



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н. Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ \_\_\_\_\_ Фундаментальные науки

КАФЕДРА \_\_\_\_\_ Прикладная математика

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА  
*К КУРСОВОЙ РАБОТЕ*  
*НА ТЕМУ:*

*Математическое моделирование термоупругого  
разрушения хрупкого материала*

Студент \_\_\_\_\_  
ФН2-52Б  
(Группа)

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

Г.А. Швецов  
\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

М.П. Галанин  
\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

2023 г.

## Оглавление

<b>Введение</b>	3
<b>1. Постановка задачи</b>	4
1.1. Тензор малых деформаций Коши	4
1.2. Физический смысл компонент тензора деформаций	5
1.3. Внешние силы и тензор напряжений	6
1.4. Температурные деформации и напряжения	7
1.5. Обобщенный закон Гука	8
1.6. Уравнения равновесия и граничные условия	9
1.7. Моделирование разрушения. Модель размазанных трещин.	10
<b>2. Одномерный случай</b>	11
<b>3. Результаты вычислений</b>	12
<b>Заключение</b>	17
<b>Список использованных источников</b>	18

## Введение

При создании, проектировании и конструировании объектов для нашей жизни ставится задача об их надежности в различных условиях. Для этого требуются обширные знания из теории упругости. Анализ прочности конструкций и их разрушения являются проблемами, которые не теряют свою актуальность.

Основной интерес задач прочности представляет предугадывание различных вариантов разрушений, оценка прочности, влияние внешних факторов на процесс разрушения.

Один из подразделов теории упругости — *теория термоупругости*. Неравномерное тепловое расширение в общем случае не может происходить свободно в сплошном теле, оно вызывает тепловые (температурные) напряжения. Знание величины и характера действия тепловых напряжений необходимо для всестороннего анализа прочности конструкции. Тепловые напряжения сами по себе и в сочетании с механическими напряжениями от внешних воздействий могут вызывать появление трещин и разрушение конструкции материала с повышенной хрупкостью. Согласно теории Дюамеля и Неймана, полная деформация является суммой упругой и тепловой деформаций.

Цель настоящей работы — построение и анализ одномерной модели разрушения стержня, обладающего физическими свойствами и характеристиками диоксида урана ( $\text{UO}_2$ ), а также рассмотрение аналитического решения для линейного случая.

# 1. Постановка задачи

Термоупругость — раздел механики твердого деформируемого тела, обобщающий теорию упругости для деформаций при неравномерном нагреве деформируемых тел. Общая задача математического моделирования термоупругости заключается в определении при заданных внешних механических и тепловых воздействиях тензора напряжений, тензора деформаций, вектора перемещения и скаляра температуры, удовлетворяющих уравнениям движения, уравнению теплопроводности, и соотношениям между напряжениями и деформациями и между деформациями и перемещениями.

## 1.1. Тензор малых деформаций Коши

Под действием внешних сил или в результате теплового воздействия твердое тело меняет свои размеры и форму, т.е. **деформируется**, при этом масса тела остается постоянной. Тензором деформации называют тензор, который характеризует сжатие (растяжение) и изменение формы в каждой точке тела при деформации. Для математического описания деформации тела поступают следующим образом.

Положение каждой точки тела  $X_i(x_1, \dots, x_n)$  определяется ее радиус-вектором  $\vec{r} = \vec{r}(X_i)$ . Тогда вектор деформации, описывающий смещение точки тела определяется

$$\vec{u}(u_1, \dots, u_n) = \vec{r}(X'_i) - \vec{r}(X_i) = \vec{r}' - \vec{r}, \quad (1.1)$$

где  $X_i$  и  $X'_i$  — вектора координат точек до и после деформации соответственно.

При деформировании тела меняются расстояния между его точками. Рассмотрим две бесконечно близкие точки. Если радиус-вектор между ними до деформации задается величиной  $dX$ , то в деформированном теле радиус-вектор между теми же двумя точками определяется как

$$dX' = dX + du = dx'_k = dx_k + du_k. \quad (1.2)$$

Квадраты расстояний между заданными точками до и после приложения сил вычисляются по определению:

$$(dl)^2 = \sum_{k=1}^n (dx_k)^2, \quad (dl')^2 = \sum_{k=1}^n (dx_k + du_k)^2.$$

Используя определение полного дифференциала  $du_k = \sum_{l=1}^n \frac{\partial u_k}{\partial x_l} dx_l$  и правило суммирования по повторяющимся индексам, преобразуем величину  $(dl')^2$

$$(dl')^2 = \sum_{k=1}^n \left( dx_k + \sum_{l=1}^n \frac{\partial u_k}{\partial x_l} dx_l \right)^2 = \sum_{k=1}^n \left( (dx_k)^2 + 2 \frac{\partial u_k}{\partial x_l} dx_l dx_k + \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} dx_l \right)^2 \right).$$

Запишем в упрощенном виде

$$(dl')^2 = (dl)^2 + 2 \frac{\partial u_k}{\partial x_l} dx_l dx_k + \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} dx_l \right)^2. \quad (1.3)$$

При малых деформациях третьим слагаемым можно пренебречь в силу его большего порядка малости. Во втором слагаемом индексы  $k, l$  являются немymi, поэтому его можно записать в симметричном виде

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_l} dx_l dx_k = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) dx_l dx_k = \varepsilon_{kl} dx_l dx_k, \quad (1.4)$$

где  $\varepsilon_{kl}$  — составляющая тензора деформаций в точке  $X$ .

