Математическое моделирование термоупругого разрушения хрупкого материала

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
Кафедра «Прикладная математика»

29 июня 2020 г.

Студент группы ФН2-42М — Черняева С.А.

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор кафедры ФН-2 — Галанин М.П.

Цель

Построить одномерную и двумерную модели разрушения стержня и сечения топливной таблетки

Постановка задачи

1. Тензор малых деформаций Коши:

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\Big) = \varepsilon^e_{kl} + \varepsilon^0_{kl}, \tag{1}$$

$\varepsilon^0_{kl} = \varepsilon^T_{kl} = \alpha^T_{kl}\Delta T)$.

2. Определяющее соотношение (закон Гука):

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon^e_{kl} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon^0_{kl}). \tag{2}$$

3. Уравнение равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + b_i = 0. \tag{3}$$

Одномерная модель

Температура

$$T(x,t) = \tilde{T} + F(x) t \sin(t)$$

Зависимость напряжения от деформации

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} E\varepsilon^e, & E\varepsilon^e < \sigma_f^v(\varepsilon); \\ \sigma_f^v(\varepsilon), \quad \sigma_f^v(\varepsilon) = \sigma_f\left(A + Be^{-c\frac{\varepsilon - \varepsilon^T}{\varepsilon_f}}\right), & E\varepsilon^e \geqslant \sigma_f^v(\varepsilon), \end{cases} \tag{4}$$

где $\sigma_f^v(\varepsilon)$: $\sigma_f^v(0) = \sigma_f$,

$$\varepsilon^e = \varepsilon - \varepsilon^T - \varepsilon^{crk}, \tag{5}$$

$$\varepsilon^{crk} = \varepsilon - \varepsilon^T - \frac{\sigma(\varepsilon)}{E}. \tag{6}$$

Математическая модель

Одномерная математическая модель

$$\begin{cases} T(x,t) = \tilde{T} + F(x)\sin(t), & t \geqslant 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l; \\ \dfrac{\partial \sigma}{\partial x} = 0, & 0 < x < l; \\ \sigma = \sigma(\varepsilon - \varepsilon^0), & \varepsilon = \dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon^T = \alpha(T - T_0); \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & \end{cases} \tag{7}$$

$$F(x) \sim \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \; F(x) = a\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

Аналитическое решение для линейного случая

$$u(x,t) = \frac{alt\alpha\sin(t) - 2atx\alpha\sin(t) - alt\alpha\cos\left(\dfrac{\pi x}{l}\right)\sin(t)}{\pi}. \tag{8}$$

Результаты вычислений

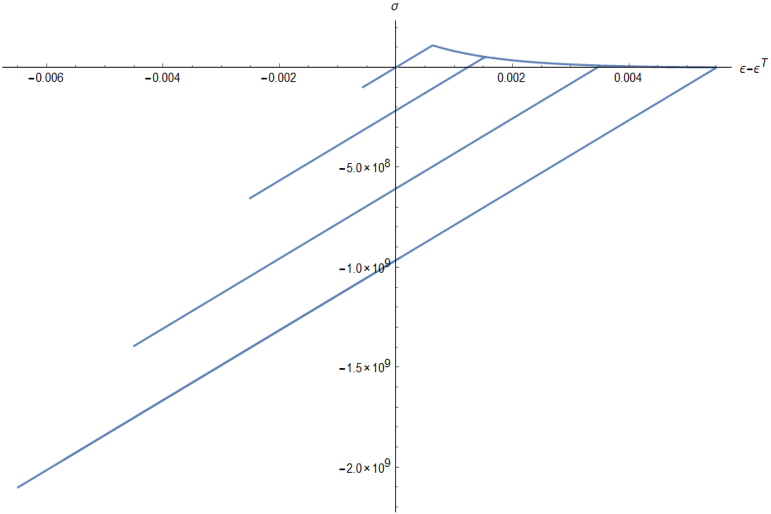
$t = 0.04$

i	h	τ	$\|\|error\|\|_C$	$(\|\|error_i\|\|_C / \|\|error_{i+1}\|\|_C)$
1	0.02	0.02	5.73226e-009	
2	0.01	0.02	1.43294e-009	4.00035
3	0.005	0.02	3.58228e-010	4.00008
4	0.0025	0.02	8.95564e-011	4.00003
5	0.00125	0.02	2.23891e-011	4.

