



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н. Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

---

ФАКУЛЬТЕТ \_\_\_\_\_ Фундаментальные науки

КАФЕДРА \_\_\_\_\_ Прикладная математика

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА  
*К КУРСОВОЙ РАБОТЕ*  
*НА ТЕМУ:*

*Численное моделирование  
напряженно-деформированного  
состояния твердого тела*

Студент \_\_\_\_\_  
ФН2-62Б  
(Группа)

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

Г.А. Швецов  
\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

М.П. Галанин  
\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

2023 г.

## Оглавление

<b>Введение</b> . . . . .	3
<b>1. Постановка задачи</b> . . . . .	4
1.1. Тензор малых деформаций Коши . . . . .	4
1.2. Соотношение Дюамеля — Неймана . . . . .	4
1.3. Уравнения равновесия . . . . .	5
1.4. Граничные условия . . . . .	5
<b>2. Конечноэлементная постановка задачи</b> . . . . .	6
2.1. Слабая постановка задачи . . . . .	6
2.2. Метод конечных элементов . . . . .	8
<b>3. Тестовый расчет</b> . . . . .	9
3.1. Исходные данные . . . . .	9
3.2. Численный анализ . . . . .	10
3.3. Линейная (несвязная) термоупругая задача . . . . .	12
<b>4. Разрушение топливных таблеток</b> . . . . .	15
4.1. Модель размазанных трещин . . . . .	15
4.2. Математическая модель . . . . .	15
4.3. Образование радиальных и полярных трещин . . . . .	17
<b>Заключение</b> . . . . .	19
<b>Список использованных источников</b> . . . . .	20

## Введение

При создании и проектировании различных конструкций ставят задачу об их надежности при различных условиях. Для этого необходимы обширные знания из теории упругости. Особый интерес таких задач заключается в предсказании различных сценариев развития разрушения, оценки прочности, определении времени разрушения. Анализ прочности конструкций является проблемой, которая не теряет свою актуальность.

Один из важных подразделов теории упругости — *теория термоупругости*. Она связана с процессом деформирования тела при нестационарном неравномерном нагреве. Тепловое расширение в общем случае не может происходить свободно в сплошном теле, оно вызывает тепловые напряжения. Знание величины и характера действия тепловых напряжений необходимо для всестороннего анализа прочности результатов [1].

Интересная и актуальная задача из данной области — это задача разрушения топливных таблеток в ядерных реакторах, которые располагаются внутри герметично закрытых тепловыделяющих элементов, которые называют ТВЭЛами [2].

*Метод конечных элементов* (МКЭ) является одним из самых распространенных методов решения прикладных задач, в том числе задач теории упругости. Данный метод является мощным средством приближенного решения дифференциальных уравнений, описывающих различные физические процессы. Именно его мы и будем использовать в данной работе [3].

Цель данной работы — рассмотрение двумерной (плоской) задачи термоупругости, построение конечно-элементного алгоритма для нахождения решения на треугольной сетке, а также визуализация и графическое представление результатов.

# 1. Постановка задачи

Введем обозначения:

$\mathbf{u} = (u_x, u_y)$  – вектор перемещения;

$u_x, u_y$  – перемещения в направлении осей координат  $x, y$ ;

$f_x, f_y$  – плотности объемных сил в направлении осей.

## 1.1. Тензор малых деформаций Коши

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \\ \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right). \end{cases} \quad (1.1)$$

## 1.2. Соотношение Дюамеля — Неймана

Соотношение Дюамеля — Неймана выглядит следующим образом<sup>1</sup>

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^T), \quad i, j, k, l = x, y, \quad (1.2)$$

где  $\varepsilon_{kl}^T$  — компоненты тензора температурных деформаций. Для большинства конструкционных материалов температурная деформация  $\varepsilon_{kl}^T$  является пропорциональной изменению температуры  $\Delta T$ , т.е.

$$\hat{\varepsilon}^T = \hat{\alpha} \Delta T = \hat{\alpha} (T(x, y, t) - T_0),$$

где  $\hat{\alpha}$  — тензор теплового расширения (в общем случае тензор 2 ранга),  $\Delta T = T(x, y, t) - T_0$  — приращение температуры относительно уровня нулевых деформаций [4].

Будем рассматривать линейно-упругую **изотропную**<sup>2</sup> среду. Тензор упругости для изотропного материала: упругие свойства определяются постоянными Ламэ  $\lambda$  и  $\mu$ :

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (1.3)$$

где  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

<sup>1</sup> Здесь и далее предполагается суммирование по повторяющимся индексам.

<sup>2</sup> Изотропия — неизменность свойств среды во всех направлениях.

Возвращаясь к выражению (1.2), закон Дюамеля — Неймана для плоского случая будет иметь вид

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu)(\varepsilon_{xx} - \alpha_{xx}^T \Delta T) + \lambda(\varepsilon_{yy} - \alpha_{yy}^T \Delta T), \\ \sigma_{yy} = \lambda(\varepsilon_{xx} - \alpha_{xx}^T \Delta T) + (\lambda + 2\mu)(\varepsilon_{yy} - \alpha_{yy}^T \Delta T), \\ \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 2\mu(\varepsilon_{xy} - \alpha_{xy}^T \Delta T) = 2\mu(\varepsilon_{yx} - \alpha_{yx}^T \Delta T). \end{cases} \quad (1.4)$$

или в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \frac{1}{2}\sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} - \alpha_{xx}^T \Delta T \\ \varepsilon_{yy} - \alpha_{yy}^T \Delta T \\ \varepsilon_{xy} - \alpha_{xy}^T \Delta T \end{pmatrix}$$

### 1.3. Уравнения равновесия

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + f_x = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = 0, \end{cases} \quad (1.5)$$

где  $f_x, f_y$  — массовые силы.

### 1.4. Граничные условия

Границу  $\Gamma$  представим в виде объединения двух частей  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ .

Граничное условие Дирихле на  $\Gamma_D$  (кинематические граничные условия) может быть записано в виде

$$Mu = w,$$

где  $M$  — матрица размером  $2 \times 2$ .

Кинематические граничные условия

$$\begin{cases} u_x(x, y, t) = \tilde{u}_x(x, y, t), \\ u_y(x, y, t) = \tilde{u}_y(x, y, t). \end{cases} \quad (1.6)$$

Граничное условие второго рода (силовое граничное условие) может быть записано в виде

$$\sigma(x, y)\vec{n}(x, y) = \vec{p}(x, y), \quad (1.7)$$

где  $p$  — заданный вектор нормальных напряжений,  $n$  — вектор единичной нормали к границе области [5].

