## Задача № 1

Показать, что любая последовательность $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$, такая что $\underset{n\to\infty}{lim} u_n = u$ и $|u_n| \le g$, удовлетворяет равенству $\underset{n\to\infty}{lim} \int |u_n - u|^p \, d\mu = 0$. Предполагая, что $g \ge 0$ и $g^p \in \mathcal{L}^1(\mu)$, где $p < \infty$

**Доказательство:**

1. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - пространство с мерой $\mu$ и $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ - последовательность функций такая, что:
   (a) $|u_n(x)| \le g(x)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, для каждой точки $x \in X$ и некоторой функции $g^p \in \mathcal{L}^1(\mu)$, где $0 \le p < \infty$
   (b) Для каждой точки $x \in X$ предел существует и поточечно сходится на $\mathbb{R}$: $\underset{n\to\infty}{lim} u_n(x) = u(x)$
2. Воспользуемся следующим фактом: $\forall n \in \mathbb{N}$ и $0 \le p < \infty$ выполнено равенство $0 \le 2^p g^p - |u_n - u|^p$
3. Поскольку выполнено (2), то $\underset{n\to\infty}{limsup} \int |u_n - u|^p \, d\mu \le 0$
   (a) $0 \le \int \underset{n\to\infty}{liminf} \left(2^p g^p - |u_n - u|^p\right) d\mu$. Мы здесь воспользовались неравенством в (2) и взяли интеграл от нижнего предела.
   (b) $0 \le \int 2^p g^p d\mu + \int \underset{n\to\infty}{liminf} \left(-|u_n - u|^p\right) d\mu$ - из аддитивности интеграла
   (c) $\int 2^p g^p d\mu + \int \underset{n\to\infty}{liminf} \left(-|u_n - u|^p\right) d\mu \le \int 2^p g^p d\mu + \underset{n\to\infty}{liminf} \int \left(-|u_n - u|^p\right) d\mu$ из леммы Фату
   (d) $\int 2^p g^p d\mu + \int \underset{n\to\infty}{liminf} \left(-|u_n - u|^p\right) d\mu \le \int 2^p g^p d\mu - \underset{n\to\infty}{limsup} \int |u_n - u|^p \, d\mu$ поскольку верно равенство $\underset{n\to\infty}{liminf}(-a) = -\underset{n\to\infty}{limsup}(a)$
   (e) $\int 2^p g^p d\mu \le \int 2^p g^p d\mu - \underset{n\to\infty}{limsup} \int |u_n - u|^p \, d\mu$, поскольку $\int \underset{n\to\infty}{liminf} \left(-|u_n - u|^p\right) d\mu = 0$
      i. Так как $\underset{n\to\infty}{lim} u_n = u$, то $\underset{n\to\infty}{lim} u_n - u = 0 \implies \underset{n\to\infty}{lim} |u_n - u| = 0$
      ii. Из мультипликативности предела $\left(\underset{n\to\infty}{lim} |u_n - u|\right)^p = \underset{n\to\infty}{lim} |u_n - u|^p = 0 \implies \underset{n\to\infty}{lim} \left(-|u_n - u|^p\right) = 0$
      iii. Если предел последовательности существует, то он совпадает с его нижним и верхним пределом, поэтому $\underset{n\to\infty}{lim} \left(-|u_n - u|^p\right) = \underset{n\to\infty}{liminf} \left(-|u_n - u|^p\right) = 0$
      iv. Взяв 3.e.iii под знак интеграла получим, что $\int \underset{n\to\infty}{liminf} \left(-|u_n - u|^p\right) d\mu = 0$
   (f) Сокращая и умножая на -1, получим, что $\underset{n\to\infty}{limsup} \int |u_n - u|^p \, d\mu \le 0$
4. $0 \le \underset{n\to\infty}{liminf} \int |u_n - u|^p \, d\mu$ достигается такими же шагами как и в (3) взяв верхний предел и использовав теорему Фату для верхнего предела последовательности
5. Поскольку $0 \le \underset{n\to\infty}{liminf} \int |u_n - u|^p \, d\mu \le \underset{n\to\infty}{limsup} \int |u_n - u|^p \, d\mu \le 0$ то по теореме о двух милиционерах: $\underset{n\to\infty}{lim} \int |u_n - u|^p \, d\mu = 0$
6. Ч.Т.Д.

## Задача № 2

Пусть дано пространство с мерой $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Положим, что дана некоторая последовательность интегрируемых функций. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1(\mu)$. Для такой последовательности существует функция $w \in \mathcal{L}^1(\mu)$, такая, что мажорирует абсолютную функцию: $\forall n \in \mathbb{N}, x \in X |u_n(x)| \leq w(x)$. Такая последовательность также имеет предел на расширенной прямой $\overline{\mathbb{R}}$: $\forall x \in X \ \lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$. Используя обобщенную лемму Фату доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \int u_n d\mu = \int \lim_{n\to\infty} u_n d\mu = \int u d\mu.$$

**Доказательство:**

1. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ пространство с мерой.
2. Пусть дана последовательность интегрируемых функций $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1(\mu)$
3. Для последовательности в (2) существует некоторая функция $w(x) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ такая что $|u_n(x)| \leq w(x)$ для любого $n \in \mathbb{N}$ в каждой точке $x \in X$
4. Положим, что такая последовательность поточечно сходится. То есть: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$ в каждой точке $x \in X$
5. Мы воспользуемся следующим неравенством: $|u_n - u| \leq 2w$. Откуда следует, что $|u_n - u| \in \mathcal{L}^1(\mu)$, поскольку $2w \in \mathcal{L}^1(\mu)$.
6. Поскольку для $u_n - u$ существует мажоранта и миноранта, а сама последовательность стремится к нулю, то из обобщенной леммы Фату:
   (a) $\limsup\limits_{n\to\infty} \int (u_n - u) d\mu \leq \int \limsup\limits_{n\to\infty} (u_n - u) d\mu = 0$, поскольку верхний предел последовательности совпадает с самим пределом последовательности,
   (b) $0 = \int \liminf\limits_{n\to\infty} (u_n - u) d\mu \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \int (u_n - u) d\mu$ , поскольку нижний предел последовательности совпадает с самим пределом последовательности
7. $0 \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \int (u_n - u) d\mu \leq \limsup\limits_{n\to\infty} \int (u_n - u) d\mu \leq 0$ - получается комбинируя подпункты в (6) и свойство $\forall a \ \liminf\limits_{n\to\infty} (a) \leq \limsup\limits_{n\to\infty} (a)$.
8. $\lim\limits_{n\to\infty} \int (u_n - u) d\mu = 0$ из пункта (7) по теореме о двух милиционерах
9. $\lim\limits_{n\to\infty} \int u_n d\mu = \int u d\mu = \int \lim\limits_{n\to\infty} u_n d\mu$
10. Ч.Т.Д.

## Задача № 3

Лемма Пратта. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - пространство с мерой. Пусть $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}, (g_k)_{k\in\mathbb{N}}, (G_k)_{k\in\mathbb{N}}$ - последовательности интегрируемых функций. Если

- $f_k(x) \to f(x)$, $g_k(x) \to g(x)$, $G_k(x) \to G(x)$ $\forall x \in X$
- $g_k(x) \leq f_k(x) \leq G_k(x)$ $\forall k \in \mathbb{N}, x \in X$

- $\int g_k d\mu \to \int g d\mu$ $\int G_k d\mu \to \int G d\mu$ такие, что $\int g d\mu, \int G d\mu$ - финитны.

  Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} \int f_k d\mu = \int f d\mu$ и $\int f d\mu$ - финитна

**Доказательство:**

1. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - пространство с мерой
2. Пусть $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}, (g_k)_{k\in\mathbb{N}}, (G_k)_{k\in\mathbb{N}}$ - последовательности интегрируемых функций
3. Пусть $\forall x \in X$ $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$, $\lim\limits_{k\to\infty} g_k(x) = g(x)$, $\lim\limits_{k\to\infty} G_k(x) = G(x)$
4. Пусть $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in X$ $g_k(x) \le f_k(x) \le G_k(x)$
5. Пусть $\int g d\mu, \int G d\mu$ - финитны и $\int g_k d\mu \to \int g d\mu$ $\int G_k d\mu \to \int G d\mu$
6. Поскольку $\forall x \in X$ $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$, то $\forall x \in X$ $\int \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)\, d\mu = \int f(x)\, d\mu$. Тогда по теореме Лебега о мажорируемой сходимости $\int \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)\, d\mu = \lim\limits_{k\to\infty} \int f_k(x)\, d\mu = \int f(x)\, d\mu$
7. Из (4) следует, что $\forall x \in X$ $g(x) \le f(x) \le G(x)$, из монотонности интеграла следует, что $\int g d\mu \le \int f d\mu \le \int G d\mu$.
8. Поскольку $\int G d\mu \in (-\infty, \infty)$ и $\int g d\mu \in (-\infty, \infty)$ , то и $\int f d\mu \in (-\infty, \infty)$, то есть финитна
9. Ч.Т.Д.

### Задача № 4

Пусть $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ последовательность интегрируемых функций на пространстве с мерой $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Показать, что если $\sum_{n=1}^{\infty} \int |u_n|\, d\mu < \infty$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится почти всюду к действительнозначной функции $u(x)$ и в таком случае также верно следующее:

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} u_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int u_n d\mu$$

**Доказательство:**

1. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - пространство с мерой
2. Пусть $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1(\mu)$
3. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} \int |u_n|\, d\mu < \infty$
4. Поскольку $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1(\mu)$, то из определения 10.1 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Тогда из теоремы 10.3 $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1(\mu)$. Заметим, также, что $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$
5. Из (3), (4) и, как необходимые условия для следствия 9.9, выполнено равенство и его левая и правая части финитны: $\sum_{n=1}^{\infty} \int |u_n|\, d\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|\, d\mu < \infty$. Более того, из абсолютной сходимости следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u$.
6. Пусть $\sum_{n=1}^{M} u_n = s_M$. Тогда $\int \lim\limits_{M\to\infty} \sum_{n=1}^{M} u_n d\mu = \int \lim\limits_{M\to\infty} s_M d\mu$. Из теоремы Лебега о мажорирумой сходимости и аддитивности интеграла: $\int \lim\limits_{M\to\infty} \sum_{n=1}^{M} u_n d\mu = \lim\limits_{M\to\infty} \int \sum_{n=1}^{M} u_n d\mu = \lim\limits_{M\to\infty} \sum_{n=1}^{M} \int u_n d\mu$.

