



Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ»

КАФЕДРА «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА»

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЕ
НА ТЕМУ:

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОУПРУГОГО
РАЗРУШЕНИЯ ХРУПКОГО МАТЕРИАЛА

Студент ФН2-42М
(Группа)

(Подпись, дата)

Черняева С.А.
(И.О.Фамилия)

Руководитель ВКР

(Подпись, дата)

Галанин М.П.
(И.О.Фамилия)

Нормоконтролер

(Подпись, дата)

Лукашин М.М.
(И.О.Фамилия)

2020 г.

АННОТАЦИЯ

В работе рассмотрена задача разрушения одномерного стержня и горизонтального сечения топливной таблетки, изготовленной из диоксида урана. Решена задача термоупругости для одномерного случая методом конечных разностей, для многомерного – методом конечных элементов на неравномерной треугольной сетке. Для конечноэлементной и конечноразностной задачи подтверждены порядки точности схем на ряде тестовых задач. Построена многомерная модель разрушения на основе понятия функции памяти. Проведен графический анализ распространения трещин в разные моменты времени расчета. Разработан программный комплекс на языке «Python» и «C++».

Содержание

АННОТАЦИЯ	2
ВВЕДЕНИЕ	4
1. Постановка задачи	9
2. Одномерный случай	12
2.1. Результаты вычислений	14
3. Двумерный случай	23
3.1. Конечноэлементная постановка задачи	24
3.2. Результаты тестовых расчетов	29
3.3. Кинематические граничные условия	30
3.4. Силовые и кинематические граничные условия	34
3.5. Образование трещин	38
3.6. Уравнение теплопроводности	41
3.7. Решение задачи с учетом образования трещин	42
4. Особенности программной реализации	48
4.1. Программная реализация задачи тепромупругости	49
4.2. Программная реализация задачи термоупругости с учетом об- разования трещин	53
Заключение	59
Список использованных источников	60
ПРИЛОЖЕНИЕ А	62

ВВЕДЕНИЕ

Анализ прочности – один из важнейших этапов проверки работоспособности конструкций. Именно поэтому задачи разрушения и прочности не теряют свою актуальность. Задача разрушения нелинейна. Она достаточно сложная и малоисследованная [1].

Разрушением называется исчерпание несущей способности тела, которое происходит или из-за беспрепятственного пластического течения (неограниченного изменения формы), или накопления повреждений и развития трещин [7]. В области перенапряжения материала всегда происходит разрушение. Обычно данные области находятся в окрестности дефектов структуры того или иного материала, среди них наиболее опасные – это трещины. Нагруженные материалы в большинстве случаев разрушаются по причине развития одной трещины, которая является самой опасной. Её называют трещиной разрушения. Ниже приведены подходы, в полной мере описывающие общую модель разрушения.

1. Механический подход, который проявляется в определении в каждый момент времени напряженнодеформированного состояния материала с учетом трещин, уже имеющихся в нем;
2. Термодинамический подход является определением частоты элементарных актов процесса разрушения в напряженнодеформированном состоянии.
3. Кинетический подход – это составление кинетических уравнений самого процесса разрушения.
4. Статистический подход описывает оценку функции изначального распределения трещин в рассматриваемом материале [5].

Основные физические характеристики, представляющие интерес в задачах прочности – это предсказание различных сценариев развития разрушения, оценка прочности, определение времени разрушения, влияние различных изменений свойств материала на процессы самого разрушения [6]. Математическое моделирование процесса разрушения – это сложная теоретическая задача, для ее построения нужно учитывать большое число факторов: внешние

условия, структуру материала, нагрузки, существование внутренних дефектов и т.д.

Основные типы разрушения – это вязкое и хрупкое разрушение. Хрупкое разрушение – это вид разрушения твердого тела, в котором при распространении трещины размер области пластической деформации пренебрежимо мал у вершины трещины по отношению к размеру трещины или поперечнику твердого тела. Вязкое разрушение – это разрушение, для которого размер зоны пластической деформации у вершины трещины, которая постепенно распространяется, сравним с величиной трещины [8]. Хрупкое разрушение неотрывно связано с процессом накопления рассеянных повреждений и распространения изолированных трещин. Ключевая идея метода механики рассеянных повреждений связана с тем фактом, что материал, который имеет дефекты можно заменить воображаемым материалом, у которого нет дефектов, но он обладает пониженным модулем упругости [9]. Вязкое разрушение в свою очередь связано с моделями течения сплошной среды, то есть пластичностью с упрочнением, с идеальной пластичностью и т.д. [7].

Также интерес представляют виды повреждений, их всего два: рассеянные дефекты и многочисленные. Первые – малые по размеру дефекты, вторые – магистральные трещины, большие по размеру, они сопоставимы с размерами тела. Также есть модели, которые реализуют рассеянные дефекты и магистральные трещины. Образование магистральных трещин и их развитие в основном моделируется дискретным образом или эффективно. Во время хрупкого разрушения одновременно появляется большое количество трещин. Это препятствует возможности исследования образования каждой из трещин. Это является основной причиной того, что более интересным в случае хрупкого разрушения является эффективный подход.

В области нашего интереса лежат модели, которые учитывают накопление повреждений перед появлением магистральной трещины, а также развития такой трещины. Чаще всего анализ состояния рассматриваемого материала (который основан на механике сплошной среды) проводится для оценки прочности и для исследования процесса разрушения. Рассмотрим модели, которые описывают изменение различных механических свойств материала в

рамках механики сплошной среды. Данные модели дают возможность наблюдать за изменением напряженно-деформированного состояния тела и процесс развития трещин [1].

Интересная и актуальная задача из данной области – это задача разрушения топливных таблеток в ядерных реакторах, которые располагаются внутри герметично закрытых тепловыделяющих элементов, которые называют ТВЭЛами. Характерное поведение таблетки после появления трещин, изменение ее прочностных характеристик представляет большую важность. Ядерное топливо из диоксида урана (UO_2) при совокупности некоторых факторов в ТВЭЛах начинает растрескиваться. Изображения топливных таблеток и секторов ТВЭЛов, а также разрушение топливной таблетки приведены на рис. 0.1, 0.2 и 0.3.

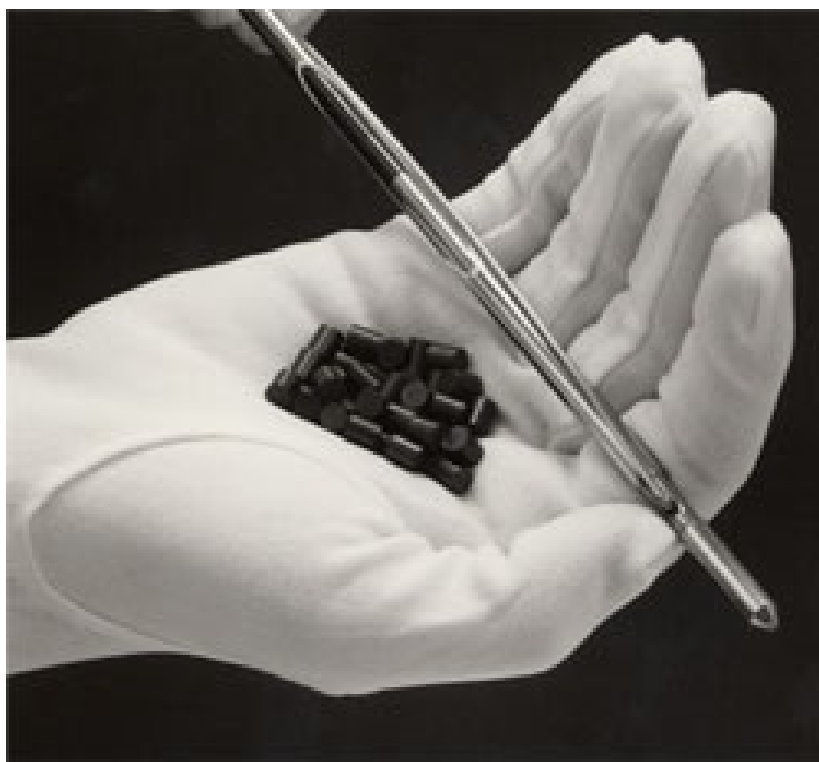


Рис. 0.1. Топливные таблетки

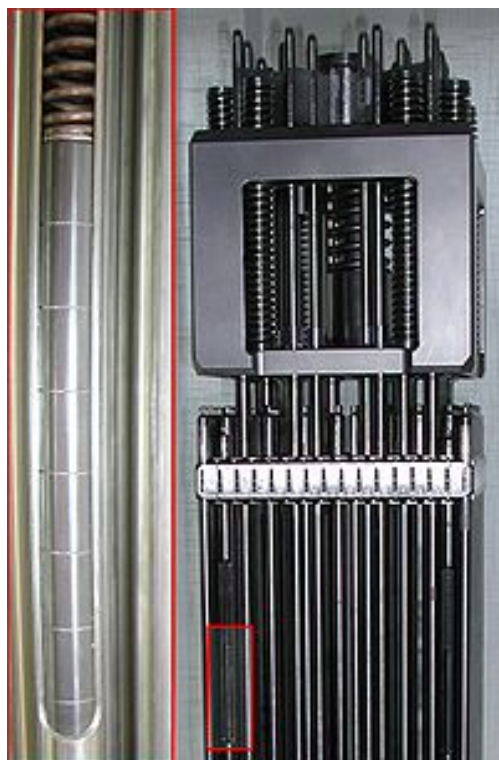


Рис. 0.2. Сектора ТВЭЛов

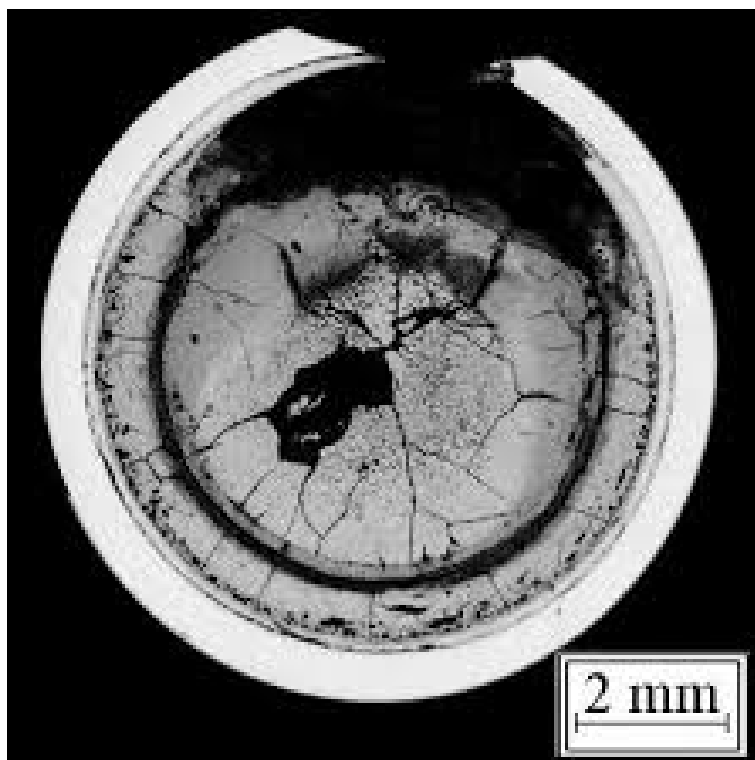


Рис. 0.3. Процесс разрушения топливной таблетки

Цель работы заключается в построении и реализации одномерной и двумерной модели разрушения стержня и горизонтального сечения топливной таблетки, обладающих физическими свойствами и характеристиками диок-

сида урана (UO_2), а также решение задачи термоупругости с помощью разностных и конечноэлементных схем.

