Мера интегралы и мартингалы. Глава 9

Задача № 1

Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ положительная простая функция вида: $f(x) = \sum_{n=1}^{m} \xi_n \cdot 1_{A_n}(x)$ $\xi_n \geq 0$. $A_n \in \mathcal{A}$ не обязательно не пересекаются. Показать, что $I_\mu(f) = \sum_{n=1}^{m} \xi_n \cdot \mu(A_n)$.

Доказательство:

1. Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ положительная простая функция вида: $f(x) = \sum_{n=1}^{m} \xi_n \cdot 1_{A_n}(x)$ $\xi_n \geq 0$. Где $A_n \in \mathcal{A}$ не обязательно не пересекаются
2. Пусть $f_n(x) := 1_{A_n}(x)$. Заметим, что $f_n(x) \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$
3. Тогда из положительной гомогенности $I_\mu[\xi_n f_n] = \xi_n \mu(A_n)$
4. $I_\mu(f) = \sum_{n=1}^{m} \xi_n \cdot \mu(A_n)$ - по индукции с базой аддитивности
5. Ч.Т.Д.

Задача № 2

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ пространство с мерой и $A_1, ..., A_N \in \mathcal{A}$. Так что $\mu(A_n) < +\infty$, тогда $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \geq \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) - \sum_{1 \leq n < k \leq N} \mu(A_n \cap A_k)$

Доказательство:

1. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ пространство с мерой и $A_1, ..., A_N \in \mathcal{A}$. Так что $\mu(A_n) < +\infty$
2. По формуле включений и исключений $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) - \sum_{1 \leq n < k \leq N} \mu(A_n \cap A_k) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq N} \mu(A_i \cap A_j \cap A_k) - ... + (-1)^{n-1} \sum \mu(A_i \cap ... \cap A_n)$
3. Заметим, что $\sum_{1 \leq i < j < k \leq N} \mu(A_i \cap A_j \cap A_k) - ... + (-1)^{n-1} \sum \mu(A_i \cap ... \cap A_n) \geq 0$
4. Отсюда следует цель
5. Ч.Т.Д.

Задача № 3

Доказать свойства 9.8

- $\int 1_A d\mu = \mu(A)$ $\forall A \in \mathcal{A}$

Доказательство:

1. По определению $\int u d\mu := sup \{I_\mu(f) : f \leq u, f \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})\}$
2. Супремум достигается при $f = u = 1_A$
3. Из 9.3 (i) $I_\mu(f) = \mu(A)$
4. Ч.Т.Д.

- $\int \alpha u d\mu = \alpha \int u d\mu$

Доказательство:

1. По определению $\int \alpha u d\mu := sup\left\{I_{\mu}\left(\alpha u\right) : f \leq \alpha u, f \in \mathcal{E}^{+}\left(\mathcal{A}\right)\right\}$
2. Из свойства 9.3 (ii) $sup\left\{I_{\mu}\left(\alpha u\right) : f \leq \alpha u, f \in \mathcal{E}^{+}\left(\mathcal{A}\right)\right\} = \alpha sup\left\{I_{\mu}\left(u\right) : f \leq u, f \in \mathcal{E}^{+}\left(\mathcal{A}\right)\right\}$
3. Поэтому $\int \alpha u d\mu = \alpha \int u d\mu$
4. Ч.Т.Д.

- $\int \left(u+v\right) d\mu = \int u d\mu + \int v d\mu$

Доказательство:

1. По определению $\int \left(u+v\right) d\mu := sup\left\{I_{\mu}\left(r\right) : f \leq u+v : f \in \mathcal{E}^{+}\left(\mathcal{A}\right)\right\}$
2. Выберем $e+g=f$ такие что $e \leq u$ и $g \leq v$ и $e, g \in \mathcal{E}^{+}\left(\mathcal{A}\right)$
3. Поскольку $sup\left(A+B\right) = sup\left(A\right) + sup\left(B\right)$ то $sup\left\{I_{\mu}\left(f\right) : e+g=f \leq u+v : e, g, f \in \mathcal{E}^{+}\left(\mathcal{A}\right)\right\} = sup\left\{I_{\mu}\left(e\right) : e \leq u : e \in \mathcal{E}^{+}\left(\mathcal{A}\right)\right\} + sup\left\{I_{\mu}\left(g\right) : g \leq v : g \in \mathcal{E}^{+}\left(\mathcal{A}\right)\right\}$
4. Из (3) следует, что $\int \left(u+v\right) d\mu = \int u d\mu + \int v d\mu$
5. Ч.Т.Д