7. Таким образом $\int \sum_{n=1}^{\infty} u_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int u_n d\mu$
8. Ч.Т.Д.

**Задача № 5**

Пусть $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - последовательность положительных интегрируемых функций на пространстве с мерой $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Пусть такая последовательность не возрастает и сходится к 0: $u_1 \geq u_2 \geq ....$ и $u_n \downarrow 0$ . Показать, что $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ сходится и интегрируема. Показать также, что выполнено следующее:

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int u_n d\mu$$

1. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ пространство с мерой
2. Пусть $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1(\mu) : \forall n \in \mathbb{N}\, (u_n \geq 0)$. Положим, что $u_n \downarrow 0$ и $u_1 \geq u_2 \geq ...$
3. Рассмотрим $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$. Для начала покажем, что подпоследовательности с четным числом членов: $s_{2m+1} = -\sum_{n=1}^{2m+1} (-1)^{n-1} u_n$ и нечетным числом членов $s_{2m} = -\sum_{n=1}^{2m} (-1)^{n-1} u_n$ сходятся к одному некоторому фиксированному числу $L$.
4. Заметим, что подпоследовательность с нечетным числом членов монотонно не убывает: $s_{2(m+1)+1} = s_{2m+3} = s_{2m+1} + u_{2m+2} - u_{2m+3} \geq s_{2m+1}$
5. Подпоследовательность с четным числом членов не возрастает: $s_{2m+2} = s_{2m} - u_{2m+1} + u_{2m+2} \leq s_{2m}$
6. Заметим, что $s_{2m+1} - s_{2m} = -u_{2m+1} \leq 0 \implies s_{2m+1} \leq s_{2m}$
7. Мы можем собрать факты из (4), (5) и (6) так, что $-u_1 + u_2 = s_2 \geq s_{2m} \geq s_{2m+1} \geq s_1 = -u_1\ \forall m \in \mathbb{N}$
8. Поскольку последовательность $s_{2m}$ не возрастает и ограничена снизу величиной $-u_1+u_2$, то по теореме о монотонной сходимости она имеет предел. Поскольку последовательность $s_{2m+1}$ монотонно не убывает и ограничена сверху величиной $-u_1$ то, аналогично, по теореме о монотонной сходимости, она имеет предел. Более того, четная и нечетная подпоследовательности сходятся к одному и тому же числу, поскольку $\underset{n\to\infty}{lim} (s_{2m+1} - s_{2m}) = -\underset{n\to\infty}{lim} (u_{2m+1}) = 0$. Таким образом $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ - сходится.
9. Из (7) последовательность $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ ограничена сверху интегрируемой $-u_1+u_2$. Тогда из теоремы 10.3 (iv) эквивалентной 10.3 (i) такая последовательность интегрируема: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$
10. Следовательно, из задачи №4 $\int \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int u_n d\mu$
11. Ч.Т.Д.

**Задача № 7**

Пусть $\mu$ финитная мера на измеримом пространстве $([0,\infty), \mathbb{B}[0,\infty))$. Найти следующий предел

$$\underset{r\to\infty}{lim} \int_{[0,\infty)} e^{-rx} \mu(dx)$$

**Решение:**

1. Пусть $\mu$ финитная мера на измеримом пространстве $([0,\infty), \mathbb{B}[0,\infty))$

2. Можно показать, что $\forall r \in \mathbb{N}$ $e^{-rx}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - непрерывна. Поскольку любое непрерывное отображение измеримо, то $(1-e^{-rx})_{r\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}^{+}(\mathbb{B}[0,\infty))$

3. Используя тот факт, что последовательность в (2) положительна, измерима и не убывает, по теореме Леви о монотонной сходимости $\underset{r\to\infty}{lim} \int_{[0,\infty)} (1-e^{-rx})\, \mu(dx) = \int_{[0,\infty)} \underset{r\to\infty}{lim} (1-e^{-rx})\, \mu(dx)$

4. Воспользовавшись аддитивностью интеграла и рассматривая его только второе слагаемое слева и справа, мы приходим к тому что предел и интеграл для заданной в условии функции можно поменять местами: $\underset{r\to\infty}{lim} \int_{[0,\infty)} e^{-rx} \mu(dx) = \int_{[0,\infty)} \underset{r\to\infty}{lim} e^{-rx} \mu(dx)$

5. Поскольку мера финитна по условию, то $\int_{[0,\infty)} \underset{r\to\infty}{lim} e^{-rx} \mu(dx) = 0$

6. Ч.Т.Д.

**Задача № 8**

Пусть $\lambda$ - мера Лебега на $\mathbb{R}^n$.

- Пусть $u \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ и обозначим компакт как $K \subset \mathbb{R}^n$. Показать, что $\underset{|x|\to\infty}{lim} \int_{K+x} |u|\, d\lambda = 0$

- Пусть $u$ - равномерно непрерывная функция и $|u|^p \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ $p > 0$ . Показать, что $\underset{|x|\to\infty}{lim} u(x) = 0$

**Доказательство #1:**

1. Пусть дана $\lambda$ - мера Лебега на $\mathbb{R}^n$ и некоторая функция $u \in \mathcal{L}^1(\lambda)$

2. Положим $\forall a, b \in \mathbb{R}^n, a > b$ $K = [a, b] \subset \mathbb{R}^n$.

3. Рассмотрим последовательность функций $\left(|u|\, \mathbb{1}_{B_R(0)^C}\right)_{R\in\mathbb{N}}$, где $B_R(0)^C := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geq R\}$ - дополнение к открытому шару $B_R(0)$ в точке $x = 0$ с радиусом $R$.

   (a) Поскольку $u \in \mathcal{L}^1(\lambda)$, то $|u| \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ из теоремы 10.3. Поскольку $|u|\, \mathbb{1}_{B_R(0)^C} \leq |u| \in \mathcal{L}^1(\lambda)$, то $|u|\, \mathbb{1}_{B_R(0)^C} \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ $\forall R \in \mathbb{N}$ также из теоремы 10.3.

   (b) При $R \to \infty$ $B_R(0)^C \to \varnothing$ из определения дополнения к открытому шару в (3). Тогда $\underset{R\to\infty}{lim} |u|\, \mathbb{1}_{B_R(0)^C} = 0$

4. Объединяя факты 3.а и 3.б по теореме Лебега о мажорируемой сходимости $\underset{R\to\infty}{lim} \int |u|\, \mathbb{1}_{B_R(0)^C} d\lambda = \int \underset{R\to\infty}{lim} |u|\, \mathbb{1}_{B_R(0)^C} d\lambda = 0$

5. Рассмотрим компакт из определения (2). $\forall x \in \mathbb{R}^n$ мы всегда можем подобрать такое $R$, что $x + K \subset B_R(0)^C$.

   (a) Известно, что $A \subset B \implies A \cap B = A$. Тогда $x + K \cap B_R(0)^C = [a+x, b+x] \cap ((-\infty, R] \cup [R, \infty))$

   (b) Из дистрибутивности $x + K \cap B_R(0)^C = ([a+x, b+x] \cap (-\infty, R]) \cup ([a+x, b+x] \cap [R, \infty))$

   (c) В таком случае, $[a+x, b+x] \cap (-\infty, R] = [a+x, b+x] \iff b + x \leq R$.

   (d) Или $[a+x, b+x] \cap [R, \infty) = [a+x, b+x] \iff a + x \geq R$.

6. Используя (5) и монотонность интеграла, $\int_{K+x} |u| \, d\lambda \leq \int_{B_R(0)^C} |u| \, d\lambda \; \forall x \in X$

7. При $|x| \to \infty$ $R \to \infty$ и из 3.б $\underset{|x|\to\infty}{lim} \int_{K+x} |u| \, d\lambda = 0$

8. Ч.Т.Д.

**Доказательство #2:**

1. Пусть $|u|$ - равномерно непрерывна.

2. Пусть $|u|^p \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ и $p > 0$

3. Функция $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ равномерно непрерывна. Это значит $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ такая что $\forall y \, |x - y| < \delta \implies |u(x) - u(y)| < \epsilon$

4. Следующее равенство верно. $\{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| \leq \delta\} = \overline{B_\delta(x)} = x + K$, где надчеркивание обозначает замыкание.

5. Заметим, что

$$|u(x)|^p = \frac{1}{\lambda(x+K)} \int_{K+x} |u(x)|^p \, d\lambda(y) \leq \frac{1}{\lambda(K)} \int_{K+x} (|u(y) - u(x)| + |u(y)|)^p \, d\lambda(y)$$

   (a) $|u(x)|^p \leq (|u(y) - u(x)| + |u(y)|)^p$

   (b) $\lambda(x+K) = \lambda(K)$, т.к. мера Лебега инварианта к смещению (Теорема 5.8)

6. Далее при $C = 2^p$

$$|u(x)|^p \leq \frac{C}{\lambda(K)} \int_{K+x} (\epsilon^p + |u(y)|^p) \, d\lambda(y) = \frac{C}{\lambda(K)} \left( \int_{K+x} \epsilon^p d\lambda(y) + \int_{K+x} |u(y)|^p \, d\lambda(y) \right)$$

   (a) Мы воспользовались неравенством $(a+b)^p \leq 2^p (a^p + b^p)$, где $a = \epsilon$ и $b = |u(y)|$

7. Далее $\frac{C}{\lambda(K)} \left( \int_{K+x} \epsilon^p d\lambda(y) + \int_{K+x} |u(y)|^p \, d\lambda(y) \right) = \frac{C\lambda(K+x)\epsilon^p}{\lambda(K)} + C \int_{K+x} |u(y)|^p \, d\lambda(y)$

8. Из предыдущего доказательства следует, что $\underset{|x|\to\infty}{limsup} |u(x)|^p \leq \underset{|x|\to\infty}{limsup} \left( \frac{C\lambda(K+x)\epsilon^p}{\lambda(K)} + C \int_{K+x} |u(y)|^p \, d\lambda(y) \right) = C\epsilon^p$. Поскольку $\epsilon$ - произвольно и неотрицательно, то $|u(x)|^p = 0 \implies \underset{|x|\to\infty}{lim} u(x) = 0$, а мера Лебега финитна

9. Ч.Т.Д.

