Задача №1

Расширить свойства аддитивности, строгой аддитивности и субаддитивности меры μ на конечный набор элементов N

Доказательство аддитивности

1. Пусть $A_1, A_2, ..., A_N \in \Lambda$ - попарно непересекаются множества.
2. Докажем по индукции.
3. База индукции $\mu\left(A_1 \sqcup A_2\right) = \mu\left(A_1\right) + \mu\left(A_2\right)$
4. Предположим $\mu\left(A_1 \sqcup A_2 \sqcup ... \sqcup A_{k-1}\right) = \sum_{i=1}^{k-1} \mu\left(A_i\right)$
5. Пусть $A_1 \sqcup A_2 \sqcup ... \sqcup A_{k-1} = B$. Тогда $\mu\left(A_1 \sqcup A_2 \sqcup ... \sqcup A_{k-1}\right) = \mu\left(B\right)$
6. Поскольку все элементы попарно непересекаются, следовательно $B \cap A_k = \varnothing$
7. Из (3) известно, что $\mu\left(B \sqcup A_k\right) = \sum_{i=1}^{k-1} \mu\left(A_i\right) + \mu\left(A_k\right) = \sum_{i=1}^{k} \mu\left(A_i\right)$
8. Поэтому $\mu\left(A_1 \sqcup A_2 \sqcup ... \sqcup A_N\right) = \sum_{i=1}^{N} \mu\left(A_i\right)$

Доказательство строгой аддитивности

1. Пусто

Доказательство субаддитивности

1. Пусть $A_1, A_2, ..., A_N \in \Lambda$ - элементы сигма алгебры
2. Докажем по индукции
3. База индукции $\mu\left(A_1 \cup A_2\right) \leq \mu\left(A_1\right) + \mu\left(A_2\right)$ по субаддитивности
4. Предположим $\mu\left(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{N-1}\right) \leq \sum_{i=1}^{N-1} \mu\left(A_i\right)$
5. Пусть $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{N-1} = B$, тогда $\mu\left(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{N-1}\right) = \mu\left(B\right)$
6. Шаг индукции. Из субаддитивности понятно, что $\mu\left(B \cup A_N\right) \leq \sum_{i=1}^{N-1} \mu\left(A_i\right) + \mu\left(A_N\right) = \sum_{i=1}^{N} \mu\left(A_i\right)$
7. Поэтому субаддитивность верна для конечного числа элементов

Задача №2

Пусть $(X, \mathcal{A})$ - измеримо. Пусть $x \in A \in \mathcal{A}$ - произвольная точка из элемента сигма алгебры $\mathcal{A}$

- Доказать, что $\delta\left(A\right) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$ - мера

Доказательство

1. M_0 - выполнено автоматически

2. Пусть $A = \varnothing$. Это значит, что не существует такой точки x, что $x \in \varnothing$.

   (a) Поэтому $x \notin \varnothing$. Это в свою очередь означает, что $\delta(\varnothing) = 0$. Поэтому выполнено M_1

3. Пусть $(A_n)_{n\in N} \in \mathcal{A}$ - попарно непересекающиеся множества.

   (a) Пусть $x \in A_{k\in N}$. Если $x \in A_k$, следовательно $x \in \bigsqcup_{n\in N} A_n$. Это в свою очередь означает, что $\delta\left(\bigsqcup_{n\in N} A_n\right) = 1$

   (b) Поскольку $\forall i \in N, j \in N, i \neq j, A_i \cap A_j = \varnothing$, следовательно $\forall c \neq k, c \in N, x \notin A_c$. Другими словами, если $x \in A_{k\in N}$ и они попарно не пересекаются, то не существует другого множества в котором лежит x

   (c) Из (b) следует, что $\sum_{n\in N} \delta(A_n) = 1$

   (d) Если $\forall n, x \notin A_{n\in N}$, очевидно, что $\delta\left(\bigsqcup_{n\in N} A_n\right) = 0$ и $\delta(A_n) = 0$

   (e) Поэтому $\delta\left(\bigsqcup_{n\in N} A_n\right) = \sum_{n\in N} \delta(A_n)$. Что в свою очередь означает, что выполнено M_2

- Доказать, что $\gamma(A) := \begin{cases} 0 & A - \text{счетно} \\ 1 & A - \text{несчетно} \end{cases}$ - мера

Доказательство:

Дополнительное условие: либо A счетно и A^C несчетно, либо наоборот, либо счетны оба. Оба не могут быть несчетными одновременно.

