# КОНСТРУИРОВАНИЕ ИНТЕГРАЛА ИТО

## Предварительные сведения

**Определение №1** (Пространство функций интегрируемых по Ито)

Пространство интегрируемых по по случайной мере функций $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S,T)$ вида $f(t,\omega) : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ удовлетворяют следующим свойствам:

1. Отображение $(t,\omega) \to f(t,\omega)$ является $\mathbb{B} \times \mathcal{F}$ - измеримым, где $\mathbb{B}$ - Борелевская сигма алгебра на $[0,\infty)$ и $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty$ - сигма алгебра событий с единицей $\Omega$

2. $f(t,\omega)$ является адаптированным отображением к фильтрации $\mathcal{F}_t$

3. $\mathbb{E}\left[\int_S^T f(t,\omega)^2 dt\right] = \mathbb{E}\left[\left(\int_S^T f(t,\omega) B_t(\omega)\right)^2\right] < \infty$, то есть $\int_S^T f(t,\omega) B_t(\omega)$ - является элементом Лебегова пространства $\mathcal{L}^2$

Сначала интеграл Ито определяется для класса элементарных функций, затем выполняется предельный переход, как это сделано в конструкции интеграла Лебега.

**Определение №2** (Элементарная функция)

Функция $\phi \in \mathcal{V}(S,T)$ называется элементарной тогда и только тогда, когда ее можно представить в следующем виде:

$$\phi(t,\omega) = \sum_j e_j(\omega) I_{[t_j,t_{j+1})}(t)$$

Где $e_j(\omega)$ является $\mathcal{F}_{t_j}$ - измеримой. И $\bigcup_j [t_j, t_{j+1}) = [S,T)$

**Определение №3** (Интеграл Ито для элементарной функции)

Интеграл Ито для элементарной функции $\phi(t,\omega)$ определяется как

$$\int_S^T \phi(t,\omega)\, dB_t(\omega) = \sum_j e_j(\omega)\left[B_{t_{j+1}}(\omega) - B_{t_j}(\omega)\right]$$

**Лемма № 4** (Изометрия Ито)

Если $\phi(t,\omega)$ - ограничена и элементарна, тогда

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_S^T \phi(t,\omega)\, dB_t(\omega)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_S^T \phi(t,\omega)^2 dt\right]$$

**Доказательство:**

1. Пусть $\phi(t,\omega)$ - ограничена и элементарна.

2. Пусть $\Delta B_{t_j} = B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$ Рассмотрим $\mathbb{E}[e_i e_j \Delta B_i \Delta B_j] = \mathbb{E}\left[e_i e_j \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)\left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right)\right]$

   (a) Поскольку инкременты Броуновского движения независимы и равны нулю, то

      i. $\mathbb{E}\left[e_i e_j \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)\left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right)\right] = e_i e_j \mathbb{E}\left[B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right]\mathbb{E}\left[B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right] = 0$ при $j \neq i$

   (b) При $j = i$ $\mathbb{E}\left[e_i e_j \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)\left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right)\right] = e_i e_j \mathbb{E}\left[\left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right)^2\right] = e_i e_j (t_{j+1} - t_j)$

   (c) Отсюда следует, что $\mathbb{E}[e_i e_j \Delta B_i \Delta B_j] = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ \mathbb{E}[e_j]^2 (t_{j+1} - t_j) & j = i \end{cases}$

3. Рассмотрим $\mathbb{E}\left[\left(\int_S^T \phi(t,\omega)\, dB_t(\omega)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_j e_j \Delta B_j\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_j \sum_i e_j e_i \Delta B_i \Delta B_j\right]$

    (a) Поскольку $\int_S^T \phi(t,\omega)\, dB_t(\omega) = \sum_j e_j(\omega)\left[B_{t_{j+1}}(\omega) - B_{t_j}(\omega)\right]$, то $\mathbb{E}\left[\left(\int_S^T \phi(t,\omega)\, dB_t(\omega)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_j e_j \Delta B_j\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_j \sum_i e_j e_i \Delta B_i \Delta B_j\right]$