- $u \leq v$ то $\int u d\mu \leq \int v d\mu$

Доказательство:

1. Если $u \leq v$, то $v = u + \left(v-u\right)$
2. Из $\int \left(u+v\right) d\mu = \int u d\mu + \int v d\mu$ следует, что $\int v d\mu = \int u d\mu + \int \left(v-u\right) d\mu \geq \int u d\mu$
3. Ч.Т.Д.

Задача № 4

Найти пример, показывающий различие между возрастающей последовательностью функций и последовательностью возрастающих функций

Решение:

Задача № 5

Пусть $\left(X, \mathcal{A}, \mu\right)$ - пространство с мерой. Показать вариант Теоремы 9.6. Если $u_n \geq 0$ - И.Ф. такие, что для некоторого u $\exists K \in \mathbb{N}\ \forall x : u_{n+K}\left(x\right) \uparrow u\left(x\right)$ при $n \to \infty$. Тогда $u \geq 0$ измеримо и $\int u_n d\mu \uparrow \int u d\mu$

Доказательство:

1. Пусто

Задача № 6

- Пусть $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}^{+}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A})$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ - измерима. Доказать, что $\int \sum_{n=1}^{\infty} u_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int u_n d\mu$ (Следствие 9.9)

Доказательство:

1. Пусть $s_M = u_1 + ... + u_M$. Заметим, что $s_M + u_{M+1} = s_{M+1} \geq s_M$, то есть, последовательность монотонно возрастает.
2. Из (1) следует, что по свойству 9.8 (iii) $\int s_{M+1} d\mu = \int (s_M + u_{M+1}) d\mu = \int s_M d\mu + \int u_{M+1} d\mu$. Тогда из (1) $\int s_{M+1} d\mu = \sum_{n=1}^{M+1} \int u_n d\mu$
3. Выполнив предельный переход, получим, что $\lim\limits_{M\to\infty} \int s_{M+1} d\mu = \lim\limits_{M\to\infty} \sum_{n=1}^{M+1} \int u_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int u_n d\mu$
4. Поскольку s_M- возрастает, то $\lim\limits_{M\to\infty} \int s_{M+1} d\mu = \sup\limits_{M\in\mathbb{N}} \int s_M d\mu$
5. Поскольку s_∞ измерима, то по теореме Леви о монотонной сходимости $\sup\limits_{M\in\mathbb{N}} \int s_M d\mu = \int \sup\limits_{M\in\mathbb{N}} s_M d\mu$
6. Комбинируя равенство (3) и определения s_M имеем $\int \sum_{n=1}^{\infty} u_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int u_n d\mu$

- Доказать эквивалентность Теоремы Леви о монотонной сходимости следствию 9.9

Доказательство:

1. В одну сторону мы уже показали.
2. С другой стороны, предположим, что $s_n \uparrow s$ $\forall n, s_n \geq 0$ так что $s_0 = 0$
3. Представим $s_n = s_n - s_{n-1} + s_{n-1} - s_{n-1} + ... + s_1 - s_1 + s_0$. Положим, что $u_n = s_n - s_{n-1}$. Тогда $u_n \geq 0$ и $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_n$ и $s = \sum_{k=1}^{\infty} u_n$
4. Из следствия 9.9 $\int \sum_{n=1}^{\infty} u_n d\mu = \int \sup\limits_{m} \sum_{n=1}^{m} u_n d\mu = \int \sup\limits_{m} s_m d\mu$
5. Также верно и следующее $\int \sup\limits_{m} \sum_{n=1}^{m} u_n d\mu = \sup\limits_{m} \int \sum_{n=1}^{m} u_n d\mu = \sup\limits_{m} \int s_m d\mu$
6. Из (4) и (5) видим, что $\int \sup\limits_{m} s_m d\mu = \sup\limits_{m} \int s_m d\mu$ а это в точности теорема 9.6 (Теорема Леви о монотонной сходимости)
7. Ч.Т.Д.

