Математическое моделирование термоупругого разрушения хрупкого материала

Докладчик: Швецов Г.А.
Научный руководитель: д.ф-м.н., профессор кафедры ФН-2 Галанин М.П.

группа ФН2-52Б

1 февраля 2023 г.

Постановка задачи. Цель

Цель

Цель работы – построение и анализ одномерной модели разрушения стержня, а также решение задачи термоупругости разностной схемой и нахождение аналитического решения для линейного случая.

Постановка задачи

1. Тензор малых деформаций Коши

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) = \varepsilon^e_{kl} + \varepsilon^0_{kl}, \quad \varepsilon^0_{kl} = \varepsilon^T_{kl} = \alpha^T_{kl}\Delta T.$$

2. Обобщенный закон Гука

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon^e_{kl} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon^0_{kl}).$$

3. Уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + b_i = 0.$$

Аппроксимация

$$\frac{\sigma}{\sigma_f} = A + Be^{-C\frac{\varepsilon}{\varepsilon_f}}, \tag{1}$$

где коэффициенты A, B выводятся экспериментально.
Для дикосида урана UO_2: $A = -0.024$, $B = 1.69$, $C = 0.5$.

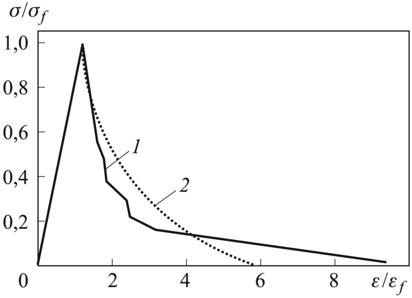


Рис. Экспериментальная (1) и аналитическая (2) кривые растягивающего отклика для керамических материалов

Одномерный случай

Зависимость напряжений от деформаций

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} E\varepsilon^e, & E\varepsilon^e < \sigma_f^v(\varepsilon), \\ \sigma_f^v(\varepsilon),\ \sigma_f^v = \sigma_f\left(A + Be^{-C\frac{\varepsilon-\varepsilon^T}{\varepsilon_f}}\right), & E\varepsilon^e \geq \sigma_f^v(\varepsilon), \end{cases} \tag{2}$$

где $\sigma_f^v(\varepsilon)$ – переменный предел прочности $(\sigma_f^v(0) = \sigma_f)$.

$$\varepsilon^e = \varepsilon - \varepsilon^T - \varepsilon^{crk}, \tag{3}$$

$$\varepsilon^{crk} = \varepsilon - \varepsilon^T - \frac{\sigma(\varepsilon)}{E}, \tag{4}$$

где ε^e – упругие деформации, ε^{crk} – деформации за счет трещин, ε^T – температурные деформации, E – модуль Юнга.

Математическая модель для стержня

Знакопеременная нагрузка за счет изменения температуры

$$T(x,t) = \tilde{T} + F(x)\tau(t),$$

где $F(x)$ – пространственное распределение температуры, $\tau(t)$ – временнóе, $\tilde{T}$ – усредненная по времени температура.

Одномерная модель

$$\begin{cases} T(x,t) = \widetilde{T} + F(x)\tau(t), & t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq l, \\ \sigma = \sigma(\varepsilon - \varepsilon^T), & \varepsilon = \dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon^T = \alpha(T - T_0), \\ \dfrac{\partial \sigma}{\partial x} = 0, & 0 \leq x \leq l, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0. \end{cases}$$

Тестовая задача

Пусть $F(x) = a\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$, $\tau(t) = t\sin(t)$, $a = 50$, $T_f = 20$ с, $l = 10$, $\tau_h = 0.005$ с, $T_0 = \tilde{T} = 300$ К, $n = 10$.
Для упругого случая составим дифференциальное уравнение и найдем аналитическое решение.