Симметричный тензор второго ранга  $\hat{\varepsilon}$  с компонентами

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right), \quad k, l = 1, 2, 3 \quad (1.5)$$

будем называть **тензором малой деформации**.

Соотношения Коши (1.5) связывают три составляющие вектора перемещения  $\vec{u}$  с шестью (вследствие симметрии) компонентами тензора деформации  $\hat{\varepsilon}$ .

## 1.2. Физический смысл компонент тензора деформаций

Рассмотрим трехмерный случай. Матрица компонент тензора деформаций записывается в виде

$$\varepsilon_{kl} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Диагональные элементы  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  — это коэффициенты относительного удлинения отрезков, которые до деформации были параллельны осям  $x, y, z$ .

$$\varepsilon_x = \frac{l'_1 - l_1}{l_1} = \frac{\Delta l'_1}{l_1}, \quad \varepsilon_y = \frac{l'_2 - l_2}{l_2} = \frac{\Delta l'_2}{l_2}, \quad \varepsilon_z = \frac{l'_3 - l_3}{l_3} = \frac{\Delta l'_3}{l_3},$$

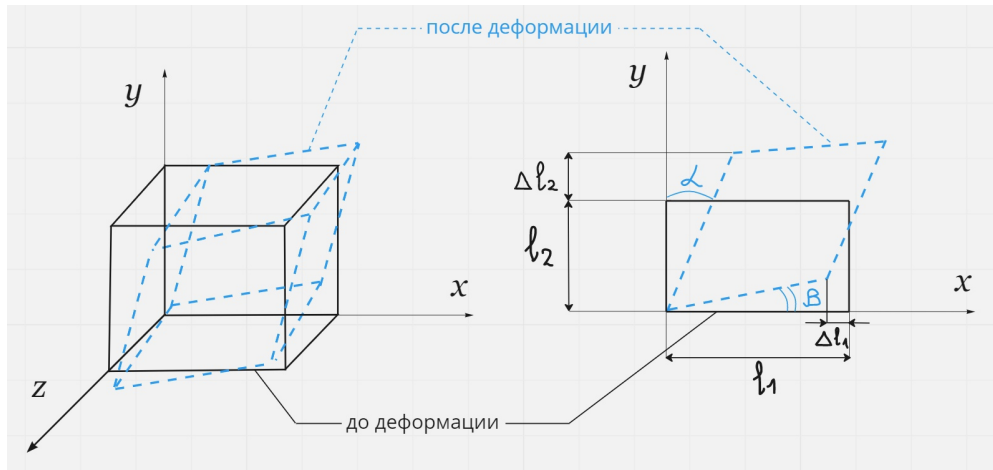


Рис. 1. Физический смысл

Внедиагональные элементы  $\varepsilon_{kl}$ ,  $k \neq l$  определяют угол сдвига или угловую деформацию. В частности, для плоскости  $xy$  (см. рис. 1)  $\gamma_{xy} = \alpha + \beta$ .

### 1.3. Внешние силы и тензор напряжений

Существуют два вида внешних сил, которые могут воздействовать на тело. Силы, распределенные по поверхности тела, такие, как давление одного тела на другое, называются **поверхностными силами**. Силы, распределенные по массе тела, такие, как силы тяжести, силы инерции, называются **массовыми силами** (объемные силы).

**Плотность объемных сил** характеризует вектор

$$\mathbf{b}(M) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta V}, \quad (1.7)$$

где  $\Delta \mathbf{F}$  — вектор силы, распределенной в объеме  $\Delta V$  среды в окрестности точки  $M$ .

**Плотность поверхностных сил** характеризует вектор

$$\mathbf{p}(N) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta S}, \quad (1.8)$$

где  $\Delta \mathbf{P}$  — вектор силы, действующий на элементарную площадку  $\Delta S$  поверхности  $S$ , ограничивающей тело объемом  $V$  [4].

Механическое напряжение есть мера внутренних сил, возникающих в деформированном теле под действием внешних сил.

Рассмотрим случай, когда напряжения во всем теле однородны и все части тела находятся в состоянии статического равновесия. Выделим в таком теле единичный куб с ребрами, параллельными осям координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