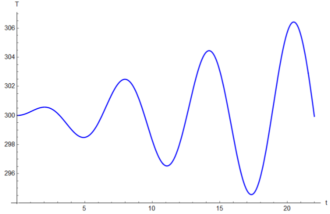
$t = 1$

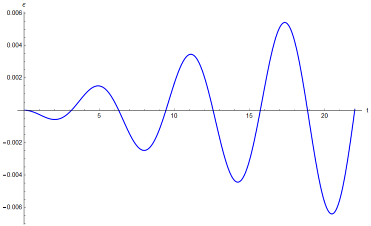
i	h	τ	$\|\|error\|\|$	$(\|\|error_i\|\| / \|\|error_{i+1}\|\|)$
1	0.02	0.02	4.63807e-009	
2	0.01	0.02	1.15942e-009	4.00034
3	0.005	0.02	2.89848e-010	4.0001
4	0.0025	0.02	7.24616e-011	4.00002
5	0.00125	0.02	1.81154e-011	4.

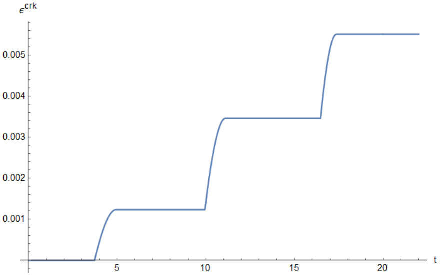
Зависимость σ от ε при знакопеременном нагружении



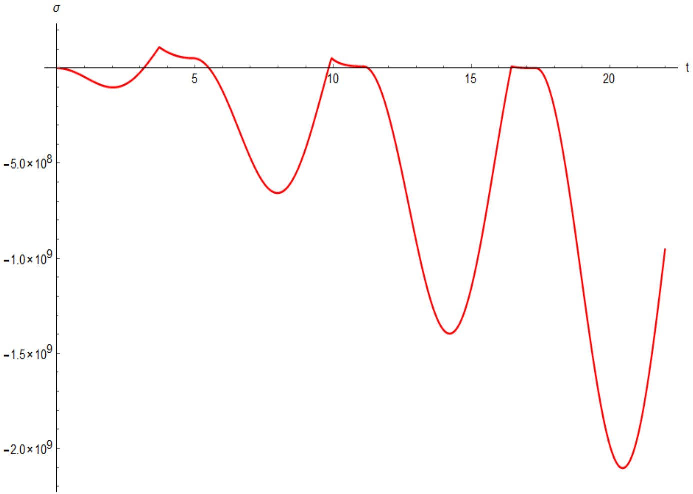
Зависимость T, ε, ε_{crk} от t







Зависимость σ от t



Двумерный случай

Уравнение равновесия и матрица упругих коэффициентов

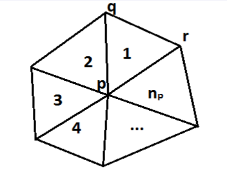
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + b_x = 0, \\ \dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + b_y = 0. \end{cases}$$

$$C = E\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \dfrac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{pmatrix}$$