1. $A = \varnothing$ - счетно, следовательно $\gamma(\varnothing) = 0$. Что в свою очередь означает, что выполнено M_1

2. Пусть $A_{k\in N}$ счетно. Тогда $A^C_{k\in N}$ несчетно.

   (a) Из (2) следует, что $\delta\left(A_k \sqcup A_k^C = \bigsqcup_{n\in N} A_n\right) = 1$.

   (b) Из (2) следует $\sum_{n\in N} \delta(A_n) = 1$

3. Аналогично для условия Либо A несчетно и A^C счетно

4. Пусть A и A^C несчетны. Тогда $\delta\left(\bigsqcup_{n\in N} A_n\right) = \sum_{n\in N} \delta(A_n) = 0$

5. Из (2) (3) и (4) следует, что выполненоM_2

6. Следовательно $\gamma(A)$ мера

- Доказать, что $|A| = \begin{cases} |A| & A - \text{конечен} \\ +\infty & A - \text{бесконечно} \end{cases}$ - мера

Доказательство:

1. Пусть $A = \varnothing$. Воспользуемся тем фактом, что $|\varnothing| = 0$. Поэтому $f(\varnothing) = 0$. Следовательно, выполнено M_1
2. Пусть $(A_n)_{n \in N} \in \mathcal{A}$ - попарно непересекающиеся множества.
3. Пусть $\forall n \in N$ A_n - конечны.
   (a) Рассмотрим $A = \bigsqcup_{n \in N} A_n$
   (b) По свойству мощности объединения: $|A| = \left|\bigsqcup_{n \in N} A_n\right| = \sum_{n \in N} |A_n|$. Это в точности, тоже самое что и M_2
4. Пусть $\exists k \in N$ такой, что $|A_k| = \infty$ и также $\forall n \neq k, n \in N, |A_k| < \infty$
   (a) По свойству мощности объединения:$|A| = \left|\bigsqcup_{n \in N} A_n\right| = \sum_{n \in N} |A_n| = \infty$. Это в точности, тоже самое что и M_2
   (b) Если рассмотреть два и более бесконечных по мощности множеств, то результат будет аналогичен (a)
5. Следовательно $|A|$ мера

- Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_1, ...\}$ - счетно, $(p_n)_{n \in N}$- последовательность множеств $p_n \in [0, 1]$, такая что $\sum_{n \in N} p_n = 1$. Показать, что на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ ф-я множества $\mathbb{P}(A) = \sum_{n \in N} p_n \delta(A)$ - мера

Доказательство:

1. Известен тот факт, что $\mathcal{P}(\Omega)$ - сигма алгебра. Следовательно выполнено M_1
2. Пусть $A = \varnothing$. Поскольку $\delta(A)$ - мера, следовательно $\delta(\varnothing) = 0$. Таким образом $\mathbb{P}(\varnothing) = \sum_{n \in N} p_n \delta(\varnothing) = 0$. Следовательно выполнено M_2
3. Пусть $(A_n)_{n \in N} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ последовательность попарно непересекающихся множеств. Поскольку $\delta(A)$ - мера, отсюда следует, что $\delta\left(\bigsqcup_{n \in N} A_n\right) = \sum_{n \in N} \delta(A_n)$. Тогда $\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n \in N} A_n\right) = \sum_{n \in N} p_n \sum_{n \in N} \delta(A_n) = \sum_{n \in N} \sum_{n \in N} p_n \delta(A_n)$. Это в точности M_3

Задача №3

Является ли функция из примера 4.5 мерой μ на измеримом пространстве $(R, B(R))$. Является ли такая функция мерой на $(Q, Q \cap B(R))$?
Доказательство 1

1. Нет, такая функция не является мерой.
2. Предположим дано измеримое пространство $(R, B(R))$
3. Поскольку Борелевская система множеств $B(R)$ содержит в себе полуоткрытые интервалы, то в него включен интервал $A = (-\infty, a]$

4. Поскольку сигма алгебра замкнута относительно дополнения, следовательно в ней существует $A^c = (a, \infty)$

5. Рассмотрим свойство М2. $\mu(A \cup A^c) = \mu(R) = 1$. Однако $\mu(A) + \mu(A^c) = 1 + 1 = 2$

6. Поскольку $1 \neq 2$, то это контрпример

Доказательство 2

1. sdf

Задача №6

Пусть $(X, \mathcal{A})$ - измеримо. Приведите пример сигма-финитной меры μ и сопоставляет каждому интервалу $[a, b)$ такому, что $b - a > 2$ конечную массу.
Решение:

1. Мера Лебега на R σ-конечна. $R = \bigcup_{i \in N} [-i, i)$ - единица.$\forall i \in N$ $\lambda[-i, i) = 2i$ - конечна.