### Задача № 9

Пусть $\lambda$ - мера Лебега на $\mathbb{R}^n$ и $u \in \mathcal{L}^1(\lambda)$

- Показать, что $\forall \epsilon > 0 \; \exists B \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$ такое что, $\lambda(B) > 0$, $sup_B |u| < \infty$ и$\int_{B^C} |u| \, d\lambda < \epsilon$
- Используя предыдущее доказательство, показать, что $\underset{\lambda(B)\to 0}{lim} \int_B |u| \, d\lambda = 0$

**Доказательство #1:**

1. Пусть $\lambda$ - мера Лебега на $\mathbb{R}^n$ и $u \in \mathcal{L}^1(\lambda)$

2. Рассмотрим Борелевское множество $B := \{x \in X : |u(x)| \leq R\}$

3. Известно, что $u \in \mathcal{L}^1(\lambda) \iff |u| \in \mathcal{L}^1(\lambda)$. И из монотонности интеграла $\int |u(x)| \mathbb{1}_{|u| \leq R}(x) d\lambda \leq \int |u(x)| d\lambda \; \forall R \in \mathbb{N}$

4. Последовательность $\left(|u(x)| \mathbb{1}_{|u|>R}(x)\right)_{R \in \mathbb{N}}$ поточечно сходится: $\underset{R\to\infty}{lim} |u(x)| \mathbb{1}_{|u|>R}(x) = 0 \in \mathcal{L}^1(\lambda)$.

5. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости $\underset{R\to\infty}{lim} \int |u(x)| \mathbb{1}_{|u|>R}(x) d\lambda = \int \underset{R\to\infty}{lim} |u(x)| \mathbb{1}_{|u|>R}(x) d\lambda = 0$

6. По определению предела мы можем зафиксировать некоторый $R \in \mathbb{N}$ так, что $\int |u(x)| \mathbb{1}_{|u|>R}(x) d\lambda \leq \epsilon$

7. Ч.Т.Д.

**Доказательство #2:**

1. Пусть $\lambda$ - мера Лебега на $\mathbb{R}^n$ и $u \in \mathcal{L}^1(\lambda)$

2. Рассмотрим Борелевское множество $B := \{x \in X : |u(x)| \leq R\}$

3. Поскольку $A = A \cap X = A \cap \left(B \cup B^C\right) = (A \cap B) \sqcup \left(A \cap B^C\right)$. Тогда $\int_A |u| d\lambda = \int_{A\cap B} |u| d\lambda + \int_{A \cap B^C} |u| d\lambda$

4. Зафиксируем некоторую константную по области $A \cap B$ функцию $sup|u| \mathbb{1}_{A\cap B}$. Эта функция превращается в индикаторную. Тогда $\int_{A\cap B} sup|u| \mathbb{1}_B d\lambda = sup_B |u| \lambda(A \cap B)$ - по определению интеграла простой функции.

5. Воспользуемся свойством монотонности интеграла: $\int_{A\cap B} |u| d\lambda \leq sup_B |u| \lambda(A\cap B)$. Тогда $\int_A |u| d\lambda = \int_{A\cap B} |u| d\lambda + \int_{A\cap B^C} |u| d\lambda \leq sup_B |u| \lambda(A\cap B) + \int_{A\cap B^C} |u| d\lambda$ .

6. Положим $\lambda(A) \leq \epsilon$ и из доказательства #1 $\int_{B^C} |u| d\lambda < \epsilon$. Тогда $sup_B |u| \epsilon + \epsilon \to 0$ при $\epsilon \to 0$ поскольку $sup_B |u| < \infty$

7. Ч.Т.Д.

## Задача № 11

Пусть $u \in \mathcal{L}^1(0,1)$ - положительна и монотонна. Найти предел $\underset{n\to\infty}{lim} \int_0^1 u(t^n) dt$
**Решение**

1. Пусть $u \in \mathcal{L}^1(0,1)$ - положительна и монотонна.

2. Рассмотрим последовательность функций вида $(u(t^n))_{n\in\mathbb{N}}$. Заметим, что, $\forall t \in (0,1)$ такая последовательность не возрастает и интегрируема.

3. Тогла по теореме о монотонной сходимости: $\underset{n\to\infty}{lim} \int_0^1 u(t^n) dt = \int_0^1 \underset{n\to\infty}{lim} u(t^n) dt = u(0+)[1-0] = u(0+)$

## Задача № 12

Пусть $u \in \mathcal{L}^1(0,1)$. Найти предел $\underset{n\to\infty}{lim} \int_0^1 t^n u(t) dt$
**Решение**

1. Пусть $u \in \mathcal{L}^1(0,1)$.

2. Поскольку $\forall k < n\ t^k > t^n$ при $t \in (0,1)$. Отсюда следует, что $t^n u(t)$ - монотонно убывает.

3. Кроме того $\forall n \in \mathbb{N}\ t^n u(t) \le u \in \mathcal{L}^1(0,1)$.

4. Из (2) и (3) по теореме о монотонной сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 t^n u(t)\,dt = \int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} t^n u(t)\,dt = \int_0^1 0dt = 0$

### Задача № 13

Показать, что $\int_0^\infty \frac{sin(t)}{e^t-1}dt = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2+1}$

**Решение:**

1. Рассмотрим $\frac{1}{1-e^{-t}}$
   (a) Воспользуемся геометрической прогрессией: $\frac{1}{1-e^{-t}} = \frac{e^t}{e^t-1} = \sum_{k=0}^\infty e^{-tk} \implies \frac{1}{e^t-1} = \sum_{k=0}^\infty e^{-t(k+1)} = \sum_{k=1}^\infty e^{-tk}$.
   (b) Таким образом $\int_0^\infty \frac{sin(t)}{e^t-1}dt = \int_0^\infty \sum_{k=1}^\infty e^{-tk} sin(t)\,dt$

2. Через комплексное пространство: $sint = Im\left\{e^{jt}\right\} \implies \int_0^\infty \sum_{k=1}^\infty e^{-tk} Im\left\{e^{jt}\right\}dt = Im\left\{\int_0^\infty \sum_{k=1}^\infty e^{-t(k-j)}dt\right\}$

3. $e^{-t(k-j)} = e^{-tk+tj} = e^{-tk}e^{tj} \le \left|e^{-tk}\right|\left|e^{tj}\right| = \left|e^{-tk}\right|$.

4. $\int_0^\infty \left|e^{-tk}\right|dt = \frac{1}{k} \in \mathcal{L}^1(\mu)\ \forall k \in \mathbb{N}, t > 0$

5. $\sum_{k=1}^\infty (-1)^k \frac{1}{k} = -log(2) < \infty$ - финитна.

6. То есть $\sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty \left|e^{-tk}\right|dt < \infty$. Тогда из задачи (12.4) $\int_0^\infty \sum_{k=1}^\infty e^{-tk} sintdt = \sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty e^{-tk} sintdt = Im\left\{\sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty e^{-t(k-j)}dt\right\}$.

7. Решим интеграл

$$\int_0^\infty e^{-t(k-j)}dt = -\frac{1}{k-j}\lim_{R\to\infty}\int_{1/R}^R e^{-t(k-j)}d\left[-t(k-j)\right]$$
$$\int_0^\infty e^{-t(k-j)}dt = -\frac{1}{k-j}\left[\lim_{R\to\infty} e^{-R(k-j)} - e^{-\frac{1}{R}(k-j)}\right]$$
$$\int_0^\infty e^{-t(k-j)}dt = -\frac{1}{k-j}\left[\lim_{R\to\infty} e^{-R(k-j)} - 1\right]$$
$$\int_0^\infty e^{-t(k-j)}dt = -\frac{1}{k-j}\left[\lim_{R\to\infty} e^{-Rk}e^{Rj} - 1\right]$$
$$\int_0^\infty e^{-t(k-j)}dt = -\frac{1}{k-j}\left[\lim_{R\to\infty} e^{-Rk}\left(cos(R) - jsin(R)\right) - 1\right]$$
$$\int_0^\infty e^{-t(k-j)}dt = \frac{1}{k-j} = \frac{(k+j)}{(k-j)(k+j)} = \frac{k+j}{k^2+1}$$

8. $Im\left\{\sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty e^{-t(k-j)}dt\right\} = Im\left\{\sum_{k=1}^\infty \frac{k+j}{k^2+1}\right\} = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2+1}$

9. Ч.Т.Д.

### Задача № 14

Пусть $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измерима по Борелю. Положим, что $x \mapsto e^{\lambda x}u(x) \in \mathcal{L}^1\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Показать, что $\forall z \in \mathbb{C}$ выполнено равенство:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{zx}u(x)\,dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!}\int_{\mathbb{R}} x^n u(x)\,dx$$

1. Пусть $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ измерима по Борелю и предположим, что $x\mapsto e^{\lambda x}u(x)\in\mathcal{L}^1\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$
2. Воспользуемся рядом Маклорена $e^{zx}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n x^n}{n!}$. Мы можем представить этот ряд как $s_k=\sum_{n=0}^{k}\frac{z^n x^n}{n!}$ . Такой ряд сходится равномерно и следовательно поточечно, и мажорируется сверху, например функцией $w(x)=|e^{zx}u(x)|$. Тогда по теореме Лебега о монотонной сходимости: $\int_{\mathbb{R}}e^{zx}u(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n x^n}{n!}u(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}}\lim_{k\to\infty}s_k u(x)\,dx=\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}}s_k u(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\int_{\mathbb{R}}x^n u(x)\,dx$
3. Ч.Т.Д.