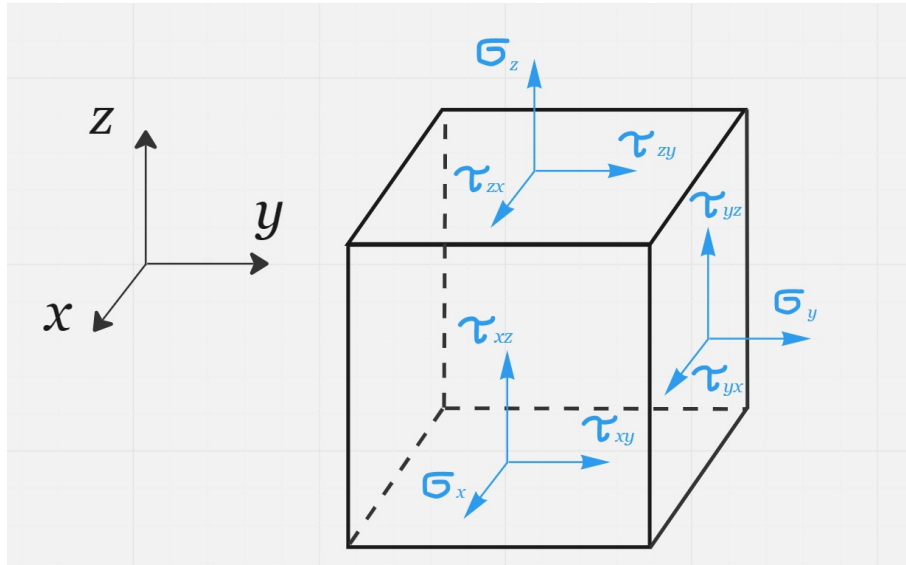


Рис. 2. Элементарный объем тела — куб

Силы, действующие на противоположные грани куба в условиях равновесия, одинаковы, поэтому достаточно рассмотреть только те, которые действуют на непараллельные грани. Чтобы обозначить напряжения, действующие на шести гранях куба, потребуется три символа  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  для нормальных напряжений и шесть  $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{xz}, \tau_{zx}$  для касательных (см. рисунок 2).

Согласно закону парности касательных напряжений на двух площадках, проходящих через данную точку, выполняются следующие равенства

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}.$$

Из приведенных равенств вытекает, что независимыми являются только 6 компонент напряжений.

Таким образом, для описания напряженного состояния в точке вводится **тензор напряжений**  $\hat{\sigma}$  — симметричный тензор второго ранга, описывающий механические напряжения в произвольной точке нагруженного тела, возникающих в этой точке при его малых деформациях.

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

где  $\sigma_{ii}$  — нормальные напряжения,  $\tau_{ij}$  — касательные напряжения [6].

Если рассматривать окрестность точки  $N$  поверхности  $S$  с единичным вектором  $\mathbf{n}(N)$  внешней нормали при заданном векторе  $\mathbf{p}(N)$  плотности поверхностных сил с проекциями  $p_i(N)$  на оси пространственных координат:

$$\hat{\sigma} \cdot \mathbf{n}(N) = \mathbf{p}(N), \quad \text{или} \quad \sigma_{ji}(N)n_j(N) = p_i(N), \quad N \in S. \quad (1.10)$$

#### 1.4. Температурные деформации и напряжения

В предположении существования аддитивного разложения компонент тензора малых деформаций Коши запишем

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) = \varepsilon_{kl}^e + \varepsilon_{kl}^0 = \varepsilon_{kl}^e + \varepsilon_{kl}^T, \quad k, l = 1, 2, 3, \quad (1.11)$$

где  $\varepsilon_{ij}^e$  — компоненты упругой составляющей тензора деформаций, а  $\varepsilon_{ij}^0$  — компоненты тензора неупругих деформаций (в нашем случае температурные деформации).

Пусть тело в исходном недеформированном состоянии имеет температуру  $T_0 = \text{const}$ . Для большинства конструкционных материалов температурная деформация  $\varepsilon_{kl}^T$  является пропорциональной изменению температуры  $\Delta T$ , т.е.

$$\hat{\varepsilon}^T = \alpha \Delta T = \alpha(T - T_0),$$

где  $\alpha$  — коэффициент температурного расширения,  $\Delta T = T(\mathbf{x}, t) - T_0$  — приращение температуры относительно уровня нулевых деформаций. Согласно принятому в мире «знаковому соглашению» температурное расширение считается положительным, а температурное сокращение — отрицательным [6].

### 1.5. Обобщенный закон Гука

В общем случае напряжения и деформации описываются тензорами второго ранга в трехмерном пространстве (имеют по 9 компонент). Связывающий их *тензор коэффициентов упругости* является тензором четвертого ранга  $C_{ijkl}$  и содержит 81 коэффициент. Его вид определяется моделью рассматриваемой среды.

Данный тензор является материальной константой упругости *анизотропных*<sup>1</sup> материалов. Вследствие симметрии тензоров напряжений  $\sigma_{ij}$  и деформаций  $\varepsilon_{kl}$ , а также симметрии тензора  $C_{ijkl}$  по первой паре индексов, второй паре индексов и по парам индексов ( $C_{ijkl}, C_{jikl}, C_{ijlk}, C_{klij}$ ), независимыми являются только 21 постоянная [5].

**Закон Гука** выглядит следующим образом

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3. \quad (1.12)$$

Согласно *нотации Фойгта*<sup>2</sup> тензору коэффициентов упругости можно поставить в соответствие матрицу  $\hat{C}$  вида:

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix}$$

Тензор упругости для *изотропного*<sup>3</sup> материала: упругие свойства определяются двумя константами (постоянными Ламэ  $\lambda$  и  $\mu$ ):

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}),$$

$$C_{11} = \lambda + 2\mu, \quad C_{12} = \lambda, \quad C_{44} = \mu.$$

<sup>1</sup> Анизотропия — различие свойств среды в различных направлениях внутри этой среды.

<sup>2</sup> **Нотация Фойгта** — матричная форма записи симметричного тензора 4-го ранга. Впервые была предложена немецким физиком Вольдемаром Фойгтом для тензора упругости в формулировке закона Гука для анизотропных материалов.

<sup>3</sup> Изотропия — неизменность свойств среды во всех направлениях.