1. Постановка задачи

В постановку задачи входят следующие соотношения [1]:

1). Тензор малых деформаций Коши:

$$\epsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) = \epsilon_{kl}^e + \epsilon_{kl}^0, \quad k, l = 1, 2, 3. \quad (1.1)$$

Здесь ϵ_{kl}^e – компоненты упругой составляющей тензора деформаций, ϵ_{kl}^0 – компоненты тензора неупругих деформаций среды. Мы рассматриваем деформируемое твердое тело, а именно термоупругую сплошную среду. Она имеет хотя бы одно естественное состояние, в котором отсутствуют напряжения и деформации, при том температура во всех точках одинакова [3]. Тензор 1.1 написан в предположении его аддитивного разложения. Пусть тело в начальный момент времени имеет температуру $T_0 = const$. В данном случае при отклонении $T(x, t)$ от T_0 возникнут температурные деформации, которые описываются тензором температурной деформации $\hat{\epsilon}^T$ с компонентами ϵ_{kl}^T , а они в свою очередь линейно связаны с приращением $\Delta T = T(x, t) - T_0$:

$$\epsilon_{kl}^T = \alpha_{kl}^T \Delta T,$$

где α_{kl}^T – это компоненты тензора теплового расширения $\hat{\alpha}^T$, поэтому $\epsilon_{kl}^0 = \epsilon_{kl}^T = \alpha_{kl}^T \Delta T$.

2). Определяющее соотношение или закон Гука:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}^e = C_{ijkl} (\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^0), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad k, l = 1, 2, 3, \quad (1.2)$$

σ_{ij} – это компоненты тензора напряжений, а C_{ijkl} – компоненты тензора коэффициентов упругости \hat{C} . Симметрическую матрицу C можно поставить в соответствие тензору \hat{C} . Если поворотом системы координат симметрическую матрицу можно привести к матрице

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

с девятью независимыми компонентами, то среда называется линейной термоупругой ортотропной. При этом если $C_{11} = C_{22} = C_{33}$, $C_{12} = C_{13} = C_{23}$, и $C_{44} = C_{55} = C_{66} = (C_{11} - C_{12})/2$, то среда линейно-упругая изотропная. Упругие свойства среды зависят от двух независимых параметров: $\lambda = C_{12}$, $\mu = (C_{11} - C_{12})/2$. Параметры λ и μ – это константы Ламе. Компоненты тензора упругих коэффициентов выглядят следующим образом:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu I_{ijkl}, \quad (1.4)$$

где $I_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$ – это компоненты единичного тензора четвертого ранга, а δ_{ij} – это символ Кронекера [3].

3). Уравнение равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + b_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.5)$$

b_i – это проекции вектора плотности объемных сил b на оси Ox_i пространственных координат. Правило суммирования по повторяющимся индексам принято здесь и далее.

Зададим кинематические и силовые граничные условия:

$$u_i(\vec{x}, t) = \tilde{u}_i(\vec{x}, t), \quad \vec{x} \in S_u, \quad (1.6)$$

$$\sigma_{ij}(\vec{x}) n_j(\vec{x}) = \tilde{p}_i(\vec{x}), \quad \vec{x} \in S_p, \quad (1.7)$$

где $S = S_u \cup S_p$ – это поверхность рассматриваемого тела, S_u – это часть поверхности, где заданы кинематические граничные условия, S_p – это часть поверхности, где заданы силовые граничные условия.

Опишем разрушение с помощью модели "размазанных" трещин. В данной модели пренебрегают разрывами деформаций и напряжений во время процесса растрескивания, а в основе ее теории лежит изменение свойств материала. Модель чувствительна к изменению шага сетки, это является ее главным недостатком. Характер трещин, их распространения и время их появления зависит от шага сетки [4]. Данная модель может быть применена для материалов, в которых образуются микротрещины, также в них должны

быть пренебрежимо малы пластические деформации. Также важной характеристикой такого материала (к которому можно применить модель размазанных трещин) является линейная зависимость напряжений от деформаций до достижения предела прочности. Данными характеристиками обладает некоторое виды пластика, бетон и керамика [11]. На рис. 1.1 для керамики представлено характерное поведение. Если напряжения меньше предела прочности σ_f и деформации меньше соответствующего значения ε_f , то материал поведение материала можно описать как линейно-упругое, а если значения деформаций превышают предел прочности, то происходит разгрузка материала в соответствии с нелинейным законом. Если напряжения равны пределу

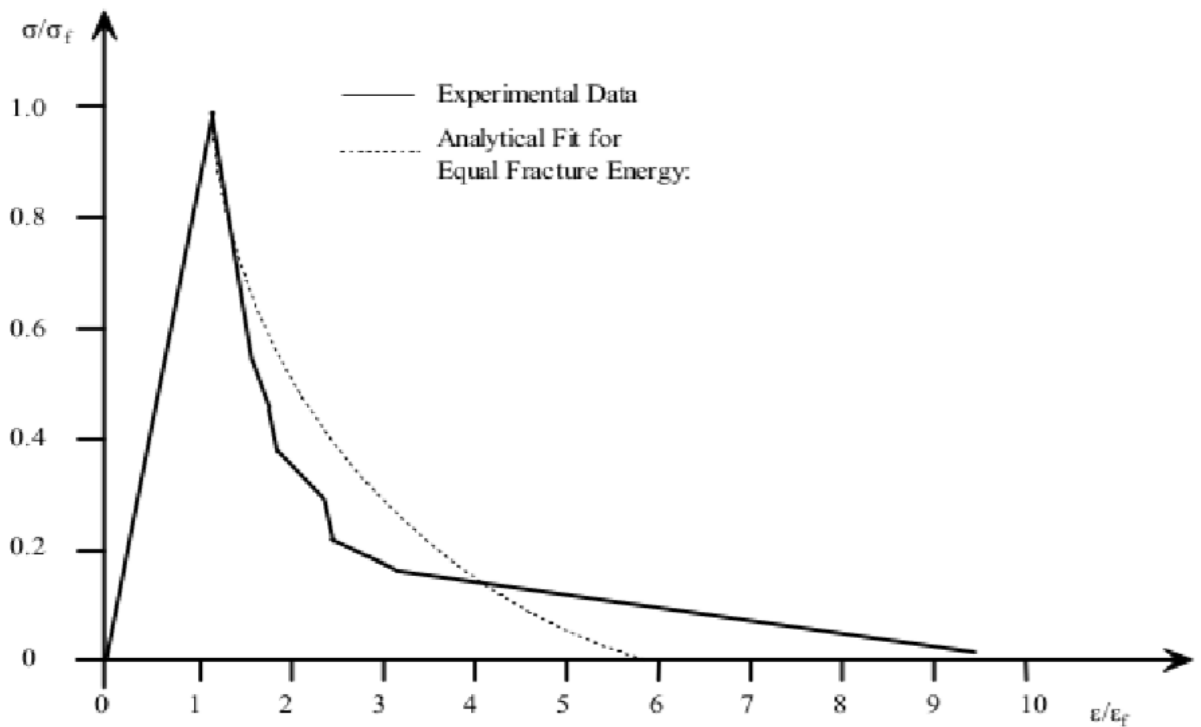


Рис. 1.1. Кривая нормализованного растягивающего отклика для керамических материалов

прочности σ_f , то считается, что произошла инициализация трещины, но она еще не сформировалась, так продолжается, пока деформации не достигают значения, которое больше предела прочности в 5-10 раз. Кривую, имеющую данный характер поведения, можно аппроксимировать в следующем виде:

$$\frac{\sigma}{\sigma_f} = A + B e^{-C \frac{\varepsilon}{\varepsilon_f}}.$$

2. Одномерный случай

Рассмотрим одномерный стержень длины l , закрепленный на концах, а также квазистационарную задачу для него. Параметром t – возрастающий, он в данном случае имеет смысл времени. Для квазистационарной задачи будем решать уравнение равновесия на каждом временном слое. Физические свойства материала: предел прочности σ_f , модуль Юнга E , коэффициент теплового расширения α зададим исходя из физических свойств диоксида урана. Приложим знакопеременную нагрузку, которая появится вследствие изменения температуры $T(x, t) = \tilde{T} + F(x)t \sin(t)$, где \tilde{T} – это усредненная во времени температура, $F(x)$ – некоторая функция, описывающая пространственное распределение температуры на каждом временном слое [1].

Нелинейная модель упругости и образования трещин для зависимости напряжения от деформации выглядит следующим образом:

$$\sigma(\epsilon) = \begin{cases} E\epsilon^e, & E\epsilon^e < \sigma_f^v(\epsilon); \\ \sigma_f^v(\epsilon), & \sigma_f^v(\epsilon) = \sigma_f \left(A + B e^{-c \frac{\epsilon - \epsilon^T}{\epsilon_f}} \right), \quad E\epsilon^e \geq \sigma_f^v(\epsilon), \end{cases} \quad (2.1)$$

ϵ^e – это упругая деформация, $\sigma_f^v(\epsilon)$ – это переменный предел прочности, в недеформированном состоянии материала он равен пределу прочности при растяжении: $\sigma_f^v(0) = \sigma_f$ [1]. Следующим образом можно представить значение упругой деформации:

$$\epsilon^e = \epsilon - \epsilon^T - \epsilon^{crk}, \quad (2.2)$$

где ϵ – это полная деформация, ϵ^T – температурная деформация, ϵ^{crk} – деформация за счет трещин, которая вычисляется по данным о текущем состоянии на данный момент:

$$\epsilon^{crk} = \epsilon - \epsilon^T - \frac{\sigma(\epsilon)}{E}. \quad (2.3)$$

$\epsilon^{crk} = 0$ при первоначальном нагружении, когда материал не подвержен нагрузкам, которые больше предела прочности. В послепиковой области, в которой материал ведет себя по нелинейным законам, $\epsilon^{crk} > 0$ [1].

Математическая модель для стержня:

$$\begin{cases} T(x, t) = \tilde{T} + F(x) \sin(t), & t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq l; \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0, & 0 < x < l; \\ \sigma = \sigma(\varepsilon - \varepsilon^0), & \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon^T = \alpha(T - T_0); \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

где u – это перемещения. Нелинейная зависимость (2.1) имеет место быть при значениях деформаций $\varepsilon^e + \varepsilon^{crk} = \varepsilon - \varepsilon^T$, которые меньше ε^0 , в свою очередь ε^0 – это значение деформации, которое больше предела прочности в 5-10 раз. При данном значении деформации в случае одномерной задачи материал не способен передавать напряжения ($\sigma=0$) [1]. Функцию $F(x)$ возьмем в виде симметричной функции относительно середины стержня. Положим $F(x) \sim \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$.

2.1. Результаты вычислений

Вышеописанную задачу будем решать методом конечных разностей на равномерной сетке. При значениях напряжений, которые больше предела прочности σ_f , материал разгружается по нелинейному закону, поэтому появляется необходимость решать нелинейное уравнение. Будем линеаризовывать его, использовать метод Ньютона.

Для упругого, линейного случая зависимости (2.1) можно найти аналитическое решение.

Пусть $F(x) = a \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$, $\epsilon^{crk} = 0$, $\epsilon^0 = 0$.

$$\sigma(\epsilon) = E\epsilon^e = E(\epsilon - \epsilon^T) = E\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha\left(\tilde{T} + a \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \sin(t) - T_0\right)\right),$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = E\left(u_{xx} - \alpha a \frac{\pi}{l} \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \sin(t)\right) = 0.$$

В результате получаем уравнение

$$u_{xx} - \alpha a \frac{\pi}{l} \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \sin(t) = 0,$$

Аналитическое решение которого представлено в виде:

$$u(x, t) = \frac{alt\alpha \sin(t) - 2atx\alpha \sin(t) - alt\alpha \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \sin(t)}{\pi}. \quad (2.5)$$

Проведем проверку порядка точности для линейного случая зависимости напряжений от деформаций для трех различных законов изменения температуры.