## Задача № 16

Пусть $\lambda$ - одномерная мера Лебега. Показать, что для любой интегрируемой функции $u$ и $\forall x>0$ следующая функция непрерывна:

$$x\mapsto\int_{(0,x)}u(t)\,\lambda(dt)$$

**Доказательство:**

1. Пусть $\lambda$ - одномерная мера Лебега. Пусть $u$ - интегрируема
2. По определению функция $f:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^m$ непрерывна в точке $x$, если $\forall\epsilon>0\ \exists\delta=\delta(\delta,x)>0$ такая, что $\forall y\ |x-y|<\delta\implies|f(x)-f(y)|<\epsilon$
3. В таком случае рассмотрим $\left|\int_{(0,x)}u(t)\,\lambda(dt)-\int_{(0,y)}u(t)\,\lambda(dt)\right|$ и выполним ряд преобразований.

$$\left|\int_{(0,x)}u(t)\,\lambda(dt)-\int_{(0,y)}u(t)\,\lambda(dt)\right|=\left|\int u(t)\,\mathbb{1}_{(0,x)}(t)\,\lambda(dt)-\int u(t)\,\mathbb{1}_{(0,y)}(t)\,\lambda(dt)\right|$$
$$\left|\int_{(0,x)}u(t)\,\lambda(dt)-\int_{(0,y)}u(t)\,\lambda(dt)\right|=\left|\int u(t)\left(\mathbb{1}_{(0,x)}(t)-\mathbb{1}_{(0,y)}(t)\right)\lambda(dt)\right|$$
$$\left|\int_{(0,x)}u(t)\,\lambda(dt)-\int_{(0,y)}u(t)\,\lambda(dt)\right|\le\int|u(t)|\left|\mathbb{1}_{(0,x)}(t)-\mathbb{1}_{(0,y)}(t)\right|\lambda(dt)$$
$$\left|\int_{(0,x)}u(t)\,\lambda(dt)-\int_{(0,y)}u(t)\,\lambda(dt)\right|\le\sup_t(|u(t)|)\int\left|\mathbb{1}_{(0,x)}(t)-\mathbb{1}_{(0,y)}(t)\right|\lambda(dt)$$
$$\left|\int_{(0,x)}u(t)\,\lambda(dt)-\int_{(0,y)}u(t)\,\lambda(dt)\right|\le\sup_t(|u(t)|)\int\left|\mathbb{1}_{(0,x)}(t)-\mathbb{1}_{(0,y)}(t)\right|\lambda(dt)$$
$$\left|\int_{(0,x)}u(t)\,\lambda(dt)-\int_{(0,y)}u(t)\,\lambda(dt)\right|\le\sup_t(|u(t)|)\int\mathbb{1}_{[y,x)}(t)\,\lambda(dt)$$
$$\left|\int_{(0,x)}u(t)\,\lambda(dt)-\int_{(0,y)}u(t)\,\lambda(dt)\right|\le\sup_t(|u(t)|)\,|x-y|=\sup_t(|u(t)|)\,|y-x|$$

4. Возможны два случая: Первый: $(0,y)\subset(0,x)$ и второй: $(0,x)\subset(0,y)$
5. При $(0,y)\subset(0,x)$ выполнено следующее: $\mathbb{1}_{(0,x)}(t)-\mathbb{1}_{(0,y)}(t)=\mathbb{1}_{(0,x)}(t)-\mathbb{1}_{(0,x)\cap(0,y)}(t)=\mathbb{1}_{(0,x)/(0,y)}(t)=\mathbb{1}_{[y,x)}(t)$
   (a) Значит верны следующие преобразования

$$\left|\int_{(0,x)}u(t)\,\lambda(dt)-\int_{(0,y)}u(t)\,\lambda(dt)\right|\le\sup_t(|u(t)|)\int\mathbb{1}_{[y,x)}(t)\,\lambda(dt)=\sup_t(|u(t)|)\,\lambda[y,x)$$
$$\left|\int_{(0,x)}u(t)\,\lambda(dt)-\int_{(0,y)}u(t)\,\lambda(dt)\right|\le\sup_t(|u(t)|)\,|x-y|=\sup_t(|u(t)|)\,|y-x|$$

   (b) В таком случае, полагая, что $\sup_t(|u(t)|)\,|y-x|<\epsilon\implies|y-x|<\delta=\frac{\epsilon}{\sup_t(|u(t)|)}$

6. Поскольку $\left|\int_{(0,x)} u(t)\,\lambda(dt) - \int_{(0,y)} u(t)\,\lambda(dt)\right| = \left|\int_{(0,y)} u(t)\,\lambda(dt) - \int_{(0,x)} u(t)\,\lambda(dt)\right|$ то при $(0,x) \subset (0,y)$ доказательство аналогично

7. Ч.Т.Д.

### Задача № 17

Проверить на интегрируемость по Лебегу функций

1. $u(x) = \frac{1}{x}$ $x \in [1,\infty)$ и $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$
2. $v(x) = \frac{1}{x^2}$ $x \in [1,\infty)$ и $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$
3. $w(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $x \in (0,1]$ и $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$
4. $y(x) = \frac{1}{x}$ $x \in (0,1]$ и $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$

**Решение:**

1. Рассмотрим функцию $u(x)$. Она измерима. Такая функция равномерно непрерывна на компакте вида $[1,b]$ $b < \infty$ поскольку$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{x-y}{xy}\right| < \epsilon \implies |x-y| < \epsilon xy = \delta > 0$. Любая непрерывная функция интегрируема по Риману. В таком случае $\int_1^\infty \left|\frac{1}{x}\right| dx = \int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \underset{N\to\infty}{lim} \int_1^N \frac{1}{x} dx = \underset{N\to\infty}{lim}\, ln\,|x|\big|_1^N = \infty$ - не финитна, и, следовательно, не интегрируема по Лебегу (Следствие 12.11). На интервале $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ поскольку - это интервал (Теорема 12.8)

2. Рассмотрим функцию $v(x)$. Такая функция равномерно непрерывная на компакте вида $[1,b]$. $1 < b < \infty$. Поскольку $\left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right| = \left|\frac{x^2-y^2}{x^2y^2}\right| = \frac{|x+y|}{x^2y^2}|x-y| < \epsilon \implies |x-y| < \frac{x^2y^2\epsilon}{|x+y|}$ $\forall x, y \in [1,b]$. Любая непрерывная функция интегрируема по Риману. В таком случае $\int_1^\infty \left|\frac{1}{x^2}\right| dx = \underset{N\to\infty}{lim} \int_1^N \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^N = 1 < \infty$. Тогда из следствия 12.11 она интегрируема по Лебегу на интервале $[1,\infty)$ ,и $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ поскольку - второй это интервал (Теорема 12.8)

3. Рассмотрим функцию $w(x)$. Она измерима.

   (a) Покажем, что такая функция непрерывна $\left|\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right| = \left|\frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{\sqrt{yx}}\right| = \left|\frac{y-x}{(\sqrt{y}+\sqrt{x})\sqrt{yx}}\right| < \epsilon \implies |y-x| < \epsilon\left(\sqrt{y}+\sqrt{x}\right)\sqrt{yx}$ всюду при $x, y \in (0,1]$. Отсюда следует, что она интегрируема по Риману.

   (b) Из (a) по теореме 12.8 следует, что $\forall k \in \mathbb{N}$ $w_k = w\mathbb{1}_{\left[\frac{1}{k},1\right]} \in \mathcal{L}^1(\lambda)$

   (c) Такая монотонно возрастает и имеет предел равный $w$. Тогда по теореме о монотонной сходимости $\underset{k\to\infty}{lim} \int_{\frac{1}{k}}^1 w(x)\,dx = \underset{k}{sup} \int_{\frac{1}{k}}^1 w(x)\,dx = \underset{k}{sup} \int_{\left[\frac{1}{k},1\right]} wd\lambda < \infty$ $w$ интегрируема по Лебегу.

   (d) На интервале $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ Интеграл Римана и Лебега совпадают

4. Рассмотрим $y(x)$

   (a) Мы уже показали в (2) что она интегрируема по Риману на компакте $[1,b]$. Вообще говоря это верно для любого компакта $[a,b]$ $a, b > 0, a < b$

   (b) Остальные шаги в точности совпадают с (3.b), (3.c) и (3.d)

5. Ч.Т.Д.

### Задача № 19

Показать, что $\forall \alpha > 0$ $\left(\frac{sinx}{x}\right)^3 e^{-\alpha x}$ интегрируема на интервале $(0, \infty)$

1. Пусть $\forall \alpha > 0$ . Рассмотрим $x \mapsto \left(\frac{sinx}{x}\right)^3 e^{-\alpha x}$
2. На интервале $(0, \pi]$ функция в (1) мажорируется функцией $x \mapsto cos\frac{x}{2}$ а на интервале $(\pi, \infty)$ мажорируется $x \mapsto \frac{1}{x^2}$
3. Таким образом, чтобы показать, что функция в (1) интегрируема, необходимо показать, что $\int \left(cos\frac{x}{2}\mathbb{1}_{(0,\pi]}(x) + \frac{1}{x^2}\mathbb{1}_{(\pi,\infty}\right.$ $\infty$
4. На интервалах $(0, \pi]$ $(\pi, \infty)$ мы рассмотрим интегралы Римана и покажем, что интеграл определенный в (3) конечен используя следствие 12.11.
5. Рассмотрим первый интервал: $\lim\limits_{N\to\infty} \int_{1/N}^{\pi} \left|cos\frac{x}{2}\right| dx = \lim\limits_{N\to\infty} 2\int_{1/N}^{\pi} cos\frac{x}{2} d\frac{x}{2} = 2\lim\limits_{N\to\infty} \left[sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - sin\left(\frac{1}{2N}\right)\right] = 2 < \infty$
6. Второй интеграл интегрируем по Лебегу на интервале $[1, \infty)$ и, следовательно, интегрируем по Лебегу на интервале $(\pi, \infty)$ поскольку $(\pi, \infty) \subset [1, \infty)$
7. Таким образом комбинируя (5) и (6) и теорему 10.4 интеграл определенный в (3) интегрируем по Лебегу.
8. Ч.Т.Д.

### Задача № 12.20

Показать, что функция $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G(x) := \int_{\mathbb{R}/\{0\}} \frac{sin(tx)}{t(1+t^2)} dt$ дифференцируема и найти $G(0), G'(0)$. Использовать предельный аргумент, интегрирование по частям для $\int_{(-n,n)} ...dt$ и формулу, что $t\frac{\partial}{\partial t} sin(tx) = x\frac{\partial}{\partial x} sin(tx)$, чтобы показать, что

$$xG'(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{2tsin(tx)}{(1+t^2)^2} dt$$

**Доказательство и решение:**

1. Пусть $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $G(x) := \int_{\mathbb{R}/\{0\}} \frac{sin(tx)}{t(1+t^2)} dt$
2. Мы воспользуемся теоремой 12.5 и для удобства сформулируем ее здесь: Пусть $\varnothing \neq (a, b) \subset \mathbb{R}$. Положим $u : (a, b) \times X \to \mathbb{R}$ - функция удовлетворяющая следующим свойствам:
   (a) $x \mapsto u(t, x)$ интегрируема $\forall t \in (a, b)$
   (b) $t \mapsto u(t, x)$ дифференцируема $\forall x \in X$
   (c) $|\partial_t u(t, x)| \leq w(x)$ $\forall (t, x) \in (a, b) \times X$, $w(x) \in \mathcal{L}^1(\mu)$
   (d) В этом случае $U(t) := \int u(t, x)\mu(dx)$ дифференцируема и ее производная дана как $\frac{dU(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int u(t, x)\mu(dx) = \int \frac{\partial}{\partial t} u(t, x)\mu(dx)$

3. Сначала мы докажем, свойство (a) показав, что подинтегральное выражение в (1) $g : t \mapsto \frac{sin(tx)}{t(1+t^2)}$ интегрируемо для любого зафиксированного $x \in (a, b)$

   (a) Рассмотрим функцию вида $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ на интервале $(\infty, 1] \cup [1, \infty)$. Такая функция непрерывна всюду на этом интервале, и, следовательно, интегрируема по Риману. Интеграл Римана конечен и из следствия 12.11 $g$ интегрируема по Лебегу

   (b) Рассмотрим компакт $[-1, 1]$. В таком случае, функция стремится к $x \lim\limits_{t\to 0}\frac{sin(tx)}{t(1+t^2)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{t\to 0}\frac{xcos(tx)}{1+2t} = x$. Следовательно, функция, указанная в (3) ограничена на заданном компакте, конечной константой $x \in (a, b)$. Следовательно, $\int_{[-1,1]}\left|\frac{sin(tx)}{t(1+t^2)}\right|\lambda(dt) \leq \int \left|x\mathbb{1}_{[-1,1]}(t)\right|\lambda(dt) < \infty$. Поскольку модуль интегрируем, то и функция интегрируема на заданном компакте по теореме 10.3.

