Задача 1

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ измеримое пространство. Пусть $u, v \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$. Пусть $u(x) \pm v(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ $\forall x \in X$. Доказать, что $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\int (\alpha u + \beta v)\, d\mu = \alpha \int u d\mu + \beta \int v d\mu$

Доказательство:

1. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ измеримое пространство. Пусть $u, v \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$, где $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) := \left\{ f : X \to \overline{\mathbb{R}} : f - \text{интегрируема} \right\}$ - множество интегрируемых функций

2. Пусть $\forall x \in X$. $u(x) \pm v(x) \in \overline{\mathbb{R}}$. Из гомогенности (Теорема 10.4(i)) следует, что $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $a = \alpha u \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$, $b = \beta v \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$. Поэтому $\int (\alpha u + \beta v)\, d\mu = \int (a + b)\, d\mu$.

3. Из аддитивности интеграла Лебега (Теорема 10.4(ii)) $\int (a+b)\, d\mu = \int a d\mu + \int b d\mu = \int \alpha u d\mu + \int \beta v d\mu$

4. Снова воспользуемся гомогенностью интеграла и видим, что $\int \alpha u d\mu + \int \beta v d\mu = \alpha \int u d\mu + \beta \int v d\mu$. Таким образом $\int (\alpha u + \beta v)\, d\mu = \alpha \int u d\mu + \beta \int v d\mu$

5. Ч.Т.Д.

Задача 2

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ - вероятностное пространство. Найти контропример, к утверждению: “Каждая $\mathbb{P}$-интегрируемая функция $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$- ограничена”.

Решение:

1. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ - вероятностное пространство, такое, что $\Omega = (0,1)$ $\mathbb{P} = \lambda^1$ - одномерная мера Лебега.

2. Рассмотрим аппроксимацию снизу $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ функцией $f \in \mathcal{E}^+$ следующего вида: $f_N = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{\sqrt{N+1}-1}{N} n + 1 \right) \times I_{\left[\left(\frac{\sqrt{N+1}-1}{N}(n+1)+1 \right), \left(\frac{\sqrt{N+1}-1}{N} n + 1 \right) \right)}(\mathbb{P})$.

3. Такая функция аппроксимирует y снизу и, очевидно, не убывает. Из следствия 8.10 $\sup_{N \in \mathbb{N}} f_N \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$. Тогда по теореме Леви о монотонной сходимости $\int \sup_{N \in \mathbb{N}} f_N d\mathbb{P} = \sup_{N \in \mathbb{N}} \int f_N d\mathbb{P}$

4. Используя меру Лебега для интеграла в (3) получим, что $f_N = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{\sqrt{N+1}-1}{N} n + 1 \right) \times \left(f^{-1} \left[\left(\frac{\sqrt{N+1}-1}{N} n + 1 \right) \right]\right.$

5. Можно показать, что(Интегрированием по Риману) $\sup_{N \in \mathbb{N}} \int f_N d\mathbb{P} = 2$. Поскольку $\forall x, \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 0$, то положительная и отрицательная часть интеграла конечна: $\int \sup_{N \in \mathbb{N}} f_N d\mathbb{P} = \int \sup_{N \in \mathbb{N}} f_N^+ d\mathbb{P} - \int \sup_{N \in \mathbb{N}} f_N^- d\mathbb{P} = 2 - 0$

6. Таким образом из (5) и факта $\sup_{N \in \mathbb{N}} f_N \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ по определению 10.1 следует, что $\frac{1}{\sqrt{x}} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$

7. Поскольку $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ неограничена и $\mathbb{P}$ интегрируема, контрпример найден.

8. Ч.Т.Д.

Задача 3

Пусть $u \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ на пространстве с мерой $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Функция множества $\nu : A \mapsto \int_A u d\mu = \int 1_A u d\mu$ - мера на $(X, \mathcal{A})$. Доказать, что ν - мера.

