Задача 1

Используйте лемму 7.2, чтобы показать, что $x, y \in \mathbb{R}^n$ отображение $\tau_x : y \mapsto y - x$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ - измеримо.

Доказательство:

1. Пусть $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ и $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ измеримы. Чтобы воспользоваться леммой 7.2 необходимо доказать, что $\tau_x^{-1}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Где $\mathcal{F}$- система полуоткрытых интервалов. Тогда по лемме 7.2 следует цель задачи.
2. По определению $\mathcal{F} := \left\{[a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times .... \times [a_n, b_n) : \forall i = \overline{1, n} \wedge a_i, b_i \in \mathbb{R}\right\}$.
3. Легко заметить, что $\tau_x^{-1} : x \mapsto x + y$. Тогда $\tau_x^{-1}(\mathcal{F})$ - смещение всех полуоткрытых интервалов $\mathcal{F}$, что подразумевает включение $\tau_x^{-1}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$. Поскольку обратное включение тоже верно, следовательно $\tau_x^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$
4. По теореме 3.8 имеем, что $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.
5. Из того факта, что $\tau_x^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ и $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, следует, что $\tau_x^{-1}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$
6. Тогда по лемме 7.2 $\tau_x : y \mapsto y - x$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ - измеримо.

Задача 2

Показать, что $\sum' := \left\{A' \subset X' : T^{-1}(A') \in \mathcal{A}\right\}$ - сигма алгебра.

Доказательство:

1. Пусть $A' = X'$. Очевидно, что $X' \subset X'$. По определению T следует, что $T^{-1}(X') = X$. Поскольку $\mathcal{A}$ - сигма алгебра, следовательно $X \in \mathcal{A}$. Поэтому, $X \in \sum'$, что означает, что выполнено $\sum_1$
2. Пусть $A' \in \sum'$.
   (a) По определению $\sum'$ верно, что $T^{-1}(A') \in \mathcal{A}$.
   (b) Пусть $X' - A' \in \sum'$.
   (c) По определению $\sum'$ верно следующее: $T^{-1}(X' - A') \in \mathcal{A}$.
   (d) И свойства (2.6) следует, что $T^{-1}(X' - A') = T^{-1}(X') - T^{-1}(A') \in \mathcal{A}$. Это в свою очередь дополнение к $T^{-1}(A') \in \mathcal{A}$
   (e) Поэтому, выполнено $\sum_2$
3. Пусть $(A'_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \sum'$.
   (a) По определению $\sum'$ верно, что $T^{-1}(A'_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$.
   (b) Поскольку $\mathcal{A}$ - сигма-алгебра, следовательно $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T^{-1}(A'_n)$
   (c) Из (2.6) следует, что $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T^{-1}(A'_n) = T^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A'_n\right) \in \mathcal{A}$
   (d) Поэтому, выполнено $\sum_3$

4. Из (1), (2) и (3) $\sum'$ - сигма алгебра
5. Ч.Т.Д.

Задача 3

Пусть $X = \mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$. Показать, что

- $\mathcal{A} := \{A \subset \mathbb{Z} | \forall n > 0 : 2n \in A \Longleftrightarrow 2n+1 \in A\}$ - σ - алгебра.

Доказательство:

1. По условию $X = \mathbb{Z}$ - единица сигма алгебры. Следовательно, выполнено $\sum_1$
2. Утверждение $2n \notin A \Longleftrightarrow 2n+1 \notin A$ из таблицы истинности эквивалентности тоже верно. Это тоже самое, что $2n \in A^c \Longleftrightarrow 2n+1 \in A^c$. Поэтому выполнено $\sum_2$
3. Предположим, что $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$. Рассмотрим $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$. Мы предполагаем, что $\exists i \in \mathbb{N} : 2n \in A_i$. Зафиксируем такой существующий i_0. Тогда $2n+1 \in A_{i_0}$поскольку для всех $i \in \mathbb{N}$ выполняется эквивалентность из определения $\mathcal{A}$. Доказателство в обратную сторону эквивалентности аналогично. Поэтому $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \subset \mathcal{A}$, то есть выполнено $\sum_3$
4. Ч.Т.Д.

- Показать, что $T : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, T(n) := n+2$ $\mathcal{A}/\mathcal{A}$ измеримо и биективно. Но T^{-1} - не измеримо

Доказательство:

1. Пусто

Задача 4

Пусть X множество. Пусть $(X_i, \mathcal{A}_i)$ $i \in I$ - произвольно много измеримых пространств и пусть $T_i : X \to X_i$ - семейство отображений.