   (c) Собирая пункты (a) и (b) вместе мы видим, что функци интегрируема на интервале $(\infty, 1] \cup [1, \infty) \cup [-1, 1] = \mathbb{R}$ функцией $x\mathbb{1}_{[-1,1]}(t) + \frac{1}{t^2}\mathbb{1}_{(\infty,1]\cup[1,\infty)}(t)$. Таким образом выполнено 2.a $\mathbb{R}/\{0\}$

4. Очевидно, функция $x \mapsto u(t, x)$ дифференцируема $\forall x \in X$. Следовательно, выполнено 2.б

5. Рассмотрим $|\partial_x g(t, x)| = \left|\frac{cos(tx)}{(1+t^2)}\right| \leq \frac{1}{(1+t^2)} = w(x)$ Очевидно, что при любом $\forall (x, t) \in (a, b) \times X$ мажоранта интегрируема. Следовательно, выполнено 2.c

6. Таким образом, комбинируя (2), (3) и (4) по теореме 12.5 $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Дифференцируема.

7. Далее, рассчитаем $G(0)$ и $G'(0)$

   (a) $G(0) := \int_{\mathbb{R}/\{0\}}\frac{sin(t0)}{t(1+t^2)}dt = 0$

   (b) $G'(0) = \int_{\mathbb{R}/\{0\}}\frac{cos(xt)}{(1+t^2)}dt\Big|_{x=0} = \lim\limits_{n\to\infty}\int_{-n}^{-1/n}\frac{1}{(1+t^2)}dt + \lim\limits_{n\to\infty}\int_{1/n}^{n}\frac{1}{(1+t^2)}dt = \lim\limits_{n\to\infty}\left[arctg\left(-\frac{1}{n}\right) - arctg(-n) + arctg(n) -\right.$

      i. Далее $G'(0) = 2\lim\limits_{n\to\infty}\left[arctg(n) - arctg\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \pi$

8. Далее, покажем, что $xG'(x) = \int_{\mathbb{R}}\frac{2tsin(tx)}{(1+t^2)^2}dt$

$$xG'(x) = \lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}\frac{\partial}{\partial x}\frac{xsin(tx)}{t(1+t^2)}dt$$
$$xG'(x) = \lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}\frac{\partial}{\partial t}sin(tx)\frac{1}{(1+t^2)}dt$$

   (a) Интегрирование по частям соответствует формуле: $\int udv = uv - \int vdu$

   (b) Положим что $v = sin(tx) \implies dv = \frac{\partial}{\partial t}sin(tx)$ $u = \frac{1}{(1+t^2)} \implies du = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{(1+t^2)}$.

   (c) Тогда, комбинируя 8 и 8.б $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}\frac{\partial}{\partial t}sin(tx)\frac{1}{(1+t^2)}dt = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{sin(tx)}{(1+t^2)}\Big|_{-n}^{n} - \lim\limits_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}sin(tx)\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{(1+t^2)}dt = 0 - \lim\limits_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}\frac{2tsin(tx)}{(1+t^2)^2}dt = \int_{\mathbb{R}}\frac{2tsin(tx)}{(1+t^2)^2}dt$

9. Ч.Т.Д.

### Задача № 12.21

Пусть $\lambda$ - одномерная мера Лебега. Доказать равенства:

1. $\int_{(1,\infty)} e^{-x}ln(x)\lambda(dx) = \lim\limits_{k\to\infty}\int_{(1,k)}\left(1 - \frac{x}{k}\right)^k ln(x)\lambda(dx)$

2. $\int_{(0,1)} e^{-x} ln\,(x)\,\lambda\,(dx) = \lim\limits_{k\to\infty} \int_{(0,1)} \left(1-\frac{x}{k}\right)^k ln\,(x)\,\lambda\,(dx)$

Доказательство:

1. Рассмотрим предел: $\lim\limits_{k\to\infty} \left(1-\frac{x}{k}\right)^{-k}$. Положим $-\frac{x}{k} = \frac{1}{u} \implies k = -ux$. В таком случае $\lim\limits_{k\to\infty} \left(1-\frac{x}{k}\right)^k = \lim\limits_{u\to\infty} \left(1+\frac{1}{u}\right)^{-ux} = \lim\limits_{u\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{u}\right)^u\right)^{-x} = e^{-x}$.
2. Далее воспользуемся теоремой Лебега о мажорируемой сходимости и воспользуемся ей, чтобы поменять предел и интеграл в левой части.
   (a) По условию $\forall k \in \mathbb{N}\ \left(1-\frac{x}{k}\right)^{-k} ln\,(x) \in \mathcal{L}^1(\lambda)$. При интегрировании на интервале $(1,k)$ $\left(1-\frac{x}{k}\right)^{-k} ln\,(x) = \left|\left(1-\frac{x}{k}\right)^{-k} ln\,(x)\right| \in \mathcal{L}^1(\lambda)$
   (b) В пункте (1) мы показали, что $\lim\limits_{k\to\infty} \left(1-\frac{x}{k}\right)^{-k} = e^{-x}$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} \left(1-\frac{x}{k}\right)^{-k} ln\,(x) = e^{-x} ln\,(x)$
3. Используя 2.a и 2.б по теореме Лебега о мажорируемой сходимости $\int_{(1,\infty)} e^{-x} ln\,(x)\,\lambda\,(dx) = \int_{(1,\infty)} \lim\limits_{k\to\infty} \left(1-\frac{x}{k}\right)^{-k} ln\,(x)$ $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{(1,k)} \left(1-\frac{x}{k}\right)^{-k} ln\,(x)\,\lambda\,(dx)$
4. Аналогично доказывается второе равенство
5. Ч.Т.Д.

**Задача № 12.22**

Пусть $\lambda$ - одномерная мера Лебега на $\mathbb{R}$ и пусть $F(t) = \int_{(0,\infty)} e^{-x}\frac{t}{t^2+x^2}\lambda\,(dx)$. Показать, что $F(0+) = \lim\limits_{t\downarrow 0} F(t) = \frac{\pi}{2}$ $t > 0$

1. Пусть $\lambda$ - одномерная мера Лебега
2. Рассмотрим $F(t) = \int_{(0,\infty)} e^{-x}\frac{t}{t^2+x^2}\lambda\,(dx)$
3. Заметим, что $F(t) = \int_{(0,\infty)} e^{-x}\frac{t}{t^2+x^2}\lambda\,(dx) = \lim\limits_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-x}\frac{t}{t^2+x^2}dx$ - интегрируема по Риману
4. Положим $x = ty$. Тогда $F(t) = \int_{(0,\infty)} e^{-ty}\frac{t^2}{t^2+ty^2}dy = \int_{(0,\infty)} e^{-ty}\frac{1}{1+y^2}dy$
5. Заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{n}y}\frac{1}{1+y^2} = e^{-ty}\frac{1}{1+y^2}$ - поточечно сходится и $\left|e^{-ty}\frac{1}{1+y^2}\right| \le \left|\frac{1}{1+y^2}\right| \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ Тогда по теореме Лебега о мажорируемой сходимости мы можем поменять интеграл и предел местами:
6. $F(0+) = \lim\limits_{n\to\infty} \int_{(0,\infty)} e^{-\frac{1}{n}y}\frac{1}{1+y^2}dy = \int_{(0,\infty)} \lim\limits_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{n}y}\frac{1}{1+y^2}dy = \int_{(0,\infty)} \frac{1}{1+y^2}dy = arctan\,(y)|_0^\infty = \frac{\pi}{2}$
7. Ч.Т.Д.

**Задача № 12.24**

Пусть $\phi(x) \in \mathcal{L}^1([0,1], dx)$. Определим $f(t) := \int_{[0,1]} |\phi(x) - t|\,dx$. Показать, что

1. $f(t)$ непрерывна
2. $f(t)$ дифференцирума в точке $t \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $\lambda\{\phi = t\} = 0$

**Доказательство:**

1. Пусть $\phi\left(x\right) \in \mathcal{L}^1\left(\left[0,1\right], dx\right)$ и $f\left(t\right) := \int_{\left[0,1\right]} \left|\phi\left(x\right) - t\right| dx$
2. Докажем утверждение (1) Чтобы показать, что функция непрерывна в точке $t \in \mathbb{R}$, необходимо показать, что $\forall \epsilon, \exists \delta\left(\epsilon, t\right)$ такое что $\forall s \ \left|t - s\right| < \delta \implies \left|f\left(t\right) - f\left(s\right)\right| < \epsilon$
    (a) Рассмотрим $\left|f\left(t\right) - f\left(s\right)\right| = \left|\int_{\left[0,1\right]} \left|\phi\left(x\right) - t\right| dx - \int_{\left[0,1\right]} \left|\phi\left(x\right) - s\right| dx\right| = \left|\int_{\left[0,1\right]} \left|\phi\left(x\right) - t\right| dx - \left|\phi\left(x\right) - s\right| dx\right|$
    (b) Из неравенства треугольника для интеграла $\left|\int_{\left[0,1\right]} \left|\phi\left(x\right) - t\right| dx - \left|\phi\left(x\right) - s\right| dx\right| \leq \int_{\left[0,1\right]} \left|\left|\phi\left(x\right) - t\right| dx - \left|\phi\left(x\right) - s\right|\right| d$
    (c) Известно, что $\forall a, b \in \mathbb{R} \ \left|\left|a\right| - \left|b\right|\right| \leq \left|a - b\right|$. Тогда $\int_{\left[0,1\right]} \left|\left|\phi\left(x\right) - t\right| dx - \left|\phi\left(x\right) - s\right|\right| dx \leq \int_{\left[0,1\right]} \left|s - t\right| dx = \left|s - t\right| < \epsilon$
    (d) Таким образом $\left|f\left(t\right) - f\left(s\right)\right| = C\left|s - t\right| \ 0 < C < \infty$. То есть $f\left(t\right)$ непрерывна по Липшицу и следовательно равномерно нерперывна
3. Докажем утверждение (2). С одной стороны:
    (a) Пусто