Доказательство:

1. Пусть $u \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ на пространстве с мерой $(X, \mathcal{A}, \mu)$, такая что $u : A \mapsto \int_A u d\mu = \int 1_A u d\mu$
2. Рассмотрим последовательность множеств $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, такую что $\forall i, j \in \mathbb{N}\,(A_i \cap A_j = \varnothing)$. Поскольку $\mathcal{A}$ - сигма алгебра, следовательно $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathbb{N}$.
3. Тогда верно следующее отображение $u : \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \mapsto \int 1_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} u d\mu$
4. Также верно и следующее равенство: $1_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n}(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n}(x)$
5. Заметим, что $\int 1_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} u d\mu = \int \sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n} u_n d\mu$
6. Поскольку ν - интегрируема по условию, тогда по определению интегрирумости $\int u_n d\mu = \int u_n^+ d\mu - \int u_n^- d\mu$, где $u_n^+, u_n^- \subset \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$
7. Из (4) и (6) $\int \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n d\mu = \int \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^+ d\mu - \int \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^- d\mu$.
8. Тогда, используя следствие 9.9 получим, что $\int \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^+ d\mu - \int \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^- d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int u_n^+ d\mu - \sum_{n\in\mathbb{N}} \int u_n^- d\mu$
9. Снова используя определение интеграла Лебега получим $\int \sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n} u_n d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int 1_{A_n} u_n d\mu$, а это ни что иное как сигма аддитивность. Следовательно выполнено M_2
10. Поскольку $\nu(\varnothing) \mapsto \int_{\varnothing} u d\mu = 0$, то выполнено M_1
11. Таким образом из (9) и (10) имеем, что ν - мера
12. Ч.Т.Д.

Задача 4

Пусть $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ - последовательность попарно непересекающихся множеств. Показать, $u\mathbb{1}_{\bigcup_n A_n} \in \mathcal{L}^1(\mu)$ тогда и только тогда, когда $\forall n \in \mathbb{N}\ u\mathbb{1}_{A_n} \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Доказать также $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |u|\, d\mu < \infty$

Доказательство:

1. Пусть $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ - последовательность попарно непересекающихся множеств
2. С одной стороны покажем, что $u\mathbb{1}_{\bigcup_n A_n} \in \mathcal{L}^1(\mu) \implies u\mathbb{1}_{A_n} \in \mathcal{L}^1(\mu)$.
   (a) Предположим, что $u\mathbb{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} \in \mathcal{L}^1(\mu)$ Это означает что существует интеграл $\int u\mathbb{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} d\mu$
   (b) Поскольку $\mathbb{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n}$, то $\int u\mathbb{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} d\mu = \int u \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n} d\mu = \int \sum_{n\in\mathbb{N}} u\mathbb{1}_{A_n} u d\mu$
   (c) По определению интегрируемости $\int \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n} u d\mu = \int \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} u\mathbb{1}_{A_n}\right)^+ d\mu + \int \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} u\mathbb{1}_{A_n}\right)^- d\mu$
   (d) По следствию 9.9 и определению интегрируемости $\int u\mathbb{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int u\mathbb{1}_{A_n} d\mu$
   (e) Из 2.d следует, что $\forall n \in \mathbb{N}, u\mathbb{1}_{A_n} \in \mathcal{L}^1(\mu)$

3. С другой стороны предположим, что $u\mathbb{1}_{A_n} \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Используя цепочку в (2) в обратную сторону получим, что $u\mathbb{1}_{\bigcup_n A_n} \in \mathcal{L}^1(\mu)$

4. Из теоремы 10.3 и доказательства в (3) следует, что $|u|\,\mathbb{1}_{A_n} \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

5. По определению интегрируемости интеграл конечен, отсюда следует, что $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int |u|\,\mathbb{1}_{A_n} d\mu < \infty$ из той же логики что и (3)

6. Ч.Т.Д.

Задача 5

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - пространство с мерой и $u \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Показать, что $u \in \mathcal{L}^1(u) \iff \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \mu\left\{2^n \le u < 2^{n+1}\right\}$

Доказательство:

1. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - пространство с мерой

2. Пусть $u \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$

3. Пусть $u \in \mathcal{L}^1(u)$.

4. С одной стороны:

   (a) Поскольку $|u| \in \mathcal{L}^1(u)$ тогда и только тогда, когда выполнено (3) (Теорема 10.3), то достаточно предположить, что $|u| = f \ge 0$. В таком случае рассмотрим сумму $s_k = \sum_{n=-k}^{k} I_{\{2^n \le f < 2^{n+1}\}} f \uparrow f$. Пусть $u_k = I_{\{2^n \le f < 2^{n+1}\}} f$. Заметим, что $s_k \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, $u_k \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ и$\underset{k\in\mathbb{N}}{sup} s_k \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$

