delta B_j + \sum_j B_{j+1} \Delta s_j$
Доказательство:

1. По определению интеграла Ито$\int_0^T s\left(t,\omega\right) dB_t\left(\omega\right) = \underset{n\to\infty}{lim} \int_0^T s_n\left(t,\omega\right) dB_t\left(\omega\right)$, где $s_n\left(t,\omega\right)$ - элементарная $t \in [0,\infty)$ $\omega \in \mathbb{R}$
2. Интеграл элементарной функции по случайной Броуновской мере представим как $\int_0^T s_n\left(t,\omega\right) dB_t\left(\omega\right) = \sum_j s_n\left(t_j,\omega\right) \Delta$
Тогда $\underset{n\to\infty}{lim} \int_0^T s_n\left(t,\omega\right) dB_t\left(\omega\right) = \underset{n\to\infty}{lim} \sum_j s_n\left(t_j,\omega\right) \left[B_{t_{j+1}}\left(\omega\right) - B_{t_j}\left(\omega\right)\right]$
3. Рассмотрим $s_n\left(t_j,\omega\right) B_{t_{j+1}}\left(\omega\right) - s_n\left(t_j,\omega\right) B_{t_j}\left(\omega\right)$
4. Заметим, что выполнено следующее:

   $s_n\left(t_j,\omega\right) B_{t_{j+1}}\left(\omega\right) - s_n\left(t_j,\omega\right) B_{t_j}\left(\omega\right) = s_n\left(t_j,\omega\right) B_{t_{j+1}}\left(\omega\right) - s_n\left(t_j,\omega\right) B_{t_j}\left(\omega\right) + s_n\left(t_{j+1},\omega\right) B_{t_{j+1}}\left(\omega\right) - s_n\left(t_{j+1},\omega\right) B_{t_{j+1}}\left(\omega\right)$
5. Мы можем представить (4) как $s_n\left(t_j,\omega\right) \Delta B_{t_j}\left(\omega\right) = \Delta\left[s_n\left(t_j,\omega\right) B_{t_j}\left(\omega\right)\right] - B_{t_{j+1}}\left(\omega\right) \Delta s_n\left(t_j,\omega\right)$. Тогда равенство в (2) преобразуется в к виду: $\underset{n\to\infty}{lim} \sum_j \Delta\left[s_n\left(t_j,\omega\right) B_{t_j}\left(\omega\right)\right] - \underset{n\to\infty}{lim} \sum_j B_{t_{j+1}}\left(\omega\right) \Delta s_n\left(t_j,\omega\right)$
6. Снова воспользовавшись определением интеграла Ито: $\int_0^T s\left(t,\omega\right) dB_t\left(\omega\right) = \underset{n\to\infty}{lim} \int_0^T d\left[s_n\left(t_j,\omega\right) B_{t_j}\left(\omega\right)\right] - \underset{n\to\infty}{lim} \int_0^T B_{t_{j+}}$
$\int_0^T d\left[sB_s\right] - \int_0^T B_s ds = tB_t - \int_0^T B_s ds$
7. Отсюда следует, что $\int_0^t s dB_s = tB_t - \int_0^t B_s ds$
8. Ч.Т.Д

Задача №3.2

Показать, по определению интеграла Ито, что $\int_0^t B_s^2 dB_s = \frac{1}{3} B_t^3 - \int_0^t B_s ds$
Доказательство:

1. Воспользуемся цепочкой равенств:

$$\begin{gathered}
\left(\Delta B_j\right)^3 = \left(B_{j+1} - B_j\right)^3 \\
\left(\Delta B_j\right)^3 = B_{j+1}^3 - 3B_{j+1}^2 B_j + 3B_j^2 B_{j+1} - B_j^3 \\
\left(\Delta B_j\right)^3 = \left(\Delta B_j^3\right) - 3B_{j+1} B_j \left(B_{j+1} - B_j\right) \\
\left(\Delta B_j\right)^3 = \left(\Delta B_j^3\right) - 3\left(B_{j+1} + B_j - B_j\right)\left(B_j\right) \Delta B_j \\
\left(\Delta B_j\right)^3 = \left(\Delta B_j^3\right) - 3\left(\Delta B_j + B_j\right)\left(B_j\right) \Delta B_j \\
\left(\Delta B_j\right)^3 = \left(\Delta B_j^3\right) - 3B_j \left(\Delta B_j\right)^2 - 3B_j^2 \Delta B_j
\end{gathered}$$

2. Мы подразумеваем, что дано некоторое разбиение $\Pi = 0 < t_1 < t_2 < .... < t_i < ....$ Такое разбиение может быть не эквидистантным. Это означает, что $\exists i,j \in \mathbb{N} : |t_{j+1} - t_j| \neq |t_{i+1} - t_i|$. Известен тот факт, что $\underset{\Delta t\to 0}{lim} \sum_j \left(\Delta B_j\right)^3 \leq \underset{\Delta t\to 0}{lim} \underset{j}{max} |\Delta B_j| \sum_j \left(\Delta B_j\right)^2 = 0 \cdot t = 0$. Таким образом верно следующее:

$$\underset{\Delta t\to 0}{lim} \sum_j B_j^2 \Delta B_j = \frac{1}{3} \underset{\Delta t\to 0}{lim} \sum_j \left(\Delta B_j^3\right) - \underset{\Delta t\to 0}{lim} \sum_j B_j \left(\Delta B_j\right)^2$$