- Показать, что для каждого $i \in I$ наименьшая σ - алгебра на X, которая делает T_i - измеримым задана как $T_i^{-1}(\mathcal{A}_i)$.

Доказательство:

1. По условию для каждого $i \in I$ имеется отображение $T_i : (X, \mathcal{A}) \to (X, \mathcal{A}_i)$.
2. Из примера 3.3 (vii) прообраз $T_i^{-1}(\mathcal{A}_i)$ сигма алгебры $\mathcal{A}_i$ снова сигма алгебра.
3. Из определения 7.1 $T_i^{-1}(\mathcal{A}_i) \subset \mathcal{A}$. Поскольку $\mathcal{A}$ произволен, то по определению 3.4 $T_i^{-1}(\mathcal{A}_i)$ - минимальна

4. Ч.Т.Д.

- Показать, что $\sigma\left(\bigcup_{i\in I} T_i^{-1}\left(\mathcal{A}_i\right)\right)$ - наименьшая сигма-алгебра на X, который делает $T_i, i\in I$ измеримыми одновременно.

Доказательство:

1. Пусто

Задача 5

Пусть $(X,\mathcal{A})$ и $(X',\mathcal{A}')$ - измеримые пространства и $T: X \to X'$

- Показать, что $\forall x \in X$ $1_{T^{-1}(A')}\left(x\right) = 1_{A'} \circ T\left(x\right)$

Доказательство:

1. Пусть $x \in X$
2. Можно $1_{A'} \circ T\left(x\right)$ представить как $1_{A'}\left(T\left(x\right)\right) = \begin{cases} 1, T\left(x\right) \in A' \\ 0, T\left(x\right) \notin A' \end{cases}$
3. По определению $1_{T^{-1}(A')}\left(x\right) := \begin{cases} 1, x \in T^{-1}\left(A'\right) \\ 0, x \notin T^{-1}\left(A'\right) \end{cases}$
4. По определению $T^{-1}\left(A'\right) := \{x \in X : T(x) \in A'\}$. Это означает, что $x \in T^{-1}\left(A'\right)$, тогда и только тогда, когда $T\left(x\right) \in A'$
5. Поэтому $1_{T^{-1}(A')}\left(x\right) = 1_{A'} \circ T\left(x\right)$
6. Ч.Т.Д.

- T измеримо тогда и только тогда, когда $\sigma\left(T\right) \subset \mathcal{A}$

Доказательство:

1. С одной стороны.
   (a) Предположим T измеримо. По определению 7.1 это означает, что $\forall A' \in \mathcal{A}'$ $T^{-1}\left(A'\right) \in \mathcal{A}$.
   (b) Из (a) следует, что $\sigma\left(T\right) = \sigma\left(\left\{T^{-1}\left(A'\right) \in \mathcal{A} : A' \in \mathcal{A}'\right\}\right) \subset \sigma\left(\mathcal{A}\right)$
   (c) Известен тот факт, что $\sigma\left(\mathcal{A}\right) = \mathcal{A}$
   (d) Тогда из (b) и (c) $\sigma\left(T\right) \subset \mathcal{A}$
2. С другой стороны.
   (a) Предположим $\sigma\left(T\right) \subset \mathcal{A}$.
   (b) Поскольку $\sigma\left(T\right) = \sigma\left(\left\{T^{-1}\left(A'\right) \in \mathcal{A} : A' \in \mathcal{A}'\right\}\right)$ поэтому по определению 7.1 отображение T измеримо
3. Ч.Т.Д.

- Если T - измеримо и ν - конечная мера на $(X, \mathcal{A})$, тогда $\nu \circ T^{-1}$ - конечная мера на $(X', \mathcal{A}')$. Верно ли это утверждение для сигма конечной меры?

Доказательство:

1. Пусто

Задача 6

Пусть $T : X \to Y$ произвольное отображение. Показать, что $T^{-1}(\sigma(\mathcal{G})) = \sigma\left(T^{-1}(\mathcal{G})\right)$ выполняется для произвольного семейства $\mathcal{G}$ подмножеств Y.
Доказательство:

1. С одной стороны $T^{-1}(\sigma(\mathcal{G})) \subset \sigma\left(T^{-1}(\mathcal{G})\right)$
   (a) Пусть $\sum := \left\{G \in \sigma(\mathcal{G}) : T^{-1}(G) \in \sigma\left(T^{-1}(G)\right)\right\}$. Можно заметить, что это сигма алгебра
   (b) По определению в (a) $\mathcal{G} \subset \sum \subset \sigma(\mathcal{G})$.
   (c) Поскольку $\sigma(\mathcal{G})$ - минимальная то из (b) следует, что $\sum = \sigma(\mathcal{G})$
   (d) Поэтому $T^{-1}(\sigma(\mathcal{G})) \subset \sigma\left(T^{-1}(G)\right)$
2. С другой стороны
   (a) Пусть $\mathcal{G}$ генератор $\sigma(\mathcal{G})$. По определению минимальной сигма алгебры $\mathcal{G} \subset \sigma(\mathcal{G})$
   (b) Можно заметить, что $T^{-1}(\mathcal{G}) \subset T^{-1}(\sigma(\mathcal{G}))$
   (c) Из (b) следует, что $\sigma\left(T^{-1}(\mathcal{G})\right) \subset \sigma\left(T^{-1}(\sigma(\mathcal{G}))\right) = T^{-1}(\sigma(\mathcal{G}))$
   (d) Поэтому $\sigma\left(T^{-1}(\mathcal{G})\right) \subset T^{-1}(\sigma(\mathcal{G}))$
3. Из (1) и (2) следует, что $T^{-1}(\sigma(\mathcal{G})) = \sigma\left(T^{-1}(\mathcal{G})\right)$
4. Ч.Т.Д.

Задача 7

Пусть X - множество. Пусть $(X_i, \mathcal{A}_i)$ $i \in I$ произвольно много измеримых пространств и пусть $T_i : X \to X_i$ семейство отображений. Показать, что отображение f из измеримого пространства $(F, \mathcal{F})$ в пространство $(X, \sigma(T_i : i \in I))$ измеримо тогда и только тогда, когда $T_i \circ f$ $\mathcal{F}/\mathcal{A}_i$ - измеримо.

1. С одной стороны.
   (a) Предположим $i \in I$ и $(X_i, \mathcal{A}_i)$ измеримые пространства.
   (b) Пусть $T_i : X \to X_i$ семейство отображений. Такое отображени $\sigma(T_i : i \in I) / \mathcal{A}_i$ измеримо для каждого $i \in I$
   (c) Пусть f - отображением из измеримого $(F, \mathcal{F})$ в измеримое $(X, \sigma(T_i : i \in I))$. Такое отображение $\mathcal{F}/\sigma(T_i : i \in I)$ измеримо.

   (d) Из (b) и (c) по теореме 7.4 $T_i \circ f$ $\mathcal{F}/\mathcal{A}_i$ - измеримо.

2. С другой стороны.
   (a) Предположим $i \in I$ и $(X_i, \mathcal{A}_i)$ измеримые пространства.
   (b) Пусть $T_i : X \to X_i$ семейство отображений. Такое отображени $\sigma(T_i : i \in I) / \mathcal{A}_i$ измеримо для каждого $i \in I$
   (c) Пусть $T_i \circ f$ композиция отображений, которая $\forall i \in I, \mathcal{F}/\mathcal{A}_i$ - измерима. Это означает, что $(F, \mathcal{F})$ и $(X_i, \mathcal{A}_i)$ - измеримы.
   (d) По определению $(X, \sigma(T_i : i \in I))$ - измеримо.
   (e) Тогда $f : (F, \mathcal{F}) \to (X, \sigma(T_i : i \in I))$ легко видеть, что по определению 7.1 f измеримое отображение
3. Ч.Т.Д.

Задача 8

Показать, что $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x \mapsto (f_1(x), ..., f_m(x))$ измеримо тогда и только тогда, когда все отображения $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., m$ - измеримы.
Доказательство:

1. С одной стороны.
2. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x \mapsto (f_1(x), ..., f_m(x))$ - измеримое отображение.
3. Покажем, $\forall i = \overline{1, n}$, что координатные проекции $x = (x_1, ..., x_n) \mapsto x_i$ - измеримы.

Задача 10

Доказать, что $\lambda^n(t \cdot B) = t^n \lambda^n(B)$ $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\forall t > 0$ используя определение образа меры под действием отображения.
Доказательство:

1. Пусть $f_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, B \mapsto t \cdot B$. Отсюда следует, что $f_{1/t} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, t^{-1}x \mapsto x$
2. Пусть $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\forall t > 0$
3. $f_t(B) = tB$, $f_{1/t}(t^{-1}B) = B$, $f_{1/t}^{-1}(B) = tB$
4. $f_t = f_{1/t}^{-1}$ $f_{1/t} = f_t^{-1}$

Задача 11

Пусть $(X, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ и пусть λ - одномерная мера Лебега.

- Точка x, где $\mu\{x\} > 0$ - атом. Показать, что каждая мера μ на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, которая не имеет атомов, может быть представлена как образ меры под действием отображения.

Доказательство:

1. Пусто