Задача № 7

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - измеримое пространство и $u \in \mathcal{M}^{+}(\mathcal{A})$. Показать, что $A \mapsto \int 1_A u d\mu$ $A \in \mathcal{A}$ - мера.

Доказательство:

1. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - измеримое пространство и $u \in \mathcal{M}^{+}(\mathcal{A})$ Положим $A \mapsto \int 1_A u d\mu$ $\forall A \in \mathcal{A}$
2. Пусть $A = \varnothing$. Тогда $1_A(\varnothing) = 0$. Отсюда следует, что $\int 1_A(x) u(x) d\mu = \int 0 u(x) d\mu = 0$. Следовательно выполнено M_1

3. Пусть $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$. Поскольку $(X,\mathcal{A},\mu)$ - И.П. следовательно $\mathcal{A}$ - сигма-алгебра. Откуда следует, что $\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A \in \mathcal{A}$

4. Поскольку $1_A(x)$ - мера, то $1_{\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = 1_A = \sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n}$. Таким образом $\int 1_A u d\mu = \int \sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n} u d\mu$

5. Из следствия 9.9 получим, что $\int \sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n} u d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int 1_{A_n} u d\mu$

6. Таким образом $\mu\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \int 1_{\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} u d\mu = \int \sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n} u d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int 1_{A_n} u d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$. То есть выполнено M_2. Поэтому отображение $A \mapsto \int 1_A u d\mu$ - мера

7. Ч.Т.Д

Задача № 8

Показать, что каждая функция $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ на $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}))$ - измерима
Доказательство:

1. Поскольку $u^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$, а для $P(\mathbb{N})$ система множеств всех возможных подмножеств, то $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $u^{-1}(B) \in P(\mathbb{N})$. Это в точности определение измеримости.

2. Ч.Т.Д.

Задача № 9

Пусть $(X,\mathcal{A})$- И.П. Пусть $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - последовательность мер. Пусть $\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n$. Показать, что $\int u d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int u d\mu_n$ $\forall u \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$.
Доказательство:

1. Пусть $(X,\mathcal{A})$- И.П

2. Пусть $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - последовательность мер

3. Пусть $\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n$

4. Положим $u = 1_A$. Тогда $\int u d\mu = \int 1_A d\mu$. Таким образом из (3) следует, что $\int 1_A d\mu = \int 1_A \left(d\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n\right)$

5. По определению интеграла положительной функции $\int 1_A \left(d\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n\right) = sup\left\{I_{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n}(f) : f \le 1_A, f \in \mathcal{E}^+\right\}$

   (a) Заметим, что $1_A \in \mathcal{E}^+$ поэтому $f = 1_A$. Это в свою очередь дает равенство $\int 1_A \left(d\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int 1_A d\mu_n$

   (b) Таким образом из (5.a) следует, что $\int 1_A d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int 1_A d\mu_n$

6. Пусть $u \in \mathcal{E}^+$.Тогда $\int u d\mu = \int \sum_{k=1}^{K} y_k 1_{A_k} d\mu$ где $\forall k, y_k \in \mathbb{R}$

   (a) Из аддитивности интеграла для положительных функций, по индукции доказывается $\int \sum_{k=1}^{K} y_k 1_{A_k} d\mu = \sum_{k=1}^{K} y_k \int 1_{A_k} d\mu$

   (b) Воспользовавшись (6.a) получим $\sum_{k=1}^{K} y_k \int 1_{A_k} d\mu = \sum_{k=1}^{K} \sum_{n\in\mathbb{N}} y_k \int 1_{A_k} d\mu_n$