## 2. Конечноэлементная постановка задачи

Выберем прямоугольную область  $\Omega = [a, b] \times [c, d]$  так, чтобы левый нижний угол совпадал с началом координат  $a = 0, c = 0$  (см. рис. 1). Будем решать уравнения равновесия (1.5) в нашей области.

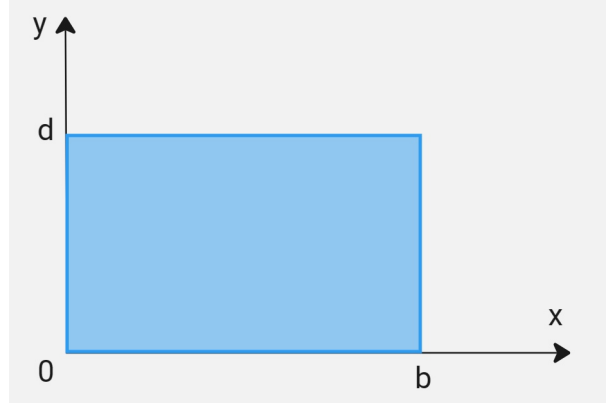


Рис. 1. Область  $\Omega$

### 2.1. Слабая постановка задачи

Пусть  $v = v(x)$  — гладкая функция, удовлетворяющая граничным условиям (1.6), (1.7). Домножим на  $v$  и проинтегрируем по области  $\Omega$  уравнения (1.5):

$$\begin{cases} \int_{\Omega} v \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + f_x \right) d\Omega = 0, \\ \int_{\Omega} v \left( \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y \right) d\Omega = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Проинтегрируем первое уравнение (2.1) по частям:

$$\int_{\Omega} v \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + f_x \right) d\Omega = \int_{\Omega} v \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} v \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} d\Omega + \int_{\Omega} v f_x d\Omega = 0.$$

С учетом того, что  $d\Omega = dxdy$ ,  $0 \leq x \leq b$ ,  $0 \leq y \leq d$ , получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^d dy \int_0^b v \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx + \int_0^b dx \int_0^d v \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dy + \int_{\Omega} v f_x d\Omega = \\ & = \int_0^d \left( v \sigma_{xx} \Big|_0^b - \int_0^b v_x \sigma_{xx} dx \right) dy + \int_0^b \left( v \sigma_{yx} \Big|_0^d - \int_0^d v_y \sigma_{yx} dy \right) dx + \int_{\Omega} v f_x d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Подставим уравнения (1.4) из закона Гука в (2.2):

$$\begin{aligned}
& \int_0^d \left( v \left( (\lambda + 2\mu)(\varepsilon_{xx} - \alpha_{xx}^T \Delta T) + \lambda(\varepsilon_{yy} - \alpha_{yy}^T \Delta T) \right) \right) \Big|_0^b - \\
& - \int_0^b v_x \left( (\lambda + 2\mu)(\varepsilon_{xx} - \alpha_{xx}^T \Delta T) + \lambda(\varepsilon_{yy} - \alpha_{yy}^T \Delta T) \right) dx dy + \\
& + \int_0^b \left( 2\mu v(\varepsilon_{yx} - \alpha_{yx}^T \Delta T) \right) \Big|_0^d - \int_0^d 2\mu v_y(\varepsilon_{yx} - \alpha_{yx}^T \Delta T) dy dx + \\
& + \int_{\Omega} v f_x d\Omega = 0. \quad (2.3)
\end{aligned}$$

Подставим уравнения (1.1) в (2.3):

$$\begin{aligned}
& \int_0^d \left( v \left( (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} - \alpha_{xx}^T \Delta T \right) + \lambda \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} - \alpha_{yy}^T \Delta T \right) \right) \right) \Big|_0^b - \\
& - \int_0^b v_x \left( (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} - \alpha_{xx}^T \Delta T \right) + \lambda \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} - \alpha_{yy}^T \Delta T \right) \right) dx dy + \\
& + \int_0^b \left( \mu v \left( \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) - \alpha_{yx}^T \Delta T \right) \right) \Big|_0^d - \int_0^d \mu v_y \left( \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) - \alpha_{yx}^T \Delta T \right) dy dx + \\
& + \int_{\Omega} v f_x d\Omega = 0. \quad (2.4)
\end{aligned}$$

Таким образом, от исходной задачи (1.1)–(1.7) приходим к слабой постановке задачи: определить  $u \in V$ , такое, что

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \varepsilon(v) : \mathbb{C} : \varepsilon(u) d\Omega &= \int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\Gamma_N} p v dS, \quad v \in V_D, \\
Mu &= w \text{ на } \Gamma_D,
\end{aligned}$$

где  $V$  — пространство достаточно гладких векторных полей, а пространство  $V_D$  определено как

$$V_D = \{v \in V : Mv = 0 \text{ на } \Gamma_D\}.$$

Аппроксимируем приведенную задачу методом Галеркина [5].

## 2.2. Метод конечных элементов

Представим расчетную область  $\Omega$  в виде объединения треугольных подобластей  $\Omega = \sum_{p=1}^N \Omega_p$ ,  $N$  — количество элементов, т.е. построим *триангуляцию* области  $\Omega$ .

Выберем пространство пробных функций, состоящее из финитных функций  $\phi_{pm}$ ,  $p = 1, \dots, N$ ,  $m = 1, 2, 3$ . Будем аппроксимировать поле перемещений функциями из данного пространства. Представим решение в следующем виде:

$$\begin{cases} u_x = \sum_{p=1}^N \sum_{m=1}^3 u_p^{(x)} \phi_{pm}, \\ u_y = \sum_{p=1}^N \sum_{m=1}^3 u_p^{(y)} \phi_{pm}, \end{cases} \quad (2.5)$$

где  $u_p^{(x)}$ ,  $u_p^{(y)}$  — неизвестные весовые коэффициенты.