Физические характеристики диоксида урана выглядят следующим образом: $\alpha = 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, $\tilde{T} = T_0 = 300 \text{ K}$, $E = 1.75 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, $\sigma_f = 1.1 \cdot 10^8 \text{ Па}$, $\epsilon_f = 0.000628571$. Пусть $l = T_f = 1$, $a = 50$, где T_f – конечный момент времени расчета. В пространстве $C[a, b]$, непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с нормой $\|x\|_C = \max_{[a, b]} |x|$ [2], на моменты времени: $t = 2\tau$, $t = T_f/2$, $t = T_f$ будем наблюдать ошибку. В методе Ньютона итерации будем вести, пока норма ошибки $\|error\|_C$ не станет меньше заданной точности: 10^{-7} .

$$1. T(x, t) = \tilde{T} + F(x)t \sin(t), \quad F(x) = a \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

Аналитическое решение:

$$u(x, t) = \frac{alt\alpha \sin(t) - 2atx\alpha \sin(t) - alt\alpha \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \sin(t)}{\pi}.$$

Точность метода Ньютона: 10^{-7}

$t = 0.04$

i	h	τ	$\ error\ _C$	$(\ error_i\ _C/\ error_{i+1}\ _C)$
1	0.02	0.02	8.81662e-012	
2	0.01	0.02	2.20397e-012	4.00034
3	0.005	0.02	5.50979e-013	4.0001
4	0.0025	0.02	1.37744e-013	4.00002
5	0.00125	0.02	3.4436e-014	4

$t = 0.5$

i	h	τ	$\ error\ _C$	$(\ error_i\ _C/\ error_{i+1}\ _C)$
1	0.02	0.02	1.32126e-009	
2	0.01	0.02	3.30287e-010	4.00034
3	0.005	0.02	8.257e-011	4.00008
4	0.0025	0.02	2.06424e-011	4.00002
5	0.00125	0.02	5.16059e-012	4.00001

$t = 1$

i	h	τ	$\ error\ _C$	$(\ error_i\ _C/\ error_{i+1}\ _C)$
1	0.02	0.02	4.63807e-009	
2	0.01	0.02	1.15942e-009	4.00034
3	0.005	0.02	2.89848e-010	4.0001
4	0.0025	0.02	7.24616e-011	4.00002
5	0.00125	0.02	1.81154e-011	4.

2. $T(x, t) = \tilde{T} + F(x) \cos(2t) \sin(3t), \quad F(x) = a \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$

Аналитическое решение:

$$u(x, t) = \left(al\alpha \cos(2t) \sin(3t) - 2ax\alpha \cos(2t) \sin(3t) - al\alpha \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cos(2t) \sin(3t) \right) / \pi.$$

Точность метода Ньютона: 10^{-7}

$t = 0.04$

i	h	τ	$\ error\ _C$	$(\ error_i\ _C/\ error_{i+1}\ _C)$
1	0.02	0.02	6.57726e-010	
2	0.01	0.02	1.64417e-010	4.00035
3	0.005	0.02	4.11035e-011	4.00007
4	0.0025	0.02	1.02758e-011	4.00003
5	0.00125	0.02	2.56895e-012	4.

$t = 0.5$

i	h	τ	$\ error\ _C$	$(\ error_i\ _C/\ error_{i+1}\ _C)$
1	0.02	0.02	2.97061e-009	
2	0.01	0.02	7.42588e-010	4.00035
3	0.005	0.02	1.85643e-010	4.00009
4	0.0025	0.02	4.64105e-011	4.00002
5	0.00125	0.02	1.16026e-011	4.00001

$t = 1$

i	h	τ	$\ error\ _C$	$(\ error_i\ _C/\ error_{i+1}\ _C)$
1	0.02	0.02	3.23693e-010	
2	0.01	0.02	8.09163e-011	4.00034
3	0.005	0.02	2.02286e-011	4.00009
4	0.0025	0.02	5.05713e-012	4.00002
5	0.00125	0.02	1.26428e-012	4.00001

3. $T(x, t) = \tilde{T} + F(x) \cos(\pi t^2)(t + 1), \quad F(x) = a \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$

Аналитическое решение:

$$u(x, t) = \left(\left(al\alpha \cos(\pi t^2)(t + 1) - 2ax\alpha \cos(\pi t^2)(t + 1) - al\alpha \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cos(\pi t^2)(t + 1) \right) / \pi. \right.$$

Точность метода Ньютона: 10^{-7}

$t = 0.04$

i	h	τ	$\ error\ _C$	$(\ error_i\ _C/\ error_{i+1}\ _C)$
1	0.02	0.02	5.73226e-009	
2	0.01	0.02	1.43294e-009	4.00035
3	0.005	0.02	3.58228e-010	4.00008
4	0.0025	0.02	8.95564e-011	4.00003
5	0.00125	0.02	2.23891e-011	4.

$t = 0.5$

i	h	τ	$\ error\ _C$	$(\ error_i\ _C/\ error_{i+1}\ _C)$
1	0.02	0.02	5.84621e-009	
2	0.01	0.02	1.46143e-009	4.00034
3	0.005	0.02	3.65349e-010	4.00009
4	0.0025	0.02	9.13367e-011	4.00002
5	0.00125	0.02	2.28341e-011	4.00001

$t = 1.$

i	h	τ	$\ error\ _C$	$(\ error_i\ _C/\ error_{i+1}\ _C)$
1	0.02	0.02	1.10237e-008	
2	0.01	0.02	2.75569e-009	4.00034
3	0.005	0.02	6.88908e-010	4.00008
4	0.0025	0.02	1.72226e-010	4.00002
5	0.00125	0.02	4.30565e-011	4

Результаты расчетов свидетельствуют о сходимости разностной схемы со вторым порядком точности.

Рассмотрим поведение одномерного стержня на четырех периодах нагружения. Периодическое изменение температуры, при котором рассматривается зависимость напряжений от деформаций $\epsilon - \epsilon^T$ (рис. 2.1) в точке пространства $x = l - h$ на рис. 2.2. Аналогичный график может быть представлен в точке $x = h$, поскольку задача симметрична относительно центра стержня, h – пространственный шаг сетки. Наблюдается сначала постепенное нагружение до напряжений, равных пределу прочности σ_f , материал ведет себя как линейно-упругий с модулем Юнга E . На рис. 2.1 видно, что при значениях напряжений, больших предела прочности, происходит разгрузка материала по нелинейному убывающему закону, в свою очередь при уменьшении $\epsilon - \epsilon^T$ разгрузка по линейному закону с модулем Юнга, равным исходному. После этого происходит повторный этап нагружения по той же прямой, по которой происходила разгрузка, и далее цикл нагружения и разгрузки повторяется.

Видно, что в области $\sigma > 0$ напряжения ограничены кривой из функциональной зависимости (2.1).

Периодическая зависимость полной деформации от времени приведена на рис. 2.3. Видно, что график зависимости деформаций за счет трещин, приведенный на рис.рис. 2.4 принимает ступенчатый вид, в нем горизонтальные участки соответствуют участкам линейного изменения напряжения, а вертикальные – нелинейного, экспоненциально убывающего. Деформация за счет трещин не является убывающей функцией от времени, так как материал хранит информацию о наличии трещины [1]. Из рис. 2.5, на котором изображена зависимость напряжений от времени, видно, что напряжения с течением времени не превышают предела прочности σ_f и пики на графике соответствуют пикам на рис. 2.1.