   (b) Заметим, что $\forall i, j, i \ge j\ s_i \ge s_j$. То есть последовательность не убывает. Воспользовавшись теоремой Леви о монотонной сходимости получим, что $\int \underset{k\in\mathbb{N}}{sup} s_k d\mu = \underset{k\in\mathbb{N}}{sup} \int s_k d\mu = \underset{k\in\mathbb{N}}{sup} \int \sum_{n=-k}^{k} I_{\{2^n \le f < 2^{n+1}\}}$

   (c) Поскольку для возрастающей последовательности супремум это предел, то $\int \underset{k\in\mathbb{N}}{sup} s_k d\mu = \underset{k\to\infty}{lim} \int \sum_{n=-k}^{k} u_k d\mu$

   (d) Воспользовавшись свойством аддитивности интеграла для (4.ч) получим, что $\underset{k\to\infty}{lim} \int \sum_{n=-k}^{k} u_k d\mu = \underset{k\to\infty}{lim} \sum_{n=-k}^{k} \int u_k d\mu = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int I_{\{2^n \le f < 2^{n+1}\}} f d\mu$

   (e) Заметим, что $\forall n \in \mathbb{N}\ I_{\{2^n \le f < 2^{n+1}\}} 2^n \le f I_{\{2^n \le f < 2^{n+1}\}} \le I_{\{2^n \le f < 2^{n+1}\}} 2^{n+1}$, тогда из монотонности интеграла имеем, что $C = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int I_{\{2^n \le f < 2^{n+1}\}} 2^n d\mu \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int I_{\{2^n \le f < 2^{n+1}\}} f d\mu \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int I_{\{2^n \le f < 2^{n+1}\}} 2^{n+}$ $2C$

   (f) Поскольку $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int I_{\{2^n \le f < 2^{n+1}\}} f d\mu \in \mathcal{L}^1(u)$ то из (9) и снова монотонности интеграла получим, что $C \in \mathcal{L}^1(u)$. Отсюда следует, что $\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \mu\left\{2^n \le u < 2^{n+1}\right\} \in \mathcal{L}^1(u)$

5. С другой стороны предположив ту же сумму s_k и воспользовавшс 4.е, замечая, что $2C \in \mathcal{L}^1(u)$ мы видим, что $u \in \mathcal{L}^1(u)$

6. Ч.Т.Д.

Задача 6

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - пространство с мерой.

- Показать, что $u \in \mathcal{L}^1(u) \iff u \in \mathcal{M}(u)$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \mu\{|u| \geq n\} < \infty$

Доказательство:

1. С одной стороны пусть $u \in \mathcal{L}^1(u)$. Из определения 10.1 функция интегрируема тогда и только тогда когда интеграл положительной и отрицательной частей конечен и $u \in \mathcal{M}(u)$
2. С другой стороны пусть $u \in \mathcal{M}(u)$ и $f = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{n \leq |u|\}}$
   (a) Разбив область $\mathbb{1}_{\{n \leq |u|\}}$ на вертикальные области вида $\mathbb{1}_{\{n \leq |u| < n+1\}}$ заметим, что $f = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \mathbb{1}_{\{m \leq |u| < m+1\}}$
   (b) Из определения f $\forall x \in X$ x встречается в области определения f ровно m раз. Поэтому $f = \sum_{n=1}^{\infty} m\mathbb{1}_{\{m \leq |u| < m+1\}}$
   (c) Поскольку $|u| < m+1 \implies |u|-1 < m$, то $\sum_{n=1}^{\infty} m\mathbb{1}_{\{m \leq |u| < m+1\}} > \sum_{n=1}^{\infty} (|u|-1)\mathbb{1}_{\{m \leq |u| < m+1\}}$
   (d) Разложив правую часть неравенства 2.c $\sum_{n=1}^{\infty} (|u|-1)\mathbb{1}_{\{m \leq |u| < m+1\}} = \sum_{n=1}^{\infty} |u|\mathbb{1}_{\{m \leq |u| < m+1\}} - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{m \leq |u| < m+1\}} = |u|\mathbb{1}_{\{1 \leq |u|\}} - \mathbb{1}_{\{1 \leq |u|\}}$
   (e) Поскольку $\mathbb{1}_{\{1 \leq |u|\}} \leq \mathbb{1}_{\{0 \leq |u|\}} = 1$, то $|u|\mathbb{1}_{\{1 \leq |u|\}} - \mathbb{1}_{\{1 \leq |u|\}} \geq |u|\mathbb{1}_{\{1 \leq |u|\}} - 1$
   (f) Поэтому $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{n \leq |u|\}} > |u|\mathbb{1}_{\{1 \leq |u|\}} - 1$
   (g) Поскольку $\forall x \in X$ $\mathbb{1}_{\{0 \leq |u|\}} = 1$ то $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{n \leq |u|\}} + 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{|u| \geq n\}} > |u|$
   (h) Заметим, следующее неравенство $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{n \leq |u|\}} \leq |u| < \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{|u| \geq n\}}$
   (i) Воспользовавщись следствием 9.9 и монотонностью интеграла получим, что $C = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\{|u| \geq n\} \leq \int |u|\, d\mu < \sum_{n=1}^{\infty} \mu\{|u| \geq n\} + \int \mathbb{1}_{\{|u| \geq 1\}} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\{|u| \geq n\} + 1 = C + 1$
   (j) Ну поскольку $u \in \mathcal{L}^1(u) \iff |u| \in \mathcal{L}^1(u)$ и $C \leq \int |u|\, d\mu < \infty$ то $\sum_{n=1}^{\infty} \mu\{|u| \geq n\} = C < \infty$ Следовательно и $C + 1 < \infty$ Поэтому $\sum_{n=0}^{\infty} \mu\{|u| \geq n\} < \infty$.
   (k) Ч.Т.Д.
3. С другой стороны пусть $u \in \mathcal{M}(u)$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \mu\{|u| \geq n\} < \infty$.
   (a) По определению интеграла индикаторной функции и следствию 9.9 $\sum_{n=0}^{\infty} \mu\{|u| \geq n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \int \mathbb{1}_{\{|u| \geq n\}} d\mu = \int \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{|u| \geq n\}} d\mu$
   (b) Поскольку $\int \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{|u| \geq n\}} d\mu = \int \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \mathbb{1}_{\{m \leq |u| < m+1\}} d\mu = \int \sum_{n=0}^{\infty} (m+1)\mathbb{1}_{\{m \leq |u| < m+1\}} d\mu$ и $\int |u|\, d\mu < \int \sum_{n=0}^{\infty} (m+1)\mathbb{1}_{\{m \leq |u| < m+1\}} d\mu$ так как $|u| < m+1$
   (c) Поскольку $\int \sum_{n=0}^{\infty} (m+1)\mathbb{1}_{\{m \leq |u| < m+1\}} d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \mu\{|u| \geq n\} < \infty$ и 3.b то $|u| \in \mathcal{L}^1(u)$. Тогда из отношения эквиваленции $|u| \in \mathcal{L}^1(u) \iff u \in \mathcal{L}^1(u)$ следует интегрируемость u
   (d) Ч.Т.Д

- Показать, что $u \in \mathcal{L}^1(u) \iff u \in \mathcal{M}(u)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \mu\{|u| \geq n\} \leq \int |u|\, d\mu \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu\{|u| \geq n\} < \infty$

Доказательство:

1. Пусто

Задача 7

Пусть $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1(\mu)$. Доказать следующее:

- Если $u_n \geq v$ $\forall n \in \mathbb{N}$ и некоторая $v \in \mathcal{L}^1(\mu)$, тогда $\int \underset{n\to\infty}{liminf} u_n d\mu \leq \underset{n\to\infty}{liminf} \int u_n d\mu$

Доказательство:

1. Пусть $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1(\mu)$.
2. Пусть $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \geq v : v \in \mathcal{L}^1(\mu)$
3. Из гомогенности следует, что $-v \in \mathcal{L}^1(\mu)$ и аддитивности, что $u_n - v \in \mathcal{L}^1(\mu)$.
4. Вспомним, что $\underset{n\to\infty}{liminf}(u_n - v) = \underset{n\to\infty}{supinf}(u_n - v)$ (Приложение A), тогда $\int \underset{n\to\infty}{liminf}(u_n - v)\, d\mu = \int \underset{n\to\infty}{supinf}(u_n - v)\, d\mu$
5. Поскольку $inf\,(a+b) = inf\,(a) + inf\,(b)$, то, также из аддитивности интеграла $\int \underset{n\to\infty}{supinf}(u_n - v)\, d\mu = \int \underset{n\to\infty}{supinf} u_n d\mu - \int \underset{n\to\infty}{supinf} v d\mu$.
6. Воспользовавшись определением 10.1 измеримостью $\underset{n\to\infty}{supinf}(u_n - v)$ по теореме Леви о монотонной сходимости $\int \underset{n\to\infty}{supinf}(u_n - v)\, d\mu = \underset{n\in\mathbb{N}}{sup} \int \underset{k\leq n}{inf}(u_k - v)\, d\mu$
7. Поскольку $\forall n \in \mathbb{N} \underset{k\leq n}{inf}(u_k - v) \leq u_k - v$ то $\int \underset{k\leq n}{inf}(u_k - v)\, d\mu \leq \int (u_k - v)\, d\mu$
8. Поскольку $\int \underset{k\leq n}{inf}(u_k - v)\, d\mu$ не зависит от n то $\int \underset{k\leq n}{inf}(u_k - v)\, d\mu \leq \underset{k\leq n}{inf} \int (u_k - v)\, d\mu$. $\forall n \in \mathbb{N}$ Таким образом $\int \underset{n\to\infty}{supinf}(u_n - v)\, d\mu \leq \underset{n\in\mathbb{N} k\leq n}{supinf} \int (u_k - v)\, d\mu = \underset{n\to\infty}{liminf} \int (u_k - v)\, d\mu$.
9. Комбинируя (5) и (9) получим, что $\int \underset{n\to\infty}{liminf} u_n d\mu - \int \underset{n\to\infty}{liminf} v d\mu \leq \underset{n\to\infty}{liminf} \int u_k d\mu - \underset{n\to\infty}{liminf} \int v d\mu$
10. Поскольку v фиксированная функция, следовательно $\int \underset{n\to\infty}{supinf} v d\mu = \underset{n\to\infty}{liminf} \int v d\mu = \underset{n\to\infty}{liminf} \int v d\mu$. Таким образом уравнение в (9) сокращается до $\int \underset{n\to\infty}{liminf} u_n d\mu \leq \underset{n\to\infty}{liminf} \int u_k d\mu$.
11. Ч.Т.Д

- Если $u_n \leq w$ $\forall n \in \mathbb{N}$ и некоторая $w \in \mathcal{L}^1(\mu)$, тогда $\underset{n\to\infty}{limsup} \int u_n d\mu \leq \int \underset{n\to\infty}{limsup} u_n d\mu$

Доказательство:

1. Пусть $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1(\mu)$.
2. Пусть $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq w : w \in \mathcal{L}^1(\mu)$
3. Из теоремы 10.4 следует, что $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq w - u_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Из определения 10.1 следует, что $w - u_n \in \mathcal{M}(\mu)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Кроме того, из следствия 8.10 $\underset{n\to\infty}{liminf}(w - u_n) \in \mathcal{M}^+(\mu)$

4. Из приложения А известно, что $\underset{n\to\infty}{liminf}\,(w-u_n)=\underset{n\in\mathbb{N}n\geq k}{supinf}\,(w-u_n)$. Более того $\forall n\in\mathbb{N}\,\underset{n\geq k}{inf}\,(w-u_n)$ - не убывающая последовательность. Тогда по теореме Леви о монотонной сходимости $\int\underset{n\in\mathbb{N}n\geq k}{supinf}\,(w-u_n)\,d\mu=\underset{n\in\mathbb{N}}{sup}\int\underset{n\geq k}{inf}\,(w-u_n)\,d\mu$

5. По определению инфимума и монотнности интеграла $\int\underset{n\geq k}{inf}\,(w-u_n)\,d\mu\leq\int(w-u_n)\,d\mu$.

6. Поскольку $\underset{n\geq k}{inf}\,(w-u_n)$ - не зависит от $n\in\mathbb{N}$, то $\underset{n\geq k}{inf}\int\underset{n\geq k}{inf}\,(w-u_n)\,d\mu=\int\underset{n\geq k}{inf}\,(w-u_n)\,d\mu\leq\underset{n\geq k}{inf}\int(w-u_n)\,d\mu$

7. Из монотонности супремума имеем, что $\underset{n\in\mathbb{N}}{sup}\int\underset{n\geq k}{inf}\,(w-u_n)\,d\mu\leq\underset{n\in\mathbb{N}n\geq k}{supinf}\int(w-u_n)\,d\mu$. Таким образом, используя (4) $\int\underset{n\in\mathbb{N}n\geq k}{supinf}\,(w-u_n)\,d\mu\leq\underset{n\in\mathbb{N}n\geq k}{supinf}\int(w-u_n)\,d\mu$.