3. Покажем, что указанные в (2) пределы представляются в виде $\int_0^t B_s^2 dB_s = \frac{1}{3} B_t^3 - \int_0^t B_s ds$
   (a) Пусть элементарная функция задана как $f_n\left(t,\omega\right) = \sum_j B_j^2\left(\omega\right) \mathbb{1}_{[t_{j+1},t_j)}\left(t\right)$. В таком случае: $\int_0^T f\left(t,\omega\right) dB_t\left(\omega\right) = \underset{n\to\infty}{lim} \int_0^T f_n\left(t,\omega\right) dB_t\left(\omega\right) = \underset{\Delta t\to 0}{lim} \sum_t \int_{t_j}^{t_{j+1}} B_j^2\left(\omega\right) dB_t\left(\omega\right) = \underset{\Delta t\to 0}{lim} \sum_t B_j^2 \Delta B_j$
   (b) Аналогично $f_n\left(t,\omega\right) = 1$. По определению интеграла Ито $\frac{1}{3} \int_0^T dB_t^3\left(\omega\right) = \frac{1}{3} \underset{\Delta t\to 0}{lim} \sum_j \left(\Delta B_j^3\right)$

(c) Также $\int_0^T B_j dB_t^2(\omega) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \sum_j B_j (\Delta B_j)^2$

4. Тогда из (3) следует, что $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \sum_j B_j^2 \Delta B_j = \int_0^t B_s^2 dB_s = \int_0^t B_s^2 dB_s = \frac{1}{3} B_t^3 - \int_0^t B_s ds$

5. Ч.Т.Д.

Задача №3.3

Пусть $X_t : \Omega \to \mathbb{R}^n$ - стохастический процесс. Пусть $\mathcal{H}_t = \mathcal{H}_t^{(X)}$ - сигма-алгебра с генератором $\{X_s(\cdot) : s \le t\}$ (То есть $\left\{\mathcal{H}_t^{(X)}\right\}_{t\ge0}$- фильтрация процесса $\{X_t\}_{t\ge0}$)

1. Доказать утверждение. Если X_t - мартингал относительно некоторой фильтрации $\{\mathcal{N}_t\}_{t\ge0}$, тогда X_t - мартингал относительно собственной фильтрации $\left\{\mathcal{H}_t^{(X)}\right\}_{t\ge0}$
2. Показать, что если X_t - мартингал относительно $\mathcal{H}_t^{(X)}$, тогда $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0]\ \forall t \ge 0$
3. Показать пример стохастического процесса X_t удовлетворяющего условию $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0]\ \forall t \ge 0$, который не является мартингалом относительно собственной фильтрации

Доказательство #1:

1. Пусть $X_t : \Omega \to \mathbb{R}^n$ - стохастический процесс
2. Пусть $\mathcal{H}_t = \mathcal{H}_t^{(X)}$ - сигма-алгебра с генератором $\{X_s(\cdot) : s \le t\}$
3. Пусть X_t - мартингал относительно некоторой фильтрации $\{\mathcal{N}_t\}_{t\ge0}$
4. По определению стохастический процесс $\{X_t\}_{t\ge0}$ на пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ с вероятностной мерой $\mathbb{P}$ называется мартингалом относительно фильтрации $\{\mathcal{N}_t\}_{t\ge0}$, если выполнены следующие условия:
   (a) X_t измерима относительно $\mathcal{N}_t$ для всех t
   (b) $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$ для всех t
   (c) $\mathbb{E}[X_s|\mathcal{N}_t] = X_t\ \forall s \ge t$
5. Поскольку $\{X_s(\cdot) : s \le t\}$ генератор $\mathcal{H}_t$. Это означает, что $\{X_s(\cdot) : s \le t\} \subset \mathcal{H}_t$ то $X_t^{-1}(\omega) \in \mathcal{H}_t$. Следовательно, выполнено 4.a
6. Поскольку $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$ - безусловное ожидание, то выполнено 4.b
7. Заметим, что $\sigma\{X_s(\cdot) : s \le t\} = \{\mathcal{H}_t\}_{t\ge0} \subset \{\mathcal{N}_t\}_{t\ge0}$, из минимальности $\{\mathcal{H}_t\}_{t\ge0}$. Тогда, выполняется определение условного ожидания:
   (a) По определению $\int_N \mathbb{E}[X_s|\mathcal{N}_t] d\mathbb{P} = \int_N X_t d\mathbb{P}\ \forall s \ge t\ \forall N \in \mathcal{N}_t$, тогда, поскольку $\{\mathcal{H}_t\}_{t\ge0} \subset \{\mathcal{N}_t\}_{t\ge0}$, это и выполняется относительно $\{\mathcal{H}_t\}_{t\ge0}$
8. Ч.Т.Д.

Доказательство #2:

1. Пусть X_t - мартингал относительно $\mathcal{H}_t$. Зафиксируем некоторый $s \ge t$, тогда из “башенного” свойства условного ожидания $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X_s|\mathcal{H}_t]] = \mathbb{E}[X_t]$. Аналогично и для $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X_s|\mathcal{H}_0]] = \mathbb{E}[X_0]$. Поэтому $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0]$. Другим аргументом будет то, что X_s не зависит от $\mathcal{H}_t$ и $\mathcal{H}_0$
2. Ч.Т.Д.

Решение #3:

1. Пусто

Задача №3.4

Проверить, что следующие процессы мартингалы (или не мартингалы) относительно потока сигма-алгебра $\{\mathcal{F}_t\}$

1. $X_t = B_t + 4t$
2. $X_t = B_t^2$
3. $X_t = t^2 B_t - 2\int_0^T B_t dt$
4. $X_t = B_1(t) B_2(t)$, где $(B_1(t), B_2(t))$ - двумерное Броуновское движение

Доказательство #1:

1. Покажем, что $X_t = B_t + 4t$ - не мартингал

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_s|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}[B_s + 4s|\mathcal{F}_t] & \\ \mathbb{E}[X_s|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}[B_s|\mathcal{F}_t] + \mathbb{E}[4t|\mathcal{F}_t] & \text{(Аддитивность У.М.О.)} \\ \mathbb{E}[X_s|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}[B_s|\mathcal{F}_t] + 4t & \text{Независимость } 4t \text{ от } \mathcal{F}_t \end{aligned}$$

Доказательство #2:

1. Покажем, что $X_t = B_t^2$ - не мартингал $s > t$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_s|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}\left[B_s^2|\mathcal{F}_t\right] \\ \mathbb{E}[X_s|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}\left[B_s^2 + 2B_sB_t + B_t^2 - 2B_sB_t - B_t^2|\mathcal{F}_t\right] \\ \mathbb{E}[X_s|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}\left[(B_s - B_t)^2 + 2B_sB_t - B_t^2|\mathcal{F}_t\right] \\ \mathbb{E}[X_s|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}\left[(B_s - B_t)^2 + 2B_sB_t - B_t^2|\mathcal{F}_t\right] + 2\mathbb{E}[B_sB_t|\mathcal{F}_t] - \mathbb{E}\left[B_t^2|\mathcal{F}_t\right] \quad \text{Аддитивность УМО} \end{aligned}$$

2. Поскольку $\forall t > 0$ B_t $\mathcal{F}_t$ измерима , а B_t - мартингал, то $\mathbb{E}[B_sB_t|\mathcal{F}_t] = B_t\mathbb{E}[B_s|\mathcal{F}_t] = B_t^2$.
3. Также $\mathbb{E}\left[B_t^2|\mathcal{F}_t\right] = B_t\mathbb{E}[B_t|\mathcal{F}_t] = B_t^2$ Поскольку B_t $\mathcal{F}_t$ измерима $\forall t > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_s|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}\left[(B_s - B_t)^2|\mathcal{F}_t\right] + B_t^2 & \text{из (2) и (3)} \\ \mathbb{E}[X_s|\mathcal{F}_t] &= |s - t| + B_t^2 & \text{Независимость приращений Броуновского движения и определение дисперси} \end{aligned}$$

4. Таким образом $X_t = B_t^2$ - не мартингал.

Доказательство #3:

1. Покажем, что - мартингал$X_t = t^2B_t - 2\int_0^t sB_s ds$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_s|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}\left[s^2B_s - 2\int_0^s uB_u du|\mathcal{F}_t\right] \\ \mathbb{E}[X_s|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}\left[s^2B_s + t^2B_t - t^2B_t - 2\int_0^t uB_u du - 2\int_t^s uB_u du|\mathcal{F}_t\right] \\ \mathbb{E}[X_s|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}\left[t^2B_t - 2\int_0^t uB_u du|\mathcal{F}_t\right] + \mathbb{E}\left[s^2B_s - t^2B_t|\mathcal{F}_t\right] - 2\mathbb{E}\left[\int_t^s uB_u du|\mathcal{F}_t\right] \end{aligned}$$

2. Заметим, что B_t и $\int_0^t uB_u du$ $\mathcal{F}_t$ измеримы, тогда $\mathbb{E}\left[t^2B_t - 2\int_0^t uB_u du|\mathcal{F}_t\right] = t^2B_t - 2\int_0^t uB_u du$
3. $\mathbb{E}\left[s^2B_s - t^2B_t|\mathcal{F}_t\right] \overset{\text{линейн.}}{=} s^2\mathbb{E}[B_s|\mathcal{F}_t] - t^2\mathbb{E}[B_t|\mathcal{F}_t] = \left(s^2 - t^2\right)B_t$ поскольку B_t - мартингал
4. $\mathbb{E}\left[\int_t^s uB_u du|\mathcal{F}_t\right] \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty}\sum_{k=i}^{n-1} u\left(\frac{kT}{n}, \omega\right)\left[B\left(\frac{(k+1)T}{n}, \omega\right) - B\left(\frac{kT}{n}, \omega\right)\right]|\mathcal{F}_t\right] = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=i}^{n-1} u\left(\frac{kT}{n}, \omega\right)\mathbb{E}\left[B\left(\frac{(k+1)T}{n}, \omega\right) - \right.$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\sum_{k=i}^{n-1} u\left(\frac{kT}{n}, \omega\right)\mathbb{E}\left[B\left(\frac{(k+1)T}{n}, \omega\right) - B\left(\frac{kT}{n}, \omega\right)|\mathcal{F}_t\right] &= \int_t^s u\mathbb{E}[B_u|\mathcal{F}_t] du \\ \int_t^s u\mathbb{E}[B_u|\mathcal{F}_t] du = -\int_t^s u\mathbb{E}[B_t - B_u|\mathcal{F}_t] du &+ \int_t^s u\mathbb{E}[B_t|\mathcal{F}_t] du \\ \int_t^s u\mathbb{E}[B_u|\mathcal{F}_t] du &= B_t\frac{s^2 - t^2}{2} \end{aligned}$$

5. Собирая (2), (3), и (4) вместе и подставляя в (1) получим, что $\mathbb{E}[X_s|\mathcal{F}_t] = X_t + \left(s^2 - t^2\right)B_t - B_t\left(s^2 - u^2\right) = X_t$
6. Ч.Т.Д.

Доказательство #4:

1. Поскольку $B_1(t)$ и $B_2(t)$ - не зависимы и мартингалы, то $\mathbb{E}[B_1(s)B_2(s)|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[B_1(s)|\mathcal{F}_t]\mathbb{E}[B_2(s)|\mathcal{F}_t] = B_1(t)B_2(t)$
2. Ч.Т.Д.