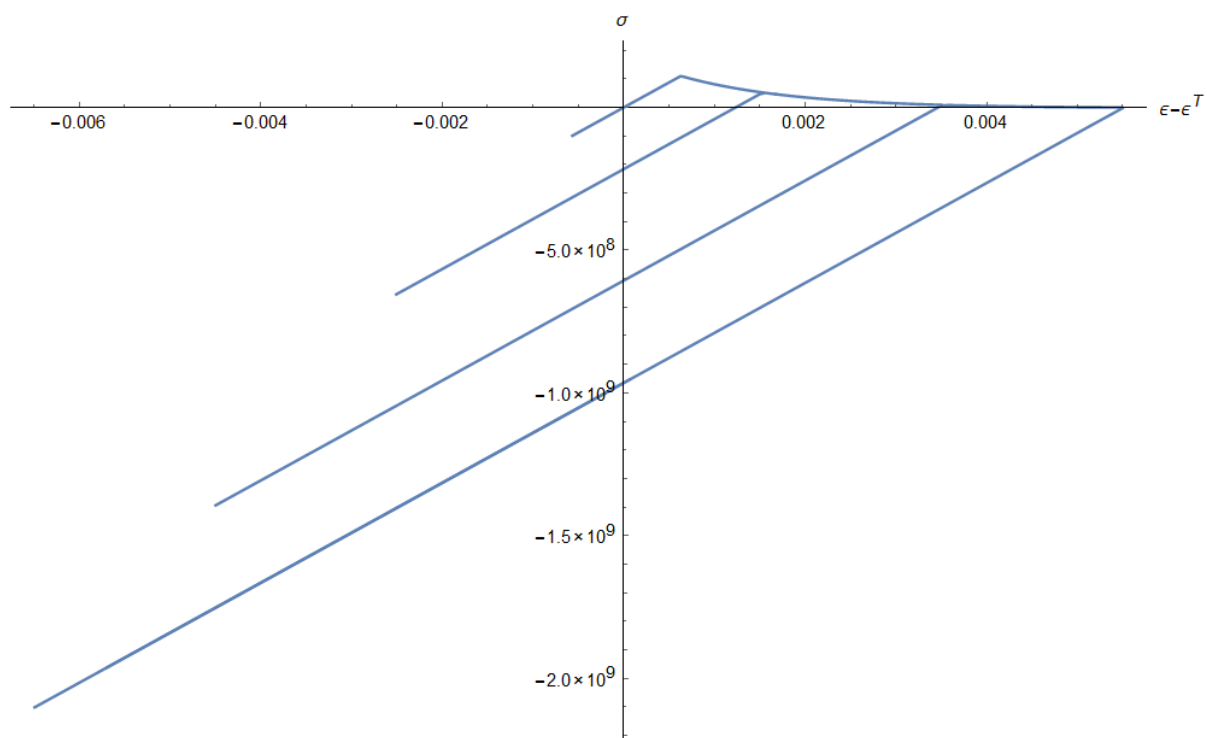


Рис. 2.1. Зависимость напряжений от деформаций при знакопеременном нагружении

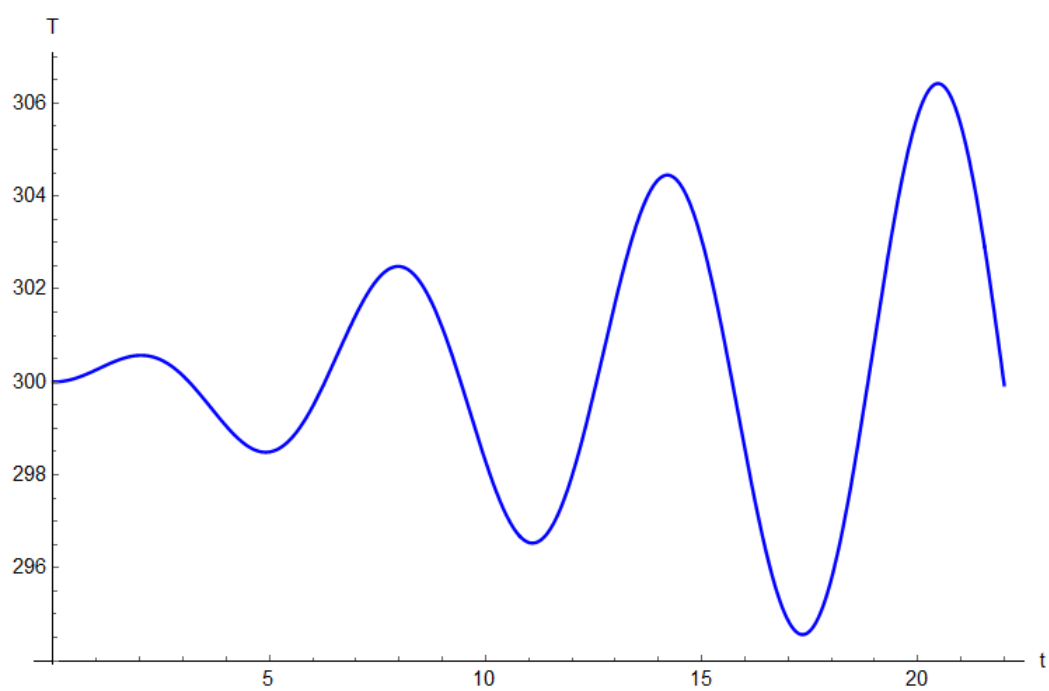


Рис. 2.2. Зависимость температуры от времени

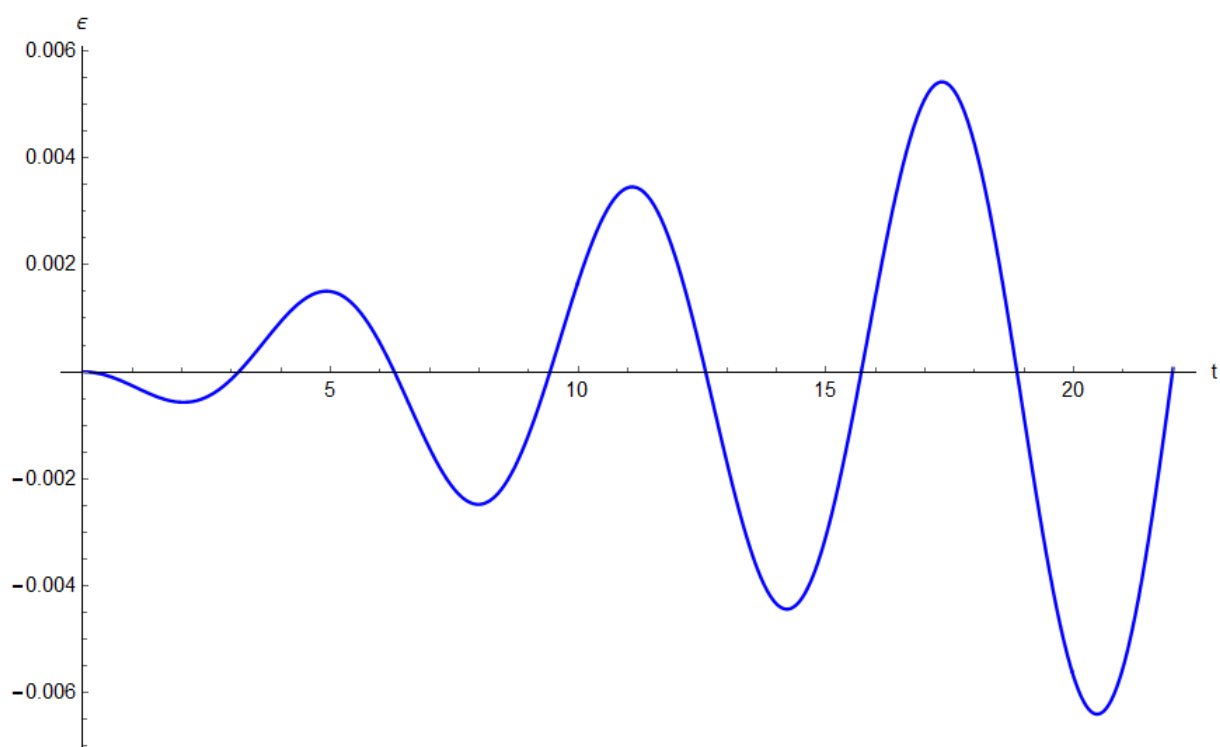


Рис. 2.3. Зависимость полной деформации от времени

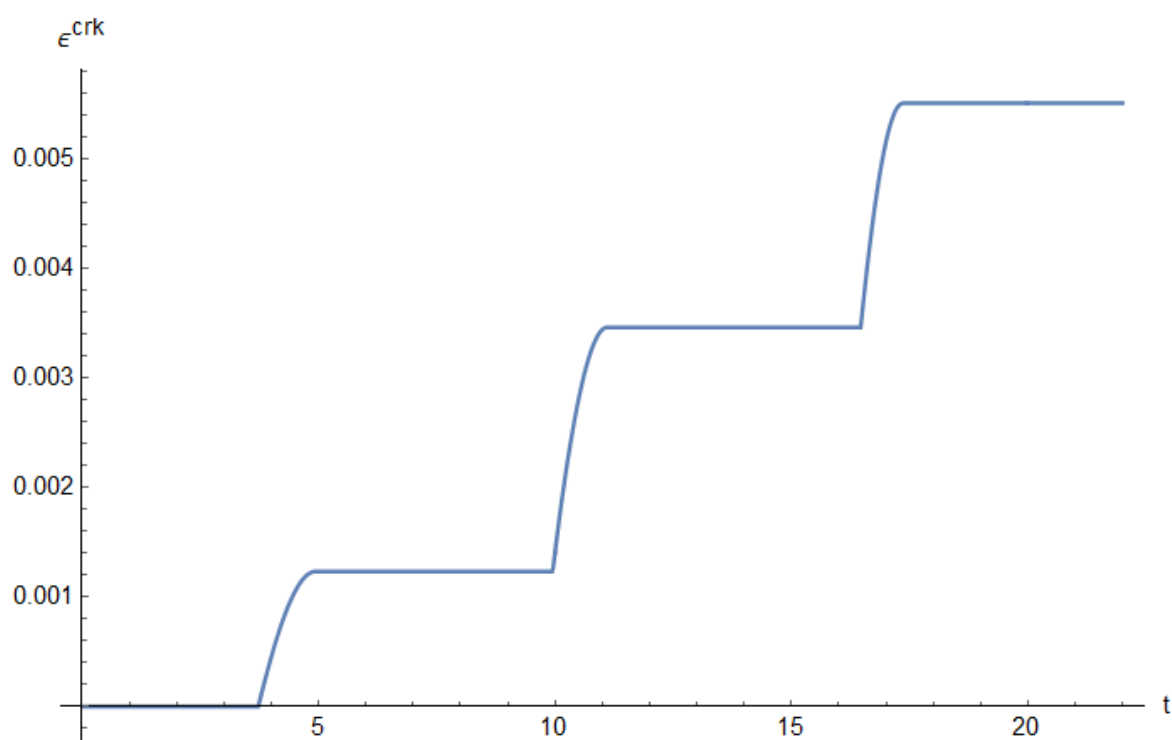


Рис. 2.4. Зависимость деформаций за счет трещин от времени

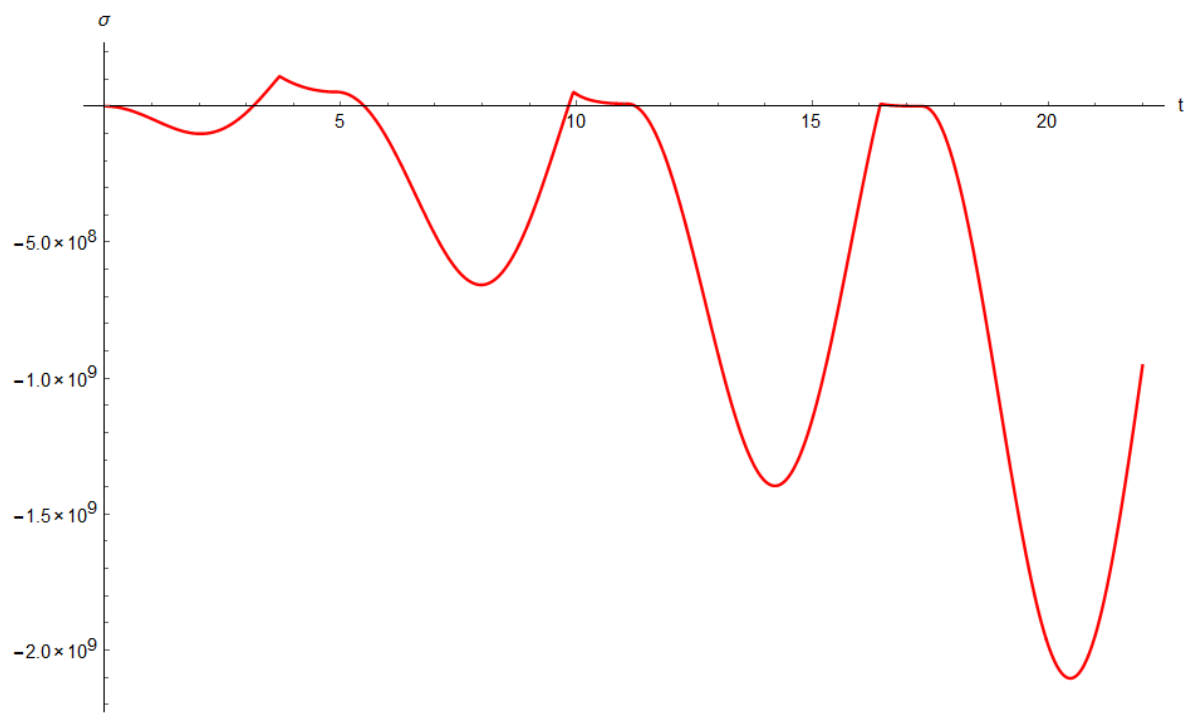


Рис. 2.5. Зависимость напряжений от времени

3. Двумерный случай

Рассмотрим плоскую задачу термоупругости. Пусть $\vec{u} = (u_x, u_y)^T$, $\vec{x} = (x, y)^T$. Перепишем постановку задачи для этого случая.

Тензор малых деформаций Коши (1.1) будет представлен следующим образом:

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \\ \epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \\ \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right). \end{cases} \quad (3.1)$$

Определяющее соотношение (закон Гука) (1.2) в двумерной постановке переписывается в виде:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = C_{xxkl}(\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^0), \quad k, l = x, y, \\ \sigma_{yy} = C_{yykl}(\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^0), \\ \sigma_{xy} = C_{xykl}(\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^0), \end{cases} \quad (3.2)$$

Решаемое в задаче термоупругости уравнение равновесия (1.5) для плоского случая выглядит как:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + b_x = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + b_y = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Зададим кинематические граничные условия:

$$u_x(\vec{x}, t) = \tilde{u}_x(\vec{x}, t),$$

$$u_y(\vec{x}, t) = \tilde{u}_y(\vec{x}, t),$$

где $\vec{x} \in S_u$ и выведем конечноэлементную постановку задачи для квадратной пластины.

3.1. Конечноэлементная постановка задачи

Домножим каждое уравнение (3.3) на $v = \phi_p$ и проинтегрируем по области S . Пусть S представляет собой квадратную пластину (см. рис. 3.1). Для удобства обозначим $\int_c^d \int_a^b$ как \int_S , dS как $dx dy$.

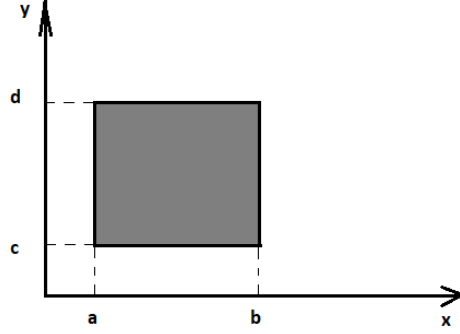


Рис. 3.1. Область S

Для первого уравнения из (3.3) имеем:

$$\begin{aligned} \int_S \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} v dS + \int_S \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} v dS + \int_S b_x v dS &= \int_c^d dy \left(\sigma_{xx} v \Big|_a^b - \int_a^b \sigma_{xx} \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) + \\ &+ \int_a^b dx \left(\sigma_{yx} v \Big|_c^d - \int_c^d \sigma_{yx} \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) + \int_S b_x v = 0. \end{aligned}$$

$$\int_S \sigma_{xx} \frac{\partial v}{\partial x} dS + \int_S \sigma_{yx} \frac{\partial v}{\partial y} dS - \int_c^d \left(\sigma_{xx} v \Big|_a^b \right) dy - \int_a^b \left(\sigma_{yx} v \Big|_c^d \right) dx = \int_S b_x v dS. \quad (3.4)$$

Из закона Гука (3.2):

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = C_{xxkl}(\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^0) &= C_{xxxx} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} - \alpha_{xx}^T \Delta T \right) + 2C_{xxxy} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \alpha_{xy}^T \Delta T \right) + C_{xxyy} \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} - \alpha_{yy}^T \Delta T \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yx} = C_{yxxl}(\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^0) &= C_{yxxx} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} - \alpha_{xx}^T \Delta T \right) + 2C_{yxxy} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \alpha_{xy}^T \Delta T \right) + C_{yxyy} \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} - \alpha_{yy}^T \Delta T \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Для плоского деформированного состояния матрица упругих коэффициентов C (3.21) перепишется в виде:

$$C = E \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\nu}{1 - \nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1 - \nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \end{pmatrix}$$

Следовательно параметры Ламе равны:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)},$$

и (1.4) принимает вид:

$$C_{ijkl} = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{E}{1 + \nu} I_{ijkl}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} C_{xxxx} &= \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad C_{xxxy} = 0, \quad C_{xxyy} = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \\ C_{yxxx} &= 0, \quad C_{yxyx} = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad C_{yyxy} = 0. \end{aligned}$$

Подставляя в (3.5) и (3.6), имеем:

$$\sigma_{xx} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} - \alpha_{xx}^T \Delta T \right) + \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} - \alpha_{yy}^T \Delta T \right). \quad (3.7)$$

$$\sigma_{yx} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{E}{2(1 + \nu)} \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{E}{1 + \nu} \alpha_{xy}^T \Delta T. \quad (3.8)$$

