Численное моделирование напряженно-деформированного состояния твердого тела

Докладчик: Швецов Г.А.
Научный руководитель: д.ф-м.н., профессор кафедры ФН-2 Галанин М.П.

группа ФН2-62Б

21 июня 2023 г.

Цель

Цель работы – рассмотрение плоской задачи термоупругости с помощью конечно-элементного алгоритма для нахождения решения на треугольной сетке, а также графическое представление результатов.

Постановка задачи

Уравнения равновесия и матрица упругих коэффициентов

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + b_x = 0, \\ \dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + b_y = 0. \end{cases}$$

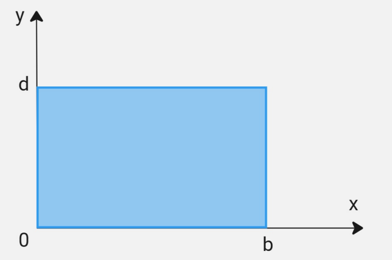
$$C = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

МКЭ на треугольной равномерной сетке

$$[K]\{U\} = R_U(T),$$

$$\begin{cases} u_x = \sum_{p=1}^{N} \sum_{m=1}^{3} u_{pm}^{(x)} \phi_{pm}, \\ u_y = \sum_{p=1}^{N} \sum_{m=1}^{3} u_{pm}^{(y)} \phi_{pm}. \end{cases}$$



Тестовый расчет

Пластинка обладает свойствами диоксида урана UO_2 и ее размеры:

$$b = 8 \text{ мм}, \quad d = 8 \text{ мм}.$$

Порядок сходимости

$$\Delta T(x,y) = -1000\sqrt{\left(x-\frac{b}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{d}{2}\right)^2}$$

Кол-во гран. узлов:	AbsErr_C	Δ_C	AbsErr_{L_2}	Δ_{L_2}
$u = \left(e^{x^2+y^2}\,;\, \tanh(xy)\right)$				
16	7.7783e-08	3.6629	3.7796e-08	3.8817
32	2.0339e-08	3.8244	1.0721e-08	3.5255
64	6.3894e-09	3.6139	3.2510e-09	3.6250
$u = \left(y^2 e^x\,;\, \cos(xy) + \sin(xy)\right)$				
16	9.9139e-08	3.2458	4.9698e-08	3.7077
32	2.3091e-08	4.2934	1.1785e-08	4.2170
64	6.3894e-09	3.6139	3.2510e-09	3.6320

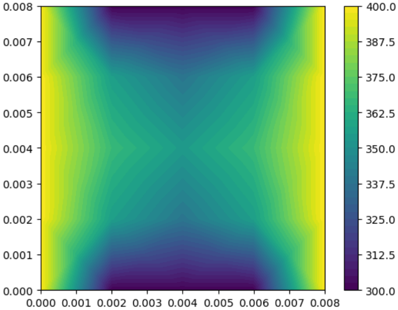
Приведены ошибки в нормах $\|.\|_C$ и $\|.\|_{L_2}$, AbsErr — абсолютная ошибка, Δ — модуль отношения ошибок на двух соседних сетках.

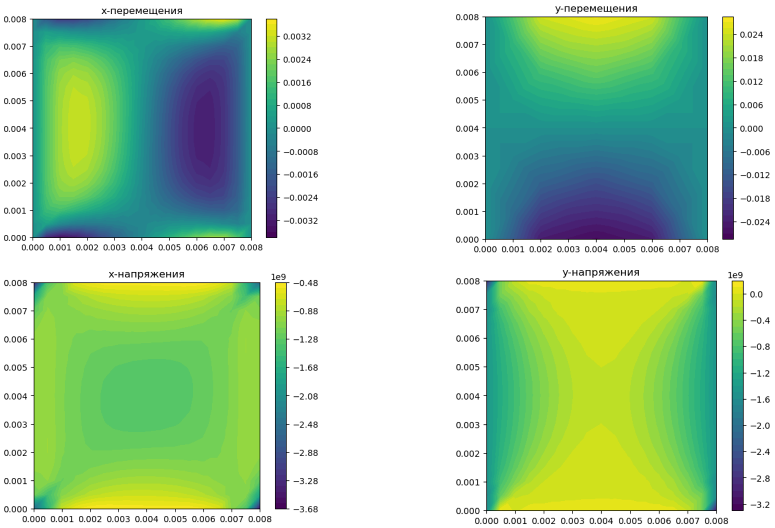
Линейная (несвязная) термоупругая задача

Уравнение теплопроводности

$$\rho c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{div}(\lambda \,\mathrm{grad}\, T) + f$$

Рассмотрим стационарный режим и положим $f = 0$. Пусть верхняя и нижняя стороны пластинки находятся под температурой $T_{ref} = 300$ K, а боковые стороны зажаты и их нагревают на $\Delta T = 100$ K.