МКЭ на треугольной неравномерной сетке

$$[K]\{U\} = R_U(T),$$

$$u = \sum_{p=1}^{N} \sum_{i=1}^{n_p} u_{pi} N_{pi}(x,y)$$



$$N_{pi} = \frac{1}{\Delta}(a_{pi} + b_{pi}x + c_{pi}y)$$

Результаты вычислений для кинематических граничных условий

$u_i(\vec{x},t) = \tilde{u}_i(\vec{x},t)$

$$\Delta T(x,y,t) = -1000t\sqrt{(x-x_f/2)^2+(y-y_f/2)^2}$$

h	$\|\|error\|\|$	$(\|\|error_i\|\|/\|\|error_{i+1}\|\|)$
$u(x,t) = \left(y^2e^x\ ;\ \cos(xy)+\sin(xy)\right)^T$		
7.5e-4	4.9698e-08	
3.75e-4	1.1785e-08	4.2170
1.875e-4	3.2510e-09	3.6250
$u(x,t) = \left(e^{x^2+y^2}\ ;\ \tanh(xy)\right)^T$		
7.5e-4	3.7796e-08	
3.75e-4	1.0721e-08	3.5255
1.875e-4	3.2510e-09	3.6345
$u(x,t) = \arctan(x+y)\ ;\ \sinh(xy))^T$		
7.5e-4	5.3041e-06	
3.75e-4	1.1476e-06	4.6218
1.875e-4	3.3861e-07	3.3892

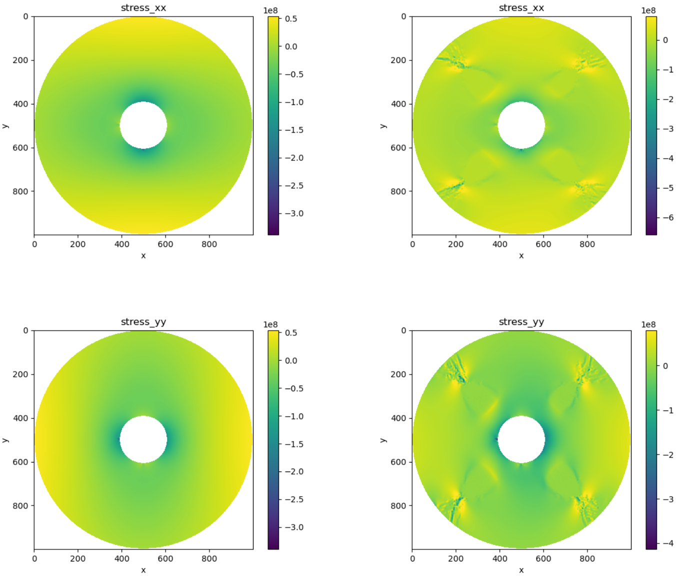
Результаты вычислений для кинематических и силовых граничных условий

$u_i(\vec{x},t) = \tilde{u}_i(\vec{x},t)$, $\sigma_{ij}(\vec{x})n_j(\vec{x}) = \tilde{p}_i(\vec{x})$

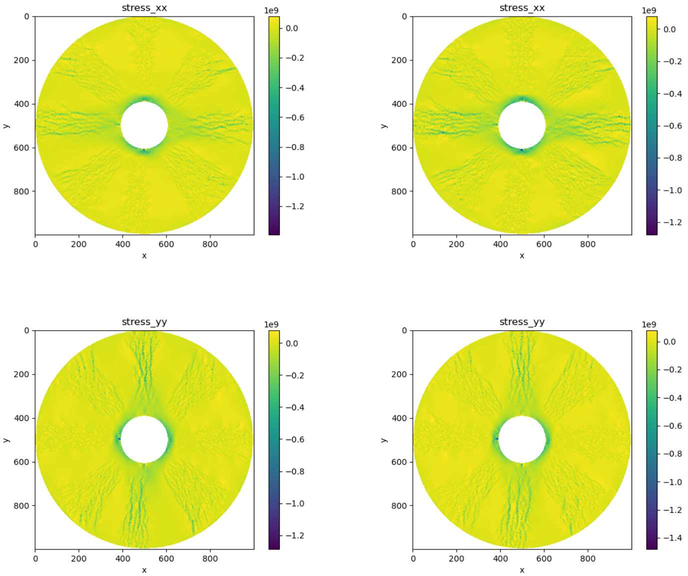
$$\Delta T(x,y,t) = -1000t\sqrt{(x - x_f/2)^2 + (y - y_f/2)^2}$$

h	$\|\|error\|\|$	$(\|\|error_i\|\|/\|\|error_{i+1}\|\|)$
$u(x,t) = \left(y^2e^x \;;\; \cos(xy) + \sin(xy)\right)^T$		
7.5e-4	1.4322e-07	
3.75e-4	3.5424e-08	4.0430
1.875e-4	9.4731e-09	3.7394
$u(x,t) = \left(e^{x^2+y^2} \;;\; \tanh(xy)\right)^T$		
7.5e-4	1.0206e-07	
3.75e-4	2.4944e-08	4.0914
1.875e-4	6.8848e-09	3.6231
$u(x,t) = \arctan(x+y) \;;\; \sinh(xy))^T$		
7.5e-4	9.3674e-06	
3.75e-4	2.3254e-06	4.0283
1.875e-4	0.6060e-06	3.76084