В качестве финитных функций (функций формы) выберем следующие:

$$\phi_{pm} = \begin{cases} N_{pm} = \frac{1}{\Delta} (a_{pm} + b_{pm}x + c_{pm}y), \\ a_{pm} = x_{qm}y_{rm} - x_{rm}y_{qm}, \\ b_{pm} = y_{qm} - y_{rm}, \\ c_{pm} = x_{rm} - x_{qm}, \\ \Delta = (x_{qm} - x_p)(y_{rm} - y_p) - (x_{rm} - x_p)(y_{qm} - y_p). \end{cases}$$

Подставив (2.5) в (2.4) получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^d \int_0^b \left( \frac{\partial \phi_m}{\partial x} (\lambda + 2\mu) \left( u_p^{(x)} \frac{\partial \phi_p}{\partial x} - \alpha_{xx}^T \Delta T \right) + \frac{\partial \phi_m}{\partial x} \lambda \left( u_p^{(y)} \frac{\partial \phi_p}{\partial y} - \alpha_{yy}^T \Delta T \right) + \right. \\ & \quad \left. \mu \frac{\partial \phi_m}{\partial y} \left( u_p^{(x)} \frac{\partial \phi_p}{\partial y} + u_p^{(y)} \frac{\partial \phi_p}{\partial x} \right) - \mu \frac{\partial \phi_m}{\partial y} \alpha_{yx}^T \Delta T \right) dx dy = \\ & = \int_0^d \left( \phi_m (\lambda + 2\mu) \left( u_p^{(x)} \frac{\partial \phi_p}{\partial x} - \alpha_{xx}^T \Delta T \right) + \phi_m \lambda \left( u_p^{(y)} \frac{\partial \phi_p}{\partial y} - \alpha_{yy}^T \Delta T \right) \right) \Big|_0^b dy + \\ & \quad + \int_0^b \left( \mu \phi_m \left( u_p^{(x)} \frac{\partial \phi_p}{\partial y} + u_p^{(y)} \frac{\partial \phi_p}{\partial x} \right) - \mu \phi_m \alpha_{yx}^T \Delta T \right) \Big|_0^d dx + \int_{\Omega} \phi_m f_x d\Omega. \quad (2.6) \end{aligned}$$



Аналогично получаем для второго уравнения равновесия (2.1)

$$\begin{aligned}
& \int_0^d \int_0^b \left( \frac{\partial \phi_m}{\partial x} \mu \left( u_p^{(x)} \frac{\partial \phi_p}{\partial y} + u_p^{(y)} \frac{\partial \phi_p}{\partial x} \right) - 2 \frac{\partial \phi_m}{\partial x} \mu \alpha_{xy}^T \Delta T + \right. \\
& \quad \left. + \lambda \frac{\partial \phi_m}{\partial y} \left( u_p^{(x)} \frac{\partial \phi_p}{\partial x} - \alpha_{xx}^T \Delta T \right) + \frac{\partial \phi_m}{\partial y} (\lambda + 2\mu) \left( u_p^{(y)} \frac{\partial \phi_p}{\partial y} - \alpha_{yy}^T \Delta T \right) \right) dy dx = \\
& \quad = \int_0^d \left( \phi_m \mu \left( u_p^{(x)} \frac{\partial \phi_p}{\partial y} + u_p^{(y)} \frac{\partial \phi_p}{\partial x} \right) - 2 \phi_m \mu \alpha_{xy}^T \Delta T \right) \Big|_0^b dy + \\
& \quad + \int_0^b \left( \phi_m \lambda \left( u_p^{(x)} \frac{\partial \phi_p}{\partial x} - \alpha_{xx}^T \Delta T \right) + \phi_m (\lambda + 2\mu) \left( u_p^{(y)} \frac{\partial \phi_p}{\partial y} - \alpha_{yy}^T \Delta T \right) \right) \Big|_0^d dx + \int_{\Omega} \phi_m f_y d\Omega.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Уравнения (2.6) и (2.7) приведены к виду

$$\sum_{p=1}^N \left( \int_{\Omega} \varepsilon(\phi_m) : \mathbb{C} : \varepsilon(\phi_p) d\Omega \right) u_p = \int_{\Omega} f \phi_m d\Omega + \int_{\Gamma_N} p \phi_m dS,$$

или в матричном виде  $Au_h = F$ , где

$$A_{pm} = \int_{\Omega} \varepsilon(\phi_m) : \mathbb{C} : \varepsilon(\phi_p) d\Omega, \quad F_m = \int_{\Omega} f \phi_m d\Omega + \int_{\Gamma_N} p \phi_m dS, \quad m, p = \overline{1, N}.$$

### 3. Тестовый расчет

#### 3.1. Исходные данные

Возьмем область (пластинку) с параметрами  $b = 8$  мм,  $d = 8$  мм. Для численного анализа метода конечных элементов (МКЭ) зададим произвольное аналитическое решение задачи  $u(x, y)$  и найдем из уравнений (1.1), (1.4) и (1.5) плотности массовых сил  $f_x, f_y$ .

Физические характеристики диоксида урана  $\text{UO}_2$ :

- модуль Юнга  $E = 1,75 \cdot 10^{11}$  Па;
- коэффициент Пуассона  $\nu = 0,316$ ;
- плотность  $\rho = 10800$  кг/м<sup>3</sup>;
- удельная теплоемкость  $c_\varepsilon = 310$  Дж/(кг·К);
- теплопроводность  $\lambda = 3,487$  Вт/(м·К);
- предел прочности напряжений  $\sigma_f = 1,1 \cdot 10^8$  Па;
- коэффициент теплового расширения  $\alpha = 10^{-5}$  К<sup>-1</sup>;
- температура естественного состояния  $T_{ref} = 300$  К.