    (b) Поскольку $e_j(\omega)$ является $\mathcal{F}_{t_j}$ измеримой, то применяя дважды следствие 9.9 (Shilling) получим, что $\mathbb{E}\left[\sum_i \sum_j e_i e_j \Delta B_i \Delta B_j\right] = \sum_i \sum_j \mathbb{E}\left[e_i e_j \Delta B_i \Delta B_j\right] = \sum_{i,j} \mathbb{E}\left[e_j e_i \Delta B_i \Delta B_j\right]$

    (c) Из (2) следует, что $\sum_{i,j} \mathbb{E}\left[e_j e_i \Delta B_i \Delta B_j\right] = \sum_j \mathbb{E}\left[e_j\right]^2 (t_{j+1} - t_j)$

    (d) Снова используя следствие 9.9 (Shilling) $\sum_j \mathbb{E}\left[e_j\right]^2 (t_{j+1} - t_j) = \mathbb{E}\left[\sum_j e_j^2 (t_{j+1} - t_j)\right] = \mathbb{E}\left[\int_S^T \phi(t,\omega)^2\, dt\right]$

4. Ч.Т.Д.

**Непосредственное конструирование интеграла Ито**

**Шаг 1.** Пусть $g \in \mathcal{V}$ ограничена и $g(\cdot,\omega)$ непрерывна почти всюду $\omega \in \Omega$. Тогда существует последовательность элементарных функций $\phi_n \in \mathcal{V}$ таких что при $n \to \infty$

$$\mathbb{E}\left[\int_S^T (g - \phi_n)^2\, dt\right] \to 0$$

**Доказательство:**

1. Пусть $g \in \mathcal{V}$. Положим, что $\exists C > 0 : |g(t,\omega)| \leq C\ \forall (t,\omega) \in [0,\infty) \times \Omega$. Положим, что $g(\cdot,\omega)$ непрерывна $\forall \omega \in \Omega$

2. Мы покажем, что $g(t,\omega)$ может быть аппроксимирована функцией $\phi_n(t,\omega) \in \mathcal{V}$:

$$\phi_n(t,\omega) := \sum_{j=[nS]}^{[nT]} g\left(\frac{j}{n},\omega\right) \mathbb{1}_{\left[max\left(\frac{j}{n},S\right),min\left(\frac{j+1}{n},T\right)\right)}(t)$$

3. Чтобы применить теорему о мажорируемой сходимости мы покажем, что $\underset{n\to\infty}{lim} \int_S^T (g - \phi_n)^2\, dt = 0$ и имеет интегрируемую мажоранту. Зафиксируем $\omega \in \Omega$

    (a) $\underset{n\to\infty}{lim} \int_S^T (g - \phi_n)^2\, dt = \underset{n\to\infty}{lim} \int_S^T \left(g(t) - \sum_{j=[nS]}^{[nT]} g\left(\frac{j}{n},\omega\right) \mathbb{1}_{\left[max\left(\frac{j}{n},S\right),min\left(\frac{j+1}{n},T\right)\right)}(t)\right)^2 dt$ - подставили определение в (2)

    (b) $\underset{n\to\infty}{lim} \int_S^T (g - \phi_n)^2\, dt = \underset{n\to\infty}{lim} \sum_{j=[nS]} \int_{max\left(\frac{j}{n},S\right)}^{min\left(\frac{j+1}{n},T\right)} \left(g(t) - g\left(\frac{j}{n}\right)\right)^2 dt$ - заменили интеграл на сумму интегралов на границах интервалов в (3.a)

    (c) $\underset{n\to\infty}{lim} \int_S^T (g - \phi_n)^2\, dt \leq \underset{n\to\infty}{lim} (T - S) \underset{[nS]\leq j\leq [nT]}{sup} \underset{t\in\left[max\left(\frac{j}{n},S\right),min\left(\frac{j+1}{n},T\right)\right)}{sup} \left|g(t) - g\left(\frac{j}{n}\right)\right|^2 = 0$ поскольку $g : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ - непрерывна

