Задача №1

Пусть $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ Броуновское движение при $B_0 = 0$.

1. Является ли $t \mapsto (2 - B_t)^+$ субмартингалом, супермартингалом или мартингалом?
2. Является ли процесс $\left(e^{B_t}\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$ субмартингалом, супермартингалом или мартингалом?
3. Является ли следующая случайная величина моментом остановки?

$$\nu := inf\left\{t \in \mathbb{R}^+ : B_t = B_{2t}\right\}$$

4. Является ли следующий случайный момент моментом остановки?

$$\tau := inf\left\{t \in \mathbb{R}^+ : e^{B_t - t/2} = \alpha + \beta t\right\}$$

5. Если τ является моментом остановки, рассчитать $\mathbb{E}[\tau]$ по теореме Дуба об оптимальной остановке в каждом из двух случаев:
   (a) $\alpha > 1 \wedge \beta < 0$
   (b) $\alpha < 1 \wedge \beta > 0$

Доказательство № 1:

1. Пусть $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ Броуновское движение. Известно, что Броуновское движение мартингал относительно фильтрации $\mathcal{F}_t$, т.е $\forall s \le t$

$$\mathbb{E}[B_t|\mathcal{F}_s] = B_s$$

2. Рассмотрим отображение $B_t \to (2 - B_t)^+$. Мы воспользуемся утверждением 14.5 a) которое говорит, что если $(M_t)_{t\in\mathbb{R}}$ - мартингал относительно фильтрации $\mathcal{F}_t$ и $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - выпулкая функция, то $(\phi(M_t))_{t\in\mathbb{R}}$ субмартингал. Для этого мы покажем, что $f(x) = (2 - x)^+ = max(2 - x, 0)$ выпуклая функция.
3. Заметим, что $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $max(x + y, 0) \le max(x, 0) + max(y, 0)$
   (a) Положим $x, y \ge 0$. В таком случае

$$\begin{aligned} max(x+y,0) &= x+y \\ &\le max(x,0) + max(y,0) \end{aligned}$$

   (b) Положим $x \ge 0$ $y < 0$ и $x > y$. В таком случае (и в случае обратном $x < 0 \wedge y \ge 0 \wedge x < y$)

$$\begin{aligned} max(x+y,0) &= x+y \\ &\le max(x,0) \\ &\le max(x,0) + max(y,0) \end{aligned}$$

(c) Положим $x, y < 0$. В таком случае

$$\begin{aligned} max\,(x+y,0) &= 0 \\ &\leq max\,(x,0) + max\,(y,0) \end{aligned}$$

4. Используя неравенство Йенсена при $p+q=1$ и $p, q \in [0,1]$

$$\begin{aligned} \phi\,(px+qy) &= max\,(2-px-qy,0) \\ &\overset{(p+q=1)}{=} max\,(p\,(2-x)+q\,(2-y)\,,0) \\ &\overset{(3)}{\leq} max\,(2-x,0)\,p + max\,(2-y,0)\,q \\ & p\phi\,(x) + q\phi\,(y) \end{aligned}$$

5. Ч.Т.Д.

Доказательство №2:

1. $x \to e^x$ - выпукла и дальнейшее доказательство аналогично доказательству №1

Доказательство №3:

1. Случайная величина $\nu := inf\,\{t \in \mathbb{R}^+ : B_t = B_{2t}\}$ не является моментом остановки относительно фильтрации $\mathcal{F}_t$ поскольку $inf\,\{t \in \mathbb{R}^+ : B_{2t} = x, x \in \mathbb{R}\} \notin \mathcal{F}_t$. То есть в момент времени t из мартингальности Броуновского движения B_t следует, что не известно, будет ли в момент времени $2t$ выполнено условие $B_{2t} = x$

Доказательство №4:

1. Положим
$$\tau := inf\left\{t \in \mathbb{R}^+ : e^{B_t - t/2} = \alpha + \beta t\right\}$$
Поскольку
$$\begin{aligned} \{\omega \in \Omega : \tau\,(\omega) > t\} &= \left\{\omega \in \Omega : \forall s \in [0,t] : e^{B_s - s/2} \neq \alpha + \beta s\right\} \\ &= \bigcap_{s \in [0,t]} \left\{\omega \in \Omega : e^{B_s - s/2} \neq \alpha + \beta s\right\} \in \mathcal{F}_t \end{aligned}$$
то τ - момент остановки

Доказательство №5:

1. Процесс $X_t = e^{B_t - t/2}$ является мартингалом относительно фильтрации $\mathcal{F}_t$.