Подставляя (3.7) и (3.8) в (3.4) и с учетом

$$\begin{aligned} u_x &= \sum_p u_p^{(x)} \phi_p, \\ u_y &= \sum_p u_p^{(y)} \phi_p, \end{aligned}$$

имеем:

$$\begin{aligned}
& \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \sum_m u_m^{(x)} \int_S \frac{\partial \phi_m}{\partial x} \frac{\partial \phi_p}{\partial x} dS + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \sum_m u_m^{(y)} \\
& \int_S \frac{\partial \phi_m}{\partial y} \frac{\partial \phi_p}{\partial x} dS - \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_S \alpha_{xx}^T \Delta T \frac{\partial \phi_p}{\partial x} dS - \\
& - \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_S \alpha_{yy}^T \Delta T \frac{\partial \phi_p}{\partial x} dS + \frac{E}{2(1+\nu)} \sum_m u_m^{(x)} \int_s \frac{\partial \phi_m}{\partial y} \frac{\partial \phi_p}{\partial y} dS + \\
& + \frac{E}{2(1+\nu)} \sum_m u_m^{(y)} \int_s \frac{\partial \phi_m}{\partial x} \frac{\partial \phi_p}{\partial y} dS - \frac{E}{1+\nu} \int_S \alpha_{xy}^T \Delta T \frac{\partial \phi_p}{\partial y} dS - \\
& - \int_c^d \left(\left(\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\sum_m u_m^{(x)} \frac{\partial \phi_m}{\partial x} - \alpha_{xx}^T \Delta T \right) + \right. \right. \\
& + \left. \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\sum_m u_m^{(y)} \frac{\partial \phi_m}{\partial y} - \alpha_{yy}^T \Delta T \right) \right) \phi_p \Big|_a^b dy - \\
& - \int_a^b \left(\frac{E}{2(1+\nu)} \left(\sum_m u_m^{(x)} \frac{\partial \phi_m}{\partial y} + \frac{E}{2(1+\nu)} \sum_m u_m^{(y)} \frac{\partial \phi_m}{\partial x} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{E}{1+\nu} \alpha_{xy}^T \Delta T \right) \phi_p \Big|_c^d \right) dx = \int_S b_x \phi_p dS. \tag{3.9}
\end{aligned}$$

Для второго уравнения имеем:

$$\begin{aligned}
& \int_S \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} v dS + \int_S \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} v dS + \int_S b_y v dS = \int_c^d dy \left(\sigma_{xy} v \Big|_a^b - \int_a^b \sigma_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) + \\
& + \int_a^b dx \left(\sigma_{yy} v \Big|_c^d - \int_c^d \sigma_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) + \int_S b_y v = 0. \\
& \int_S \sigma_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} dS + \int_S \sigma_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} dS - \int_c^d \left(\sigma_{xy} v \Big|_a^b \right) dy - \int_a^b \left(\sigma_{yy} v \Big|_c^d \right) dx = \int_S b_y v dS. \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Из закона (1.5) Гука:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy} = C_{xykl}(\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^0) = C_{xyxx} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} - \alpha_{xx}^T \Delta T \right) + 2C_{xyxy} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) - \right. \\
\left. - \alpha_{xy}^T \Delta T \right) + C_{xyyy} \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} - \alpha_{yy}^T \Delta T \right) \tag{3.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{yy} = C_{yykl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^0) = C_{yyxx}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} - \alpha_{xx}^T \Delta T\right) + 2C_{yyxy}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) - \alpha_{xy}^T \Delta T\right) + C_{yyyy}\left(\frac{\partial u_y}{\partial y} - \alpha_{yy}^T \Delta T\right)\end{aligned}\quad (3.12)$$

$$\begin{aligned}C_{xyxx} = 0, \quad C_{xyxy} = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad C_{xyyy} = 0, \\ C_{yyxx} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad C_{yyxy} = 0, \quad C_{yyyy} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}.\end{aligned}$$

Подставляя в (3.11) и (3.12), имеем:

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{E}{1+\nu} \alpha_{xy}^T \Delta T. \quad (3.13)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} - \alpha_{xx}^T \Delta T\right) + \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} - \alpha_{yy}^T \Delta T\right). \quad (3.14)$$

Подставляя (3.13) и (3.14) в (3.10) и с учетом

$$u_x = \sum_p u_p^{(x)} \phi_p,$$

$$u_y = \sum_p u_p^{(y)} \phi_p,$$

имеем:

$$\begin{aligned}
& \frac{E}{2(1+\nu)} \sum_m u_m^{(x)} \int_S \frac{\partial \phi_m}{\partial y} \frac{\partial \phi_p}{\partial x} dS + \frac{E}{2(1+\nu)} \sum_m u_m^{(y)} \int_S \frac{\partial \phi_m}{\partial x} \frac{\partial \phi_p}{\partial x} dS - \\
& - \frac{E}{1+\nu} \int_S \alpha_{xy}^T \Delta T \frac{\partial \phi_p}{\partial x} dS + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \sum_m u_m^{(x)} \int_s \frac{\partial \phi_m}{\partial x} \frac{\partial \phi_p}{\partial y} dS + \\
& + \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \sum_m u_m^{(y)} \int_s \frac{\partial \phi_m}{\partial y} \frac{\partial \phi_p}{\partial y} dS - \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_S \alpha_{xx}^T \Delta T \frac{\partial \phi_p}{\partial y} dS - \\
& - \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_S \alpha_{yy}^T \Delta T \frac{\partial \phi_p}{\partial y} dS - \int_c^d \left(\left(\frac{E}{2(1+\nu)} \sum_m u_m^{(x)} \frac{\partial \phi_m}{\partial y} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{E}{2(1+\nu)} \sum_m u_m^{(y)} \frac{\partial \phi_m}{\partial x} - \frac{E}{1+\nu} \alpha_{xy}^T \Delta T \right) \phi_p \Big|_a^b \right) dy - \\
& - \int_a^b \left(\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\sum_m u_m^{(x)} \frac{\partial \phi_m}{\partial x} - \alpha_{xx}^T \Delta T \right) + \right. \\
& \left. + \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\sum_m u_m^{(y)} \frac{\partial \phi_m}{\partial y} - \alpha_{yy}^T \Delta T \right) \right) \phi_p \Big|_c^d dx = \int_S b_y \phi_p dS.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Выберем финитные функции ϕ_p следующим образом (рис. 3.2) [10]:

$$\phi_p = \begin{cases} N_{pi} = \frac{1}{\Delta}(a_{pi} + b_{pi}x + c_{pi}y), & \text{область } i, \\ a_{pi} = (x_{qi}y_{ri} - x_{ri}y_{qi}), \quad b_{pi} = (y_{qi} - y_{ri}), \quad c_i = (x_{ri} - x_{qi}), \\ \Delta = (x_{qi} - x_p)(y_{ri} - y_p) - (x_{ri} - x_p)(y_{qi} - y_p) = 2S_{ipqr}, \\ i = 1..n_p, \end{cases}$$

где n_p – число областей, вокруг каждого узла p , S_{ipqr} – площадь i -ого треугольника.

Соответственно:

$$\text{grad} \phi_p = \begin{cases} \text{grad} N_{pi} = \left(\frac{b_{pi}}{\Delta}, \frac{c_{pi}}{\Delta} \right), & \text{область } i; \\ b_{pi} = (y_{qi} - y_{ri}), \quad c_i = (x_{ri} - x_{qi}), \\ \Delta = (x_{qi} - x_p)(y_{ri} - y_p) - (x_{ri} - x_p)(y_{qi} - y_p) = 2S_{ipqr}, \\ i = 1..n_p. \end{cases}$$

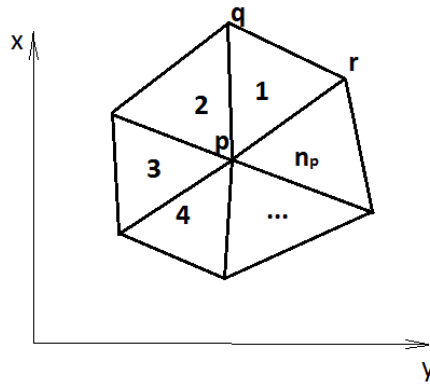


Рис. 3.2. Носитель функции формы

3.2. Результаты тестовых расчетов

Проведем ряд расчетов для известного аналитического решения задачи. Пусть пластина имеет размеры $x_f \times y_f$. Расположим ее левый нижний конец в начале системы координат. Возьмем $x_f = y_f = 0.003$. Зададим аналитическое решение $u(x, t)$, подставим его в (3.7), (3.8) и (3.13), (3.14), а далее – в (3.3) и найдем проекции вектора плотности объемных сил b_x, b_y . В программной реализации задачи зададим в качестве входных начальных данных найденные значения.

3.3. Кинематические граничные условия

Все выше описанные формулы были выведены для кинематических граничных условий (1.6). Ниже приведены таблицы с ошибками в нормах $\|\cdot\|_C$ и $\|\cdot\|_{L_2}$ для известных аналитических решений при разных шагах триангуляции сетки.

$grid$	$\ error\ _C$	$\frac{\ error_i\ _C}{\ error_{i+1}\ _C}$	$\ error\ _{L2}$	$\frac{\ error_i\ _{L2}}{\ error_{i+1}\ _{L2}}$
$u(x, t) = (y^2 e^x ; \cos(xy) + \sin(xy))^T$				
шаг триангуляции: 3e-3 кол-во элементов: 4 кол-во узлов: 5 кол-во граничных узлов: 4	2.0485e-06		9.1612e-07	
шаг триангуляции: 1.5e-3 кол-во элементов: 14 кол-во узлов: 12 кол-во граничных узлов: 8	3.2178e-07	6.3660	1.8426e-07	4.9718
шаг триангуляции: 7.5e-4 кол-во элементов: 54 кол-во узлов: 36 кол-во граничных узлов: 16	9.9139e-08	3.2458	4.9698e-08	3.7077
шаг триангуляции: 3.75e-4 кол-во элементов: 238 кол-во узлов: 136 кол-во граничных узлов: 32	2.3091e-08	4.2934	1.1785e-08	4.2170
шаг триангуляции: 1.875e-4 кол-во элементов: 952 кол-во узлов: 509 кол-во граничных узлов: 64	6.3894e-09	3.6139	3.2510e-09	3.6250

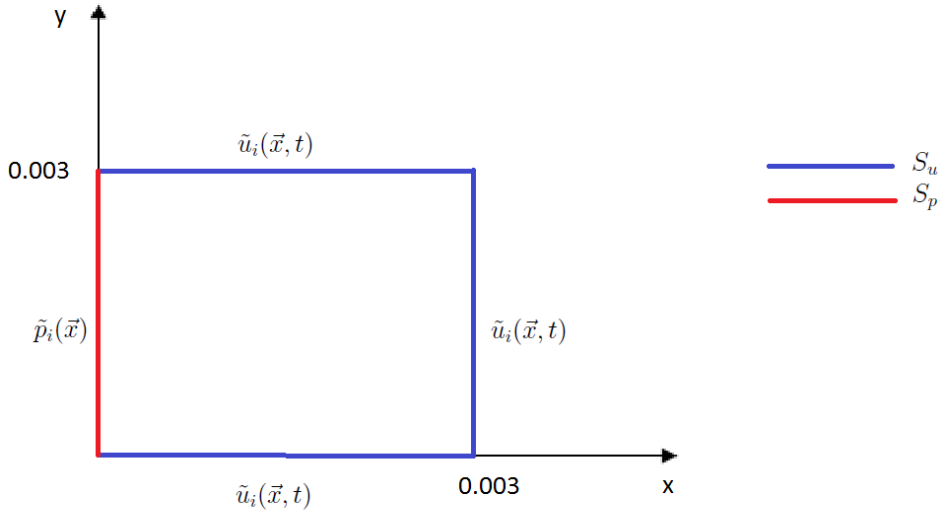
$grid$	$\ error\ _C$	$\frac{\ error_i\ _C}{\ error_{i+1}\ _C}$	$\ error\ _{L2}$	$\frac{\ error_i\ _{L2}}{\ error_{i+1}\ _{L2}}$
$u(x, t) = (e^{x^2+y^2}; \tanh(xy))^T$				
шаг триангуляции: 3e-3 кол-во элементов: 4 кол-во узлов: 5 кол-во граничных узлов: 4	1.9320e-06		8.6403e-07	
шаг триангуляции: 1.5e-3 кол-во элементов: 14 кол-во узлов: 12 кол-во граничных узлов: 8	2.8491e-07	6.7812	1.4671e-07	5.8893
шаг триангуляции: 7.5e-4 кол-во элементов: 54 кол-во узлов: 36 кол-во граничных узлов: 16	7.7783e-08	3.6629	3.7796e-08	3.88172
шаг триангуляции: 3.75e-4 кол-во элементов: 238 кол-во узлов: 136 кол-во граничных узлов: 32	2.0339e-08	3.8244	1.0721e-08	3.5255
шаг триангуляции: 1.875e-4 кол-во элементов: 952 кол-во узлов: 509 кол-во граничных узлов: 64	6.3894e-09	3.6139	3.2510e-09	3.6250