Задача №3.5

Показать, что $X_t = B_t^2 - t$ - мартингал

$$\mathbb{E}[X_s|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}\left[B_s^2 - s|\mathcal{F}_t\right]$$
$$\mathbb{E}[X_s|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}\left[B_s^2 + B_t^2 - B_t^2 - 2B_sB_t + 2B_sB_t - s|\mathcal{F}_t\right]$$
$$\mathbb{E}[X_s|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}\left[(B_s - B_t)^2|\mathcal{F}_t\right] - \mathbb{E}\left[B_t^2|\mathcal{F}_t\right] + 2\mathbb{E}[B_sB_t|\mathcal{F}_t] - s$$
$$\mathbb{E}[X_s|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}\left[(B_s - B_t)^2\right] - B_t^2 + 2B_t^2 - s$$
$$\mathbb{E}[X_s|\mathcal{F}_t] = s - t - B_t^2 + 2B_t^2 - s$$
$$\mathbb{E}[X_s|\mathcal{F}_t] = B_t^2 - t$$

Задача №3.6

Показать, что $N_s = B_s^3 - 3sB_s$ - мартингал

$$\mathbb{E}[N_s|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}\left[B_s^3 - 3sB_s|\mathcal{F}_t\right]$$
$$\mathbb{E}[N_s|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}\left[(B_t + (B_s - B_t))^3 - 3s(B_t + (B_s - B_t))|\mathcal{F}_t\right]$$
$$\mathbb{E}[N_s|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}\left[B_t^3 + 3B_t^2(B_s - B_t) + 3B_t(B_s - B_t)^2 + (B_s - B_t)^3 - 3sB_t - 3s(B_s - B_t)|\mathcal{F}_t\right]$$
$$\mathbb{E}[N_s|\mathcal{F}_t] = B_t^3 + 3B_t^2\mathbb{E}[(B_s - B_t)|\mathcal{F}_t] + 3B_t\mathbb{E}\left[(B_s - B_t)^2|\mathcal{F}_t\right] + \mathbb{E}\left[(B_s - B_t)^3|\mathcal{F}_t\right] - 3sB_t - 3s\mathbb{E}[(B_s - B_t)|\mathcal{F}_t]$$
$$\mathbb{E}[N_s|\mathcal{F}_t] = B_t^3 + 3B_t^2\mathbb{E}[(B_s - B_t)] + 3B_t\mathbb{E}\left[(B_s - B_t)^2\right] + \mathbb{E}\left[(B_s - B_t)^2\right]\mathbb{E}[(B_s - B_t)] - 3sB_t - 3s\mathbb{E}[(B_s - B_t)]$$
$$\mathbb{E}[N_s|\mathcal{F}_t] = B_t^3 + 3B_t(s - t) - 3sB_t$$
$$\mathbb{E}[N_s|\mathcal{F}_t] = B_t^3 - 3tB_t$$

Задача №3.7

Одним из известных результатов является следующее:

$$n! \int\limits_{0 \le u_1 \le \dots \le u_n \le t} \dots \left(\int \left(\int dB_{u_1}\right) dB_{u_2}\right) \dots dB_{u_n} = t^{\frac{n}{2}} h_n\left(\frac{B_t}{\sqrt{t}}\right)$$

$$h_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$

- Проверить, что все из этих n интегралов Ито удовлетворяют требованиям определения 3.1.4 а именно:

Пусть $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S,T)$ - класс функций вида: $f(t,\omega) : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$

1. $(t,\omega) \to f(t,\omega)$ $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ измерима
2. $f(t,\omega)$ $\mathcal{F}_t$ - адаптирована
3. $\mathbb{E}\left[\int_S^T f(t,\omega)^2 dt\right] < \infty$

Доказательство #1

1. Известно, что $\int\limits_{0 \le u_1 \le \dots \le u_n \le t} \dots \left(\int \left(\int dB_{u_1}\right) dB_{u_2}\right) \dots dB_{u_n} = \frac{1}{n!} t^{\frac{n}{2}} h_n\left(\frac{B_t}{\sqrt{t}}\right)$, где $h_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$
2. Из следствия 8.11 (Shilling) произведение и сумма измеримых функций измерима, также известен, тот факт, что константа также измерима. Заметим, что $\frac{1}{n!} t^{\frac{n}{2}} h_n\left(\frac{B_t}{\sqrt{t}}\right)$ - некоторый полином конечной степени от $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ измеримой функции B_t умноженого на измеримую константу $\frac{1}{n!} t^{\frac{n}{2}} < \infty$. Таким образом интеграл в (1) является $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ - измеримым для любых $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0,\infty) \times \Omega$

3. Ч.Т.Д

Доказательство #2

1. Известно, что $\int\limits_{0\le u_1\le ....\le u_n\le t}...\left(\int\left(\int dB_{u_1}\right)dB_{u_2}\right)...dB_{u_n}=\frac{1}{n!}t^{\frac{n}{2}}h_n\left(\frac{B_t}{\sqrt{t}}\right)$, где $h_n\left(x\right)=\left(-1\right)^n e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$

2. Из следствия 8.11 (Shilling) произведение и сумма измеримых функций измерима, также известен, тот факт, что константа также измерима. Заметим, что $\frac{1}{n!}t^{\frac{n}{2}}h_n\left(\frac{B_t}{\sqrt{t}}\right)$ - некоторый полином конечной степени от $\mathcal{F}_t$ измеримой функции B_t умноженого на измеримую константу $\frac{1}{n!}t^{\frac{n}{2}}<\infty$. Таким образом интеграл в (1) является $\mathcal{F}_t$ - измеримым для любых $n\in\mathbb{N}$, и некоторого фиксированного $t\in[0,\infty)$

3. Ч.Т.Д

Доказательство #3

1. Заметим, что $f\left(t,\omega\right)=1$, поэтому $\mathbb{E}\left[\int_0^T\int_0^T...\int_0^T f\left(t,\omega\right)^2 dt_1dt_2....dt_n\right]=T^n<\infty$

- Проверить указанный выше результат для $n=1,2,3$ используя результаты в примере 3.1.9 и задаче 3.2

Доказательство:

1. При $n=1$: $1!\int_0^t dB_s=B_t=\sqrt{t}h_1\left(\frac{B_t}{\sqrt{t}}\right)$

2. При $n=2$: $2!\int_0^t B_sdB_s=2!\left(\frac{1}{2}B_t^2-\frac{1}{2}t\right)=B_t^2-t=th_2\left(\frac{B_t}{\sqrt{t}}\right)=t\left(\frac{B_t^2}{t}-1\right)=B_t^2-t$ согласно примеру 3.1.9