(a) Выполним ряд преобразований используя свойство измеримости $exp\left(B_s - t/2\right)$ относительно фильтрации $\mathcal{F}_s$ где $s < t$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{B_t - t/2}|\mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[exp\left(B_t - B_s + B_s - t/2\right)|\mathcal{F}_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[exp\left(B_t - B_s\right)exp\left(B_s - t/2\right)|\mathcal{F}_s\right] \\ &= exp\left(B_s - t/2\right)\mathbb{E}\left[exp\left(B_t - B_s\right)|\mathcal{F}_s\right]\end{aligned}$$

(b) Поскольку $B_t - B_s \sim \mathcal{N}\left(0, t-s\right)$, то ожидание $exp\left(B_t - B_s\right)$

$$\mathbb{E}\left[exp\left(sW_t\right)\right]_{s=1} = exp\left(\frac{t-s}{2}\right)$$

(c) Комбинируя (a) и (b) получим, что

$$\mathbb{E}\left[e^{B_t - t/2}|\mathcal{F}_s\right] = exp\left(B_s - \frac{1}{2}s\right)$$

2. По теореме дуба если процесс $e^{B_t - t/2}$ мартингал то $\mathbb{E}\left[e^{B_0}\right] = \mathbb{E}\left[e^{B_\tau - t/2}\right] = 1 \implies 1 = \alpha + \beta t \implies t = \frac{1-\alpha}{\beta}$.

   (a) Положим $\alpha > 1$ и $\beta < 0$ откуда следует, что $\alpha > 1 \implies 0 > 1 - \alpha \implies 0 < \frac{1-\alpha}{\beta}$. Поэтому в таком случае $\mathbb{E}\left[\tau\right] = \frac{1-\alpha}{\beta}$

   (b) Положим $\alpha < 1$ $\beta > 0$, откуда следует, что $0 < \frac{1-\alpha}{\beta}$, Поэтому в таком случае также $\mathbb{E}\left[\tau\right] = \frac{1-\alpha}{\beta}$

Задача №2

Положим $\left(B_t\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$Броуновское движение, такое что $B_0 = 0$.

1. Рассмотрим случайную величину $\nu := inf\left\{t \in \mathbb{R}^+ : B_t = B_1\right\}$. Является ли ν моментом остановки?

2. Рассмотрим случайную величину $\tau := inf\left\{t \in \mathbb{R}^+ : exp\left(B_t\right) = \alpha \cdot exp\left(-\frac{t}{2}\right)\right\}$ $\alpha > 1$. Является ли это моментом остановки? Если это так, рассчитать $\mathbb{E}\left[e^{-\tau}\right]$

3. Рассмотрим случайную величину $\tau := inf\left\{t \in \mathbb{R}^+ : B_t^2 = 1 + \alpha t\right\}$. Является ли τ моментом остановки. Если это так, рассчитать $\mathbb{E}\left[\tau\right]$

Доказательство №1

1. Положим $\left(B_t\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$Броуновское движение, такое что $B_0 = 0$.

2. Положим $\nu := inf\left\{t \in \mathbb{R}^+ : B_t = B_1\right\}$.

3. $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$- момент остановки это случайная величина $\tau : \Omega \to \mathbb{R}_+ \cup \left\{+\infty\right\}$ такая, что $\left\{\tau > t\right\} \in \mathcal{F}_t$ $\forall t \geq 0$.

4. Известно, что $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ - мартингал относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$. Отсюда следует, что в момент времени $t = 0$ мы ничего не знаем о B_1: $\{\omega\in\Omega : inf\{t\in\mathbb{R}^+ : B_t = B_1\} > 0\} \notin \mathcal{F}_0$. Поэтому $\exists t \geq 0 :$ $\{\tau > t\} \notin \mathcal{F}_t$, то есть ν не является моментом остановки.

5. Ч.Т.Д.

Доказательство №2

1. Положим $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$Броуновское движение, такое что $B_0 = 0$.

2. Положим $\tau := inf\left\{t\in\mathbb{R}^+ : exp\left(B_t\right) = \alpha\cdot exp\left(-\frac{1}{2}t\right)\right\}$ $\alpha > 1$. В любой момент времени мы можем проверить ложность утверждения $exp\left(B_t\right) = \alpha\cdot exp\left(-\frac{t}{2}\right)$, поэтому $\{\omega\in\Omega : \tau < t\}\in\mathcal{F}_t$.

