Качественно-аналитическое исследование систем ОДУ

Докладчик: Швецов Г.А.
Научный руководитель: д.ф-м.н., профессор кафедры ФН-2 Галанин М.П.

группа ФН2-42Б

20 января 2023 г.

Постановка задачи

Целью курсовой работы является исследование, а также рассмотрение задачи Коши для следующей системы ОДУ

$$\begin{cases} m\dot{v} = -u\dot{m} - \alpha m v, \\ \dot{m} = -\beta m - \gamma v - f_0, \\ v = v_0,\ t = 0, \\ m = m_0,\ t = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Данная задача моделирует полет ракеты в среде с трением при заданной начальной скорости и при заданной начальной массе.

Линеаризация системы

Из системы (1) получаем одну особую точку $\tilde{v} = 0, \tilde{m} = -\frac{f_0}{\beta}$.
Перенесем особую точку в начало координат

Замена переменных

$$\begin{cases} \xi = v, \\ \eta = m + \frac{f_0}{\beta}. \end{cases}$$

Нелинейная система

$$\begin{cases} \dot{\xi} = u\beta + \frac{\beta u}{\beta\eta - f_0}(f_0 + \gamma\xi) - \alpha\xi, \\ \dot{\eta} = -\gamma\xi - \beta\eta. \end{cases} \tag{2}$$

Линеаризуем и получим *систему первого приближения*

Линейная система

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -(\frac{u\gamma\beta}{f_0} + \alpha)\xi - \frac{u\beta^2}{f_0}\eta, \\ \dot{\eta} = -\gamma\xi - \beta\eta. \end{cases} \tag{3}$$

Матрица Якоби

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} -\frac{u\gamma\beta}{f_0} - \alpha & -\frac{u\beta^2}{f_0} \\ -\gamma & -\beta \end{pmatrix} \tag{4}$$

Фазовые портреты в зависимости от собственных чисел

Для матрицы Якоби $\mathbb{J}$ найдем собственные числа

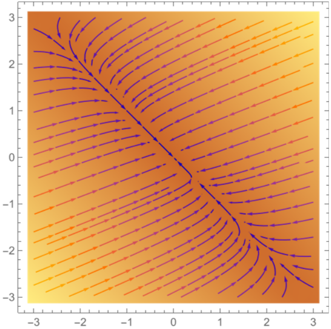
$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-\alpha - \beta - \frac{u\beta\gamma}{f_0} \pm \sqrt{-4\alpha\beta + \left(\alpha + \beta + \frac{u\beta\gamma}{f_0}\right)^2}\right)$$

Классификация точек покоя

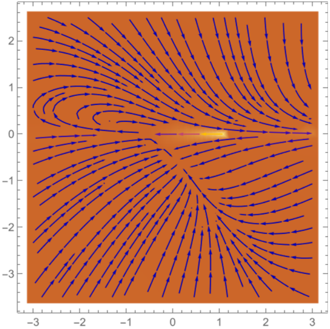
Корни	Тип точки покоя
$\lambda_1,\, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1\lambda_2 = \alpha\beta > 0$	Узел
$\lambda_1,\, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1\lambda_2 = \alpha\beta < 0$	Седло
$\lambda_1,\, \lambda_2 \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(\lambda_1) = \mathrm{Re}(\lambda_2) \neq 0$	Фокус
$\lambda_1,\, \lambda_2 \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(\lambda_1) = \mathrm{Re}(\lambda_2) = 0$	Центр

Исследование устойчивости точки покоя

Невырожденный узел $f_0 = 2,\ \alpha = 3,\ \beta = 4,\ \gamma = 3,\ u = 1$



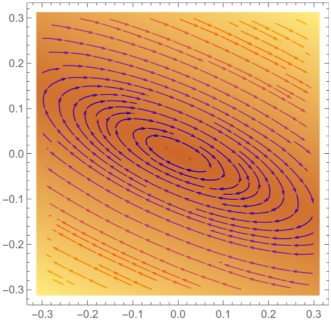
Фазовый портрет линейной системы



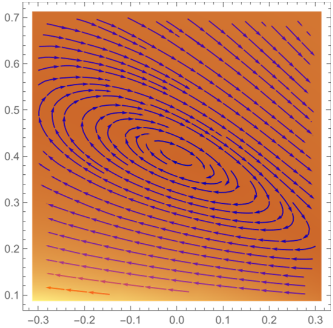
Фазовый портрет нелинейной системы

Исследование устойчивости точки покоя

Центр $f_0 = -2,\ \alpha = 4,\ \beta = 4,\ \gamma = 2,\ u = 1$



Фазовый портрет линейной системы



Фазовый портрет нелинейной системы

Аналитическое решение системы

Для нахождения аналитического решения предположим, что $\gamma = f_0 = 0$. Тогда перепишем систему (1) в виде

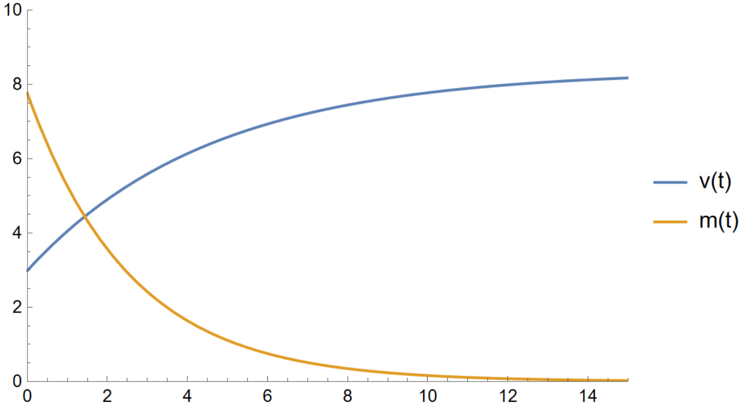
$$\begin{cases} \dot{v} = u\beta - \alpha v, \\ \dot{m} = -\beta m, \\ v = v_0, \ t = 0, \\ m = m_0, \ t = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Получим частное решение системы (5)

$$\begin{cases} v = \frac{u\beta + (\alpha v_0 - u\beta)e^{-\alpha t}}{\alpha}, \\ m = m_0 e^{-\beta t}. \end{cases}$$

Аналитическое решение системы

Графическое представление частного решения системы



Результаты

В ходе работы получены следующие результаты

1. изучена линеаризация нелинейных систем;
2. исследована устойчивость точки покоя в зависимости от параметров задачи;
3. найдено аналитическое решение системы ОДУ.

Спасибо за внимание!