Тогда матрица  $\hat{C}$  выглядит следующим образом:

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

Возвращаясь к выражению (1.12) и подставив туда матрицу (1.13), мы получаем

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = 2\mu \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

### 1.6. Уравнения равновесия и граничные условия

Обобщая закон сохранения количества движения материальной системы на случай сплошной среды можно записать

$$\frac{d\mathbf{Q}_v}{dt} = \int_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \int_S \mathbf{p} dS + \int_V \mathbf{b} dV. \quad (1.14)$$

Левая часть (1.14) соответствует скорости изменения во времени  $t$  вектора количества движения  $\mathbf{Q}_v$  среды, занимающей в *актуальной конфигурации* область объемом  $V$ , ограниченной поверхностью  $S$  ( $\rho$  и  $\mathbf{v}$  — плотность среды и вектор скорости ее частиц соответственно). Правая часть (1.14) равна *главному вектору системы сил*, характеризуемых в данном случае векторами  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{b}$  *плотности поверхностных и объемных сил* соответственно [4].

Согласно соотношениям (1.10) и (1.14), с учетом *теоремы Остроградского — Гаусса* получим

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + b_i. \quad (1.15)$$

В нашем случае неподвижной среды ( $\mathbf{v} \equiv 0$ ) из (1.15) следует ее уравнения равновесия.

$$Ox_j : \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + b_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.16)$$

Если тело закреплено, то любые перемещения его точек происходят за счет деформации, поэтому необходимо задать *граничные условия*. В классической задаче теории упругости такие условия разделяют на два типа: *кинематические* и *силовые*. Предполагается, что каждый из них задан на своей части поверхности:

$$\begin{aligned} S_u : u_i(\vec{x}, t) &= \tilde{u}_i(\vec{x}, t), \\ S_p : \sigma_{ij}(\vec{x}) n_j(\vec{x}) &= \tilde{p}_i(\vec{x}), \end{aligned}$$

где  $S = S_u \cup S_p$  — поверхность рассматриваемого тела;  $S_u$  — часть поверхности, на которой заданы кинематические условия,  $S_p$  — силовые.

### 1.7. Моделирование разрушения. Модель размазанных трещин.

В основе модели размазанных трещин лежит изменение свойств материала, она применима только для тех тел, в которых образование микротрещин, пластическая деформация, разрывы деформаций и напряжений пренебрежимо малы. Например, керамика и бетон обладают этими свойствами [7].

При нагрузке хрупкого материала, процесс разрушения может быть описан, как разгрузка по всему объему в сочетании с дополнительным растяжением. На рис. 3 видно, что пока напряжение меньше предела прочности  $\sigma < \sigma_f$  и деформации меньше соответствующего значения  $\varepsilon < \varepsilon_f$ , материал ведет себя, как линейно-упругий, а затем происходит разгрузка по нелинейному закону.

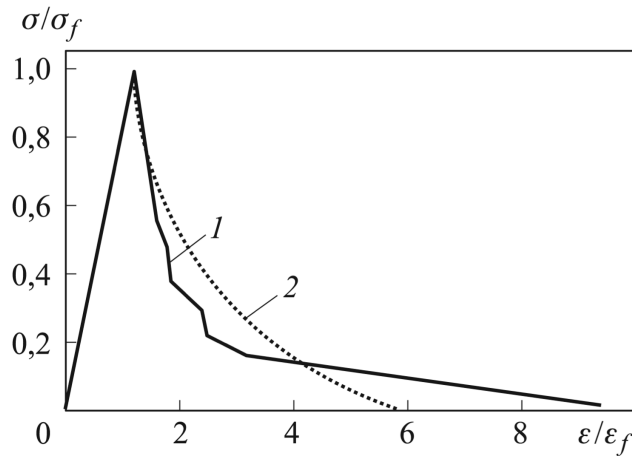


Рис. 3. Экспериментальная (1) и аналитическая (2) кривые нормализованного растягивающего отклика для керамических материалов

При достижении предельного значения прочности  $\sigma_f$  происходит инициализация трещины. Она формируется лишь после достижения значений деформаций, превышающих  $\varepsilon_f$  в 5 – 10 раз. Кривую, имеющую данный характер поведения, можно аппроксимировать в следующем виде:

$$\frac{\sigma}{\sigma_f} = A + B e^{-C \frac{\varepsilon}{\varepsilon_f}},$$

где  $A \approx -0.024$ ,  $B \approx 1.69$ ,  $C \approx 0.5$ .

Важно отметить, что модель размазанных трещин чувствительна к шагу сетки, что является ее главным недостатком [2].

## 2. Одномерный случай

Рассмотрим одномерный стержень длины  $l$ , закрепленный на концах, а также квазистационарную задачу для него. Параметр  $t$  — возрастающий, он в данном случае имеет смысл времени. Для квазистационарной задачи будем решать уравнение равновесия на каждом временном слое: используем метод конечных разностей на равномерной сетке.

Нелинейная модель упругости и образования трещин для зависимости напряжения от деформации выглядит следующим образом

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} E\varepsilon^e, & E\varepsilon^e < \sigma_f^v(\varepsilon), \\ \sigma_f^v(\varepsilon), \sigma_f^v(\varepsilon) = \left( A + B e^{-C \frac{\varepsilon - \varepsilon^T}{\varepsilon_f}} \right), & E\varepsilon^e \geq \sigma_f^v(\varepsilon), \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $\varepsilon^e$  — упругая деформация,  $\sigma_f^v(\varepsilon)$  — это переменный предел прочности, который в недеформированном состоянии материала равен пределу прочности  $\sigma_f^v(0) = \sigma_f$ ,  $E$  — модуль Юнга.