$grid$	$\ error\ _C$	$\frac{\ error_i\ _C}{\ error_{i+1}\ _C}$	$\ error\ _{L2}$	$\frac{\ error_i\ _{L2}}{\ error_{i+1}\ _{L2}}$
$u(x, t) = \arctan(x + y) ; \sinh(xy))^T$				
шаг триангуляции: 3e-3 кол-во элементов: 4 кол-во узлов: 5 кол-во граничных узлов: 4	7.1256e-05		5.3865e-05	
шаг триангуляции: 1.5e-3 кол-во элементов: 14 кол-во узлов: 12 кол-во граничных узлов: 8	1.7868e-05	3.9879	1.7431e-05	3.0902
шаг триангуляции: 7.5e-4 кол-во элементов: 54 кол-во узлов: 36 кол-во граничных узлов: 16	6.9660e-06	2.5650	5.3041e-06	3.2863
шаг триангуляции: 3.75e-4 кол-во элементов: 238 кол-во узлов: 136 кол-во граничных узлов: 32	1.0240e-06	6.8030	1.1476e-06	4.6218
шаг триангуляции: 1.875e-4 кол-во элементов: 952 кол-во узлов: 509 кол-во граничных узлов: 64	4.0026e-07	2.5583	3.3861e-07	3.3892

Результаты свидетельствуют о сходимости схемы со вторым порядком точности.

3.4. Силовые и кинематические граничные условия

При появлении силовых граничных условий (1.7) в первом уравнении системы (3.9) будут фигурировать слагаемые вида: $-\int_c^d \left(\sigma_{xx} v \Big|_a^b \right) dy - \int_a^b \left(\sigma_{yx} v \Big|_c^d \right) dx$, во втором (3.15): $-\int_c^d \left(\sigma_{xy} v \Big|_a^b \right) dy - \int_a^b \left(\sigma_{yy} v \Big|_c^d \right) dx$. Рассмотрим задачу с силовыми и кинематическими граничными условиями.



Ниже приведены таблицы с ошибками для данной тестовой задачи для известных аналитических решений при разных шагах триангуляции сетки.

$grid$	$\ error\ _C$	$\frac{\ error_i\ _C}{\ error_{i+1}\ _C}$	$\ error\ _{L2}$	$\frac{\ error_i\ _{L2}}{\ error_{i+1}\ _{L2}}$
$u(x, t) = (y^2 e^x ; \cos(xy) + \sin(xy))^T$				
шаг триангуляции: 3e-3 кол-во элементов: 4 кол-во узлов: 5 кол-во граничных узлов: 4	1.9318e-06		2.2118e-06	
шаг триангуляции: 1.5e-3 кол-во элементов: 14 кол-во узлов: 12 кол-во граничных узлов: 8	3.4271e-07	5.6375	5.6853e-07	3.8904
шаг триангуляции: 7.5e-4 кол-во элементов: 54 кол-во узлов: 36 кол-во граничных узлов: 16	9.1379e-08	3.7504	1.4322e-07	3.9698
шаг триангуляции: 3.75e-4 кол-во элементов: 238 кол-во узлов: 136 кол-во граничных узлов: 32	2.9727e-08	3.0740	3.5424e-08	4.0430
шаг триангуляции: 1.875e-4 кол-во элементов: 952 кол-во узлов: 509 кол-во граничных узлов: 64	9.9076e-9	3.0004	9.4731e-09	3.7394

$grid$	$\ error\ _C$	$\frac{\ error_i\ _C}{\ error_{i+1}\ _C}$	$\ error\ _{L2}$	$\frac{\ error_i\ _{L2}}{\ error_{i+1}\ _{L2}}$
$u(x, t) = (e^{x^2+y^2}; \tanh(xy))^T$				
шаг триангуляции: 3e-3 кол-во элементов: 4 кол-во узлов: 5 кол-во граничных узлов: 4	2.0485e-06		1.5891e-06	
шаг триангуляции: 1.5e-3 кол-во элементов: 14 кол-во узлов: 12 кол-во граничных узлов: 8	3.5287e-07	5.8053	3.9479e-07	4.0250
шаг триангуляции: 7.5e-4 кол-во элементов: 54 кол-во узлов: 36 кол-во граничных узлов: 16	1.0234e-07	3.4478	1.0206e-07	3.8685
шаг триангуляции: 3.75e-4 кол-во элементов: 238 кол-во узлов: 136 кол-во граничных узлов: 32	3.0360e-08	3.3709	2.4944e-08	4.0914
шаг триангуляции: 1.875e-4 кол-во элементов: 952 кол-во узлов: 509 кол-во граничных узлов: 64	9.4480e-9	3.2134	6.8848e-09	3.6231

$grid$	$\ error\ _C$	$\frac{\ error_i\ _C}{\ error_{i+1}\ _C}$	$\ error\ _{L2}$	$\frac{\ error_i\ _{L2}}{\ error_{i+1}\ _{L2}}$
$u(x, t) = \arctan(x + y) ; \sinh(xy))^T$				
шаг триангуляции: 3e-3 кол-во элементов: 4 кол-во узлов: 5 кол-во граничных узлов: 4	7.1256e-05		9.0285e-05	
шаг триангуляции: 1.5e-3 кол-во элементов: 14 кол-во узлов: 12 кол-во граничных узлов: 8	1.9606e-05	3.6343	3.2268e-05	2.7980
шаг триангуляции: 7.5e-4 кол-во элементов: 54 кол-во узлов: 36 кол-во граничных узлов: 16	7.8199e-06	2.5072	9.3674e-06	3.4447
шаг триангуляции: 3.75e-4 кол-во элементов: 238 кол-во узлов: 136 кол-во граничных узлов: 32	2.2643e-06	3.4536	2.3254e-06	4.0283
шаг триангуляции: 1.875e-4 кол-во элементов: 952 кол-во узлов: 509 кол-во граничных узлов: 64	0.6840e-06	3.4889	0.6060e-06	3.76084

3.5. Образование трещин

При рассмотрении многомерной модели для тензора деформации уже нет предположения об аддитивном выделении деформации, связанной с трещинами. Рассмотрим две конфигурации твердого тела: упругую конфигурацию, в которой нет растрескивания (K_1), конфигурацию, в которой учитывается образование трещин (K_2).

Приведем построение математической модели разрушения для многомерного случая [11]. Из уравнения (2.1) и выражений $\frac{\sigma}{\varepsilon - \varepsilon^T} = E$, $\frac{\sigma_f}{\varepsilon_f} = E_0$, где E и E_0 – это текущий и начальный модуль Юнга, следует:

$$\frac{E}{E_0} \frac{\varepsilon - \varepsilon^T}{\varepsilon_f} = A + B e^{-c \frac{\varepsilon - \varepsilon^T}{\varepsilon_f}}.$$

Функцию памяти $e(t)$ определяют как отношение текущего модуля Юнга E к начальному E_0 :

$$e(t) = \frac{E}{E_0} = \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon - \varepsilon^T} \left(A + B e^{-c \frac{\varepsilon - \varepsilon^T}{\varepsilon_f}} \right). \quad (3.16)$$

Эта зависимость справедлива при таких значениях деформаций, для которых выполнено $\varepsilon_f \leq \varepsilon - \varepsilon^T \leq \varepsilon_0$, при $\varepsilon - \varepsilon^T < \varepsilon_f$ функция памяти принимает значение $e(t) = 1$, а при $\varepsilon - \varepsilon^T > \varepsilon_0$: $e(t) = 0$. В многомерном случае функцию памяти 3.5 можно обобщить [1]:

$$e_i(t) = \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_i - \varepsilon_i^T} \left(A + B e^{-c \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_i^T}{\varepsilon_f}} \right).$$

Для двумерной задачи определим матрицу \hat{E} :

$$\hat{E} = \begin{pmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_1 e_2 \end{pmatrix}$$

Данная матрица является матрицей перехода из конфигурации без трещин K_1 в конфигурацию K_2 . Тензор деформации должен быть приведен к главным осям для применения функции памяти [12]. Зададим матрицу \hat{T} , которая приводит к диагональному виду тензор упругой деформации ε :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} = \hat{T}^{-1} \varepsilon \hat{T}.$$

Известно, что из матрицы \hat{T} единственным образом составляется матрица преобразования \hat{T}_ε [13], которая приводит вектор деформации $\vec{\varepsilon}$ в нотации Фойгта к следующему виду $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, 0\}^T$:

$$\bar{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = [T_\varepsilon] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \hat{T}_\varepsilon \vec{\varepsilon},$$

где $\bar{\varepsilon}$ – это вектор деформации в главных осях. Для упругой конфигурации без растрескивания K_1 выполняется закон Гука:

$$\vec{\sigma} = [C] \vec{\varepsilon}^e. \quad (3.17)$$

Уравнение (3.17) переписывается в системе координат, связанной с главными направлениями тензора деформации следующим образом:

$$\bar{\sigma} = [\bar{C}] \bar{\varepsilon}^e, \quad (3.18)$$

где $\bar{\sigma}$ – это вектор напряжений, который записан в главных осях тензора деформации. В свою очередь матрица перехода \hat{T}_ε ортогональна, вследствие этого

$$\vec{\varepsilon}^T \vec{\sigma} = \bar{\varepsilon}^T \bar{\sigma}.$$

Для конфигурации растрескивания K_2 закон Гука представлен в виде:

$$\tilde{\sigma} = [\tilde{C}] (\tilde{\varepsilon} - \tilde{\varepsilon}^T), \quad (3.19)$$

Матрица перехода \hat{E} из K_1 в K_2 является ортогональной, поворота осей при переходе не происходит, поэтому:

$$\tilde{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}, \quad \tilde{\varepsilon}^T = \bar{\varepsilon}^T, \quad \tilde{\sigma} = \bar{\sigma},$$

уравнение (3.19) переписывается в виде:

$$\bar{\sigma} = [\tilde{C}] (\tilde{\varepsilon} - \tilde{\varepsilon}^T), \quad [\tilde{C}] = E^T \bar{C} E. \quad (3.20)$$

Перейдем к исходной системе координат и в результате получим:

$$\vec{\sigma} = \hat{T}_\varepsilon^T \bar{\sigma}, \quad \vec{\varepsilon} = \hat{T}_\varepsilon^{-1} \bar{\varepsilon}, \quad \vec{\varepsilon}^T = \hat{T}_\varepsilon^{-1} \bar{\varepsilon}^T,$$

$$\bar{C} = \left(\hat{T}_{\varepsilon}^{-1} \right) [C] \hat{T}_{\varepsilon}^{-1}.$$

Отсюда,

$$\vec{\sigma} = \hat{T}_{\varepsilon}^T \tilde{C} \hat{T}_{\varepsilon} (\vec{\varepsilon} - \vec{\varepsilon}^T),$$

где

$$\hat{T}_{\varepsilon}^T \tilde{C} \hat{T}_{\varepsilon} = \hat{T}_{\varepsilon}^T \hat{E}^T \bar{C} \hat{E} \hat{T}_{\varepsilon} = \left(\hat{T}_{\varepsilon}^T \hat{E}^T (\hat{T}_{\varepsilon}^{-1})^T \right) [C] (\hat{T}_{\varepsilon}^{-1} \hat{E} \hat{T}_{\varepsilon}).$$

Введем обозначение $Z = \hat{T}_{\varepsilon}^{-1} \hat{E} \hat{T}_{\varepsilon}$. С учетом данного выражения:

$$\vec{\sigma} = \hat{C}^{crk} (\vec{\varepsilon} - \vec{\varepsilon}^T), \quad (3.21)$$

где $C_{crk} = \hat{Z}^T \hat{C} \hat{Z}$ [1].