**Задача № 12.25**

Пусть $f\left(t\right) = \int_0^\infty x^{-2} sin^2 x e^{-tx} dx \ t \geq 0$

1. Показать, что $f$ - непрерывна на $[0, \infty)$ и дважды дифференцируема на $(0, \infty)$
2. Найти $f''$ и посчитать пределы $\underset{t\to\infty}{lim} f\left(t\right)$ и $\underset{t\to\infty}{lim} f'\left(t\right)$
3. Использовать (1) и (2) чтобы показать, чтобы выразить простым образом $f\left(t\right)$

**Доказательство #1:**

1. Пусть $f\left(t\right) = \int_0^\infty x^{-2} sin^2 x e^{-tx} dx \ t \geq 0$
2. Покажем, что $f\left(t\right)$ - непрерывна.
    (a) Рассмотрим $\left|f\left(t\right) - f\left(s\right)\right| = \left|\int_0^\infty \frac{sin^2 x}{x^2} e^{-tx} dx - \int_0^\infty \frac{sin^2 x}{x^2} e^{-sx} dx\right|$
    (b) Заметим, что $\left|\int_0^\infty \frac{sin^2 x}{x^2} e^{-tx} dx - \int_0^\infty \frac{sin^2 x}{x^2} e^{-sx} dx\right| \leq \left|\int_0^\infty e^{-tx} dx - \int_0^\infty e^{-sx} dx\right| = \left|\frac{1}{t} - \frac{1}{s}\right| = \frac{\left|s-t\right|}{ts} \implies \left|s - t\right| < \epsilon ts$
    (c) Таким образом $\left|s - t\right| < \delta = \epsilon ts \implies \left|f\left(t\right) - f\left(s\right)\right| \leq \epsilon$. $\forall t, s \geq 0$
3. Покажем, что $f\left(t\right)$ дифференцируема
    (a) Отображение $x \mapsto x^{-2} sin^2 x e^{-tx}$ интегрируемо по Лебегу $\forall t > 0$. (Доказательство #2 1.a)
    (b) Отображение $t \mapsto x^{-2} sin^2 x e^{-tx}$ дифференцируемо на $(0, \infty)$:
        i. $\underset{\Delta t\to 0}{lim} \frac{x^{-2} sin^2 x e^{-(t+\Delta t)x} - x^{-2} sin^2 x e^{-tx}}{\Delta t} = \underset{\Delta t\to 0}{lim} \frac{x^{-2} sin^2 x e^{-tx} e^{-\Delta t x} - x^{-2} sin^2 x e^{-tx}}{\Delta t} = x^{-2} sin^2 x e^{-tx} \underset{\Delta t\to 0}{lim} \frac{e^{-\Delta t x} - 1}{\Delta t} = \left[\frac{0}{0}\right]$
        ii. $x^{-2} sin^2 x e^{-tx} \underset{\Delta t\to 0}{lim} \frac{e^{-\Delta t x} - 1}{\Delta t} = x^{-2} sin^2 x e^{-tx} \underset{\Delta t\to 0}{lim} \frac{1 + \sum_{n=1}^\infty (-\Delta t x)^n - 1}{\Delta t} = x^{-2} sin^2 x e^{-tx} \underset{\Delta t\to 0}{lim} \frac{\Delta t \sum_{n=1}^\infty \Delta t^{n-1} (-x)^n}{\Delta t} = 0$

(c) $\left|\frac{\partial}{\partial t}x^{-2}sin^2xe^{-tx}\right| = \left|-\frac{sin^2x}{x}e^{-tx}\right| \leq e^{-tx} \in \mathcal{L}^1(\lambda)\ \forall t > 0$

(d) Тогда из (3), (4) и (5) по теореме 12.5 $f(t)$ дифференцируема по и $f'(t) = \int_0^\infty -\frac{sin^2x}{x}e^{-tx}dx$ при $t \in (0,\infty)$

4. Покажем, что $f'(t)$ дифференцируема

   (a) $x \mapsto -x^{-1}sin^2xe^{-tx} \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ поскольку $-x^{-1}sin^2xe^{-tx} \geq -e^{-tx} \in \mathcal{L}^1(\lambda)$, $t \in (0,\infty)$

   (b) $t \mapsto -x^{-1}sin^2xe^{-tx}$ - дифференцируема. Доказательство аналогично 3.b

   (c) $\left|-\frac{\partial}{\partial t}x^{-1}sin^2xe^{-tx}\right| = \left|sin^2xe^{-tx}\right|$. При $t > 0$ $\left|sin^2xe^{-tx}\right| \leq e^{-tx} \in \mathcal{L}^1(\lambda)$. При $t \in (0,\infty)$

   (d) Тогда из (3), (4) и (5) по теореме 12.5 $f(t)$ дифференцируема при $t \in (0,\infty)$ и $f''(t) = \int_0^\infty sin^2xe^{-tx}dx$

5. Ч.Т.Д.

**Доказательство #2:**

1. Для того, чтобы найти $\lim_{t\to\infty} f(t)$ мы воспользуемся теоремой Лебега о мажорируемой сходимости, чтобы поменять интеграл и предел местами

   (a) По условию $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty}\int_0^\infty x^{-2}sin^2xe^{-tx}dx$. Такой несобственный интеграл Римана интегрируем по Лебегу из следствия 12.11, поскольку $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall t \geq 0\ \int_0^n \left|x^{-2}sin^2xe^{-tx}\right| dx \leq \int_0^1 dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = 2$.

   (b) Более того, $\lim_{n\to\infty} x^{-2}sin^2xe^{-nx} = 0 \in \mathcal{L}^1(\lambda)$

   (c) Тогда из (1.a) и (1.b), по теореме Лебега о мажорируемой сходимости следует, что $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty}\int_0^\infty x^{-2}sin^2xe^{-tx}dx = \int_0^\infty \lim_{t\to\infty} x^{-2}sin^2xe^{-tx}dx = 0$

2. Для того, чтобы найти $\lim_{t\to\infty} f'(t)$ мы воспользуемся теоремой Лебега о мажорируемой сходимости, чтобы поменять интеграл и предел местами

   (a) По условию $\lim_{t\to\infty} f'(t) = \int_0^\infty -\frac{sin^2x}{x}e^{-tx}dx$ Такой несобственный интеграл Римана интегрируем по Лебегу из следствия 12.11, поскольку $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall t \geq 0\ \int_0^n \left|-\frac{sin^2x}{x}e^{-tx}\right| dx \leq \int_0^n e^{-tx}dx = \frac{1-e^{nt}}{t} < \infty$.

   (b) Более того, $\lim_{n\to\infty} -\frac{sin^2x}{x}e^{-nx} = 0 \in \mathcal{L}^1(\lambda)$

   (c) Тогда из (2.a) и (2.b), по теореме Лебега о мажорируемой сходимости следует, что $\lim_{t\to\infty} f'(t) = \lim_{t\to\infty}\int_0^\infty -\frac{sin^2x}{x}e^{-tx}dx = -\int_0^\infty \lim_{t\to\infty}\frac{sin^2x}{x}e^{-tx}dx = 0$

3. Мы уже находили $f''$ в доказательстве #1 к этой задаче.

## Задача № 12.26

Показать, что $\int_0^\infty x^ne^{-x}dx = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$

1. Следующее равенство выполнено: $\int_0^\infty e^{-xt}dx = \frac{1}{t}$

   (a) $\int_0^\infty xe^{-xt}dx = 1!\frac{1}{t^2}$ - производная 1 порядка

   (b) $\int_0^\infty x^2e^{-xt}dx = 2!\frac{1}{t^3}$ - производная 2 порядка

   (c) $\int_0^\infty x^3e^{-xt}dx = 3!\frac{1}{t^4}$ - производная 3 порядка

(d) По индукции можно показать, что $\forall n \in \mathbb{N}\ \int_0^\infty x^n e^{-xt} dx = n! \frac{1}{t^{n+1}}$

2. При $t = 0\ \int_0^\infty x^n e^{-xt} dx = n! \frac{1}{t^{n+1}} \implies \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$

3. Ч.Т.Д.

**Задача № 12.27**

Показать, что функция:

$$\Gamma(t) = \int_{(0,\infty)} e^{-x} x^{t-1} dx \quad \forall t > 0$$

Обладает следующими свойствами:

1. Она $m$ раз дифференцируема: $\Gamma^{(m)}(t) = \int_{(0,\infty)} e^{-x} x^{t-1} (logx)^m dx$

2. $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$

3. Она логарифмически выпукла

**Доказательство #1:**

1. Предположим $\Gamma^{(m-1)}(t) = \int_{(0,\infty)} e^{-x} x^{t-1} (logx)^{m-1} dx$ - дифференцируема. Мы воспользуемся индукцией и теоремой 12.5, чтобы показать, что Гамма-функция дифференцируема конечное число раз.
   (a) Рассмотрим $x \mapsto e^{-x} x^{t-1} (logx)^{m-1}$. Такая функция положительна при $x \in (0, \infty)$ и мажорируется интегрируемой по Лебегу $\mathbb{1}_{(0,1)} M' x^{\delta-1} + \mathbb{1}_{[1,\infty)} M x^{-2}\ \delta > 0\ \forall m \in \mathbb{N}$ из подсказки к задаче.
   (b) $t \mapsto e^{-x} x^{t-1} (logx)^{m-1}$ - дифференцируема. Ее производная $e^{-x} (logx)^{m-1} \left(x^{t-1}\right)'_t = e^{-x} x^{t-1} (logx)^m$
   (c) Мы уже показали, в (a), что подынтегральное выражение интегрируемо $\forall m \in \mathbb{N}$. Следовательно производная, указанная в 2.b тоже мажорируема интегрируемой функцией.

2. Тогда из теоремы 12.5 Гамма функция дифференцируема $m \in \mathbb{N}$ раз.