8. Из аддитивности интеграла $\int\underset{n\in\mathbb{N}n\geq k}{supinf}\,w d\mu-\int\underset{n\in\mathbb{N}n\geq k}{supinf}\,(-u_n)\,d\mu\leq\underset{n\in\mathbb{N}n\geq k}{supinf}\int w d\mu-\underset{n\in\mathbb{N}n\geq k}{supinf}\int(-u_n)\,d\mu$

9. Поскольку $\int\underset{n\in\mathbb{N}n\geq k}{supinf}\,w d\mu=\underset{n\in\mathbb{N}n\geq k}{supinf}\int w d\mu=\int w d\mu$ то $\int-\underset{n\in\mathbb{N}n\geq k}{supinf}\,(-u_n)\,d\mu\leq\underset{n\in\mathbb{N}n\geq k}{supinf}\int(-u_n)\,d\mu$

10. Снова обращаясь к приложению 10.1 А $(-\underset{n\to\infty}{liminf}\,(-u_n)=\underset{n\to\infty}{limsup}\,(u_n))$ получаем $\int\underset{n\to\infty}{limsup}\,(u_n)\,d\mu\leq\underset{n\to\infty}{limsup}\int u_n d\mu$

11. Ч.Т.Д.

- Что произойдет, если последовательность не имеет верхней и нижней границы?

Ответ: В таком случае например в пункте (9) первого доказательства получим, что $-\infty+\infty\leq-\infty+\infty$ это в свою очередь не имеет смысла.

Задача 8

Пусть $(X,\mathcal{A},\mathbb{P})$ пространство с вероятностной мерой. Пусть σ-алгебры $\mathcal{B},\mathcal{C}\subset\mathcal{A}$ независимы. Показать, что $u\in\mathcal{M}^+(\mathcal{B})$ и $w\in\mathcal{M}^+(\mathcal{C})$ удовлетворяют уравнению $\int u\cdot w d\mathbb{P}=\int u d\mathbb{P}\cdot\int w d\mathbb{P}$. Также показать, что для $u\in\mathcal{M}^+(\mathcal{B})$ и $w\in\mathcal{M}^+(\mathcal{C})$ $uw\in\mathcal{L}^1(\mu)\iff u\in\mathcal{L}^1(\mu)$ и $w\in\mathcal{L}^1(\mu)$

Доказательство:

1. Пусть $(X,\mathcal{A},\mathbb{P})$ пространство с вероятностной мерой.

2. Пусть σ-алгебры $\mathcal{B},\mathcal{C}\subset\mathcal{A}$ независимы.

3. Пусть $u\in\mathcal{M}^+(\mathcal{B})$ и $w\in\mathcal{M}^+(\mathcal{C})$

4. Рассмотрим $B\in\mathcal{B}$ и $C\in\mathcal{C}$. Первым шагом положим, что $u:=\mathbb{1}`_B(x)$ и $w:=\mathbb{1}`_C(x)$. Заметим, что $uw=\mathbb{1}`_B(x)\,\mathbb{1}`_C(x)=\mathbb{1}`_{B\cap C}(x)$, тогда $\int\mathbb{1}`_{B\cap C}d\mathbb{P}=\mathbb{P}(B\cap C)$, $\int u d\mathbb{P}=\mathbb{P}(B)$ и $\int w d\mathbb{P}=\mathbb{P}(C)$. Поскольку $\mathcal{B},\mathcal{C}$ независимы, то $\mathbb{P}(B\cap C)=\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C)$. А это в свою очередь тоже самое, что и $\int\mathbb{1}`_{B\cap C}d\mathbb{P}=\int\mathbb{1}`_B d\mathbb{P}\int\mathbb{1}`_C d\mathbb{P}$

5. Пусть $u := \sum_{i=1}^{N} x_i \mathbb{1}`_{B_i} \in \mathcal{E}^+(\mathcal{B})$ и $N \in \mathbb{N}$. Тогда $\int u d\mathbb{P} = \int \sum_{i=1}^{N} x_i \mathbb{1}`_{B_i} d\mathbb{P}$

    (a) Из аддитивности интеграла Лебега имеем, что $\int \sum_{i=1}^{N} x_i \mathbb{1}`_{B_i} d\mathbb{P} = \sum_{i=1}^{N} \int x_i \mathbb{1}`_{B_i} d\mathbb{P}$