3.6. Уравнение теплопроводности

В качестве постановки задачи для термоупругости также можно добавить уравнение теплопроводности:

$$\rho c_\epsilon \frac{\partial T}{\partial t} = -T C_{ijkl} \alpha_{kl}^T \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda_{ij}^T \frac{\partial T}{\partial x_j}) + f, \quad (3.22)$$

где ρ – плотность материала, c_ϵ – удельная теплоемкость.

Для (3.22) задается начальное условие:

$$T(M, 0) = \tilde{T}(M), M \in V \quad (3.23)$$

А также задаются граничные условия первого рода

$$T(N, t) = \tilde{T}(N, t), N \in S_T \quad (3.24)$$

и граничные условия второго рода

$$\lambda_{ij}^T(N) \frac{\partial T(N, t)}{\partial x_j} n_i = \tilde{q}(N, t), N \in S_q \quad (3.25)$$

где $S = S_T \cup S_q$ – поверхность рассматриваемого тела, S_T – часть поверхности, на которой заданы граничные условия первого рода, S_q – часть поверхности, на которой заданы граничные условия второго рода, n_i – компоненты нормали к поверхности, \tilde{q} – плотность теплового потока, который подводится к поверхности, λ_{ij}^T – тензор теплопроводности.

3.7. Решение задачи с учетом образования трещин

Решим задачу образования трещин в горизонтальном сечении топливной таблетки с закрепленной точкой на горизонтальной оси по вертикали и на вертикальной оси по горизонтали, а остальные границы оставим свободными. Граничные условия в данной постановке будут выглядеть следующим образом:

$$u_x(0, r_a) = u_y(-r_a, 0) = 0$$

$$\sigma_{xx}|_{x^2+y^2=r_a^2} = \sigma_{yy}|_{x^2+y^2=r_b^2} = 0$$

где $r_a = 0.0038\text{м}$, $r_b = 0.0008\text{м}$ - внутренний и внешний радиус топливной таблетки.

На каждом временном слое в качестве изменения температуры ΔT возьмем:

$$\Delta T = T(x, y, t) - T_0 = \frac{T_1(t) \ln \frac{r_b}{r} - T_2(t) \ln \frac{r_a}{r}}{\ln \frac{r_b}{r_a}} - T_0$$

где

$$T_1(t) = (T_a - T_0) \frac{t}{t_f} + T_0$$

$$T_2(t) = (T_b - T_0) \frac{t}{t_f} + T_0$$

$T_a = 1700\text{K}$, $T_b = 600\text{K}$, $T_0 = 300\text{ K}$.

Будем наблюдать характер изменения напряжений от пространственных координат на моменты времени: $t = 0.09t_f$, $t = 0.2t_f$, $t = 0.8t_f$, $t = t_f$.

На момент времени $t = 0.09t_f$ в пластине практически нет трещин, напряжения соответствуют упругим, кроме двух точек на внутренней окружности. Функция памяти $e(t)$ в упругой области равна 1. Зависимости напряжений и перемещений изображены на рис. 3.3, 3.4, 3.5, 3.6.

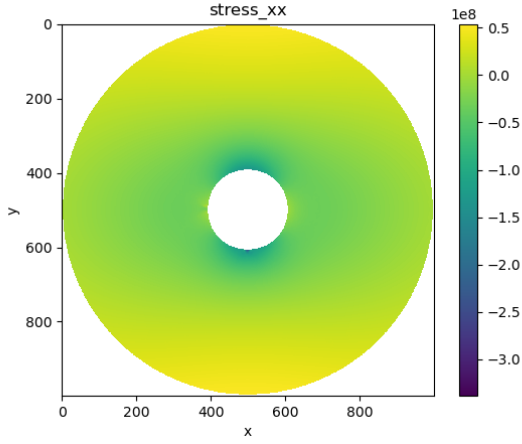


Рис. 3.3. Зависимость напряжения σ_{xx} от x, y на момент времени $t = 0.09t_f$

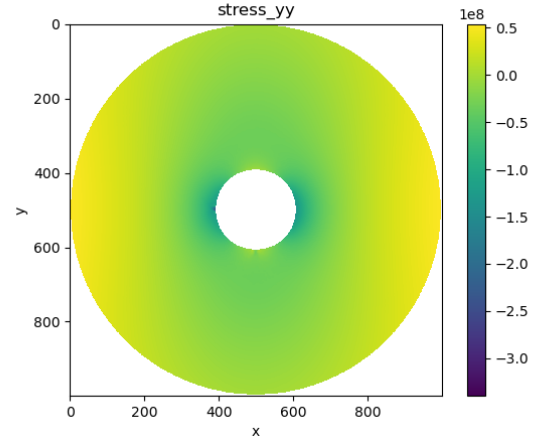


Рис. 3.4. Зависимость напряжения σ_{yy} от x, y на момент времени $t = 0.09t_f$

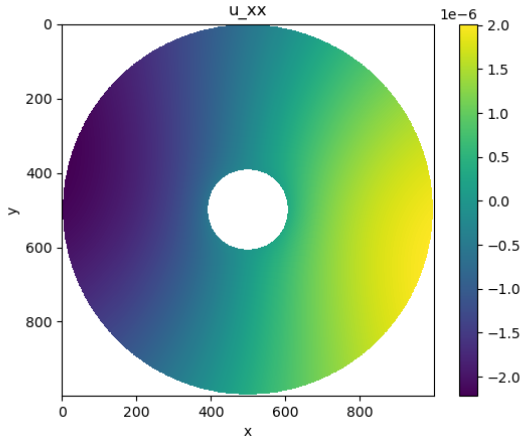


Рис. 3.5. Зависимость перемещений u_x от x, y на момент времени $t = 0.09t_f$

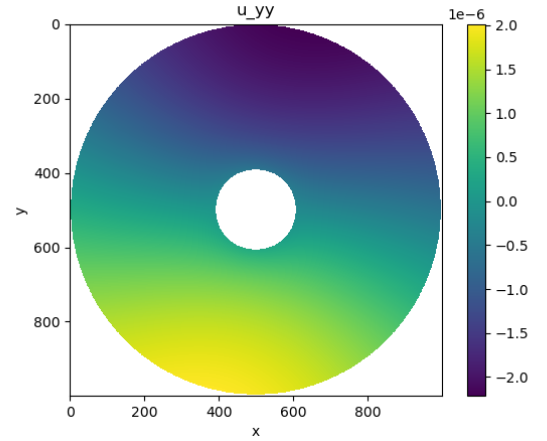


Рис. 3.6. Зависимость перемещений u_y от x, y на момент времени $t = 0.09t_f$

Из графиков видно, что при данном задании граничных условий и температуры сохраняется симметрия решения.

При $t = 0.2t_f$ наблюдаем процесс развития 4-ех трещин в топливной таблетке. Напряжения достигли предел прочности σ_f , а соответственно и деформации значение ϵ_f . Некоторые функции памяти отклоняются от единицы и появляются анизотропные эффекты – развитие трещины [1]. Зависимости напряжений и перемещений при $t = 0.2t_f$ приведены на рис. 3.7, 3.8, 3.9, 3.10.

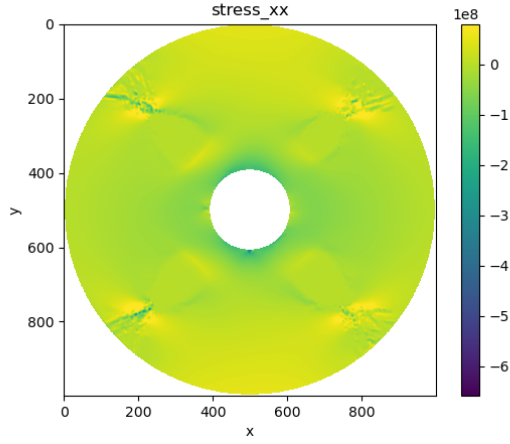


Рис. 3.7. Зависимость напряжения σ_{xx} от x, y на момент времени $t = 0.2t_f$

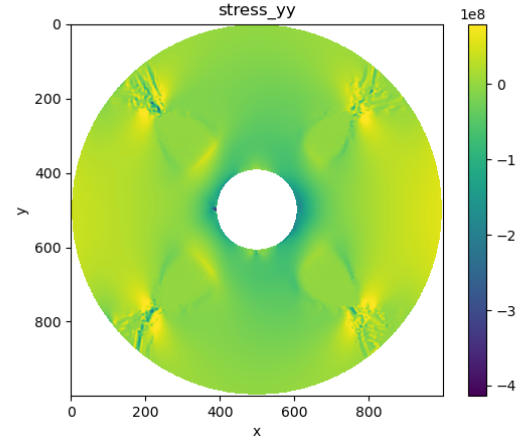


Рис. 3.8. Зависимость напряжения σ_{yy} от x, y на момент времени $t = 0.2t_f$

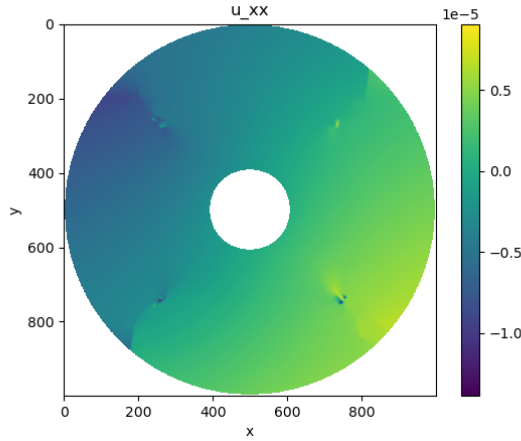


Рис. 3.9. Зависимость перемещений u_x от x, y на момент времени $t = 0.2t_f$

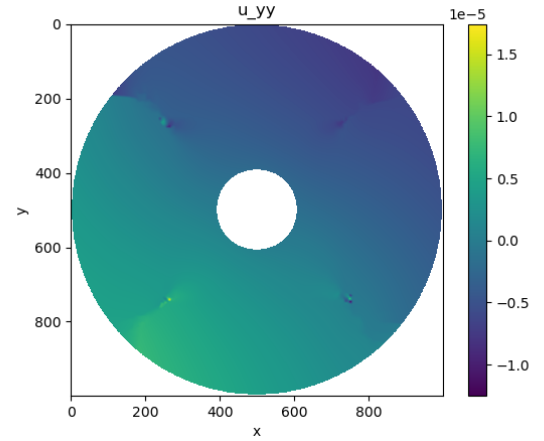


Рис. 3.10. Зависимость перемещений u_y от x, y на момент времени $t = 0.2t_f$

При $t = 0.8t_f$ разрушение продолжается, а также появляются новые трещины. Многие деформации достигли значения ϵ_0 при котором материал не способен передавать напряжения в направлении, ортогональном направлению трещины [1]. Зависимости напряжений и перемещений при $t = 0.8t_f$ изображены на рис. 3.11, 3.11, 3.13, 3.14.