Согласно аддитивному разложению (1.11) упругая составляющая деформаций определяется следующим выражением

$$\varepsilon^e = \varepsilon - \varepsilon^T - \varepsilon^{crk}, \quad (2.2)$$

где  $\varepsilon$  — полная деформация,  $\varepsilon^T$  — температурная деформация,  $\varepsilon^{crk}$  — деформация за счет трещин (в линейном случае  $\varepsilon^{crk} = 0$ ), которая вычисляется по данным о текущем состоянии на данный момент:

$$\varepsilon^{crk} = \varepsilon - \varepsilon^T - \frac{\sigma(\varepsilon)}{E}$$

Будем прикладывать знакопеременную нагрузку по закону:

$$T(x, t) = \tilde{T} + F(x)\tau(t),$$

где  $\tilde{T}$  — усредненная по времени температура,  $F(x)$  — функция, описывающая пространственное распределение температуры,  $\tau(t)$  — функция времени.

Математическая модель для однородного стержня

$$\begin{cases} T(x, t) = \tilde{T} + F(x)\tau(t), & t \geq 0, 0 \leq x \leq l; \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0, & 0 < x < l; \\ \sigma = \sigma(\varepsilon - \varepsilon^0); \\ \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}; \\ \varepsilon^T = \alpha(T - T_0); \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

где  $u$  — перемещения,  $T_0$  — справочная температура,  $\varepsilon^0 = \varepsilon^T$  — температурная деформация.

### 3. Результаты вычислений

Физические характеристики диоксида урана  $\text{UO}_2$ :

- предел прочности  $\sigma_f = 1,1 \cdot 10^8$  Па;
- предел деформации  $\varepsilon_f = 0.000628571$ ;
- модуль Юнга  $E = 1,75 \cdot 10^{11}$  Па;
- коэффициент теплового расширения  $\alpha = 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ ;
- температура естественного состояния  $T_0 = 300 \text{ K}$ .

Для упругого, линейного случая (2.1) составим дифференциальное уравнение:

$$\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon^e = E(\varepsilon - \varepsilon^T) = E \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha(T(x, t) - T_0) \right),$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha \frac{\partial T(x, t)}{\partial x}.$$

Будем выбирать функцию  $F(x)$  так, чтобы она была симметрична относительно середины стержня, например,  $F(x) = \sin(\frac{\pi x}{l})$ . Будем решать задачу методом конечных разностей на равномерной сетке. При значениях напряжений, которые больше предела прочности  $\sigma_f$ , материал разгружается по нелинейному закону, поэтому появляется необходимость решать нелинейное уравнение. Линеаризуем его, используя метод Ньютона.

Пусть  $l = 10$  м,  $T_f$  — длительность измерения,  $\tau_h = 0.005$  с — временной шаг,  $n = 10$  — количество узлов сетки.

1. Пусть  $F(x) = a \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$ ,  $\tau(t) = (t + 1) \cos(\pi t^2)$ ,  $a = 50$ ,  $T_f = 4$  с.

Аналитическое решение:

$$u(x, t) = -\frac{\alpha a(t + 1) \cos(\pi t^2)(2x - l + l \cos(\frac{\pi x}{l}))}{\pi}.$$