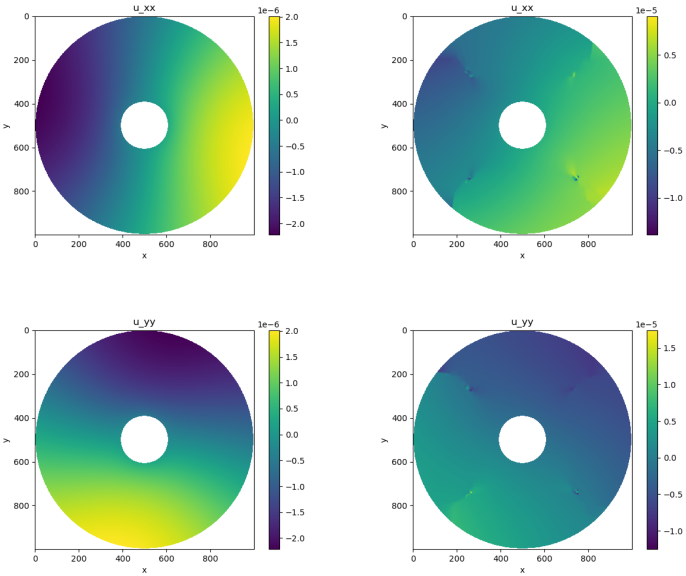
$\sigma_{xx}(x,y)$, $\sigma_{yy}(x,y)$ при $t = 0.09t_f$, $t = 0.2t_f$



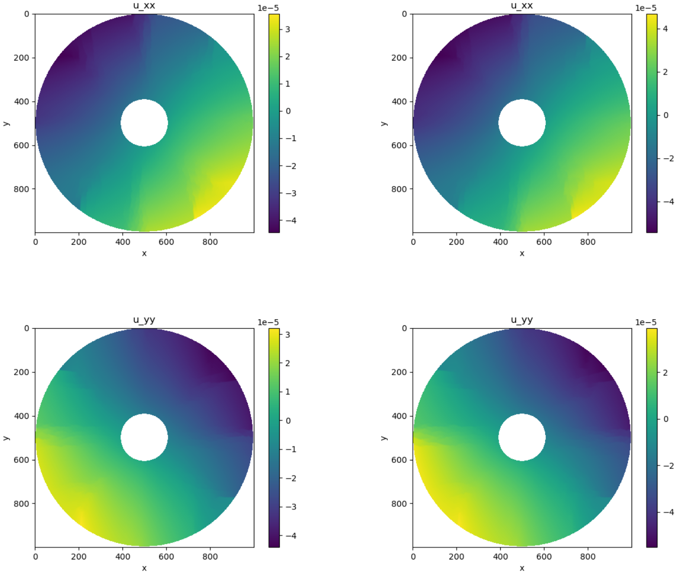
$\sigma_{xx}(x, y)$, $\sigma_{yy}(x, y)$ при $t = 0.8t_f$, $t = t_f$



$u_x(x,y)$, $u_y(x,y)$ при $t = 0.09t_f$, $t = 0.2t_f$



$u_x(x,y)$, $u_y(x,y)$ при $t = 0.8t_f$, $t = t_f$



Заключение

1. Построена математическая модель разрушения стержня в одномерном случае и сечения топливной таблетки в двумерном
2. Методом конечных элементов на неравномерной треугольной сетке решена задача термоупругости
3. Во всех задачах подтвержден порядок точности схемы на известных аналитических решениях
4. Проведен графический анализ распространения трещин, основанный на графиках напряжений, перемещений в различные временные промежутки

Спасибо за внимание!