3. При $n=3$

   (a) $\frac{3!}{2!}\int_0^t\left(B_s^2-s\right)dB_s=3\left(\int_0^t B_s^2dB_s-\int_0^t sdB_s\right)=3\left(\frac{1}{3}B_t^3-\int_0^t B_sds-\int_0^t sdB_s\right)=3\left(\frac{1}{3}B_t^3-\int_0^t B_sds-tB_t+\int_0^t B_sds\right)$ $B_t^3-3tB_t$ Задачи 3.1 и 3.2

   (b) $t^{\frac{3}{2}}h_2\left(\frac{B_t}{\sqrt{t}}\right)=B_t^3-3tB_t$ по определению полинома Эрмита

- Используя предыдущую задачу показать, что $B_t^3-3tB_t$ - мартингал

Доказательство:

1. Пусто

Задача №3.8

- Пусть Y действительнозначная случайная величина на $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, такая, что $\mathbb{E}\left[|Y|\right]<\infty$. Пусть $M_t=\mathbb{E}\left[Y|\mathcal{F}_t\right]$ $\forall t\ge 0$. Показать, что M_t - мартингал.

Доказательство:

1. Пусть Y действительнозначная случайная величина на $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, такая, что $\mathbb{E}\left[|Y|\right]<\infty$

2. $\forall t\ge 0$ Пусть $M_t=\mathbb{E}\left[Y|\mathcal{F}_t\right]$

3. Необходимо показать, что $\mathbb{E}\left[M_s|\mathcal{F}_t\right]=M_t$, M_t измерима относительно $\mathcal{F}_t$ и $\mathbb{E}\left[|M_t|\right]<\infty$ $\forall s\ge t,t\ge 0$

   (a) $\mathbb{E}\left[Y|\mathcal{F}_t\right]$ является $\mathcal{F}_t$ измеримой по определению

   (b) По условию $\mathbb{E}\left[|Y|\right]<\infty$. Таким образом $\mathbb{E}\left[|M_t|\right]=\mathbb{E}\left[|\mathbb{E}\left[Y|\mathcal{F}_t\right]|\right]\le\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[|Y|\,|\mathcal{F}_t\right]\right]=\mathbb{E}\left[|Y|\right]<\infty$

   (c) Поскольку $\forall s\ge t$ $\mathcal{F}_t\subset\mathcal{F}_s$ из башенного свойства условного ожидания следует, что $\mathbb{E}\left[M_s|\mathcal{F}_t\right]=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Y|\mathcal{F}_s\right]|\mathcal{F}_t\right]=\mathbb{E}\left[Y|\mathcal{F}_t\right]=M_t$

4. Ч.Т.Д.

- Пусть M_t $t\ge 0$ действительнозначный $\mathcal{F}_t$ - мартингал, такой, что $\underset{t\ge 0}{sup}\mathbb{E}\left[|M_t|^p\right]\le\infty$ $\forall p>1$. Показать, что существует некоторая $Y\in\mathcal{L}^1\left(\mathbb{P}\right)$ такая, что $M_t=\mathbb{E}\left[Y|\mathcal{F}_t\right]$

Доказательство:

1. Пусть M_t $t \geq 0$ действительнозначный $\mathcal{F}_t$ - мартингал, такой, что $\underset{t \geq 0}{sup} \mathbb{E}\left[|M_t|^p\right] \leq \infty \ \forall p > 1$

2. Следствие C.7 утверждает, что, если M_t непрерывный мартингал такой, что $\underset{t \geq 0}{sup} \mathbb{E}\left[|M_t|^p\right] \leq \infty \ \forall p > 1$, тогда существует некоторая $M \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ такая, что $M_t \to M$ почти всюду по мере $\mathbb{P}$ и $\int |M_t - M| \, d\mathbb{P} \to 0$ при $t \to \infty$. Отсюда следует, что $t \to \infty$ $\int |M_t - Y| \, d\mathbb{P} \to 0$

3. Из аддитивности интеграла и также неравенства треугольника для интегралов известно, что $\underset{t \to \infty}{lim} \left|\int M_t d\mathbb{P} - \int Y d\mathbb{P}\right| =$ $\underset{t \to \infty}{lim} \left|\int M_t - Y d\mathbb{P}\right| \leq \underset{t \to \infty}{lim} \int |M_t - Y| \, d\mathbb{P} \leq 0$. Т.е $\underset{t \to \infty}{lim} \left|\int M_t d\mathbb{P} - \int Y d\mathbb{P}\right| = 0 \implies \int \underset{t \to \infty}{lim} M_t d\mathbb{P} = \int Y d\mathbb{P}$.

4. По условию $Y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$

5. По определению мартингала и теореме 10.3 (Shilling) $|M_t| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P}) \iff M_t \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$

6. По определению У.М.О $\int_B \underset{t \to \infty}{lim} M_t d\mathbb{P} = \int_B Y d\mathbb{P} = \int_B \mathbb{E}\left[Y|\mathcal{F}_t\right] d\mathbb{P}$, где $B \in \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ - сигма алгебра, на котором определена вероятностная мера. Откуда следует, из следствия 11.7 (Shilling), что $\mathbb{E}\left[Y|\mathcal{F}_t\right] = \underset{t \to \infty}{lim} M_t$ почти всюду.

7. Ч.Т.Д.

Задача №3.9

Найти интеграл Стратоновича $\int_0^t B_s \circ dB_s$ и сравнить его с интегралом Ито $\int_0^t B_s dB_s$

1. Рассмотрим интеграл Стратоновича $\int_0^t B_s \circ dB_s$. Положим $B_0 = 0$. Известен тот факт, что в отличие от интеграла Ито интеграл Стратоновича использует "съём" значения подинтегрального выражения на середине интервала разбиения.

