Задача 1

Доказать или опровергнуть утверждение: Если $f \in \mathcal{L}^1$ мы можем его поменять на множестве $N \in \mathcal{N}_\mu$, так что $\widetilde{f} \in \mathcal{L}^1$ и $\int f d\mu = \int \widetilde{f} d\mu$

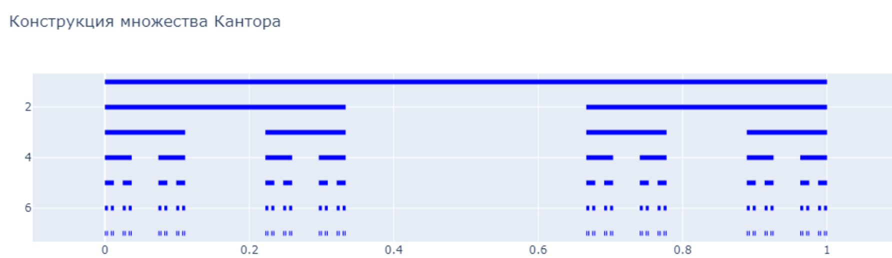
Доказательство:

1. Пусть $f \in \mathcal{L}^1$
2. Пусть $\widetilde{f} = f$ почти всюду. Это означает, что $\mu \left\{ f \neq \widetilde{f} \right\} \subset N \in \mathcal{N}_\mu$
3. Заметим, что $\int f d\mu = \int_N f d\mu + \int_{N^c} f d\mu = \int_N \widetilde{f} d\mu + \int_{N^c} \widetilde{f} d\mu = \int \widetilde{f} d\mu$
4. Поскольку $\int_{N^c} f d\mu = \int_{N^c} \widetilde{f} d\mu$ и из теоремы 11.2 (ii) следует, что $\int_N \widetilde{f} d\mu = 0$ и $\int_{N^c} f d\mu = 0$. Таким образом $\int f d\mu = \int \widetilde{f} d\mu$.
5. Из (4) следует, что если $f \in \mathcal{L}^1$, то и $\widetilde{f} \in \mathcal{L}^1$

Задача 2

Каждое счетное множество λ - нуль множество. Показать на канторовом множестве, что обратное не верно. Что произойдет, если мы заменим λ^1 на λ^2

Figure 1:



1. Рассмотрим множество Кантора. Множество Кантора строится путем разбиения каждого отрезка на две трети на каждой итерации
2. Можно заметить, что $\lambda^1 (C_n) = (2/3)^n$. Где C_n - множество на шаге $n \in \mathbb{N}$. Более того $\lim_{n \to \infty} \lambda^1 (C_n) = \lim_{n \to \infty} (2/3)^n = 0$. Следовательно $C_\infty \in \mathcal{N}_\mu$ и по определению предела при $n \to \infty$ $(n \in \mathbb{N})$. Поскольку контр пример обратному утверждению найден, следовательно обратное утверждение не верно.
3. Если по одномерному множеству Кантора мы попытаемся взять меру Лебега λ^2, то по определению меры Лебега $\lambda^2 (C_n \times (0, 0]) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) = 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$

Задача 3

Доказать, что $\forall \alpha, c > 0$ следующие утверждения верны:

1. $\mu\left\{|u| \geq c\right\} \leq \frac{1}{c}\int|u|\,d\mu$
2. $\mu\left\{|u| > c\right\} \leq \frac{1}{c^p}\int|u|^p\,d\mu\ \forall p : 0 < p < \infty$
3. $\mu\left\{|u| \geq c\right\} \leq \frac{1}{\phi(c)}\int\phi\left(|u|\right)d\mu\ \forall\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ неубывающей
4. $\mu\left\{|u| \geq \alpha\int ud\mu\right\} \leq \frac{1}{\alpha}\ u \geq 0$
5. $\mu\left\{|u| < c\right\} \leq \frac{1}{\psi(c)}\int\psi\left(|u|\right)d\mu\ \forall\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ невозрастающей