   (c) Тогди по теореме Фубини-Тунелли $\sum_{k=1}^{K} \sum_{n\in\mathbb{N}} y_k \int 1_A d\mu_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{K} \int y_k 1_A d\mu_n$. Снова из аддитивности имеем $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int \sum_{k=1}^{K} y_k 1_A d\mu_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int u d\mu_n$

7. Пусть $u \in \mathcal{M}^+$. По Лемме Сомбрерро $u = \lim\limits_{n\to\infty} f_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ где $f_n \leq f_{n-1} f_n \in \mathcal{E}^+ \ \forall n \in \mathbb{N}$

8. Из (7) $\int u d\mu = \int \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n d\mu$. Тогда по теореме Леви о монотонной сходимости $\int \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n d\mu = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int f_n d\mu$

9. Используя посылку (3) получаем, что $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int f_n d\mu = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int f_{nk} \left(d \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_k\right) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \int f_{nk} d\mu_k = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \sum_k \int f_{nk} d\mu_k$

10. Используя утверждение в задаче 4.7 (ii) получим $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \sum_k \int f_{nk} d\mu_k = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \sum_k \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int f_{nk} d\mu_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int f_{nk} d\mu_k$

11. Что в свою очередь по следствию 9.9 $\sum_{k\in\mathbb{N}} \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int f_n d\mu_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} \int \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n d\mu_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} \int u d\mu_k$

12. Ч.Т.Д.

Задача № 10

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - И.П. Пусть $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$. Если $u_n \leq u \ \forall n \in \mathbb{N}$ и $u \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ так, что $\int u d\mu < \infty$, тогда $\limsup\limits_{n\to\infty} \int u_n d\mu \leq \int \limsup\limits_{n\to\infty} u_n d\mu$

Доказательство:

1. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - И.П.

2. Пусть $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$.

3. Положим $u_n \leq u \ \forall n \in \mathbb{N}$ и $u \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ так, что $\int u d\mu < \infty$

4. Докажем и воспользуемся тем фактом, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geq n} u_k = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{k\geq n} u_k$

   (a) Пусть $u_k, k \in \mathbb{N}$ - некоторая последовательность функций.

   (b) Заметим, что $\sup\limits_{k\geq n} u_k$ - это некоторая подподследовательность $u_{k_1}, u_{k_2}, ...$ такая, что $\forall i, j \in \mathbb{N}, i < j \ u_{k_i} \geq u_{k_j}$. То есть эта подпоследовательность не возрастает.

   (c) Тогда из условия не возрастания следует, что $u_{k_i} \geq u \ \forall i \in \mathbb{N}$, то есть это предел подпоследовательности.

5. Пусть $w_n = u - u_n$. $\forall n \in \mathbb{N} \ w_n \geq 0$. Тогда, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geq n} u_k \geq \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geq n} u_k$. Тогда из монотонности $\int \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geq n} u_k d\mu \geq \int \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geq n} u_k d\mu$

6. Используя Лемму Фату получим, что $\int \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geq n} w_k d\mu \leq \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geq n} \int w_k d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geq n} \int u - u_n d\mu = \int u d\mu - \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geq n} \int u_n d\mu$.

7. Правая же часть неравенства (6) $\int \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geq n} w_k d\mu = \int \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geq n} (u - u_n) d\mu$. Воспользовавшись свойством $\lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geq n} (u - u_n) = u - \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geq n} u_n$ получим $\int \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geq n} (u - u_n) d\mu = \int u d\mu - \int \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geq n} u_n d\mu$

8. Комбинируя (5) (6) и (7) видим, что $\int ud\mu - \lim_{n\to\infty} inf_{k\geq n} \int u_n d\mu \geq \int ud\mu - \int \lim_{n\to\infty} sup_{k\geq n} u_n d\mu$ что в свою очередь имлицирует $\lim_{n\to\infty} inf_{k\geq n} \int u_n d\mu \leq \int \lim_{n\to\infty} sup_{k\geq n} u_n d\mu$

9. Ч.Т.Д.