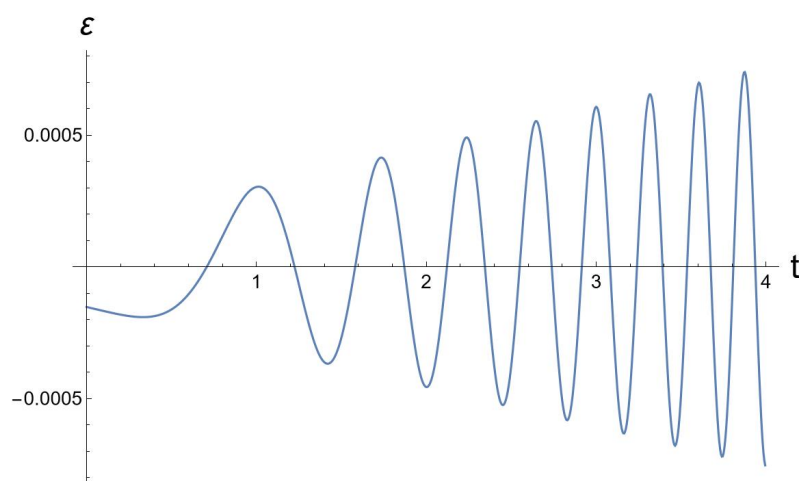


Рис. 4. Зависимость полных деформаций от времени

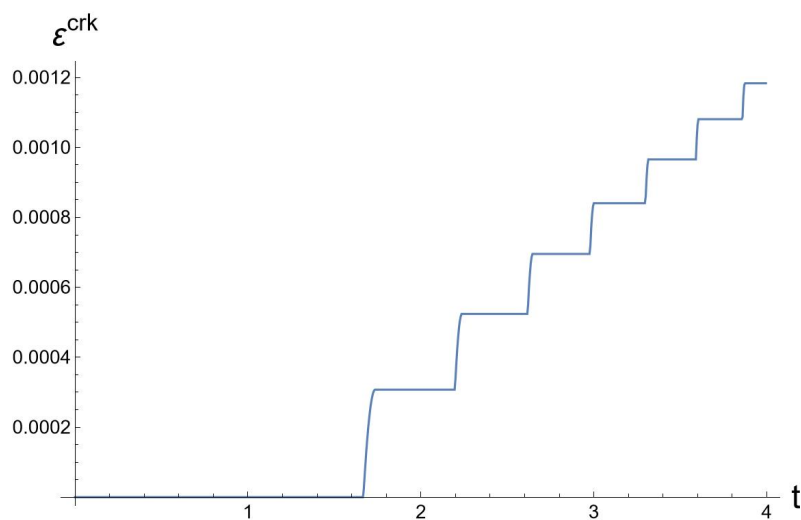


Рис. 5. Зависимость деформаций за счет трещин от времени

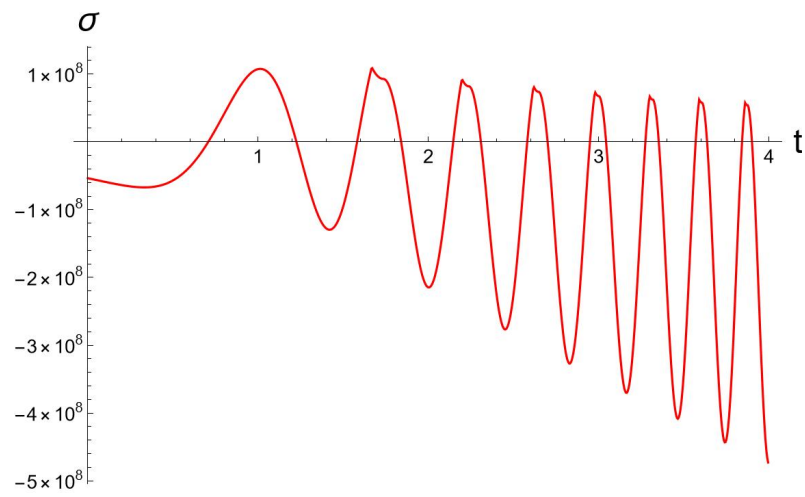


Рис. 6. Зависимость напряжений от времени

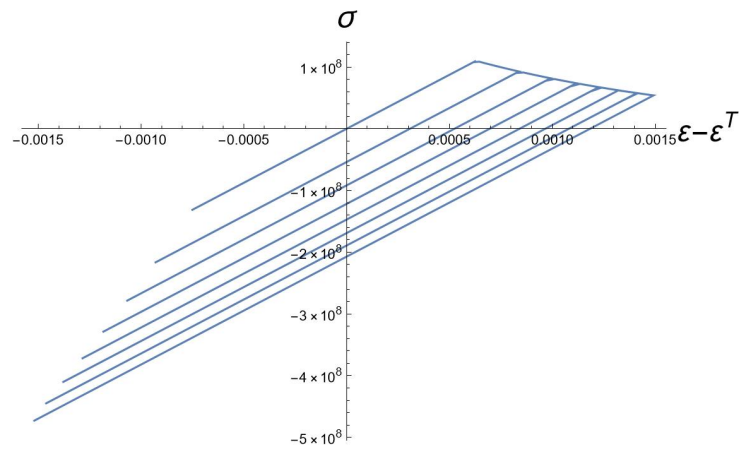


Рис. 7. Зависимость напряжений от деформаций

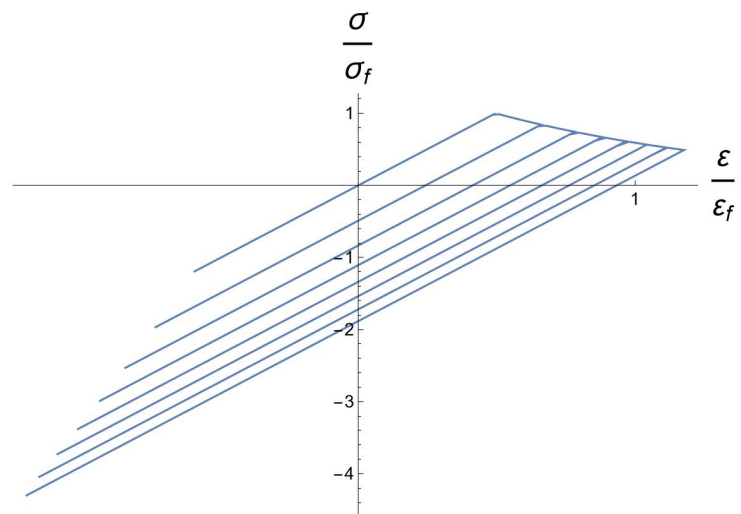


Рис. 8. Зависимость напряжений от деформаций по отношению к пределам прочности

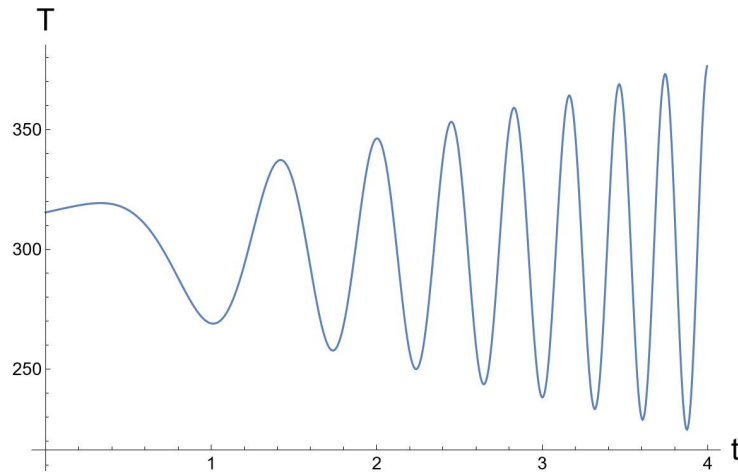


Рис. 9. Зависимость температуры от времени

Периодическая зависимость полной деформации от времени приведена на рис. 4. На рис. 7 видно, что при значениях напряжений, больших предела прочности, происходит разгрузка материала по нелинейному убывающему закону, в свою очередь, при уменьшении  $\varepsilon - \varepsilon^T$  разгрузка по линейному закону с модулем Юнга, равным исходному. После этого происходит повторный этап нагружения по той же прямой, по которой происходила разгрузка, и далее цикл нагружения и разгрузки повторяется.

На рис. 5 график имеет ступенчатый вид, что подтверждает цикличность процесса «нагрузка-разгрузка», а также способность модели накапливать информацию о разрушении стержня в предыдущие моменты времени.

Также, на рис. 8 можно увидеть, что в области  $\sigma > 0$  график ограничен экспериментальной кривой, которая показана на рис. 3.

2. Пусть  $F(x) = a \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$ ,  $\tau(t) = t \sin(t)$ ,  $a = 50$ ,  $T_f = 20$  с.

Аналитическое решение:

$$u(x, t) = \alpha \frac{at \sin(t)}{\pi} \left( l - 2x - l \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \right).$$