Доказательство 1:

1. Из свойства 9.8 (i) и положительной гомогенности $\mu\left\{|u| \geq c\right\} = \int\mathbb{1}_{\{|u|\geq c\}}d\mu = \frac{1}{c}\int c\mathbb{1}_{\{|u|\geq c\}}d\mu$
2. Поскольку $|u| \geq c$, следовательно $\frac{1}{c}\int c\mathbb{1}_{\{|u|\geq c\}}d\mu \leq \frac{1}{c}\int|u|\,\mathbb{1}_{\{|u|\geq c\}}d\mu \leq \frac{1}{c}\int|u|\,d\mu$
3. Таким образом $\mu\left\{|u| \geq c\right\} \leq \frac{1}{c}\int|u|\,d\mu$

Доказательство 2:

1. Заметим, что $\mu\left\{|u| > c\right\} \leq \mu\left\{|u| \geq c\right\}$. Тогда $\mu\left\{|u| > c\right\} \leq \frac{1}{c^p}\int c^p\mathbb{1}_{\{|u|\geq c\}}d\mu$
2. Поскольку $p, c > 0$ и $|u|^p \geq c \implies |u|^p \geq c^p$, то $\frac{1}{c^p}\int c^p\mathbb{1}_{\{|u|\geq c\}}d\mu \leq \frac{1}{c^p}\int|u|^p\,\mathbb{1}_{\{|u|\geq c\}}d\mu \implies \mu\left\{|u| > c\right\} \leq \frac{1}{c^p}\int|u|^p\,d\mu$

Доказательство 3:

1. $\mu\left\{|u| \geq c\right\} = \frac{1}{\phi(c)}\int\phi\left(c\right)\mathbb{1}_{\{|u|\geq c\}}d\mu$
2. Поскольку $|u| \geq c$ и $\forall x, y \in \mathbb{R}\left(x > y\right)\phi\left(x\right) \geq \phi\left(y\right)$, следовательно $\phi\left(|u|\right) \geq \phi\left(c\right)$ и $\frac{1}{\phi(c)}\int\phi\left(c\right)\mathbb{1}_{\{|u|\geq c\}}d\mu \leq \frac{1}{\phi(c)}\int\phi\left(|u|\right)\mathbb{1}_{\{|u|\geq c\}}d\mu \leq \frac{1}{\phi(c)}\int\phi\left(|u|\right)d\mu \Longrightarrow \mu\left\{|u| \geq c\right\} \leq \frac{1}{\phi(c)}\int\phi\left(|u|\right)d\mu$

Доказательство 4:

1. $\mu\left\{|u| \geq \alpha\int ud\mu\right\} = \frac{1}{\alpha}\int\alpha\mathbb{1}_{\{|u|\geq\alpha\int ud\mu\}}d\mu\ \alpha > 0$
2. Поскольку $|u| \geq \alpha\int ud\mu$, следовательно$\frac{|u|}{\int ud\mu} \geq \alpha$ и $\frac{1}{\alpha}\int\alpha\mathbb{1}_{\{|u|\geq\alpha\int ud\mu\}}d\mu \leq \frac{1}{\alpha}\int\frac{|u|}{\int ud\mu}\mathbb{1}_{\{|u|\geq\alpha\int ud\mu\}}d\mu \leq \frac{1}{\alpha}\int\frac{|u|}{\int ud\mu}d\mu = \frac{1}{\alpha}$
3. Поэтому выполнено равенство в 3

Доказательство 5:

1. $\mu\left\{|u| < c\right\} \leq \frac{1}{\psi(c)}\int\psi\left(c\right)\mathbb{1}_{\{|u|<c\}}d\mu$
2. Поскольку $|u| < c$ и $\forall x, y \in \mathbb{R}\left(x > y\right)\psi\left(x\right) \leq \psi\left(y\right)$, следовательно $\psi\left(|u|\right) \geq \phi\left(c\right)$ и $\frac{1}{\psi(c)}\int\psi\left(c\right)\mathbb{1}_{\{|u|<c\}}d\mu \leq \frac{1}{\psi(c)}\int\psi\left(|u|\right)\mathbb{1}_{\{|u|<c\}}d\mu \leq \frac{1}{\psi(c)}\int\psi\left(|u|\right)d\mu \Longrightarrow \mu\left\{|u| > c\right\} \leq \frac{1}{\psi(c)}\int\psi\left(|u|\right)d\mu$