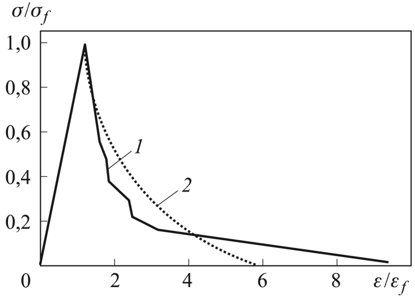



x-перемещения
0.008
0.007
0.006
0.005
0.004
0.003
0.002
0.001
0.000
0.000 0.001 0.002 0.003 0.004 0.005 0.006 0.007 0.008
0.0032
0.0024
0.0016
0.0008
0.0000
−0.0008
−0.0016
−0.0024
−0.0032
y-перемещения
0.024
0.018
0.012
0.006
0.000
−0.006
−0.012
−0.018
−0.024
x-напряжения
1e9
−0.48
−0.88
−1.28
−1.68
−2.08
−2.48
−2.88
−3.28
−3.68
y-напряжения
1e9
0.0
−0.4
−0.8
−1.2
−1.6
−2.0
−2.4
−2.8
−3.2

Аппроксимация

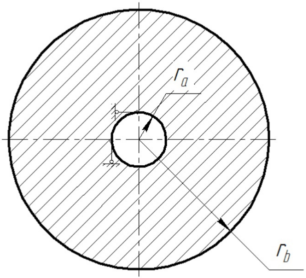
$$\frac{\sigma}{\sigma_f} = A + Be^{-C\frac{\varepsilon}{\varepsilon_f}}, \qquad (1)$$

где коэффициенты A, B выводятся экспериментально.
Для дикосида урана UO_2: $A = -0.024$, $B = 1.69$, $C = 0.5$.



Экспериментальная (1) и аналитическая (2) кривые растягивающего отклика для керамических материалов

Образование радиальных трещин



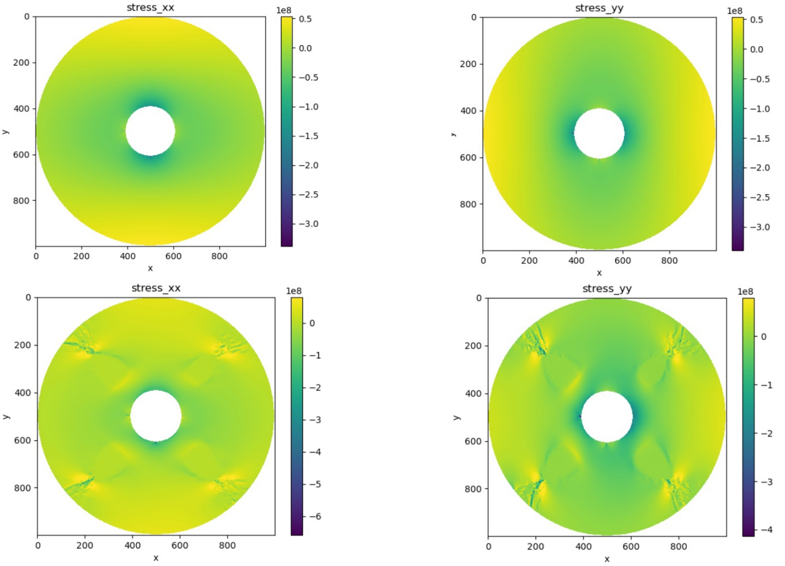
Тестовый расчет

$$r_a = 0,8 \text{ мм}, \;\; d = 3,8 \text{ мм},$$
$$u_x(0, r_a) = u_y(-r_a, 0) = 0,$$
$$\sigma_{xx} \left.\right|_{x^2+y^2=r_a^2} = 0,$$
$$\sigma_{yy} \left.\right|_{x^2+y^2=r_b^2} = 0, t_f = 1 \text{ с}.$$