### 3.2. Численный анализ

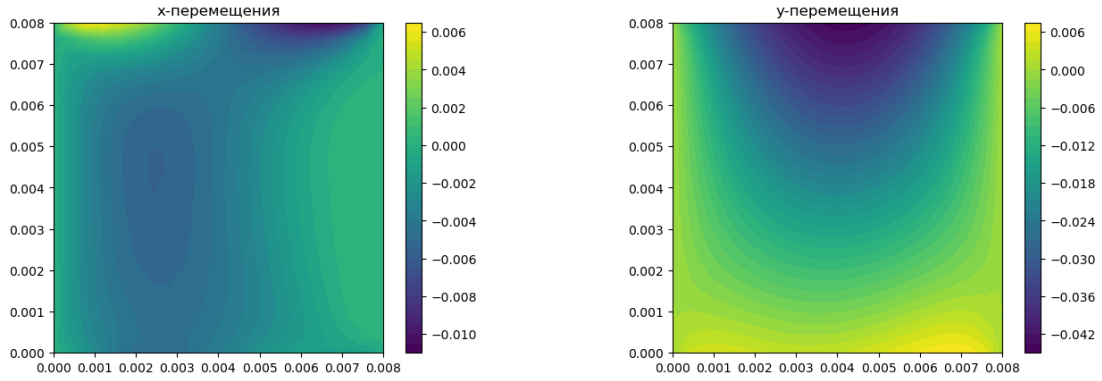


Рис. 2. Перемещения

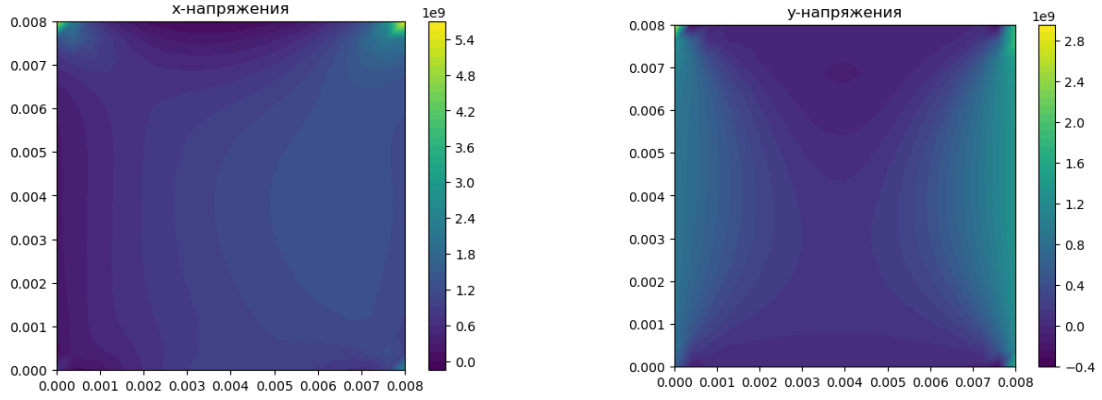


Рис. 3. Напряжения

Таблица 1. Порядок сходимости

Параметры сетки	$\text{AbsErr}_C$	$\Delta_C$	$\text{AbsErr}_{L_2}$	$\Delta_{L_2}$
$\mathbf{u} = (xy; xy), \quad T(x, y) = x^2 + y^2$				
Количество узлов: 9 Количество элементов: 8 Количество граничных узлов: 8	1.918e-06		8.750e-07	
Количество узлов: 25 Количество элементов: 32 Количество граничных узлов: 16	2.979e-07	6.4384	1.878e-07	4.6592
Количество узлов: 81 Количество элементов: 128 Количество граничных узлов: 32	7.7783e-08	3.8300	3.7796e-08	4.6695
Количество узлов: 289 Количество элементов: 512 Количество граничных узлов: 64	1.981e-08	3.9106	1.0510e-08	3.5956

В таблице приведены ошибки в нормах  $\|\cdot\|_C$  и  $\|\cdot\|_{L_2}$ ,  $\text{AbsErr}$  — абсолютная ошибка,  $\Delta$  — модуль отношения ошибок на двух соседних сетках.

В качестве функции температуры возьмем:

$$T(x, y) = -1000 \sqrt{\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2}$$

Таблица 2. Порядок сходимости

Параметры сетки	AbsErr <sub>C</sub>	Δ <sub>C</sub>	AbsErr <sub>L<sub>2</sub></sub>	Δ <sub>L<sub>2</sub></sub>
<b>u = (e<sup>x<sup>2</sup>+y<sup>2</sup></sup>; tanh(xy))</b>				
Количество узлов: 5 Количество элементов: 4 Количество граничных узлов: 4	1.9320e-06		8.6403e-07	
Количество узлов: 12 Количество элементов: 14 Количество граничных узлов: 8	2.8491e-07	6.7812	1.4671e-07	5.8893
Количество узлов: 36 Количество элементов: 54 Количество граничных узлов: 16	7.7783e-08	3.6629	3.7796e-08	3.88172
Количество узлов: 136 Количество элементов: 238 Количество граничных узлов: 32	2.0339e-08	3.8244	1.0721e-08	3.5255
Количество узлов: 509 Количество элементов: 952 Количество граничных узлов: 64	6.3894e-09	3.6139	3.2510e-09	3.6250
<b>u = (y<sup>2</sup>e<sup>x</sup>; cos(xy) + sin(xy))</b>				
Количество узлов: 5 Количество элементов: 4 Количество граничных узлов: 4	2.0485e-06		9.1612e-07	
Количество узлов: 12 Количество элементов: 14 Количество граничных узлов: 8	3.2178e-07	6.3660	1.8426e-07	4.9718
Количество узлов: 36 Количество элементов: 54 Количество граничных узлов: 16	9.9139e-08	3.2458	4.9698e-08	3.7077
Количество узлов: 136 Количество элементов: 238 Количество граничных узлов: 32	2.3091e-08	4.2934	1.1785e-08	4.2170
Количество узлов: 509 Количество элементов: 952 Количество граничных узлов: 64	6.3894e-09	3.6139	3.2510e-09	3.6320

В качестве конечных элементов выбраны стандартные линейные лагранжевы элементы. Из результатов видно, что сходимость схемы со вторым порядком точности.

### 3.3. Линейная (несвязная) термоупругая задача

В качестве постановки задачи для термоупругости также можно добавить уравнение теплопроводности без *термомеханической связности* для изотропного тела:

$$\rho c_\epsilon \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + f \quad \Leftrightarrow \quad \rho c_\epsilon \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda \text{grad } T) + f,$$

Для стационарного случая получим эллиптическое уравнение

$$-\text{div}(\lambda \text{grad } T) = f \quad (3.1)$$

В постоянном режиме температурное поле отделено от механических полей, а последние зависят от температуры из-за наличия тепловых деформаций.

Рассмотрим стационарный режим и положим  $f = 0$ . Пусть верхняя и нижняя стороны пластинки находится по температурой  $T_{ref}$ , а боковые стороны зажаты и их нагревают на  $\Delta T = 100$  К.