Задача №7

Пусть $(X, \mathcal{A})$ - измеримо.

- Пусть μ и ν - меры на $(X, \mathcal{A})$. Показать, что функция множеств $\rho(A) := a\mu(A) + b\nu(A)$, $A \in \mathcal{A}$ для $a, b \geq 0$ является мерой

Доказательство:

1. Свойство M_0 выполняется автоматически, поскольку $\mathcal{A}$ - сигма-алгебра

2. Пусть $A = \varnothing$. Поскольку μ и ν - меры, следовательно $\rho(\varnothing) := a\mu(\varnothing) + b\nu(\varnothing) = a\mu(\varnothing) + b\nu(\varnothing) = 0$.Поэтому выполняется свойство M_2

3. Пусть $(A_n)_{n \in N} \subset \mathcal{A}$. Поскольку μ и ν - меры, то $\rho\left(\bigsqcup_{i \in N} A_i\right) = a\mu\left(\bigsqcup_{i \in N} A_i\right) + b\nu\left(\bigsqcup_{i \in N} A_i\right) = a\sum_{i \in N} \mu(A_i) + b\sum_{i \in N} \nu(A_i) = \sum_{i \in N} [a\mu(A_i) + b\nu(A_i)] \overset{def}{=} \sum_{i \in N} \rho(A_i)$. Поэтому выполняется свойство M_2

- Пусть $\mu_1, \mu_2, ...$ - счетно много мер на $(X, \mathcal{A})$. Пусть $(\alpha_i)_{i \in N}$ - последовательность положительных чисел. Показать, следующая ф-я множеств мера: $\mu(A) := \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mu_i(A)$ $A \in \mathcal{A}$

Доказательство:

1. Поскольку $\mathcal{A}$ - сигма алгебра, следовательно выполнено M_0

2. Пусть $A = \varnothing$, тогда $\mu(\varnothing) := \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mu_i(\varnothing) = 0$. Следовательно выполнено M_1

Задача №8

Пусть $(X, \mathcal{A})$ - измеримо. Пусть $\mu : A \to [0, \infty]$ конечно аддитивная и субаддитивная ф-я множества. Показать, что μ сигма-аддитивна.

Доказательство:

1. Пусть $(X, \mathcal{A})$ - измеримо. Пусть $\mu : A \to [0, \infty]$ (конечно аддитивна и субаддитивна)
2. Пусть $(A_n)_{n \in N} \subset \mathcal{A}$ - последовательность множеств, таких, что $A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n$
3. Пусть $F_1 = A_1, F_2 = A_2 - A_1, ..., F_n = A_n - A_{n-1}$, поэтому $\bigsqcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.
4. Докажем, что $\forall i \in N, j \in N, j < i$ $F_i \cap F_j = \varnothing$
   (a) $F_i \overset{(3)}{=} (A_i - A_{i-1}) = \left(A_i \cap \overline{A_{i-1}}\right) \overset{(2)}{=} \left(A_i \cap \overline{\bigcup_{n=1}^{i-1} A_n}\right)$
   (b) Поскольку $j < i$, следовательно $\overline{A_j} \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{i-1} A_n}$. Поэтому также верно и это: $F_i = A_i \cap \overline{\bigcup_{n=1}^{i-1} A_n} \cap \overline{A_j}$
   (c) Из (3) следует, что $F_i \cap F_j \subset F_i \cap A_j$
   (d) Из (c) и (b) следует, что $F_i \cap A_j = A_i \cap \overline{\bigcup_{n=1}^{i-1} A_n} \cap \overline{A_j} \cap A_j = \varnothing$
   (e) Тогда из (d) и (c)
   (f) следует, что $F_i \cap F_j = \varnothing$
5. По предельному переходу из (3) следует, что$\bigsqcup_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.
6. Поэтому субаддитивность можно выразить так: $\mu\left(\bigsqcup_{i \in N} F_i\right) \leq \sum_{i \in N} \mu(F_i)$
7. По аддитивности можно выразить: $\mu\left(\bigsqcup_{i \in N} F_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(F_i) + \mu\left(\bigsqcup_{i=n+1}^{\infty} F_i\right)$
8. Из (7) очевидно, что $\mu\left(\bigsqcup_{i \in N} F_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu(F_i)$.
9. Из (8) верно, что $\mu\left(\bigsqcup_{i \in N} F_i\right) \geq \lim\limits_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(F_i) = \sum_{i \in N} \mu(F_i)$.
10. Тогда из (6) и (9) $\mu\left(\bigsqcup_{i \in N} F_i\right) = \sum_{i \in N} \mu(F_i)$.
11. Ч.Т.Д.