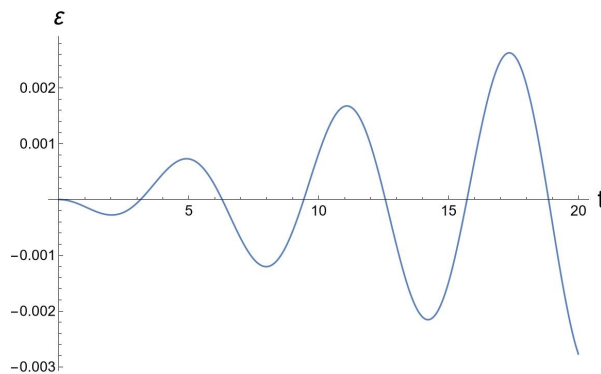


Рис. 10. Зависимость полных деформаций от времени

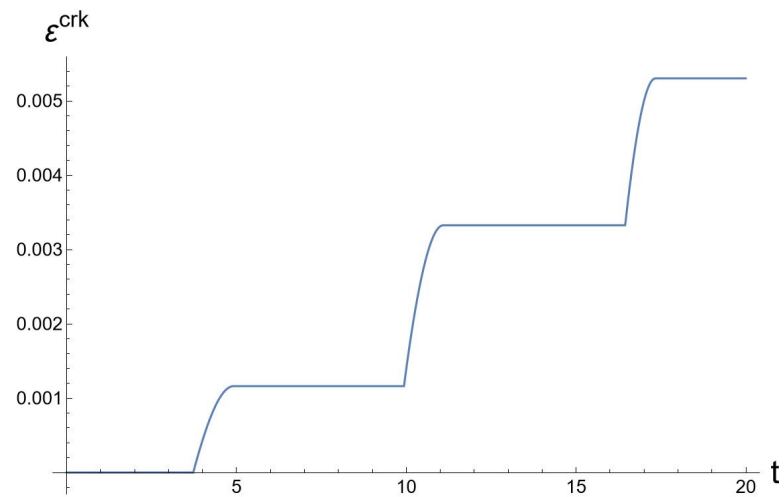


Рис. 11. Зависимость деформаций за счет трещин от времени

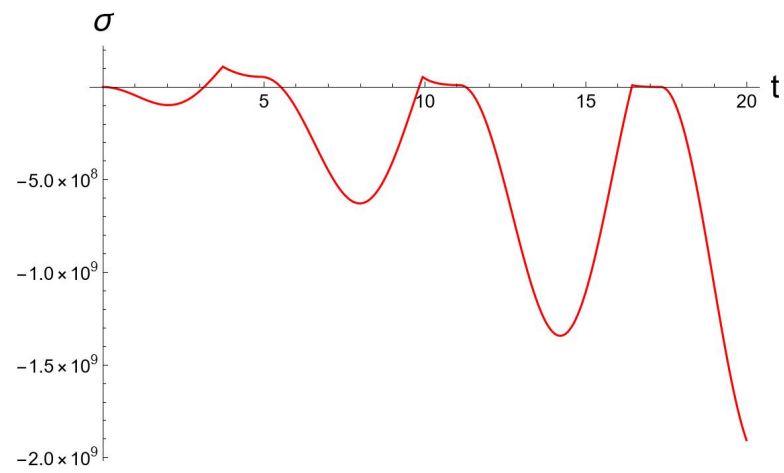


Рис. 12. Зависимость напряжений от времени

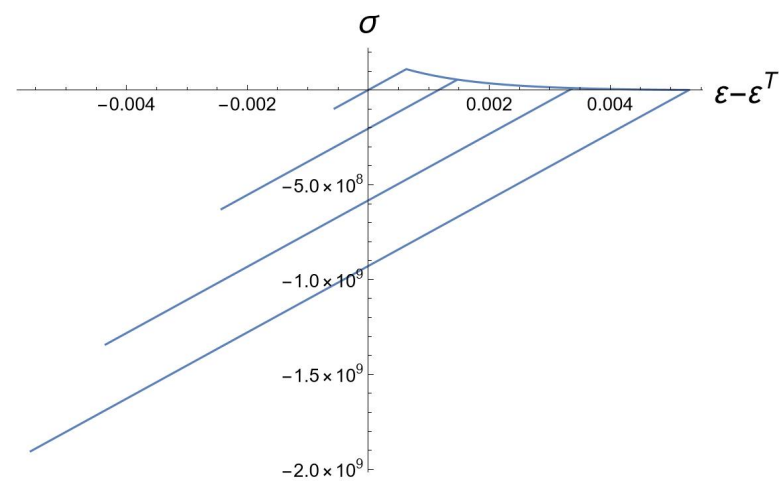


Рис. 13. Зависимость напряжений от деформаций



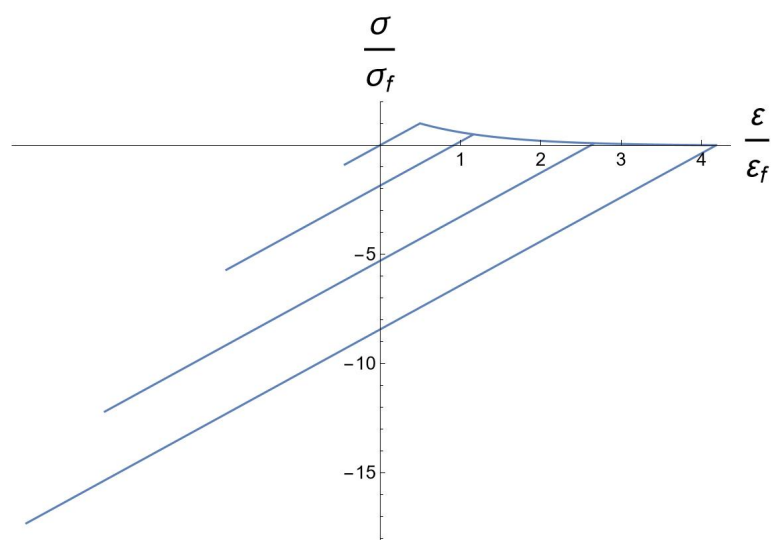


Рис. 14. Зависимость напряжений от деформаций по отношению к пределам прочности

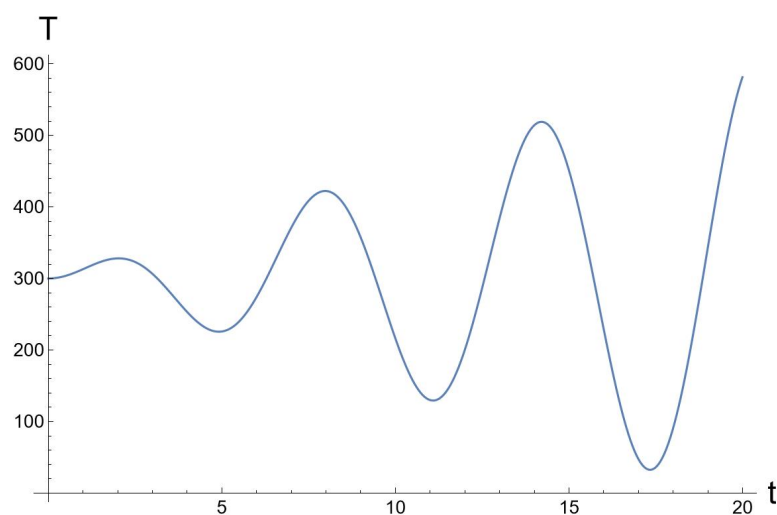


Рис. 15. Зависимость температуры от времени

## Заключение

В настоящей работе рассмотрена задача термоупругости для одномерного случая. Была исследована математическая модель разрушения стержня, состоящего из диоксида урана  $\text{UO}_2$  и было найдено аналитическое решение для линейного случая. Данная задача была решена методом конечных разностей на равномерной сетке. Также, проведен графический анализ распространения трещин, основанный на графиках напряжений, деформаций и температур.

Решение вышеуказанной задачи было реализовано в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica.

## Список использованных источников

1. *Галанин М.П., Савенков Е.Б.* Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 592 с.
2. Математическое моделирование разрушения хрупкого материала под действием тепловых нагрузок / М.П. Галанин [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2013. № 100. 36 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-100>.
3. *Фрост Б.* ТВЭЛы ядерных реакторов: пер. с англ. М.: Энергоатомиздат, 1986. – 248 с.
4. *Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.* Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. – 512 с.: ил. (Математическое моделирование в технике и в технологии).
5. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
6. *Коваленко А.Д.* Основы термоупругости : учебное пособие / А.Д. Коваленко. – Киев: Наукова думка, 1970. – 307 с.
7. *Dahlblom O., Ottosen N.S.* Smeared Crack Analysis of Concrete Using a Nonlinear Fracture Model // Fracture Mechanics of Concrete. Nordic Seminar Held at Division of Building Materials, November 6, 1986, p. 31-46.