Показать, что $\mathbb{P}\left\{|\xi - \mathbb{E}\left(\xi\right)| \geq \alpha\sqrt{\mathbb{V}\left(\xi\right)}\right\} \leq \frac{1}{\alpha^2}$, где $\left(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}\right)$ - вероятностное пространство. ξ - случайная величина. $\mathbb{E}\left(\xi\right) = \int\xi d\mathbb{P}$ - ожидание $\mathbb{V}\left(\xi\right) = \int\left(\xi - \mathbb{E}\left(\xi\right)\right)^2 d\mathbb{P}$ - дисперсия
Доказательство:

1. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ - вероятностное пространство $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ - случайная величина
2. Рассмотрим $\mathbb{P}\left\{|\xi - \mathbb{E}(\xi)| \geq \alpha\sqrt{\mathbb{V}(\xi)}\right\} = \frac{1}{\alpha^2}\int \alpha^2 \mathbb{1}_{\left\{|\xi-\mathbb{E}(\xi)|\geq\alpha\sqrt{\mathbb{V}(\xi)}\right\}} d\mathbb{P}$
3. Поскольку $|\xi - \mathbb{E}(\xi)| \geq \alpha\sqrt{\mathbb{V}(\xi)} \implies \alpha^2 \leq \frac{|\xi-\mathbb{E}(\xi)|^2}{\mathbb{V}(\xi)}$, следовательно $\frac{1}{\alpha^2}\int \alpha^2 \mathbb{1}_{\left\{|\xi-\mathbb{E}(\xi)|\geq\alpha\sqrt{\mathbb{V}(\xi)}\right\}} d\mathbb{P} \leq \frac{1}{\alpha^2}\int \frac{|\xi-\mathbb{E}(\xi)|^2}{\mathbb{V}(\xi)} \mathbb{1}_{\left\{|\xi-\mathbb{E}(\xi)|\geq\alpha\sqrt{\mathbb{V}(\xi)}\right\}} d\mathbb{P}$
4. Используя определение дисперсии $\frac{1}{\alpha^2}\int \frac{|\xi-\mathbb{E}(\xi)|^2}{\int(\xi-\mathbb{E}(\xi))^2 d\mathbb{P}} \mathbb{1}_{\left\{|\xi-\mathbb{E}(\xi)|\geq\alpha\sqrt{\mathbb{V}(\xi)}\right\}} d\mathbb{P} \leq \frac{1}{\alpha^2}\int \frac{(\xi-\mathbb{E}(\xi))^2}{\int(\xi-\mathbb{E}(\xi))^2 d\mathbb{P}} d\mathbb{P}$. Заметим, что мы делим два одинаковых интеграла, поэтому $\mathbb{P}\left\{|\xi - \mathbb{E}(\xi)| \geq \alpha\sqrt{\mathbb{V}(\xi)}\right\} \leq \frac{1}{\alpha^2}$
5. Ч.Т.Д.

Задача № 4

Показать, что если $\int |u|^p \, d\mu < \infty$, $0 < p < \infty$ то $|u|$ определена на $\mathbb{R}$ почти всюду. Выполняется ли это для $\int arctan\,(u)\, d\mu < \infty$

Доказательство:

1. Пусть $N = \{|u| = \infty\} = \{|u|^p = \infty\}$, где $0 < p < \infty$
2. Заметим, что $N = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{|u|^p \geq n\}$ и такая последовательность множеств непрерывна снизу
3. По свойству 4.3 (vii) $\mu(N) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{|u|^p \geq n\}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu\{|u|^p \geq n\}$
4. Мы уже показали в задаче 2, что $\lim\limits_{n\to\infty} \mu\{|u|^p \geq n\} \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int |u|^p \, d\mu = 0$
5. Таким образом, мы показали, что $|u|^p$ определена на $\mathbb{R}$ почти всюду. Из (1) следует, что, если$|u|^p$ определена почти на $\mathbb{R}$, то и $|u|$ определена почти всюду на $\mathbb{R}$.
6. Ч.Т.Д

Задача № 5

Пусть $\left(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu}\right)$ - дополнение к $(X, \mathcal{A}, \mu)$

- Показать, что для любой $f^* \in \mathcal{E}^+\left(\overline{\mathcal{A}}\right)$ существует $f, g \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$ где $f \leq f^* \leq g$ и $\mu(f \neq g) = 0$ также как и $\int f d\mu = \int f^* d\mu = \int g d\mu$

Доказательство:

1. Пусть $\left(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu}\right)$ - дополнение к $(X, \mathcal{A}, \mu)$
2. Пусть $f^* \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$
3. Из 4.15 (v) известно, что $\overline{\mathcal{A}} = \{A^* \subset X : \exists A, B \in \mathcal{A}, A \subset A^* \subset B, \mu(B - A) = 0\}$.
4. Полагая, что $f = A^*$ и используя (3) положим, что $A = f, B = g$ и $f, g \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$ так что $\mu(B - A) = 0$.

5. Из монотонности и (3) следует, что $f \leq f^* \leq g$

6. Поскольку мера разности функций равна 0 (из 4) следовательно мера множества на котором функции отличаются тоже равна 0. То есть $\mu(f \neq g) = 0$.

7. Таким образом по определению 11.1 $f = g$ почти всюду.

8. Поскольку $\mathcal{E}^+(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}^+_{\mathbb{R}}(\mathcal{A})$, то комбинируя с (7) из следствия 11.3 (ii) $\int f d\mu = \int g d\mu$

9. Используя монотонность интеграла видим, что $\int f d\mu = \int f^* d\mu = \int g d\mu$

10. Ч.Т.Д.

- Показать, что $u^* : X \to \mathbb{R}$ $\overline{\mathcal{A}}$ - измерима, тогда и только тогда, когда существуют $\mathcal{A}$-измеримые функции $u, w : X \to \mathbb{R}$ такие что $u \leq u^* \leq w$ и $u = w$ почти всюду.

Доказательство:

1. Пусть $\left(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu}\right)$ - дополнение к $(X, \mathcal{A}, \mu)$

2. С одной стороны.

   (a) Пусть $u^* : X \to \mathbb{R}$ $\overline{\mathcal{A}}$ - измерима

   (b) По определению $\overline{\mathcal{A}} = \{A^* \subset X : \exists A, B \in \mathcal{A}, A \subset A^* \subset B, \mu(B - A) = 0\}$. Полагая, что $A^* = \{u^* > \alpha\}$ из указанного определения представим $A = \{u > \alpha\}$ и $B = \{w > \alpha\}$ $\mu(B - A) = 0$

   (c) Из условия монотонности в (b) $A \subset A^* \subset B \Longrightarrow u \leq u^* \leq w$

   (d) Если $\mu(B - A) = \mu(\{u < \alpha\} \cap \{w > \alpha\}) = \mu(\{x \in X : u(x) < \alpha < w(x)\}) = 0$

   (e) Из (2.c) и (2.d) то $u = w$ почти всюду

3. С другой стороны

4. Пусть $u, w : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-измеримые функции такие что $u \leq u^* \leq w$ и $u = w$ почти всюду

5. Пусто

Задача № 6

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - пространство с конечной мерой. Пусть $E \subset X$ $\mu^*(E) := inf\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}, E \subset A\}$ и $\mu_*(E) := sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}, A \subset E\}$

- Показать, что $\mu_*(E) \leq \mu^*(E)$

Доказательство:

1. Пусть E - произвольно. Положим $\forall A, B \in \mathcal{A} : B \subset E \subset A$. Из монотонности меры следует, что $\mu(B) \leq \mu(A)$. Поскольку это выполнено для всех $A, B \in \mathcal{A}$ то и $\mu_*(E) \leq \mu^*(E)$

- Показать, что $\mu_*(E) + \mu^*(E^c) = \mu(X)$

Доказательство:

1. По определению $\mu_*(E) := sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}, A \subset E\}$

2. Поскольку $A \in \mathcal{A}_X \implies A = X \cap A = X - A^C \implies sup\left\{\mu\left(A\right) : A \in \mathcal{A}, A \subset E\right\} = sup\left\{\mu\left(X - A^C\right) : A \in \mathcal{A}, A \subset$

3. Поскольку $A^C \subset X$, и $A \subset E \iff E^C \subset A^C$ то из монотонности меры: $sup\left\{\mu\left(X - A^C\right) : A \in \mathcal{A}, A \subset E\right\} = sup\left\{\mu\left(X\right) - \mu\left(A^C\right) : A^C \in \mathcal{A}, E^C \subset A^C\right\}$

4. Заметим, что супремум не зависит от единицы: $sup\left\{\mu\left(X\right) - \mu\left(A^C\right) : A \in \mathcal{A}, E^C \subset A^C\right\} = \mu\left(X\right) + sup\left\{-\mu\left(A^C\right) : A^C \in \mathcal{A}, E^C \subset A^C\right\}$

5. Известно, что $sup\left(-A\right) = -inf\left(A\right)$, поэтому $\mu\left(X\right) + sup\left\{-\mu\left(A^C\right) : A \in \mathcal{A}, E^C \subset A^C\right\} = \mu\left(X\right) - inf\left\{\mu\left(A^C\right) : A^C \in \mathcal{A}, E^C \subset A^C\right\}$

6. Таким образом $\mu_*\left(E\right) = \mu\left(X\right) - \mu^*\left(E^C\right) \implies \mu_*\left(E\right) + \mu^*\left(E^C\right) = \mu\left(X\right)$

7. Ч.Т.Д

- Показать, что $\mu^*\left(E \cup F\right) \leq \mu^*\left(E\right) + \mu^*\left(F\right)$

Доказательство:

1. По определению $\mu^*\left(E\right) = inf\left\{\mu\left(A\right) : A \in \mathcal{A}, E \subset A\right\}$ и $\mu^*\left(F\right) = inf\left\{\mu\left(B\right) : B \in \mathcal{A}, F \subset B\right\}$

2. Тогда $\mu^*\left(E\right) + \mu^*\left(F\right) = inf\left\{\mu\left(A\right) : A \in \mathcal{A}, E \subset A\right\} + inf\left\{\mu\left(B\right) : B \in \mathcal{A}, F \subset B\right\}$

3. Кроме того $\mu^*\left(E\right) + \mu^*\left(F\right) = inf\left\{\mu\left(A\right) + \mu\left(B\right) : A, B \in \mathcal{A}, E \subset A, F \subset B\right\}$

4. Из субаддитивности $\mu\left(A \cup B\right) \leq \mu\left(A\right) + \mu\left(B\right)$ $inf\left\{\mu\left(A \cup B\right) : A, B \in \mathcal{A}, E \subset A, F \subset B\right\} \leq \mu^*\left(E\right) + \mu^*\left(F\right)$

5. Поскольку сигма алгебра закнута относительно дополнения и $E \subset A, F \subset B \implies E \cup F \subset A \cup B$, то $inf\left\{\mu\left(A \cup B\right) : A, B \in \mathcal{A}, E \subset A, F \subset B\right\} = inf\left\{\mu\left(A \cup B\right) : A \cup B \in \mathcal{A}, E \cup F \subset A \cup B\right\}$. Это в свою очеред, по определению $\mu^*\left(E \cup F\right)$

6. Таким образом из (4) и (5) $\mu^*\left(E \cup F\right) \leq \mu^*\left(E\right) + \mu^*\left(F\right)$

7. Ч.Т.Д.