Задача №9

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$- пространство с мерой. Пусть $F \in \mathcal{A}$. Показать, что $\mathcal{A} \ni A \mapsto \mu(A \cap F)$ тоже мера.

Доказательство:

1. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$- пространство с мерой.
2. Пусть $F \in \mathcal{A}$.

3. Свойство M_0 выполнено автоматически.

4. Пусть $A = \varnothing$. Тогда $f(\varnothing) = \mu(\varnothing \cap F) = \mu(\varnothing) = 0$ (M_1)

5. Пусть $(A_n)_{n\in N}$ - последовательность попарно непересекающихся множеств. Тогда $f\left(\bigsqcup_{n\in N} A_n\right) = \mu\left(\left(\bigsqcup_{n\in N} A_n\right) \cap F\right) = \mu\left(\bigsqcup_{n\in N} (A_n \cap F)\right) = \sum_{i\in N} \mu(A_n \cap F) = \sum_{i\in N} f(A_n)$ (M_2)

Задача №10

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ - вероятностное пространство. Пусть $(A_n)_{n\in N} \subset \mathcal{A}$ - последовательность множеств таких, что $\mathbb{P}(A_n) = 1$ для всех $n \in N$. Показать, что $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in N} A_n\right) = 1$

Доказательство:

1. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ - вероятностное пространство.

2. Пусть $(A_n)_{n\in N} \subset \mathcal{A}$ - последовательность множеств таких, что $\mathbb{P}(A_n) = 1$ для всех $n \in N$

3. Из (2) следует, что $\forall n \in N, A_n = X$

4. Из (3) следует, что $\bigcap_{n\in N} A_n = X$

5. Из (4) следует, что $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in N} A_n\right) = 1$

Задача №11

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - пространство с финитной мерой. Пусть $(A_n)_{n\in N}, (B_n)_{n\in N} \subset \mathcal{A}$ так, что $\forall n \in N\ A_n \supset B_n$. Показать, что $\mu\left(\bigcup_{i\in N} A_i\right) - \mu\left(\bigcup_{i\in N} B_i\right) \leq \sum_{n\in N} (\mu(A_n) - \mu(B_n))$

Доказательство:

1. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - пространство с финитной мерой

2. Пусть $(A_n)_{n\in N}, (B_n)_{n\in N} \subset \mathcal{A}$ так, что $\forall n \in N\ A_n \supset B_n$

3. Покажем, что $\bigcup_i A_i - \bigcup_i B_i \subset \bigcup_i (A_i - B_i)$

   (a) Пусть $x \in \bigcup_i A_i - \bigcup_i B_i$. Это значит что $(\exists i \in N, x \in A_i) \wedge (\forall k \in N, x \notin B_k)$
   (b) Рассмотрим i_0. Тогда $x \in A_{i_0}$.
   (c) Из (b) следует, что $x \in \bigcup_i A_i$.
   (d) Поскольку $\forall k \in N, x \notin B_k$, то $x \in \bigcup_i (A_i - B_k)$.
   (e) Поэтому $\bigcup_i A_i - \bigcup_i B_i \subset \bigcup_i (A_i - B_i)$

4. Из монотонности меры $\mu\left[\bigcup_i A_i - \bigcup_i B_i\right] \subset \mu\left[\bigcup_i (A_i - B_i)\right]$

5. Докажем, что если $\forall n \in N\ A_n \supset B_n$, то $\bigcup_n A_n \supset \bigcup_n B_n$

(a) Поскольку $\exists n \in N, x \in B_n$, то мы можем зафиксировать $k \in N$, такой что $x \in B_k$

(b) Поскольку $x \in B_k$ и $\forall n \in N\ A_n \supset B_n$, следовательно $x \in A_k$. Поэтому $x \in \bigcup_n A_n$

(c) Но k был произвольный. Поэтому $\bigcup_n A_n \supset \bigcup_n B_n$

6. Посольку мера μ - финитна и $\bigcup_n A_n \supset \bigcup_n B_n$, следовательно $\mu\left[\bigcup_i A_i - \bigcup_i B_i\right] = \mu\left[\bigcup_i A_i\right] - \mu\left[\bigcup_i B_i\right] \leq \mu\left[\bigcup_i (A_i - B_i)\right]$

7. Из субаддитивности меры и (4.3-iii), следует, что $\mu\left[\bigcup_i (A_i - B_i)\right] \leq \sum_{n\in N} (\mu(A_n) - \mu(B_n))$

8. Комбинируя (6) и (7) $\mu\left(\bigcup_{i\in N} A_i\right) - \mu\left(\bigcup_{i\in N} B_i\right) \leq \sum_{n\in N} (\mu(A_n) - \mu(B_n))$

9. Ч.Т.Д.