3. Поскольку $x \to exp\left(x\right)$ выпуклая функция, следовательно, $exp\left(B_t\right)$ - субмартингал, поэтому мы рассмотрим снова процесс $exp\left(B_t - \frac{t}{2}\right)$, который является мартингалом и поэтому $\forall t\geq 0$ $\mathbb{E}\left[exp\left(B_t - \frac{t}{2}\right)\right] = \mathbb{E}\left[exp\left(B_0\right)\right] = 1$. В таком случае, из определения τ по теореме Дуба об оптимальном моменте остановки следует, что

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[exp\left(-\tau\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{\alpha}exp\left(B_\tau - \frac{\tau}{2}\right)\right]\\ &= \frac{1}{\alpha}\end{aligned}$$

Доказательство №3

1. Положим $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$Броуновское движение, такое что $B_0 = 0$.

2. Положим, что $\tau := inf\left\{t\in\mathbb{R}^+ : B_t^2 = 1 + \alpha t\right\}$. В любой момент времени мы можем проверить равенство $B_t^2 = 1 + \alpha t$ и поэтому$\{\tau < t\}\in\mathcal{F}_t$.

3. Функция $x\to x^2$ выпуклая и поэтому B_t^2- субмартингал, но $B_t^2 - t$ является мартингалом:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[B_t^2 - t|\mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[\left(B_t + \left[B_s - B_s\right]\right)^2 - t + s - s|\mathcal{F}_s\right]\\ &= \mathbb{E}\left[B_t^2 + 2B_tB_s - 2B_tB_s + B_s^2 - 2B_s^2 + B_s^2 - t + s - s|\mathcal{F}_s\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\left(B_t - B_s\right)^2 + 2B_s\left(B_t - B_s\right) - t + s|\mathcal{F}_s\right] + B_s^2 - s\\ &= t - s + 0 - t + s + B_s^2 - s\\ &= B_s^2 - s\end{aligned}$$

4. Поскольку $B_t^2 - t$ мартингал, следовательно, по теореме Дуба об оптимальной остановке $\mathbb{E}\left[B_\tau^2 - t\right] = \mathbb{E}\left[B_0^2\right] = 0$ что в свою очередь имплицирует из определения τ

$$\tau = \frac{1}{1-\alpha}$$

Задача №3

Пусть $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$Броуновское движение, такое что $B_0 = 0$. Положим

$$\tau_L = inf \left\{t \in \mathbb{R}^+ : B_t = L\right\}$$

- Найти преобразование Лапласа $\mathbb{E}\left[e^{-r\tau_L}\right]$ момента τ_L $\forall r \geq 0$, используя теорему Дуба об оптимальной остановке.
- Найти стратегию оптимальной остановки зависящую от $r > 0$ для задачи максимизации
$$\underset{L>0}{sup}\mathbb{E}\left[e^{r\tau_L} B_\tau\right]$$

Доказательство №1

1. Пусть $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$Броуновское движение, такое что $B_0 = 0$.
2. Положим $\tau_L = inf\{t \in \mathbb{R}^+ : B_t = L\}$. Заметим, что это момент остановки: $\{\tau_L < t\} \in \mathcal{F}_t$
3. Более, того, $exp\left(\sqrt{2r}B_t - rt\right)$ - мартингал

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[exp\left(\sqrt{2r}B_t - rt\right)|\mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[exp\left(\sqrt{2r}\left(B_t - B_s + B_s\right) - rt\right)|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[exp\left(\sqrt{2r}\left(B_t - B_s\right)\right)exp\left(\sqrt{2r}B_s - rt\right)|\mathcal{F}_s\right] \\
&= exp\left(\sqrt{2r}B_s - rt\right)\mathbb{E}\left[exp\left(\sqrt{2r}\left(B_t - B_s\right)\right)|\mathcal{F}_s\right] \\
&= exp\left(\sqrt{2r}B_s - rt\right)exp\left(rt - rs\right) \\
&= exp\left(\sqrt{2r}B_s - rs\right)
\end{aligned}$$

4. Из (3) по теореме Дуба следует, что

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[exp\left(\sqrt{2r}B_0 + r\cdot 0\right)\right] &= 1 \\
&= \mathbb{E}\left[exp\left(\sqrt{2r}B_{\tau_L} - r\tau_L\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[exp\left(\sqrt{2r}L - r\tau_L\right)\right] \\
&= exp\left(\sqrt{2r}L\right)\mathbb{E}\left[exp\left(-r\tau_L\right)\right]
\end{aligned}$$

То есть
$$\mathbb{E}\left[e^{-r\tau_L}\right] = exp\left(-\sqrt{2r}L\right)$$

Доказательство №2

1. Пусть $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$Броуновское движение, такое что $B_0 = 0$.