3. Ч.Т.Д

**Доказательство #2:**

1. $\int_{(0,\infty)} e^{-x} x^t dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^n e^{-x} x^t dx = \lim\limits_{n\to\infty} e^{-x} t x^{t-1} \Big|_{\frac{1}{n}}^n + \int_{(0,\infty)} e^{-x} x^{t-1} dx = \lim\limits_{n\to\infty} e^{-n} t n^{t-1} - e^{-\frac{1}{n}} t \frac{1}{n}^{t-1} = \int_{(0,\infty)} e^{-x} x^{t-1} dx$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n} t n^{t-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{t n^{t-1}}{e^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{t n^{t-1}}{\sum_{k=0}^\infty \frac{n^k}{k!}} = 0$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{n}} t \frac{1}{n}^{t-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{t \frac{1}{n}^{1-t}}{e^{\frac{1}{n}}} = 0$

4. Ч.Т.Д.

**Доказательство #3:**

1. Пусто

**Задача № 12.28**

Пусть $\lambda$ - одномерная мера Лебега.

1. Показать, что $\forall k \in \mathbb{N}_0$ выполнено равенство: $\int_{(0,1)} (xlnx)^k \lambda(dx) = (-1)^k \left(\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} \Gamma(k+1)$
2. Использовать предыдущее доказательство, чтобы $\int_{(0,1)} x^{-x} \lambda(dx) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-k}$

**Доказательство #1:**

1. Рассмотрим интеграл: $\int_{(0,1)} (xlnx)^k \lambda(dx) = -\int_0^1 x^{k+1} (lnx)^k \left(-\frac{1}{x}\right) dx = \int_{(0,1)} \frac{x^{k+1}}{x} (lnx)^k \lambda(dx)$
2. Выполним замену $x = e^{-y}$. В таком случае покажем и выполним замены:
   (a) $y = -ln(x)$
   (b) $x^{k+1} = e^{-y(k+1)}$
   (c) $(lnx)^k = (-1)^k y^k$
   (d) $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x} \implies dy = -\frac{1}{x} dx$
   (e) $-ln(0) = \infty$ и $-ln(1) = 0$
   (f) Подставляя в интеграл получим, что $-\int_0^1 x^{k+1} (lnx)^k \left(-\frac{1}{x}\right) dx = (-1)^k \int_0^{\infty} e^{-y(k+1)} y^k dy$
3. Положим $x = y(k+1)$. В таком случае:
   (a) $y = \frac{x}{k+1}$
   (b) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{k+1} \implies dy = \frac{dx}{k+1}$
   (c) $y^k = x^k \left(\frac{1}{k+1}\right)^k$
   (d) Пределы интегрирования не изменяются
   (e) Подставляя в интеграл получим, что$(-1)^k \int_0^{\infty} e^{-y(k+1)} y^k dy = (-1)^k \left(\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} \int_0^{\infty} e^{-x} x^k dx = (-1)^k \left(\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} \Gamma(k$
4. Таким образом $\int_{(0,1)} (xlnx)^k \lambda(dx) = (-1)^k \left(\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} \Gamma(k+1)$
5. Ч.Т.Д

**Доказательство #2:**

1. Рассмотрим интеграл: $\int_{(0,1)} x^{-x} \lambda(dx) = \int_{(0,1)} x^{-x} \lambda(dx) = \int_{(0,1)} e^{-xlnx} \lambda(dx) = \int_{(0,1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-xlnx)^k}{k!} \lambda(dx)$
2. Из теоремы Тунелли-Фубини: $\int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-xlnx)^k}{k!} \lambda(dx) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 (xlnx)^k \lambda(dx)$
3. Из доказательства #1: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 (xlnx)^k \lambda(dx) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} \Gamma(k+1)$
4. Мы уже показывали, что $\int_{(0,\infty)} x^k e^{-x} dx = k!$ Тогда $\frac{\Gamma(k+1)}{k!} = \int_{(0,\infty)} e^{-x} x^k dx = 1$, что имплицирует $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} \Gamma(k+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-k}$
5. Ч.Т.Д.

### Задача № 12.29

Показать, что отображение $x \mapsto x^n f(u,x)$ интегрируемо, где $f(u,x) = \frac{e^{ux}}{e^x+1}$ и $0 < u < 1$ на $\mathbb{R}$ и $g(u) := \int x^n f(u,x)\,dx$ и $0 < u < 1$ дифференцируема произвольное число раз.

1. Пусто

### Задача № 12.30

Рассчитать следующий интегрируемый по Риману предел:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n} dx$$

**Решение**

1. Рассмотрим $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n} dx$
2. Заметим, что $\forall n \in \mathbb{N}$ $\left|\frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}\mathbb{1}_{[0,1]}\right| \le \mathbb{1}_{[0,1]} \in \mathcal{L}^1([0,1])$
3. Более того, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n} = 0 \in \mathcal{L}^1(0,1)$
4. Тогда по теореме Лебега о мажорируемой сходимости мы можем поменять предел и интеграл местами: $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n} dx = \int_{[0,1]} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n} dx = 0$

### Задача № 12.31

Пусть $f(t) = \int_0^\infty arctan\left(\frac{t}{sinh(x)}\right) dx\ t > 0$

1. Показать, что $f$ дифференцируемо на $(0,\infty)$, но $f'(0+)$ не существует
2. Найти решения в замкнутой форме для $f'(t), f(0), \lim\limits_{t\to\infty} f(t)$

**Доказательство #1**

1. Пусто

### Задача № 12.32

Пусть $X$ - положительная случайная величина на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . Функция $\phi(t) := \int e^{-tX} d\mathbb{P}$ называется функцией моментов. Показать, что $\phi(t)$ m раз дифференцируема в точке $t = 0+$, если абсолютный момент порядка m $\int |X|^m d\mathbb{P}$ существует. В этом случае выполнена следующие равенства:

1. $M_k = \int X^k d\mathbb{P} = (-1)^k \frac{d^k}{dt^k}\phi_X(t)\Big|_{t=0+}$ для всех $0 \le k \le m$
2. $\phi_X(t) = \sum_{k=0}^m \frac{M_k}{k!}(-1)^k t^k + o(t^m)$ $f(t) = o(t^m)$ - обозначает $\lim\limits_{t\to 0} \frac{f(t)}{t^m} = 0$
3. $\left|\phi_X(t) - \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k t^k\right| \le \frac{|t|^m}{m!} \int |X|^m d\mathbb{P}$
4. Если $\int |X|^m d\mathbb{P} < \infty\ \forall k \in \mathbb{N}$, тогда $\phi_X(t) = \sum_{k=0}^m \frac{M_k}{k!}(-1)^k t^k$ для всех t внутри радиуса сходимости

**Доказательство:**

1. Пусть $X$ - положительная случайная величина на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
2. Рассмотрим функцию моментов $\phi(t) := \int e^{-tX} d\mathbb{P}$
3. Положим, что $\forall m \in \mathbb{N} \int |X|^m d\mathbb{P} < \infty$ существует.
4. Мы воспользуемся методом индукции. В ходе шага индукции мы воспользуемся теоремой 12.5, чтобы показать, что $\phi(t)$ - дифференцируема $m$ раз. Затем воспользуемся теоремой Лебега о мажорируемой сходимости, чтобы поменять предел при $t \to 0+$ и интеграл местами.
5. Воспользуемся теоремой 12.5. Предположим, что $\phi(t)$ дифференцируема $k$ раз, а производная $\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\phi(t) = \int (-X)^k e^{-\frac{1}{n}X} d\mathbb{P}$
   (a) $x \mapsto (-X)^k e^{-tX} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ поскольку $\left|(-X)^k e^{-tX}\right| \leq |X^m| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P}) \implies \left|(-X)^k e^{-tX}\right| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ из (3). Тогда по теореме 10.3 $(-X)^k e^{-tX} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ $\forall t > 0$
   (b) $t \mapsto (-X)^k e^{-tX}$ дифференцируема, поскольку выполнено следующее: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{(-X)^k e^{-(t+\Delta t)X} - (-X)^k e^{-tX}}{\Delta t} = (-X)^k e^{-tX} \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{e^{-\Delta t X} - 1}{\Delta t} = (-X)^k e^{-tX} \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\Delta t X)^n}{n!}}{\Delta t} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{Лопиталь}}{=} 0$
   (c) $\left|\frac{\partial}{\partial t}(-X)^k e^{-tX}\right| = \left|X^{k+1} e^{-tX}\right| \leq \left|X^{k+1}\right| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ $k+1 = m$, тогда $\left|\frac{\partial}{\partial t}(-X)^k e^{-tX}\right| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$
   (d) Комбинируя подпункты в 5 по теореме 12.5 $\lim\limits_{n \to \infty} \int (-X)^k e^{-\frac{1}{n}X} d\mathbb{P}$ дифференцируема $m$ - раз. По индукции, мы показали, что функция дифференцируема конечное число раз, если выполнено (3) $\forall t > 0$
6. Воспользуемся теоремой Лебега о мажорируемой сходимости
   (a) Заметим, что $\forall n \in \mathbb{N} \left|(-X)^m e^{-\frac{1}{n}X}\right| \leq |X^m| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P}) \implies \left|(-X)^m e^{-\frac{1}{n}X}\right| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ из (3). Тогда по теореме 10.3 $(-X)^m e^{-\frac{1}{n}X} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$
   (b) $\lim\limits_{t \to 0+} (-X)^m e^{-\frac{1}{n}X} = (-X)^m$ сходится поточечно.
   (c) Тогда по теореме Лебега о мажорируемой сходимости $\lim\limits_{t \to 0+} \frac{d^m}{dt^m}\phi(t) = \lim\limits_{n \to \infty} \int (-X)^m e^{-\frac{1}{n}X} d\mathbb{P} = \int \lim\limits_{n \to \infty} (-X)^m e^{-\frac{1}{n}X} d\mathbb{P} = \int (-X)^m d\mathbb{P}$
7. Базой же индукции является дифференцируемость 0 порядка. Теперь докажем остальные равенства:
8. $M_k = \int X^k d\mathbb{P} = (-1)^k \frac{d^k}{dt^k}\phi_X(t)\Big|_{t=0+}$ поскольку $\lim\limits_{t \to 0+} \frac{d^k}{dt^k}\phi(t) = \int (-X)^k d\mathbb{P} = (-1)^k \int X^k d\mathbb{P} \implies \int X^k d\mathbb{P} = \lim\limits_{t \to 0+} (-1)^k \frac{d^k}{dt^k}\phi(t) = (-1)^k \frac{d^k}{dt^k}\phi_X(t)\Big|_{t=0+}$
9. Разложим функцию в ряд Тейлора в точке $t = 0+$. По условию, функция $\phi_X(t)$ дифференцируема $m$ раз. $\phi_X(t) = \sum_{n=0}^{m} \lim\limits_{t \to 0+} \frac{d^n \phi_X(t)}{dt^2} \frac{t^n}{n!} + o(t^n) = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n M_k \frac{t^n}{n!} + o(t^n)$ из (8)
10. Докажем неравенство (iii)
   (a) Используя (9) $\phi_X(t) = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n M_k \frac{t^n}{n!} + o(t^n) \implies \phi_X(t) \geq \sum_{n=0}^{m} (-1)^n M_k \frac{t^n}{n!} \implies \phi_X(t) - \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^n M_k \frac{t^n}{n!} \geq (-1)^m M_k \frac{t^m}{m!}$