Линейный случай

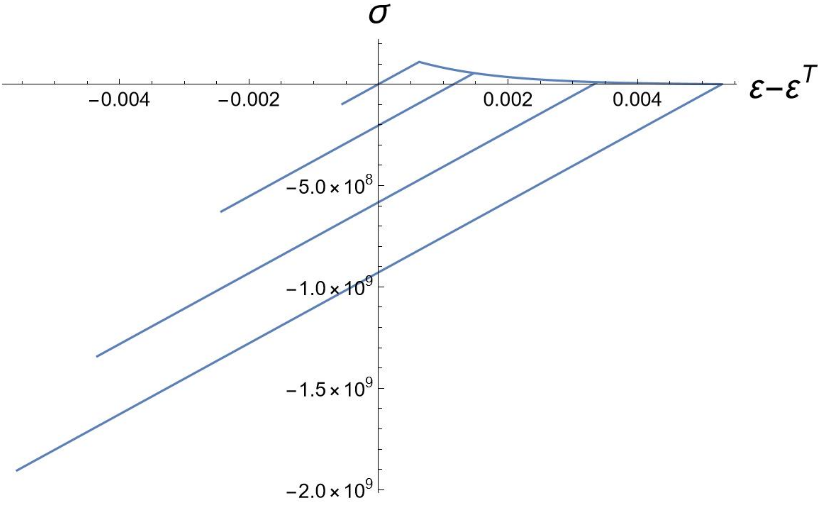
$$\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon^e = E(\varepsilon - \varepsilon^T) = E\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha(T(x,t) - T_0)\right),$$

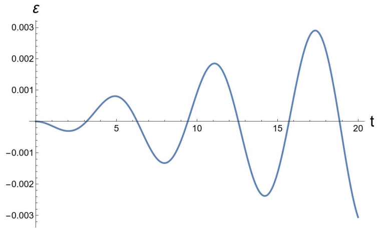
$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}.$$

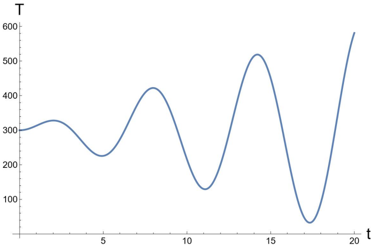
Аналитическое решение

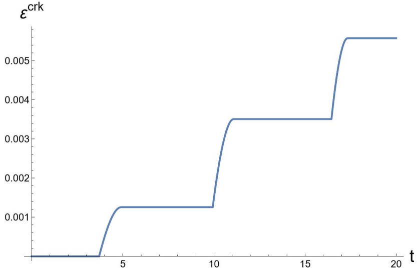
$$u(x,t) = \alpha\frac{at\sin(t)}{\pi}\left(l - 2x - l\cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)\right).$$

Зависимость напряжения σ от деформаций $\varepsilon - \varepsilon^T$

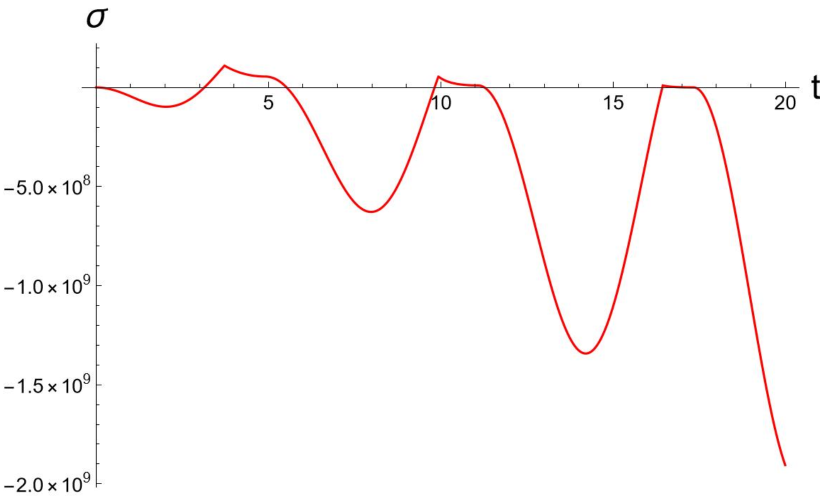



ε
0.003
0.002
0.001
−0.001
−0.002
−0.003
5
10
15
20
t


T
600
500
400
300
200
100
5
10
15
20
t


εcrk
0.005
0.004
0.003
0.002
0.001
5
10
15
20
t

Зависимость σ от t



1. Построена математическая модель разрушения стержня в одномерном случае;
2. Методом конечных разностей на равномерной сетке решена задача термоупругости;
3. Для линейного случая найдено аналитическое решение.

Список использованных источников

- *Галанин М.П., Савенков Е.Б.* Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. – 592 с.
- Математическое моделирование разрушения хрупкого материала под действием тепловых нагрузок / М.П. Галанин [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2013.No 100. – 36 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-100
- *Фрост Б.* ТВЭЛы ядерных реакторов: пер. с англ. М.: Энергоатомиздат, 1986. – 248 с.
- *Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.* Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. – 512 с.: ил. (Математическое моделирование в технике и в технологии).

Спасибо за внимание!