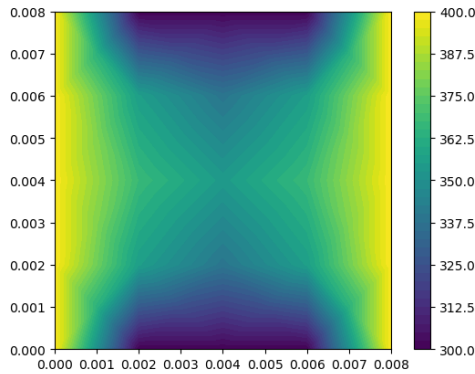


Рис. 4. Температурное поле

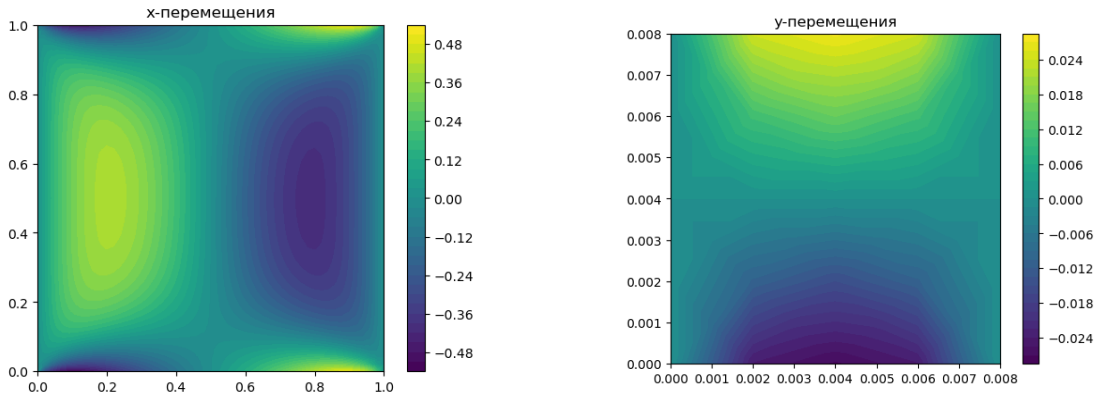


Рис. 5. Перемещения

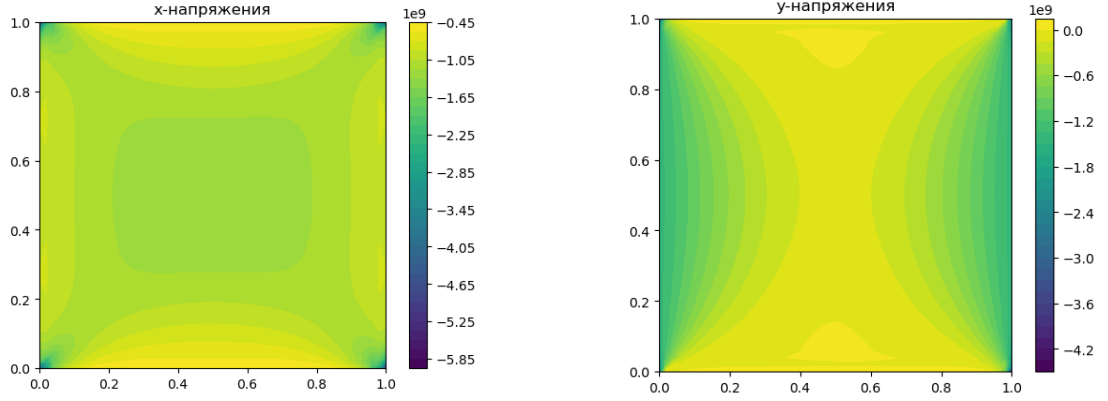


Рис. 6. Напряжения

Рассмотрим нестационарную задачу и положим  $f = 0$ .

$$\rho c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T),$$

Для дискретизации по времени воспользуемся методом конечных разностей. Временной интервал разобьем на  $M + 1$  слоев с шагом  $\tau = \frac{T_f}{M}$ . На каждом из них будем решать стационарную задачу теории упругости с учетом температуры.

Параметры задачи:

$$T(x, y, 0) = T_{ref},$$

$$T(0, y, t) = T(b, y, t) = T_{ref},$$

$$T(x, 0, t) = T(x, d, t) = 400 \text{ K},$$

$$u(0, y, t) = u(d, 0, t) = 0,$$

$$T_f = 10 \text{ с}, \quad M = 10.$$

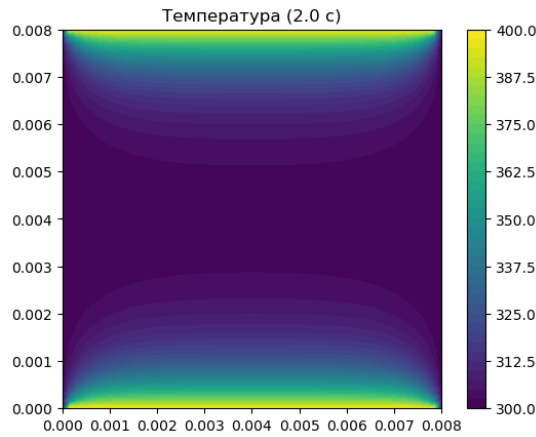


Рис. 7. Температурное поле

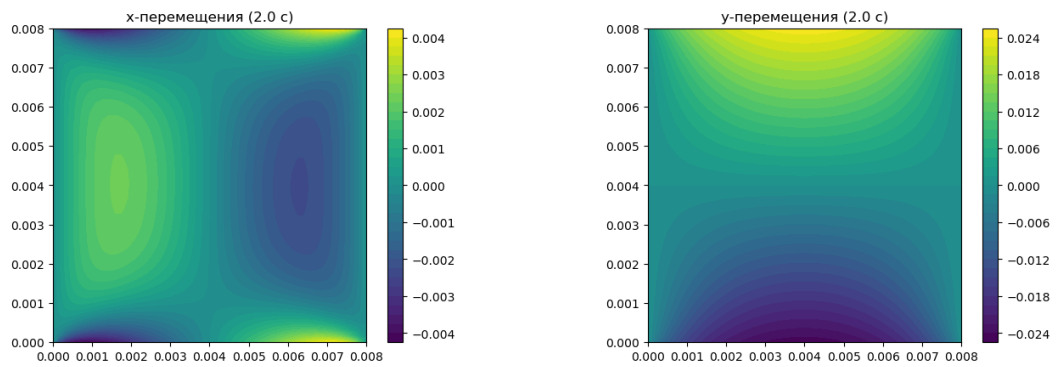


Рис. 8. Перемещения

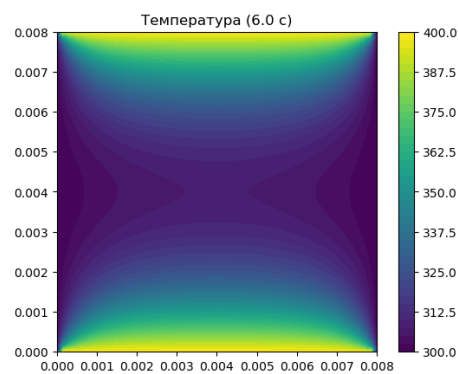


Рис. 9. Температурное поле

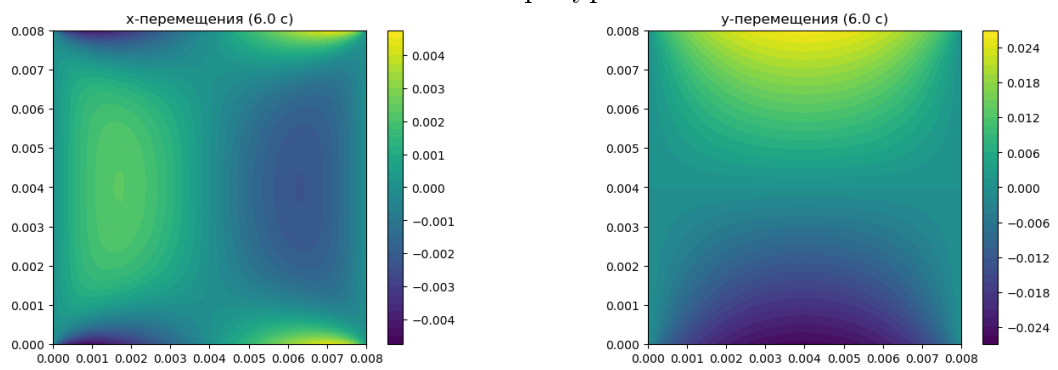


Рис. 10. Перемещения

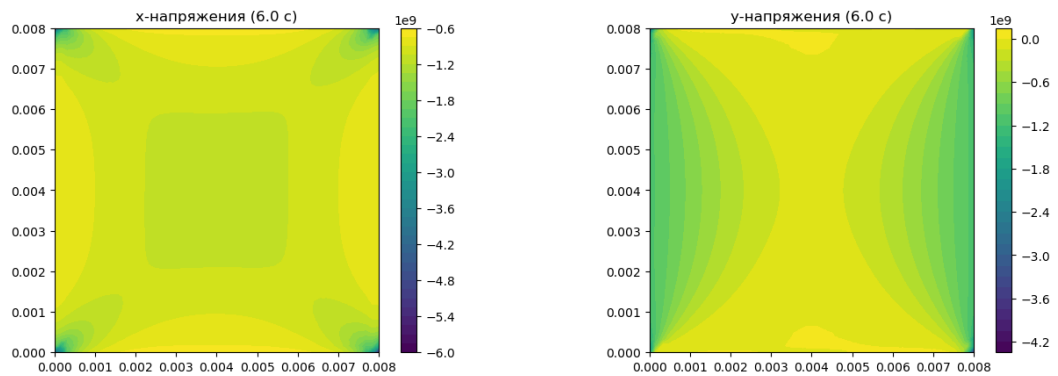


Рис. 11. Напряжения

## 4. Разрушение топливных таблеток

### 4.1. Модель размазанных трещин

Для моделирования разрушения топливных таблеток из диоксида урана ( $\text{UO}_2$ ) применяют подход размазанных трещин [5].

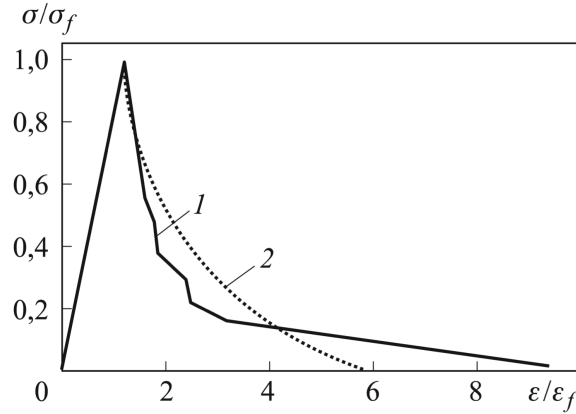


Рис. 12. Экспериментальная (1) и аналитическая (2) кривые нормализованного растягивающего отклика для керамических материалов

На рис. 12 видно, что пока напряжение меньше предела прочности  $\sigma < \sigma_f$  и деформации меньше соответствующего значения  $\varepsilon < \varepsilon_f$ , материал ведет себя, как линейно-упругий, а затем происходит разгрузка по нелинейному закону. При достижении предельного значения прочности  $\sigma_f$  происходит инициализация трещины. Она формируется лишь после достижения значений деформаций, превышающих  $\varepsilon_f$  в 5–10 раз. Кривую, имеющую данный характер поведения, можно аппроксимировать в следующем виде:

$$\frac{\sigma}{\sigma_f} = A + B e^{-C \frac{\varepsilon}{\varepsilon_f}}, \quad (4.1)$$

где  $A \approx -0.024$ ,  $B \approx 1.69$ ,  $C \approx 0.5$ . Полагается, что зависимость (4.1) справедлива при  $\varepsilon < \varepsilon_0$  ( $\varepsilon_0$  — значение деформации, большее предела прочности в 5-10 раз, при котором материал не передает напряжения в направлении, ортогональном направлению трещины).

### 4.2. Математическая модель

Будем рассматривать две конфигурации твердого тела — без растрескивания ( $K_1$ ) и с учетом образования трещин ( $K_2$ ). Для начала определим некоторые соотношения.

Зависимость (4.1) запишем в другом виде

$$\frac{\sigma}{\sigma_f} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_f} \frac{\varepsilon_f}{\sigma_f} = A + B e^{-C \frac{\varepsilon}{\varepsilon_f}},$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}, \quad E_0 = \frac{\sigma_f}{\varepsilon_f} \Rightarrow \frac{E}{E_0} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_f} = A + B e^{-C \frac{\varepsilon}{\varepsilon_f}},$$

где  $E$  и  $E_0$  — текущий и начальный модули Юнга.

Тогда введем функцию памяти материала  $e(t)$  для двумерного случая:

$$e_i(t) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_i > \varepsilon_0, \\ \frac{E}{E_0} = \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_i} \left( A + B e^{-C \frac{\varepsilon}{\varepsilon_f}} \right), & \varepsilon_f \leq \varepsilon_i \leq \varepsilon_0, \\ 1, & \varepsilon_i < \varepsilon_f, \\ i = 1, 2. \end{cases} \quad (4.2)$$

Для двумерной задачи определим матрицу  $\hat{E}$

$$\hat{E} = \begin{pmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_1 e_2 \end{pmatrix},$$

которая является матрицей перехода:  $K_1 \rightarrow K_2$ .

Для того, чтобы использовать функцию памяти необходимо привести тензор деформации  $\hat{\varepsilon}$  к главным осям. Введем матрицу перехода  $\hat{T}$ , которая диагонализует тензор деформаций  $\hat{\varepsilon}$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} = \hat{T}^{-1} \hat{\varepsilon} \hat{T}.$$

Известно, что из матрицы  $\hat{T}$  единственным образом составляется матрица преобразования  $\hat{P}$ , которая приводит вектор деформаций  $\vec{\varepsilon}$  в нотации Фойгта к следующему виду  $\bar{\varepsilon} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, 0\}^{\text{T}1}$ .