2. $\int_0^t B_s \circ dB_s = \underset{\Delta t_j \to 0}{lim} \sum_j B_{j^*} \Delta B_j$.

3. Рассмотрим выражение под суммой:

$$B_{j^*} \Delta B_j = \frac{1}{2}\left(B_{j+1} + B_j\right)\left(B_{j+1} - B_j\right)$$
$$B_{j^*} \Delta B_j = \frac{1}{2}\left(B_{j+1}^2 - B_j^2 + 2B_{j+1}B_j - 2B_{j+1}B_j + B_j^2 - B_j^2\right)$$
$$B_{j^*} \Delta B_j = \frac{1}{2}\left(\left(B_{j+1}^2 - 2B_{j+1}B_j + B_j^2\right) + 2B_j\left(B_{j+1} - B_j\right)\right)$$
$$B_{j^*} \Delta B_j = \frac{1}{2}\left(\Delta B_j\right)^2 + B_j \Delta B_j$$

4. Из примера 3.1.9 $B_j \Delta B_j = \frac{1}{2}\Delta\left(B_j^2\right) - \frac{1}{2}\left(\Delta B_j\right)^2$ тогда $B_{j^*} \Delta B_j = \frac{1}{2}\left(\Delta B_j\right)^2 + B_j \Delta B_j = \frac{1}{2}\left(\Delta B_j\right)^2 + \frac{1}{2}\Delta\left(B_j^2\right) - \frac{1}{2}\left(\Delta B_j\right)^2 = \frac{1}{2}\Delta\left(B_j^2\right)$

5. Подставляем выражение из (4) обратно в (2) получим, что $\underset{\Delta t_j \to 0}{lim} \sum_j B_{j^*} \Delta B_j = \underset{\Delta t_j \to 0}{lim} \sum_j \frac{1}{2}\Delta\left(B_j^2\right) = \frac{1}{2}B_t^2$

6. Таким образом интеграл Стратоновича $\int_0^t B_s \circ dB_s = \frac{1}{2}B_t^2$

Задача №3.10

Пусть $\mathbb{E}\left[|f(s,\cdot) - f(t,\cdot)|^2\right] \leq K|s-t|^{1+\epsilon}$ $\exists K < \infty, \exists \epsilon > 0$ $s \geq 0, t \leq T$. Доказать, что $\int_0^T f(t,\omega) \, dB_t = \underset{\Delta t_j \to 0}{lim} \sum_j f\left(t_j', \omega\right) \Delta$ (Предел в $\mathcal{L}_1(\mathbb{P})$) $\forall t_j' \in [t_j, t_{j+1}]$. В частности $\int_0^T f(t,\omega) \, dB_t = \int_0^T f(t,\omega) \circ dB_t$

Доказательство:

1. Пусть дана $f : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что $\exists K < \infty, \exists \epsilon > 0$ при $s \geq 0$, $t \leq T$ выполнено неравенство $\mathbb{E}\left[|f(s,\cdot) - f(t,\cdot)|^2\right] \leq K|s-t|^{1+\epsilon}$

2. Рассмотрим $\mathbb{E}\left[\left|\sum_j f(t_j,\omega) \Delta B_j - \sum_j f\left(t_j',\omega\right) \Delta B_j\right|\right]$. Рассмотрим все возможные разбиения оси t для счетного набора $t_j' \in [t_j, t_{j+1}]$. Если мы покажем, что для набольшего по длине элемента разбиения $t_j' \in [t_j, t_{j+1}]$ выполнено (1), то мы покажем, что для всех остальных также выполнено (1)

3. Зафиксируем $[t_j,t_{j+1}]$ такой что мера Лебега его максимальна $\underset{j}{max}\left(\lambda\left[t_j,t_{j+1}\right]\right)=\underset{j}{max}\Delta t_j$ В таком случае рассмотрим $\mathbb{E}\left[\left|f\left(t_j,\omega\right)\Delta B_j-f\left(t'_j,\omega\right)\Delta B_j\right|\right]$ для фиксированного j. $t'_j\in[t_j,t_{j+1}]$

4. Заметим, что $\mathbb{E}\left[\left|f\left(t_j,\omega\right)\Delta B_j-f\left(t'_j,\omega\right)\Delta B_j\right|\right]\leq\mathbb{E}\left[\left|f\left(t_j,\omega\right)-f\left(t'_j,\omega\right)\right|\left|\Delta B_j\right|\right]=\mathbb{E}\left[\left|f\left(t_j,\omega\right)-f\left(t'_j,\omega\right)\right|\right]\mathbb{E}\left[\left|\Delta B_j\right|\right]$ поскольку инкременты Броуновского движения не зависимы.

5. Более того $\mathbb{E}\left[\left|f\left(t_j,\omega\right)-f\left(t'_j,\omega\right)\right|\right]\mathbb{E}\left[\left|\Delta B_j\right|\right]=\sqrt{\mathbb{E}\left[\left|f\left(t_j,\omega\right)-f\left(t'_j,\omega\right)\right|\right]^2\mathbb{E}\left[\left|\Delta B_j\right|\right]^2}$ и из неравенства Йенсена следует, что $\sqrt{\mathbb{E}\left[\left|f\left(t_j,\omega\right)-f\left(t'_j,\omega\right)\right|\right]^2\mathbb{E}\left[\left|\Delta B_j\right|\right]^2}\leq\sqrt{\mathbb{E}\left[\left|f\left(t_j,\omega\right)-f\left(t'_j,\omega\right)\right|^2\right]\mathbb{E}\left[\left|\Delta B_j\right|^2\right]}$ поскольку $x\to x^2$ - выпуклая.