2. Пусть $r > 0$.

Задача №4

Положим $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ - Броуновское движение, инициированное в точке $B_0 \in [a,b]$. Положим первый момент выхода из полосы $[a,b]$.

$$\tau = inf\left\{t \in \mathbb{R}^+ : B_t = a \wedge B_t = b\right\}$$

Показать, что решение $f(x)$ - дифференциального уравнения при $f''(x) = -2$, где $f(b) = f(a) = 0$ представляет собой уравнение $f(x) = \mathbb{E}[\tau | B_0 = x]$

Доказательство:

1. Положим $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ - Броуновское движение, инициированное в точке $B_0 \in [a,b]$
2. Положим первый момент выхода из полосы $[a,b]$ это случайная величина $\tau = inf\{t \in \mathbb{R}^+ : B_t = a \vee B_t = b\}$
3. Пусть задано отображение f, где $f''(x) = 2$ и $f(b) = f(a) = 0$ и некоторый процесс:

$$X_t = f(B_t) - \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\,ds$$

4. Из отображение f мы можем определить, что оно из себя представляет:
   (a) $f'(x) = \int f''(x)\,dx = \int 2dx = -2x + c_1$
   (b) $f(x) = \int 2dx + \int c_1 dx = -x^2 + xc_1 + c_2$
   (c) Решим систему уравнений относительно c_1, c_2:

$$\begin{cases} -a^2 + ac_1 = -c_2 \\ -b^2 + bc_1 = -c_2 \end{cases}$$

   Что дает следующий результат:

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + (a+b)x - ab \\ f'(x) &= -2x + (a+b) \end{aligned}$$

5. Покажем, что X_t - мартингал:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}\left[f(B_0) - \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\,ds|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[f(B_0) + \int_0^t f'(B_s)\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\,ds - \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\,ds|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[f(B_0) - 2\int_0^t B_s dB_s + \int_0^t (a+b)\,dB_s|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[f(B_0) - \left(B_t^2 - t\right) + (a+b)\,B_t|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}[f(B_0)\,|\mathcal{F}_s] - \mathbb{E}\left[B_t^2 - t|\mathcal{F}_s\right] + (a+b)\,\mathbb{E}[B_t|\mathcal{F}_s] \\
&= f(B_0) - \left(B_s^2 - s\right) + (a+b)\,B_s
\end{aligned}$$

6. Поскольку X_t мартингал, то

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X_0|B_0=x\right] &= \mathbb{E}\left[X_\tau|B_0=x\right] \\ &= f\left(x\right) \\ &= -x^2+\left(a+b\right)x-ab\end{aligned}$$

по теореме Дуба об оптимальной остановке.

7. Ч.Т.Д.

Задача №5

Пусть $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ - Броуновское движение инициированное в $B_0=0$. Положим есть момент остановки

$$\tau=inf\left\{t\in\mathbb{R}^+:B_t=\alpha+\beta t\right\}$$

определяет первый момент остановки, где $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ $t\to\alpha+\beta t$

- Рассчитать преобразование Лапласа $\mathbb{E}\left[e^{-r\tau}\right]$ $\forall r>0$ $\alpha\geq 0$
- Рассчитать преобразование Лапласа $\mathbb{E}\left[e^{-r\tau}\right]$ $\forall r>0$ $\alpha\leq 0$

Доказательство:

1. Пусть $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ - Броуновское движение инициированное в $B_0=0$
2. Положим дан момент остановки $\tau=inf\left\{t\in\mathbb{R}^+:B_t=\alpha+\beta t\right\}$
3. Известно, что $\left(e^{\sqrt{2(\beta+r)}B_t-(\beta+r)t}\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$ - мартингал. Тогда по теореме Дуба об оптимальной остановке

$$\begin{aligned}1 &= \mathbb{E}\left[e^{\sqrt{2(\beta+r)}(\alpha+\beta\tau)-(\beta+r)\tau}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{\alpha\sqrt{2(\beta+r)}+\left(\sqrt{2(\beta+r)}\beta-\beta-r\right)\tau}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{\alpha\sqrt{2(\beta+r)}+\left(\frac{\alpha}{\tau}-\sqrt{2(\beta+r)}\frac{\alpha}{\tau}-r\right)\tau}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{\alpha-r\tau}\right]\end{aligned}$$

4. Поэтому

$$\mathbb{E}\left[e^{-r\tau}\right]=\mathbb{E}\left[e^{-\alpha}\right]$$