Для конфигурации  $K_1$  справедлив закон Гука:

$$\vec{\sigma} = [C] \vec{\varepsilon}.$$

Рассмотрим в конфигурации  $K_1$  систему координат, связанную главными направлениями тензора деформаций. В этой системе координат закон Гука имеет вид

$$\bar{\sigma} = [\bar{C}] \bar{\varepsilon}.$$

---

<sup>1</sup> Символ  $\bar{\cdot}$  обозначает запись в главных осях.



Отметим, что матрица перехода  $\hat{P}$  к главным направлениям тензора деформаций является ортогональной, поэтому

$$\bar{\varepsilon}^T \vec{\sigma} = \bar{\varepsilon}^T \vec{\sigma}.$$

Закон Гука для конфигурации  $K_2$  имеет вид

$$\tilde{\sigma} = \tilde{C} (\tilde{\varepsilon} - \tilde{\varepsilon}^T).$$

Поскольку матрица перехода  $\hat{E}$  из конфигурации  $K_1$  в конфигурацию  $K_2$  является диагональной и поворота осей при этом не происходит, то соотношение (4.2) будет иметь вид

$$\bar{\sigma} = \tilde{C} (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^T), \quad \tilde{C} = \hat{E}^T \bar{C} \hat{E}.$$

Вернемся к исходной системе координат с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} &= \hat{P}^T \bar{\sigma}, \quad \vec{\varepsilon} = \hat{P}^{-1} \bar{\varepsilon}, \quad \bar{C} = \left( \hat{P}^{-1} \right)^T [C] \hat{P}^{-1}, \\ \Rightarrow \vec{\sigma} &= \hat{P}^T \tilde{C} \hat{P} (\vec{\varepsilon} - \vec{\varepsilon}^T). \end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned} \hat{P}^T \tilde{C} \hat{P} &= \hat{P}^T \hat{E}^T \bar{C} \hat{E} \hat{P} = \left( \hat{P}^T \hat{E}^T (\hat{P}^{-1})^T \right) [C] \left( \hat{P}^{-1} \hat{E} \hat{P} \right), \\ \hat{Z} &= \hat{P}^{-1} \hat{E} \hat{P}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\vec{\sigma} = \hat{Z}^T \hat{C} \hat{Z} (\vec{\varepsilon} - \vec{\varepsilon}^T) = \hat{C}^{\text{crk}} (\vec{\varepsilon} - \vec{\varepsilon}^T).$$

### 4.3. Образование радиальных и полярных трещин

Рассмотрим топливную таблетку в горизонтальном сечении. Оно представляет собой кольцо с внутренним радиусом  $r_a = 0,8$  мм, внешним радиусом  $r_b = 3,8$  мм. Закрепим его в одной точке на горизонтальной оси по вертикали и на вертикальной оси по горизонтали. Остальные границы будем считать свободными. Граничные условия в данном случае имеют следующий вид:

$$u_x(0, r_a) = u_y(-r_a, 0) = 0, \quad \sigma_{xx}|_{x^2+y^2=r_a^2} = \sigma_{yy}|_{x^2+y^2=r_b^2} = 0.$$

Также зададим зависимость температуры от пространственных координат  $T(x, y)$ . Будем решать задачу с постоянным коэффициентом теплового расширения ( $\alpha = \text{const}$ ).

На каждом временном слое в качестве изменения температуры  $\Delta T$  возьмем:

$$\Delta T = T(x, y, t) - T_0 = \frac{T_1(t) \ln \frac{r_b}{r} - T_2(t) \ln \frac{r_a}{r}}{\ln \frac{r_b}{r_a}},$$

где  $T_1(t) = (T_a - T_0)\frac{t}{t_f} + T_0$ ,  $T_2(t) = (T_b - T_0)\frac{t}{t_f} + T_0$ ,  $T_a = 1700$  K,  $T_b = 600$  K,  $T_0 = T_{ref}$ .

Будем наблюдать характер изменения напряжений от пространственных координат в разные моменты времени.

На момент времени  $t = 0.06t_f$  тело ведет себя как упругое. Функция памяти  $e(t)$  в упругой области равна 1.

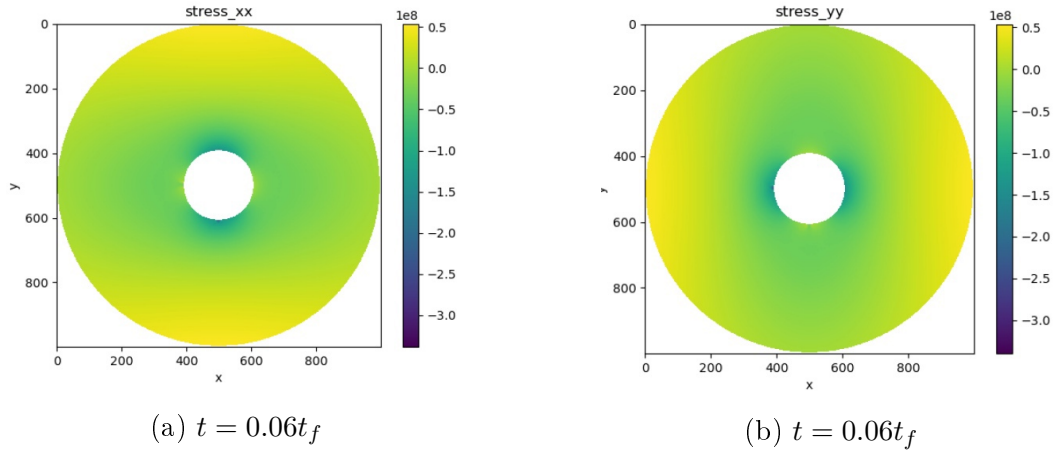


Рис. 13. Напряжения

При  $t = 0.2t_f$  происходит развитие 4-х трещин в топливной таблетке. Напряжение и деформации достигли пределов прочности  $\sigma_f$  и  $\varepsilon_f$ . Функция памяти отклоняется от единицы, т.е. появляются анизотропные эффекты.