- Показать, что $\mu_*\left(E\right) + \mu_*\left(F\right) \leq \mu_*\left(E \sqcup F\right)$

Доказательство:

1. Пусто

- $\forall E \subset X\ \exists E_*, E^* \in \mathcal{A} : \mu\left(E_*\right) = \mu_*\left(E\right)$ и $\mu\left(E^*\right) = \mu^*\left(E\right)$

Доказательство:

1. Рассмотрим последовательность множеств $\left(E_n\right)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ такую, что $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$ и $A_n \uparrow E_*$ что в свою очередь дает $\mu\left(A_n\right) \uparrow \mu\left(E_*\right)$

2. Положим, что $\left|\mu_*\left(E\right) - \mu\left(A_n\right)\right| \leq \frac{1}{n}$. Тогда $\lim\limits_{n \to \infty} \left|\mu_*\left(E\right) - \mu\left(A_n\right)\right| \leq \frac{1}{n} \iff \left|\mu_*\left(E\right) - \mu\left(E_*\right)\right| \leq 0 \implies 0 \leq \mu_*\left(E\right) - \mu\left(E_*\right) \leq 0 \implies \mu_*\left(E\right) = \mu\left(E_*\right)$

3. Рассмотрим последовательность множеств $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ такую, что $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \supset A_{n+1}$ и $A_n \downarrow E^*$ что в свою очередь дает $\mu(A_n) \downarrow \mu(E^*)$

4. Положим, что $|\mu^*(E) - \mu(A_n)| \leq \frac{1}{n}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} |\mu^*(E) - \mu(A_n)| \leq \frac{1}{n} \iff |\mu^*(E) - \mu(E^*)| \leq 0 \implies 0 \leq \mu^*(E) - \mu(E^*) \leq 0 \implies \mu^*(E) = \mu(E^*)$

5. Ч.Т.Д.

Задача № 7

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - измеримое пространство. Положим, $u \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ и $u = w$ почти всюду. Когда можно говорить, что $w \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$

Решение:

1. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - измеримое пространство.

2. Положим, $u \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ и $u = w$ почти всюду. Это означает, что $N = \{x \in X : w(x) \neq u(w)\} \in \mathcal{N}_\mu$

3. Мы можем представить $w(x) = \mathbb{1}_N(x) w(x) + \mathbb{1}_{N^C}(x) w(x)$

4. Поскольку $u \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ и $u(x) = \mathbb{1}_{N^C}(x) w(x)$, то $\mathbb{1}_{N^C}(x) w(x) \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

5. Поскольку w^{-1} измерима $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $N \subset w^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Заметим, что вообще говоря $N \notin \mathcal{A}$. Тогда, необходимо дополнить $\mathcal{A}$ до $\overline{\mathcal{A}}$(дополнение нуль множествами) так, чтобы $N \in \overline{\mathcal{A}}$

6. Таким образом, если $N \in \mathcal{N}_\mu$, то мы можем говорить, что $w \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$

Задача № 8

Показать, что u - непрерывна почти всюду и u почти всюду равна всюду непрерывной функции на примере $u = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ и $u = \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$

Решение:

1. Рассмотрим $u = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$.

2. Мы называем $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ непрерывной в точке $x \in \mathbb{R}^m$ если $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\epsilon, x) : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$

3. Мы называем множество $S \subset X$ плотным на X тогда и только тогда, когда $\forall \epsilon > 0$ и $x \in X$ $\exists s \in S : |x - s| < \epsilon$

4. Известен тот факт, что $\mathbb{Q}$ плотно на $\mathbb{R}$. Отсюда следует, что для $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists \epsilon > 0, \delta = \delta(\epsilon, x) : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \not< \epsilon$. Таким образом $\forall x \in \mathbb{R}$ $u = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ не является непрерывной.