    (d) Поэтому $\underset{n\to\infty}{lim} \int_S^T (g - \phi_n)^2\, dt \to 0$

4. Мы показали, что $\underset{n\to\infty}{lim} \int_S^T (g-\phi_n)^2\,dt \to 0$ - поточечно

5. Мы показали, что $(T-S) \underset{[nS]\le j\le [nT]}{sup} \underset{t\in\left[max\left(\frac{j}{n},S\right),min\left(\frac{j+1}{n},T\right)\right)}{sup} \left|g(t)-g\left(\frac{j}{n}\right)\right|^2$ константно ограничивает $\underset{n\to\infty}{lim} \int_S^T (g-\phi_n)^2\,dt\ \forall n\in\mathbb{N}$

6. Тогда по теореме Лебега о мажорируемой сходимости мы можем поменять предел и интеграл местами:
$$\underset{n\to\infty}{lim}\mathbb{E}\left[\int_S^T (g-\phi_n)^2\,dt\right] = \mathbb{E}\left[\underset{n\to\infty}{lim}\int_S^T (g-\phi_n)^2\,dt\right] = 0$$

7. Ч.Т.Д.

**Шаг 2.**

Пусть $h\in\mathcal{V}$ - ограничена. Тогда существует последовательность ограниченных функций $g_n\in\mathcal{V}$ таких, что $g_n(\cdot,\omega)$ непрерывна $\forall\omega\in\Omega$ и $n\in\mathbb{N}$ и
$$\mathbb{E}\left[\int_S^T (h-g_n)^2\,dt\right]\to 0$$

**Доказательство:**

1. Пусть $h\in\mathcal{V}$ - ограничена. Это означает, что $|h|\le M$

2. Рассмотрим последовательность $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{V}$, такую что $\forall n\in\mathbb{N}$ $g_n(t,\omega) = n\int_{t-\frac{1}{n}}^t h(s,\omega)\,ds$. Заметим, что $g_n(t,\omega)$ - ограничена, поскольку $|g_n(t,\omega)| = \left|n\int_{t-\frac{1}{n}}^t h(s,\omega)\,ds\right| \le \left|n\int_{t-\frac{1}{n}}^t M ds\right| = \left|nM\frac{1}{n}\right| = M$.

3. Покажем, что последовательность $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ является непрерывной почти всюду:
   (a) Рассмотрим $|g_n(t',\omega)-g_n(t,\omega)| = \left|n\int_{t'-\frac{1}{n}}^{t'} h(s,\omega)\,ds - n\int_{t-\frac{1}{n}}^{t} h(s,\omega)\,ds\right|$
   (b) Используя неравенство $|a-b|\le|a|+|b|$ получим, что $\left|n\int_{t'-\frac{1}{n}}^{t'} h(s,\omega)\,ds - n\int_{t-\frac{1}{n}}^{t} h(s,\omega)\,ds\right| \le \left|n\int_{t'-\frac{1}{n}}^{t'} h(s,\omega)\,ds\right| + \left|n\int_{t-\frac{1}{n}}^{t} h(s,\omega)\,ds\right| = 2M$
   (c) Отсюда следует, что $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ непрерывна на произвольном интервале $\left[t-\frac{1}{n},t\right]$ и поэтому непрерывна почти всюду

4. Поскольку (3.c), то $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ интегрируема по Риману. Мы покажем, что $g_n(t,\omega)\to h(s,\omega)$ при $n\to\infty$
   (a) Рассмотрим $\underset{n\to\infty}{lim} g_n(t,\omega) = \underset{n\to\infty}{lim} n\int_{t-\frac{1}{n}}^t h(s,\omega)\,ds = \underset{n\to\infty}{lim} n\left(A(t)-A\left(t-\frac{1}{n}\right)\right)$.
   (b) Пусть $k=\frac{1}{n}$ В таком случае $\underset{n\to\infty}{lim} g_n(t,\omega) = \underset{k\to 0}{lim}\frac{A(t)-A\left(t-\frac{1}{n}\right)}{k} = h(s,\omega)$ из теоремы Ньютона Лейбница в точках в которых $g_n(t,\omega)$ непрерывна
   (c) Ч.Т.Д.