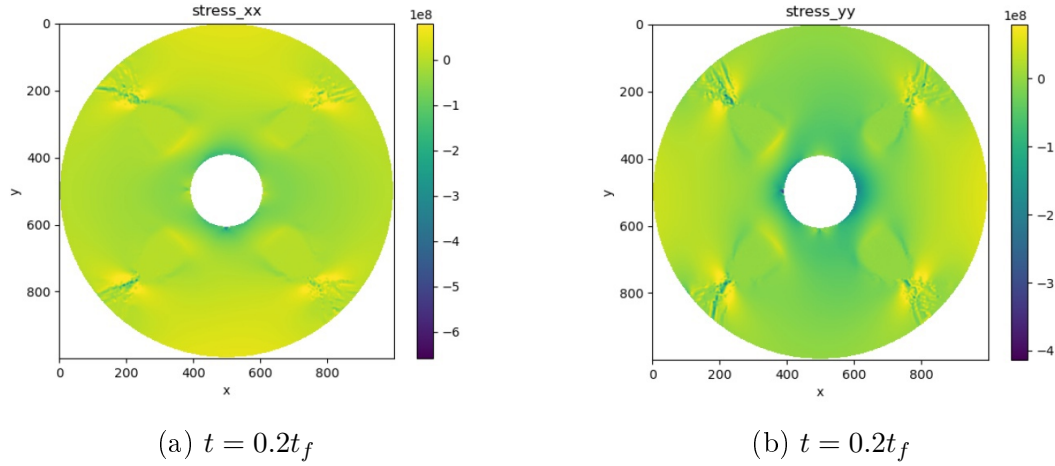


Рис. 14. Напряжения

При  $t = 0.9t_f$  разрушение продолжается, появляются новые трещины. Многие деформации достигли значение  $\varepsilon_0$ , при котором материал не способен передавать напряжения в направлении, ортогональном трещине.

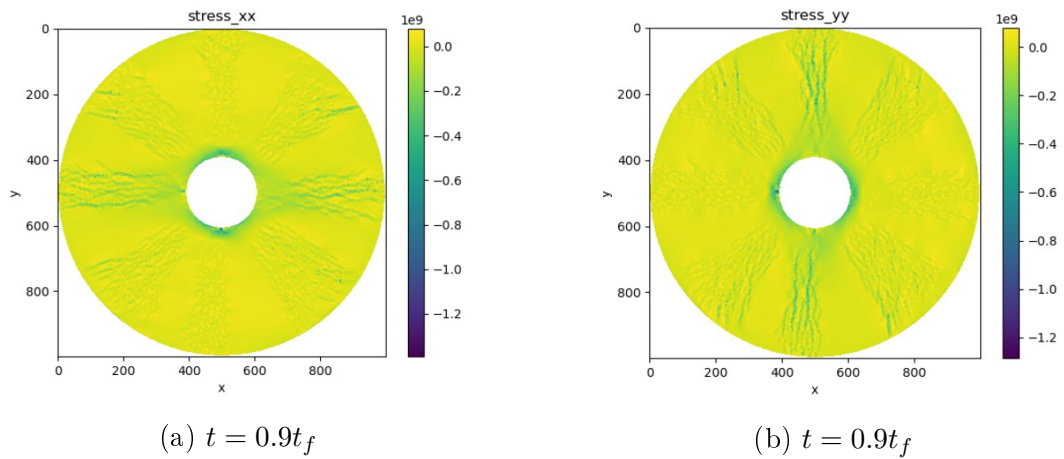


Рис. 15. Напряжения

При  $t = t_f$  видно большое количество трещин по 8 направлениям. При появлении трещин напряжения спадают практически до нуля, и на всех графиках не превышают предел прочности  $\sigma_f$ .

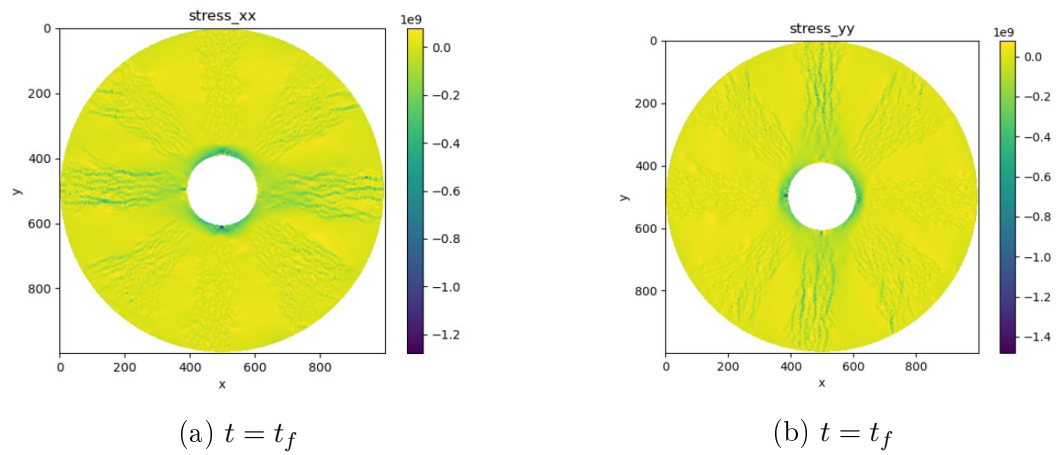


Рис. 16. Напряжения

## Заключение

Была исследована математическая модель разрушения пластины, состоящей из диоксида урана  $\text{UO}_2$ . Данная задача была решена методом конечных элементов на треугольной сетке. Для тестовой задачи подтвержден порядок точности схемы.

Проведено математическое моделирование разрушения топливной таблетки в двумерной задаче, описывающей горизонтальное сечение. Применение описанной модели размазанных трещин приводит к непротиворечивым результатам.

Решение вышеуказанной задачи было реализовано с помощью библиотеки FEniCS на языке программирования «Python».

## Список использованных источников

1. *Коваленко А.Д.* Основы термоупругости : учебное пособие / А.Д. Коваленко. – Киев: Наукова думка, 1970. – 307 с.
2. *Фрост Б.* ТВЭЛы ядерных реакторов: пер. с англ. М.: Энергоатомиздат, 1986. – 248 с.
3. *Зенкевич О., Морган К.* Конечные элементы и аппроксимация: Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
4. *Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.* Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. – 512 с.: ил. (Математическое моделирование в технике и в технологии).
5. *Галанин М.П., Савенков Е.Б.* Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 592 с.
6. Математическое моделирование разрушения хрупкого материала под действием тепловых нагрузок / М.П. Галанин [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2013. № 100. 36 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-100>.
7. *Dahlblom O., Ottosen N.S.* Smeared Crack Analysis of Concrete Using a Nonlinear Fracture Model // Fracture Mechanics of Concrete. Nordic Seminar Held at Division of Building Materials, November 6, 1986, p. 31-46.