6. Ожидание инкрементов Броуновского движения равно приращению по времени $\mathbb{E}\left[\left|\Delta B_j\right|^2\right]=\underset{j}{max}\Delta t_j$

7. Тогда кобинируя (1) (5) и (6) получим, что $\sqrt{\mathbb{E}\left[\left|f\left(t_j,\omega\right)-f\left(t'_j,\omega\right)\right|^2\right]\mathbb{E}\left[\left|\Delta B_j\right|^2\right]}\leq\sqrt{K\left|t_j-t'_j\right|^{1+\epsilon}\underset{j}{max}\Delta t_j}$

8. Поскольку $\left|t_j-t'_j\right|\leq\left|t_{j+1}-t_j\right|=\underset{j}{max}\Delta t_j$ то $\sqrt{K\underset{j}{max}\Delta t_j^2\left(\underset{j}{max}\Delta t_j\right)^{\epsilon}}\leq\sqrt{K}\left(\underset{j}{max}\Delta t_j\right)^{1+\epsilon}$ $\forall\epsilon>0$. Отсюда следует, что$\sqrt{K}\left(\underset{j}{max}\Delta t_j\right)^{1+\epsilon}\to 0$ при $\Delta t_j\to 0$. Возвращаясь к аргументу из (2) мы показали, что $\int_0^T f\left(t,\omega\right)dB_t=\lim\limits_{\Delta t_j\to 0}\sum_j f\left(t'_j,\omega\right)\Delta B_j$

9. Ч.Т.Д.

Задача №3.12

1. Использовать 3.3.6. чтобы преобразовать дифференциальное уравнение Стратоновича в дифференциальное уравнение Ито.
   (a) $dX_t=\gamma X_t dt+\alpha X_t\circ dB_t$
   (b) $dX_t=sinX_t cosX_t dt+\left(t^2+cosX_t\right)\circ dB_t$

Решение:

1. По определению интеграл Стратоновича это интеграл вида: $X_t=X_0+\int_0^t b\left(s,X_s\right)ds+\int_0^t\sigma\left(s,X_s\right)\circ dB_s$

2. Интеграл Стратоновича совпадает со следующей формой интеграла Ито: $X_t=X_0+\int_0^t b\left(s,X_s\right)ds+\frac{1}{2}\int_0^t\sigma'\left(s,X_s\right)_{X_s}\sigma$ ($\int_0^t\sigma\left(s,X_s\right)dB_s$

3. Равенство в (2) имплицирует за собой следующую кратку форму записи: $dX_t=b\left(t,X_t\right)dt+\frac{1}{2}\sigma'\left(t,X_t\right)_{X_t}\sigma\left(t,X_t\right)dt+\sigma\left(t,X_t\right)dB_t$

4. Рассмотрим (a)
   (a) В этом случае $b\left(s,X_s\right)=\gamma X_t$ и $\sigma\left(s,X_s\right)=\alpha X_t$ и $\sigma'\left(s,X_s\right)_{X_s}=\alpha$
   (b) Из 4.1 и (3) следует, что $dX_t=\gamma X_t dt+\frac{1}{2}\alpha^2X_t dt+\alpha X_t dB_t=\left(\gamma+\frac{1}{2}\alpha^2X_t\right)dt+\alpha X_t dB_t$

5. Рассмотрим (b)
   (a) В этом случае $b\left(s,X_s\right)=sinX_s cosX_s$ и $\sigma\left(s,X_s\right)=s^2+cosX_s$ и $\sigma'\left(s,X_s\right)_{X_s}=-sinX_s$
   (b) Из 5.1 и (3) следует, что $dX_t=sinX_t cosX_t dt-\frac{1}{2}sinX_t\left(t^2+cosX_t\right)dt+\left(t^2+cosX_t\right)dB_t=\frac{1}{2}sinX_t\left(cosX_t-t^2\right)dt+\left(t^2+cosX_t\right)dB_t$

1. Использовать 3.3.6. чтобы преобразовать дифференциальное уравнение Ито в дифференциальное уравнение Стратоновича.
   (a) $dX_t=rX_t dt+\alpha X_t dB_t$

(b) $dX_t = 2e^{-X_t}dt + X_t^2 dB_t$

Решение:

1. Интеграл Стратоновича совпадает со следующей формой интеграла Ито: $X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma'(s, X_s)_{X_s} \sigma($ $\int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s$
2. По определению интеграл Стратоновича это интеграл вида: $X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) \circ dB_s$
3. Рассмотрим (а)
   (a) В этом случае, поскольку $\sigma(t, X_t) = \alpha X_t$ то $b(t, X_t) + \frac{1}{2}\sigma'(t, X_t)_{X_t} \sigma(t, X_t) = b(t, X_t) + \frac{1}{2}\alpha^2 X_t = rX_t \implies b(t, X_t) = X_t\left(r - \frac{1}{2}\alpha^2\right)$
   (b) Используя (2) и 3.a получим, что $dX_t = \left(r - \frac{1}{2}\alpha^2\right) X_t dt + \alpha X_t \circ dB_t$
4. Рассмотрим (б)
   (a) В этом случае, поскольку $\sigma(t, X_t) = X_t^2$, то $b(t, X_t) + \frac{1}{2}\sigma'(t, X_t)_{X_t} \sigma(t, X_t) = b(t, X_t) + X_t^3 = 2e^{-X_t} \implies b(t, X_t) = 2e^{-X_t} - X_t^3$
   (b) Используя (2) и 4.a получим, что $dX_t = \left(2e^{-X_t} - X_t^3\right) dt + X_t^2 \circ dB_t$

Задача №3.13

Случайный процесс $X_t(\cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$ называют непрерывным в среднеквадратическом смысле если $\mathbb{E}\left[X_t^2\right] < \infty$ для всех t и $\underset{s\to t}{lim}\mathbb{E}\left[(X_s - X_t)^2\right] = 0\ \forall t > 0$