5. Мы показали, что
   (a) $g_n(t,\omega)\to h(s,\omega)$ - сходится поточечно при $n\to\infty$

(b) По условию$|g_n(t,\omega)|$ - ограничена.

(c) В таком случае по теореме Лебега о мажорируемой сходимости (аналогично задаче 12.1 Shilling) можно утверждать, что $\mathbb{E}\left[\int_S^T (h-g_n)^2\,dt\right] \to 0$

6. Ч.Т.Д.

**Шаг 3.**

Пусть $f \in \mathcal{V}$. Тогда существует последовательность $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$, такая что $h_n$ - ограничена $\forall n \in \mathbb{N}$ и при $n \to \infty$

$$\mathbb{E}\left[\int_S^T (f-h_n)\,dt\right] \to 0$$

**Доказательство:**

1. Пусть $f \in \mathcal{V}$

2. Рассмотрим последовательность $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$ вида:

$$h_n(t,\omega) := \begin{cases} -n & f(t,\omega) < -n \\ f(t,\omega) & -n < f(t,\omega) < n \\ n & n < f(t,\omega) \end{cases}$$

3. Заметим, что $h_n \to f$ поточечно при $n \to \infty$ и, следовательно, $\int_S^T h_n dt \to \int_S^T f dt$

4. $\int_S^T (f-h_n)^2\,dt \leq \int_S^T (f+h_n)^2\,dt \leq 2\int_S^T f^2 dt + 2\int_S^T (h_n)^2\,dt \leq 4\int_S^T f^2 dt$. Поскольку $\mathbb{E}\left[\int_S^T f^2 dt\right] < \infty$, то $4\mathbb{E}\left[\int_S^T f^2 dt\right] < \infty$

5. Тогда по теореме о Лебега о мажорируемой сходимости $\mathbb{E}\left[\int_S^T (f-h_n)\,dt\right] \to 0$

6. Ч.Т.Д.

**Шаг 4.**

Пусть $f \in \mathcal{V}(S,T)$. Тогда существует последовательность элементарных функций $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{V}(S,T)$, такая, что, при $n \to \infty$

$$\mathbb{E}\left[\int_S^T (f(t,\omega)-\phi_n(t,\omega))^2\,dt\right] \to 0$$

**Доказательство:**

1. Пусть $f \in \mathcal{V}(S,T)$

2. Функция вида $\mathbb{E}\left[\int_S^T f(t,\omega)^2\,dt\right]$ является $\mathcal{L}^2(\mathbb{P}\times\lambda)$ - нормой. Выполним подстановку:

$$\mathbb{E}\left[\int_S^T (f-\phi_n)^2\,dt\right] = \mathbb{E}\left[\int_S^T ([f-h_n]+[h_n-g_n]+[g_n-\phi_n])^2\,dt\right]$$

3. Из неравенства Минковского следует, что:

$$\mathbb{E}\left[\int_S^T (f-\phi_n)^2\,dt\right] \leq \mathbb{E}\left[\int_S^T (f-h_n)^2\,dt\right] + \mathbb{E}\left[\int_S^T (h_n-g_n)^2\,dt\right] + \mathbb{E}\left[\int_S^T (g_n-\phi_n)^2\,dt\right]$$

4. Поскольку все три компоненты сходятся то мы можем подобрать такие $h_n, g_n, \phi_n$ $n \in \mathbb{N}$, что

$$\mathbb{E}\left[\int_S^T (f-\phi_n)^2\,dt\right] \leq \frac{1}{n}$$

5. Поэтому при $n \to \infty$ $\mathbb{E}\left[\int_S^T (f-\phi_n)^2\,dt\right] \to 0$

**Определение №5. (Интеграл Ито)**

Пусть $f \in \mathcal{V}(S,T)$. Интеграл Ито определен как предел в где $\mathcal{L}^2$

$$\int_S^T f(t,\omega)\,dB_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_S^T \phi_n(t,\omega)\,dB_t(\omega)$$

Где $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ - последовательность функций, такая что при $n \to \infty$:

$$\mathbb{E}\left[\int_S^T (f-\phi_n)^2\,dt\right] \to 0$$