5. Таким образом $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ не является непрерывной почти всюду, но при этом почти всюду равна непрерывной константной функции $\mathbb{1}_{\mathbb{R}}(x)$

6. Рассмотрим $u = \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$. Это ступенчатая функция. Множество при котором $\left\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(x)\right\} = (-\infty, 0] \notin \mathcal{N}_\mu$

7. Однако $\left\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) - \text{непрерывна}\right\} = \{0\} \in \mathcal{N}_\mu$. Следовательно такая функция непрерывна почти всюду

8. Таким образом $u = \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$ - непрерывна почти всюду, но не почти всюду равна непрерывной $\mathbb{1}_{\mathbb{R}}(x)$. Множество при котором выполнено равенство не имеет меры 0.

9. Ч.Т.Д.

Задача № 10

Сконструируйте пример, который показывает, что при $u, w \in \mathcal{M}^+(\mathcal{B})$ $\forall B \in \mathcal{B}$ равенство $\int_B ud\mu = \int_B wd\mu$ не обязательно имплицирует за собой равенство $u = w$ почти всюду

Решение:

1. Пусть $u, w \in \mathcal{M}^+(\mathcal{B})$ и $\forall B \in \mathcal{B}$ выполнено равенство $\int_B ud\mu = \int_B wd\mu$

2. Положим $\mu = \lambda^1 m$ - мера, определенная на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, такая что $m = \mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}} + \infty \mathbb{1}_{\{|x|>1\}}$. Мы договариваемся что $\pm\infty \cdot 0 = 0$

3. Пусть $u \equiv 1$ и $w = \mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}} + 2\mathbb{1}_{\{|x|>1\}}$

4. Заметим, что при $B = \{|x| > 1\}$ $\mu(u \neq w) = \infty$, при этом $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\int_B ud\mu = \int_B wd\mu$

5. Ч.Т.Д.

Задача № 11

Показать следующее продолжение следствия 11.7. Пусть $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ замкнутый относительно пересечения, генератор сигма алгебры $\mathcal{A}$, который содержит последовательность $C_n \uparrow X$, такой что $\mu(C_n) < \infty$. Для всех $u, w \in \mathcal{L}^1(\mu)$ $\forall C \in \mathcal{C}, \int_C ud\mu = \int_C wd\mu \iff u = w$ почти всюду.

Доказательство:

1. Пусть $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ замкнутый относительно пересечения, генератор сигма алгебры $\mathcal{A}$.

2. Пусть $(C_n)_{n\in I} \subset \mathcal{C}$,$C_n \uparrow X$, так что $\mu(C_n) < \infty$.

3. С одной стороны предположим, что $u, w \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Пусть $C \in \mathcal{C}$ произвольно и $\int_C ud\mu = \int_C wd\mu$

   (a) Из определения 10.1 $\forall C \in \mathcal{C}, \int_C ud\mu - \int_C wd\mu = \int_C u^+ d\mu - \int_C u^- d\mu - \int_C w^+ d\mu + \int_C w^- d\mu \Longrightarrow \int_C u^\pm d\mu = \int_C w^\mp d\mu$

   (b) Пусть $\nu_1 : C \to \int_C u^+ d\mu - \int_C w^- d\mu$, $\nu_1 : C \to \int_C u^- d\mu - \int_C w^+ d\mu$- некоторые меры, определенные на $\mathcal{C}$. Заметим, что на $\mathcal{C}$ они совпадают. Следовательно, по теореме 5.7 такая мера единственным образом продолжается на $\mathcal{A}$: $\nu_1 = \nu_2 = \nu$

   (c) Заметим, что $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$ и $u^\pm, w^\mp \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ из определения интеграла для положительных функций. Тогда из следствия 11.7 $u = w$ почти всюду.

4. С другой стороны, пусть $u, w \in \mathcal{L}^1(\mu)$, и $u = w$ почти всюду. Тогда из следствия 11.3 $\int ud\mu = \int wd\mu \implies \int_C ud\mu = \int_C wd\mu$

5. Ч.Т.Д.