- Показать, что Броуновское движение B_t непрерывно в среднеквадратическом смысле
- Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна по Липшицу. Показать, что $Y_t := f(B_t)$ - непрерывна в среднеквадратическом смысле.
- Пусть X_t - стохастический процесс, который непрерывен в среднеквадратическом смысле и предположим, что $X_t \in \mathcal{V}(S,T)$, показать, что $\int_S^T X_t dB_t = \underset{n\to\infty}{lim}\int_S^T \phi_n(t,\omega)\, dB_t(\omega)$, где $\phi_n(t,\omega) = \sum_j X_{t_j^{(n)}} I_{\left[t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}\right)}$ $T < \infty$

Доказательство #1

1. Пусть B_t - Броуновское движение. В таком случае $\underset{s\to t}{lim}\mathbb{E}\left[(X_s - X_t)^2\right] = \underset{s\to t}{lim}\mathbb{E}\left[(B_s - B_t)^2\right]$
2. Раскрывая скобки: $\underset{s\to t}{lim}\mathbb{E}\left[(B_s - B_t)^2\right] = \underset{s\to t}{lim}\mathbb{E}\left[B_s^2 - 2B_sB_t + B_t^2\right]$
3. Из линейности М.О. $\underset{s\to t}{lim}\mathbb{E}\left[(B_s - B_t)^2\right] = \underset{s\to t}{lim}\mathbb{E}\left[B_s^2\right] - 2\underset{s\to t}{lim}\mathbb{E}\left[B_sB_t\right] + \underset{s\to t}{lim}\mathbb{E}\left[B_t^2\right]$
4. Поскольку $\mathbb{E}\left[B_sB_t\right] = min(s,t)$, то $\underset{s\to t}{lim}\mathbb{E}\left[(B_s - B_t)^2\right] = t - 2\underset{s\to t}{lim}min(s,t) + t = 0$
5. Ч.Т.Д.

Доказательство #2

1. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - непрерывна по Липшицу. Это означает, что существует $C < \infty : |f(x) - f(y)| \le C|x - y|$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$. При $Y_t := f(B_t)$ $|f(B_t) - f(B_s)| \le C|B_t - B_s|$
2. Рассмотрим: $\underset{s\to t}{lim}\mathbb{E}\left[(f(B_t) - f(B_s))^2\right] \le \underset{s\to t}{lim}\mathbb{E}\left[(C|B_t - B_s|)^2\right] = C^2\underset{s\to t}{lim}\mathbb{E}\left[(B_t - B_s)^2\right]$
3. Поскольку, $\underset{s\to t}{lim}\mathbb{E}\left[(B_t - B_s)^2\right] = 0$ и левая часть неравенства в (2) не отрицательна, то $\underset{s\to t}{lim}\mathbb{E}\left[(f(B_t) - f(B_s))^2\right] = 0$ и поэтому непрерывна в среднеквадратическом смысле
4. Ч.Т.Д.

Доказательство #3

1. Пусть X_t - стохастический процесс, который непрерывен в среднеквадратическом смысле. Это означает $\forall t > 0$ $\underset{s \to t}{lim} \mathbb{E}\left[\left(X_s - X_t\right)^2\right] = 0$
2. Заметим, что из непрерывности $\mathbb{E}\left[\int_S^T \left(X_t - \phi_n\left(t\right)\right)^2 dt\right] = \mathbb{E}\left[\sum_j \int_{t_j^{(n)}}^{t_{j+1}^{(n)}} \left(X_t - X_{t_j^{(n)}}\right)^2 dt\right] \leq \underset{j \in \mathbb{N}}{sup} \underset{t \in \left(t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}\right]}{sup} \left|X_t - X_{t_j^{(n)}}\right|^2$

   0 при $n \to \infty$
3. Откуда следует, что $\mathbb{E}\left[\int_S^T \left(X_t - \phi_n\left(t\right)\right)^2 dt\right] = \mathbb{E}\left[\left(\int_S^T \left(X_t - \phi_n\left(t\right)\right) dB_t\left(\omega\right)\right)^2\right] \to \infty$ при $n \to \infty$
4. Поэтому $\int_S^T X_t dB_t = \underset{n \to \infty}{lim} \int_S^T \phi_n\left(t, \omega\right) dB_t\left(\omega\right)$, ведь сходимость в $\mathcal{L}^2$ имплицирует сходимость в $\mathcal{L}^1$
5. Ч.Т.Д.

Задача № 13.15

Пусть $f, g \in \mathcal{V}$ и пусть C, D такие, что почти всюду на $\omega \in \Omega$

$$C + \int_S^T f\left(t, \omega\right) dB_t\left(\omega\right) = D + \int_S^T g\left(t, \omega\right) dB_t\left(\omega\right)$$

Показать, что $C = D$ и $f\left(t, \omega\right) = g\left(t, \omega\right)$ почти всюду на $\left(t, \omega\right) \in [S, T] \times \Omega$

Доказательство:

1. Пусть $f, g \in \mathcal{V}$ и пусть C, D такие, что почти всюду на $\omega \in \Omega$

$$C + \int_S^T f\left(t, \omega\right) dB_t\left(\omega\right) = D + \int_S^T g\left(t, \omega\right) dB_t\left(\omega\right)$$

2. Заметим, что $\mathbb{E}\left[C - D\right] = \mathbb{E}\left[\int_S^T \left(g\left(t, \omega\right) - f\left(t, \omega\right)\right)^2 dB_t\left(\omega\right)\right] = 0 \implies C - D$
3. Из изометрии Ито: $\mathbb{E}\left[\int_S^T \left(g\left(t, \omega\right) - f\left(t, \omega\right)\right)^2 dB_t\left(\omega\right)\right] = \mathbb{E}\left[\left(\int_S^T g\left(t, \omega\right) - f\left(t, \omega\right) ds\right)^2\right] = 0 \implies f\left(t, \omega\right) = g\left(t, \omega\right)$ почти всюду на $\left(t, \omega\right) \in [S, T] \times \Omega$
4. Ч.Т.Д.