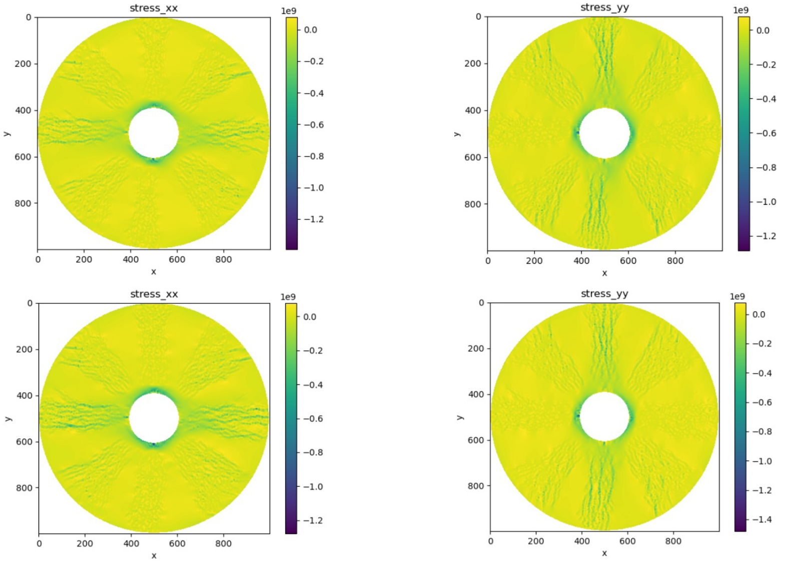
Температура

$$T(x, y, t) = \frac{T_1(t) \ln \dfrac{r_b}{r} - T_2(t) \ln \dfrac{r_a}{r}}{\ln \dfrac{r_b}{r_a}},$$
$$T_1(t) = (T_a - T_0)\frac{t}{t_f} + T_0, \;\; T_2(t) = (T_b - T_0)\frac{t}{t_f} + T_0,$$
$$T_a = 1700 \text{ K}, \;\; T_b = 600 \text{ K}, \;\; T_0 = T_{ref}$$

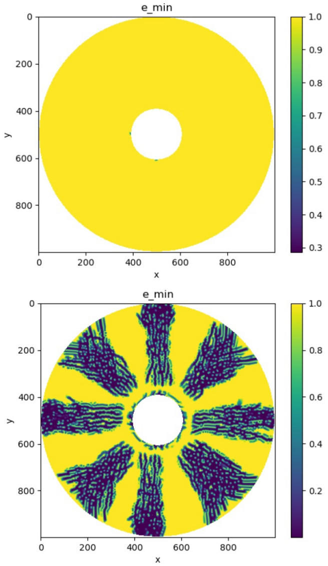
$\sigma_{xx}(x, y)$, $\sigma_{yy}(x, y)$ при $t = 0.06t_f$, $t = 0.2t_f$

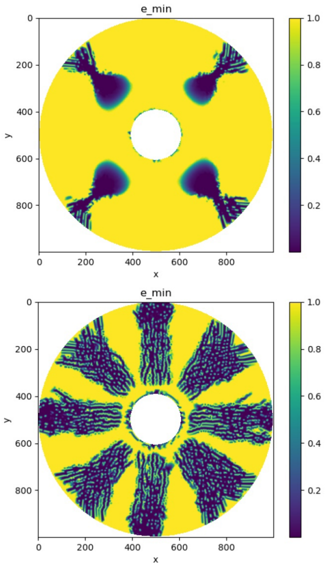


$\sigma_{xx}(x, y)$, $\sigma_{yy}(x, y)$ при $t = 0.9t_f$, $t = t_f$



Минимум функции памяти $e_{min} = \min(e_1, e_2)$





Заключение

1. Методом конечных элементов на равномерной сетке решена задача термоупругости;
2. Найден порядок точности схемы для тестовых задач;
3. Проведено математическое моделирование разрушения топливной таблетки в двумерной задаче;
4. Проведен графический анализ распространения трещин, основанный на графиках напряжений в различные промежутки времени.

Список использованных источников

- *Галанин М.П., Савенков Е.Б.* Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. – 592 с.
- Математическое моделирование разрушения хрупкого материала под действием тепловых нагрузок / М.П. Галанин [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2013.No 100. – 36 с. URL: `http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-100`
- *Фрост Б.* ТВЭЛы ядерных реакторов: пер. с англ. М.: Энергоатомиздат, 1986. – 248 с.
- *Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.* Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. – 512 с.: ил. (Математическое моделирование в технике и в технологии).

Спасибо за внимание!