Задача №12

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - пространство с мерой. $N \in \mathcal{A}$ называют нуль-множеством, тогда и только тогда, когда $\mu(N) = 0$. Доказать, что семейство таких множеств $\mathcal{N}_\mu$ отвечает свойствам:

1. $\varnothing \in \mathcal{N}_\mu$

2. Если $N \in \mathcal{N}_\mu$,$M \in \mathcal{A}$ и $M \subset N$, тогда $M \in \mathcal{N}_\mu$

3. Если $(N_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{N}_\mu$, тогда $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n \subset \mathcal{N}_\mu$

Доказательство 1:

1. Пустое множество всегда нуль-множество по M_1

2. Ч.Т.Д.

Доказательство 2:

1. Пусть $N \in \mathcal{N}_\mu$,$M \in \mathcal{A}$ и $M \subset N$.

2. По определению N, $\mu(N) = 0$

3. Из монотонности меры $M \subset N \implies \mu(M) \leq \mu(N) = 0$.

4. Поскольку мера положительна и верно (3), следовательно $\mu(M)$

5. Ч.Т.Д.

Доказательство 3:

1. Пусть $(N_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{N}_\mu$

2. Воспользуемся свойством сигма-субаддитивности меры. Тогда $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(N_n)$

3. Из (1) следует, что $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(N_n\right) = 0$

4. Поскольку мера положительна, то $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n\right) = 0$. Это в свою очередь означает, что $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n \subset \mathcal{N}_\mu$

5. Ч.Т.Д.

Задача №13

- Пусть λ - одномерная мера Лебега. Показать, что для $x \in R$ множество $\{x\}$ - Борелевское множество, где $\lambda\{x\} = 0$

Доказательство:

1. Пусть $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)$ - Борелевская сигма-алгебра.

2. Поскольку сигма алгебра замкнута относительно счетных пересечений, следовательно $\{x\} = \bigcap_{i\in N}\left[x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k}\right)$ тоже элемент $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)$

3. Рассмотрим последовательность интервалов $k \in \mathbb{N}\left[x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k}\right)$, покрывающая произвольный синглетон $\{x\}$ Такая последовательность множеств непрерывна снизу и конечна.

4. Тогда из (1), воспользовавшись (vii), следует $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda\left[x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k}\right) = \lim\limits_{k\to\infty}\left[x + \frac{1}{k} - x + \frac{1}{k}\right] = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{2}{k} = 0$

- Показать, что $\mathbb{Q}$ - Борелевское множество и $\lambda\left(\mathbb{Q}\right) = 0$ (Используя верхний пункт)

Доказательство:

1. Можно представить рациональные числа как объединение синглетонов: $\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{q_n\}$.

2. Воспользуемся свойством сигма-аддитивности меры: $\lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{q_n\}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda\{q_n\} = 0$

- Показать, что $\lambda\left(\mathbb{Q}\right) = 0$, используя $C\left(\epsilon\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left[q_n - \epsilon 2^{-n}, q_n + \epsilon 2^{-n}\right)$, где q_n- нумерация $\mathbb{Q}$

Доказательство:

1. Пусть $C\left(\epsilon\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left[q_n - \epsilon 2^{-n}, q_n + \epsilon 2^{-n}\right)$, где $\left(q_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$- нумерация $\mathbb{Q}$

2. Легко видеть, что $\lim\limits_{\epsilon\to 0} C\left(\epsilon\right) = \lambda\left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left[q_n, q_n\right)\right] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda\{q_n\} = 0$

3. Ч.Т.Д

- Показать, что несчетное объединение нуль множеств не является нуль множеством.

Доказательство:

1. Рассмотрим несчетное объединение синглетонов $A = \bigcup_{0 \leq x \leq 1} \{x\}$
2. Легко видеть, что $\bigcup_{0 \leq x \leq 1} \{x\} = [0, 1]$
3. Поэтому верно следующее: $\lambda \left(\bigcup_{0 \leq x \leq 1} \{x\} \right) = \lambda \left([0, 1] \right) = 1 \neq 0$
4. Поэтому $\bigcup_{0 \leq x \leq 1} \{x\} \notin \mathcal{N}_\mu$
5. Ч.Т.Д

Задача №14

1. О