    (b) По определению интеграла индикаторной функции имеем, что $\sum_{i=1}^{N} \int x_i \mathbb{1}`_{B_i} d\mathbb{P} = \sum_{i=1}^{N} x_i \mathbb{P}(B_i)$ . Аналогично и для $w := \sum_{j=1}^{M} y_j \mathbb{1}`_{C_j} \in \mathcal{E}^+(\mathcal{C})$ $\sum_{j=1}^{M} \int y_j \mathbb{1}`_{C_j} d\mathbb{P} = \sum_{j=1}^{M} y_j \mathbb{P}(C_j)$ $\forall M \in \mathbb{N}$

    (c) Поскольку $u, v \in \mathcal{E}^+$, то $\int u \cdot w d\mathbb{P} = \int \sum_{i=1}^{N} x_i \mathbb{1}`_{B_i} \sum_{j=1}^{M} y_j \mathbb{1}`_{C_j} d\mathbb{P} = \int \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} x_i y_j \mathbb{1}`_{B_i} \mathbb{1}`_{C_j} d\mathbb{P}$

    (d) Дважды из аддитивности интеграла получим, что $\int u \cdot w d\mathbb{P} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \int x_i y_j \mathbb{1}`_{B_i} \mathbb{1}`_{C_j} d\mathbb{P} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \int x_i y_j \mathbb{1}`_{B_i \cap C_j} d\mathbb{P} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} x_i y_j \mathbb{P}(B_i \cap C_j)$. Это ни что иное как $\int u d\mathbb{P} \int w d\mathbb{P} = \sum_{i=1}^{N} x_i \mathbb{P}(B_i) \sum_{j=1}^{M} y_j \mathbb{P}(C_j) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} x_i y_j \mathbb{P}(B_i) \mathbb{P}(C_j)$, где $\forall i \in \overline{1, N}, j \in \overline{1, M}$ $\mathbb{P}(B_i \cap C_j) = \mathbb{P}(B_i) \mathbb{P}(C_j)$ согласно пункту 4.

6. Рассмотрим $\int u \cdot w d\mathbb{P}$.

    (a) Из леммы Сомбрерро (8.8) положим, что $u = \underset{k \to \infty}{lim} u_k$ $w = \underset{k \to \infty}{lim} w_k$, где u_k, w_k - последовательности неубывающих простых функций. $\int u \cdot w d\mathbb{P} = \int \underset{k \to \infty}{lim} u_k \cdot w_k d\mathbb{P} = \underset{k \to \infty}{lim} \int u_k \cdot w_k d\mathbb{P}$ по теореме Леви о монотонной сходимости.

    (b) Поскольку $\forall k \in \mathbb{N}$ $u_k \in \mathcal{M}^+(\mathcal{B})$ и $w_k \in \mathcal{M}^+(\mathcal{C})$ то из пункта 5 следует, что $\underset{k \to \infty}{lim} \int u_k \cdot w_k d\mathbb{P} = \underset{k \to \infty}{lim} \left(\int u_k d\mathbb{P} \cdot \int w_k d\mathbb{P} \right)$

    (c) Из свойства предела произведения последовательностей верно, что $\underset{k \to \infty}{lim} \left(\int u_k d\mathbb{P} \cdot \int w_k d\mathbb{P} \right) = \underset{k \to \infty}{lim} \left(\int u_k d\mathbb{P} \right) \cdot \underset{k \to \infty}{lim} \left(\int w_k d\mathbb{P} \right)$. Тогда $\int u \cdot w d\mathbb{P} = \int u d\mathbb{P} \cdot \int w d\mathbb{P}$

7. С одной стороны пусть $u \in \mathcal{M}^+(\mathcal{B})$ и $w \in \mathcal{M}^+(\mathcal{C})$ и $uw \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Поскольку $\int u \cdot w d\mathbb{P} = \int u d\mathbb{P} \cdot \int w d\mathbb{P}$, то $u \in \mathcal{L}^1(\mu)$ и $w \in \mathcal{L}^1(\mu)$

8. С другой стороны пусть $u \in \mathcal{M}^+(\mathcal{B}), w \in \mathcal{M}^+(\mathcal{C})$ $u \in \mathcal{L}^1(\mu)$ и $w \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Тогда из $\int u \cdot w d\mathbb{P} = \int u d\mathbb{P} \cdot \int w d\mathbb{P}$ следует, что $uw \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

9. Ч.Т.Д.