(b) Если $m$ - четна, то $\phi_X(t) - \sum_{n=0}^{m-1}(-1)^n M_k \frac{t^n}{n!} \geq M_k \frac{t^m}{m!}$

(c) Если $m$ - нечетна, то $-\left(\phi_X(t) - \sum_{n=0}^{m-1}(-1)^n M_k \frac{t^n}{n!}\right) \leq M_k \frac{t^m}{m!}$

(d) Комбинируя 10.a.i и 10.a.ii по определению модуля функции, получаем, что $\left|\phi_X(t) - \sum_{n=0}^{m-1}(-1)^n M_k \frac{t^n}{n!}\right| \leq M_k \frac{t^m}{m!} = \frac{t^m}{m!} \int |X|^m d\mathbb{P}\ \forall t > 0$

11. Если $t$ находится в радиусе сходимости, то $\underset{m\to\infty}{lim} \frac{t^m}{m!} \int |X|^m d\mathbb{P} = 0$. Отсюда следует, что $\underset{m\to\infty}{lim} \left|\phi_X(t) - \sum_{n=0}^{m-1}(-1)^n M_k\right.$ $\underset{m\to\infty}{lim} \frac{t^m}{m!} \int |X|^m d\mathbb{P} \implies \underset{m\to\infty}{lim} \left|\phi_X(t) - \sum_{n=0}^{m-1}(-1)^n M_k \frac{t^n}{n!}\right| \leq 0$. Таким образом: $\phi_X(t) = \underset{m\to\infty}{lim} \sum_{n=0}^{m-1}(-1)^n M_k \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n M_k \frac{t^n}{n!}$

12. Ч.Т.Д.

**Задача № 12.33**

Рассмотреть следующие функции: $u(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)$ и $v(x) = \mathbb{1}_{\{n^{-1}:n\in\mathbb{N}\}}(x)$. Доказать или опровергнуть следующие утверждения:

1. Функция $u(x)$ непрерывна всюду за исключением $\mathbb{Q}\cap[0,1]$. Поскольку это нуль множество, следовательно, $u(x)$ интегрируема по Риману по теореме 12.9

2. Функция $v(x)$ равна нулю всюду за исключением $\left\{n^{-1} : n \in \mathbb{N}\right\}$ - счетного множества. Следовательно $v(x)$ интегрируема по Риману по теореме 12.9

3. Функции $u, v \in \mathcal{L}^1(\mu)$ и $\int u d\mu = \int v d\mu = 0$

4. Функция $u(x)$ не интегрируема по Риману.

**Доказательство #1**

1. Пусть $u(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)$

2. Рассмотрим некоторую индикаторную функцию $f(x) = \mathbb{1}_{\{0\}}(x)$. Исследуем ее на непрерывность в точке 0. По определению, функция непрерывна в некоторой $x \in X$, если $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : B_\delta(f(x)) \subset f(B_\epsilon(x))$. Пусть $\epsilon = 0.1$. Тогда $f(B_\epsilon(x)) = f(B_{0.1}(0)) = \{0, 1\}$ из определения $f(x)$. Но, какое бы $\delta > 0$ мы не взяли $B_\delta(f(0)) = B_\delta(1)$ - открытый шар такой что $B_\delta(1) \nsubseteq \{0, 1\}$. Таким образом мы нашли контрпример, и следовательно $\mathbb{1}_{\{0\}}(x)$ не является непрерывной в точке 0.

3. Известен тот факт, что $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ плотно на $[0,1]$. Это означает, что $\forall x \in [0,1]\ \forall \delta > 0 : \exists q \in \mathbb{Q} : q \in B_\delta(x)$. Таким образом, какой бы радиус открытого шара $\delta$ мы бы не взяли, всегда существует некоторый $q \in \mathbb{Q}$, который является элементом этого шара.

4. Мы уже показали на примере в (2), что во всех рациональных точках $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)$ не является непрерывной.

5. Рассмотрим $\mathbb{I} \cap [0,1]$, где $\mathbb{I}$ - иррациональны. Рассмотрим произвольную $x \in \mathbb{I} \cap [0,1]$. Поскольку $\mathbb{Q}$ - плотно на $\mathbb{R}$, какое бы епсилон мы не взяли, всегда получится, что $f(B_\epsilon(x)) = f(B_{0.1}(0)) = \{0, 1\}$. Аналогично аргументу в (2), какое бы дельта мы не взяли $B_\delta(f(x))$ открытый шар такой что $B_\delta(1) \nsubseteq \{0, 1\}$.

6. Комбинируя аргументы в (4) и (5) $u(x)$ является всюду разрывной функцией и следовательно утверждение, указанное в (1) ложное и функция не является непрерывной по Риману.

7. Ч.Т.Д.

**Доказательство #2**

1. Рассмотрим $v(x) = \mathbb{1}_{\{n^{-1}:n\in\mathbb{N}\}}(x)$. Такая функция является всюду не плотной на интервале $(0,1]$. Поскольку это счетное множество, то его мера Лебега равна 0. Следовательно по теореме 12.9 такая функция интегрируема по Риману

**Доказательство #3**

1. Рассмотрим $u(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)$ и $v(x) = \mathbb{1}_{\{n^{-1}:n\in\mathbb{N}\}}(x)$

2. $\int \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} d\mu = \int_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} d\mu = \mu(\mathbb{Q}\cap[0,1]) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(q_i \cap [0,1]) = 0$, где $\forall i \in \mathbb{N} q_i \in \mathbb{Q}$

3. $\int \mathbb{1}_{\{n^{-1}:n\in\mathbb{N}\}} d\mu = \int_{\{n^{-1}:n\in\mathbb{N}\}} d\mu = \mu\left(\left\{n^{-1} : n \in \mathbb{N}\right\}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

4. Следовательно $\int u d\mu = \int v d\mu = 0$

5. Ч.Т.Д.

**Доказательство #4**

1. Поскольку ф-я $u$ всюду разрывна. Следовательно, она не интегрируема по Риману (Доказательство #1 задача 12.33)

2. Ч.Т.Д.

### Задача № 12.34

Сконструировать последовательность функций, которые интегрируемы по Риману, но в пределе сходятся к функции, которая по Риману не интегрируема:

**Решение:**

1. Рассмотрим последовательность функций $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $u_n = \mathbb{1}_{\left\{\bigsqcup_{i=1}^{n} q_i\right\}}$, где $\forall i \in \mathbb{N} q_i \in \mathbb{Q}$. $\forall n \in \mathbb{N}$ множество точек в которых функция $u_n$ разрывна конечно, следовательно, по теореме 12.9 такая функция интегрируема по Риману. Однако $u_\infty = \mathbb{1}_{\left\{\bigsqcup_{i=1}^{\infty} q_i\right\}} = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ - разрывна всюду и, следовательно, по теореме 12.9 такая функция не интегрируема по Риману.

2. Ч.Т.Д.

### Задача № 12.37

Пусть $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ - непрерывна. Так, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = m$ и $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = M$. Показать, что двухсторонний несобственный интеграл Римана:

$$\lim_{r\to\infty; s\to 0} \int_r^s \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = (M - m)\, ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

**Доказательство:**

1. Пусть $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ - непрерывна

2. Положим $\underset{x \to \infty}{lim} f(x) = m$ и $\underset{x \to 0}{lim} f(x) = M$

3. Рассмотрим интеграл: $\underset{r \to \infty; s \to 0}{lim} \int_r^s \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx$ Для простоты будем рассматривать интеграл держа в уме пределы

4. $\int_r^s \frac{f(bx)-f(ax)}{x} dx = \int_r^s \frac{f(bx)}{x} dx - \int_r^s \frac{f(ax)}{x} dx$ - из аддитивности интеграла

5. Рассмотрим $\int_r^s \frac{f(bx)}{x} dx$ и выполним замены при $y = bx$

   (a) $\frac{dy}{dx} = b \implies \frac{dy}{b} = dx$

   (b) $\frac{1}{x} = \frac{b}{y}$

   (c) $f(ax) = f(y)$

   (d) $y_u = bs$ $y_l = br$

   (e) Тогда $\int_r^s \frac{f(bx)}{x} dx = \int_{br}^{bs} \frac{b}{y} f(y) \frac{dy}{b} = \int_{br}^{bs} \frac{f(y)}{y} dy$. Аналогично выполняются замены и для $\int_r^s \frac{f(ax)}{x} dx = \int_{ar}^{as} \frac{f(y)}{y} dy$

6. Из (4) и (5) следует, что $\int_r^s \frac{f(bx)}{x} dx - \int_r^s \frac{f(ax)}{x} dx = \int_{br}^{bs} \frac{f(y)}{y} dy - \int_{ar}^{as} \frac{f(y)}{y} dy$

7. Без потери общности предположим, что $r < s$ $a \leq b$ тогда $\int_{br}^{bs} \frac{f(y)}{y} dy - \int_{ar}^{as} \frac{f(y)}{y} dy = \int_{as}^{bs} \frac{f(y)}{y} dy - \int_{ar}^{br} \frac{f(y)}{y} dy$ при замене пределов интегрирования

8. Тогда из теоремы о среднем значении для интеграла Римана для (7) верно: $\int_{as}^{bs} \frac{f(y)}{y} dy - \int_{ar}^{br} \frac{f(y)}{y} dy = f(\xi_1) \int_{as}^{bs} \frac{1}{y} dy - f(\xi_2) \int_{ar}^{br} \frac{1}{y} dy = [f(\xi_1) - f(\xi_2)] \, ln \left(\frac{b}{a}\right)$

9. Поскольку $\xi_1 \in (as, bs)$, то при $\xi_1 \to 0$ при $s \to 0$. Поскольку $\xi_2 \in (ar, br)$, то при $\xi_1 \to \infty$ при $r \to \infty$. Тогда выражение в (9) представимо как $(M - m) \, ln \left(\frac{b}{a}\right)$ используя условие в (2)

10. Таким образом $\underset{r \to \infty; s \to 0}{lim} \int_r^s \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = (M - m) \, ln \left(\frac{b}{a}\right)$

11. Ч.Т.Д.