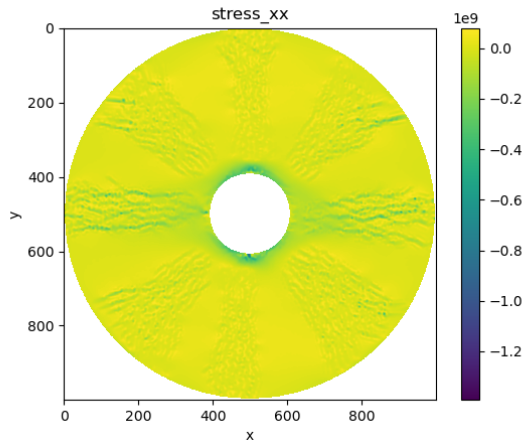


Рис. 3.11. Зависимость напряжения σ_{xx} от x, y на момент времени $t = 0.8t_f$

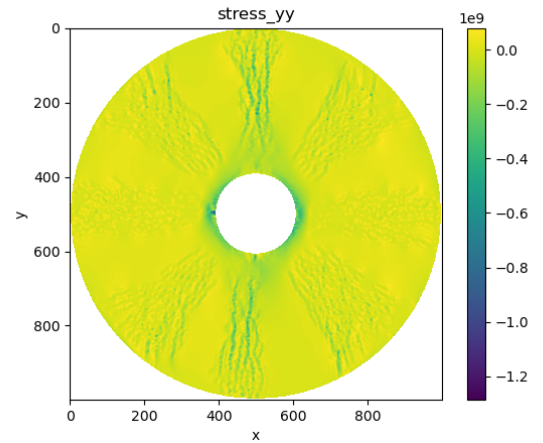


Рис. 3.12. Зависимость напряжения σ_{yy} от x, y на момент времени $t = 0.8t_f$

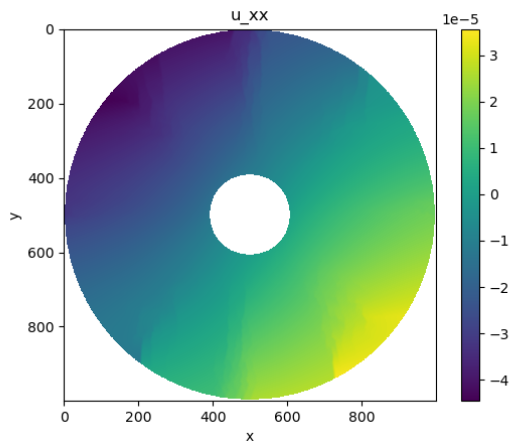


Рис. 3.13. Зависимость перемещений u_x от x, y на момент времени $t = 0.8t_f$

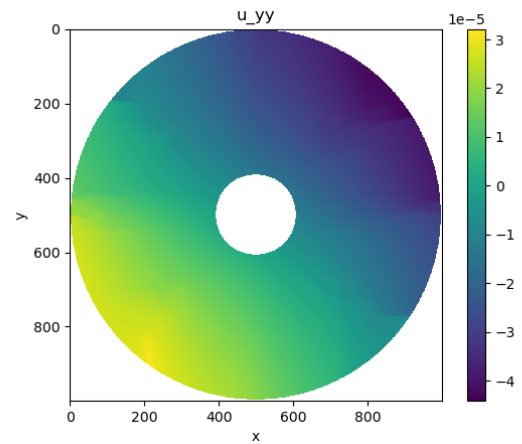


Рис. 3.14. Зависимость перемещений u_y от x, y на момент времени $t = 0.8t_f$

Из графиков видно, что при $t = 0.8t_f$ появилось 4 новых направления, вдоль которых образуются трещины.

При $t = t_f$ видно большое количество трещин, сформировавшихся по 8-ми направлениям. При появлении трещин напряжения спадают практически до нуля, и на всех графиках не превышают предела прочности σ_f .

Зависимости напряжений и перемещений на момент $t = t_f$ изображены на рис. 3.15, 3.16, 3.17, 3.18.

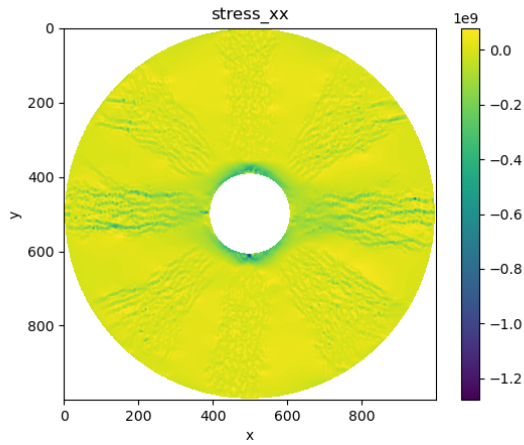


Рис. 3.15. Зависимость напряжения σ_{xx} от x, y на момент времени $t = 0.8t_f$

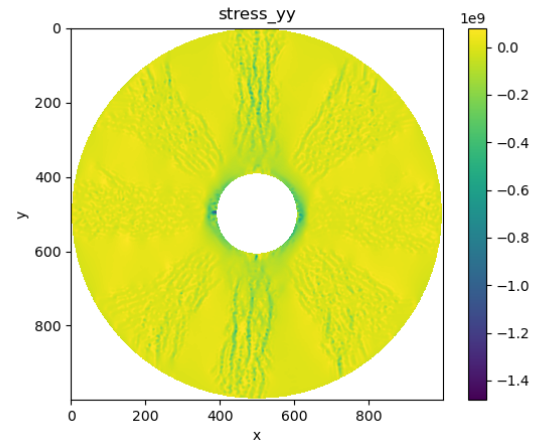


Рис. 3.16. Зависимость напряжения σ_{yy} от x, y на момент времени $t = 0.8t_f$

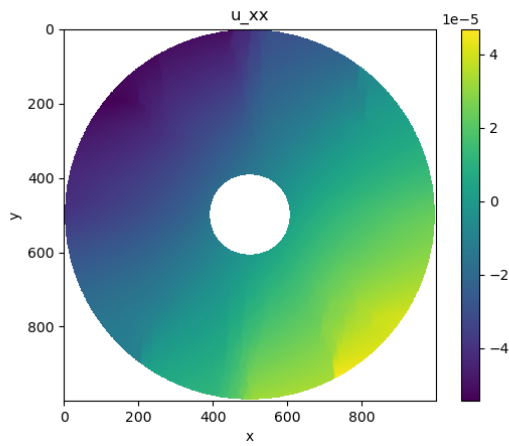


Рис. 3.17. Зависимость перемещений u_x от x, y на момент времени $t = t_f$

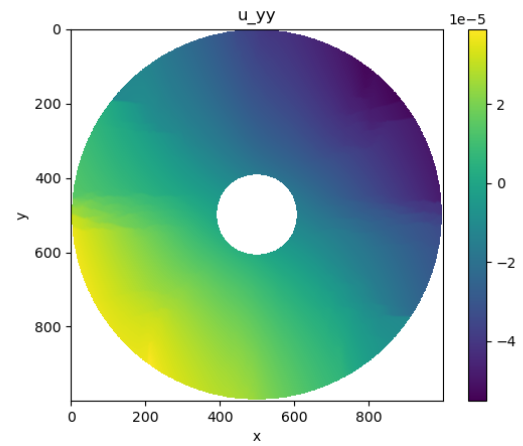


Рис. 3.18. Зависимость перемещений u_y от x, y на момент времени $t = t_f$

Динамику развития трещин хорошо иллюстрируют графики величины минимума функции памяти $e_{\min} = \min(e_1, e_2)$, приведенные на рис. 3.19, 3.20, 3.21, 3.22.

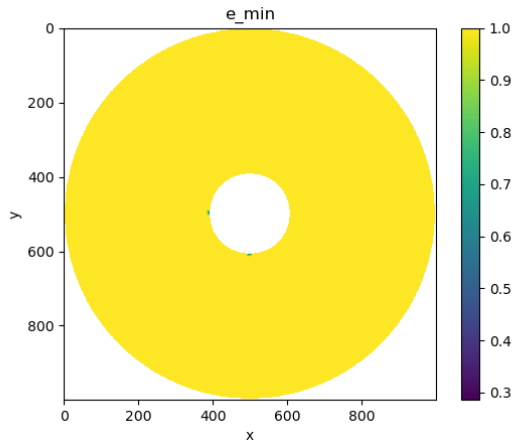


Рис. 3.19. Зависимость e_{\min} от x, y на момент времени $t = 0.09t_f$

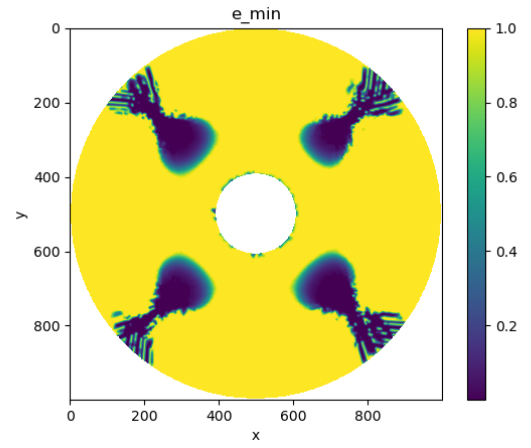


Рис. 3.20. Зависимость e_{\min} от x, y на момент времени $t = 0.2t_f$

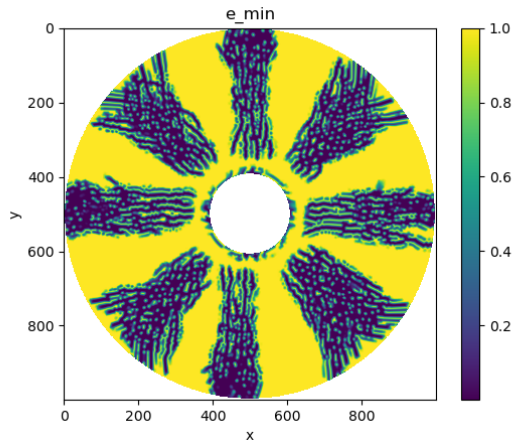


Рис. 3.21. Зависимость e_{\min} от x, y на момент времени $t = 0.8t_f$

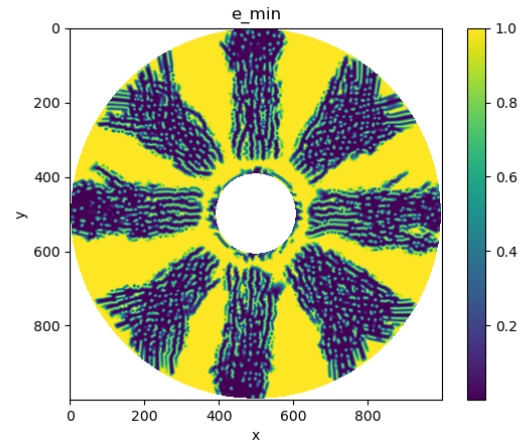


Рис. 3.22. Зависимость e_{\min} от x, y на момент времени $t = t_f$

4. Особенности программной реализации

Приведем основные алгоритмические функции, описывающие программную реализацию задачи термоупругого разрушения хрупкого материала. Алгоритм для задачи термоупругости написан на языках «Python», «C++».

В данном разделе будем описывать алгоритмы, связанные с появлением трещин, со связью временных слоев, на которых происходит расчет, с составлением матриц перехода из различных конфигураций.

Для задачи термоупругости опишем задание аналитических решений, силовых и кинематических граничных условий, расчет точности конечноэлементной схемы с помощью различных норм ошибок.

Приведем основные переменные, константы, физические величины, использующиеся в программной реализации алгоритма. Также приведем описание переменных и особенности решения задачи термоупругости: решение задачи в терминах перемещений и дальнейший переход к тензору перемещений и деформаций.

Опишем основные функции, в которых происходит решение конечноэлементной разреженной системы на каждом временном слое и сохранение переменных, на текущем временном шаге, связанных с растрескиванием. Приведем особенности программной реализации матрицы перехода из упругой конфигурации в конфигурацию с растрескиванием.

4.1. Программная реализация задачи тепромупругости

Начнем с задачи термоупругости.

Объявим необходимые константы, считаем сетку из файла, а также обозначим функцию наперед заданной температуры:

```
L = 0.003
mesh = Mesh("mesh_big.xml")
E = 1.75*1e+11
nu = 0.316
lmbda = Constant(E*nu/((1+nu)*(1-2*nu)))
mu = Constant(E/2/(1+nu))
alpha = 1e-5 # thermal expansion coefficient
kappa = Constant(alpha/(3*mu + 2*lmbda))
d = 1 # interpolation degree
Vue = VectorElement('CG', mesh.ufl_cell(), d)
# displacement finite element
V = FunctionSpace(mesh, Vue)
dU = TrialFunction(V)
t = 1
a = -1000
dT = Expression('a*t*sqrt((x[0] - L/2)*(x[0] - L/2)
+ (x[1] - L/2)*(x[1] - L/2))', degree=2, t = t, a = a, L = L)
dT010 = Expression('a*t*(x[1] - L/2)/(sqrt((x[0]
- L/2)*(x[0] - L/2) + (x[1] - L/2)*(x[1] - L/2)) + 1e-16)',
degree=2, t = t, a = a, L = L)
dT100 = Expression('a*t*(x[0] - L/2)/(sqrt((x[0] -
L/2)*(x[0] - L/2) + (x[1] - L/2)*(x[1] - L/2)) + 1e-16)',
degree=2, t = t, a = a, L = L)
```

Зададим кинематические и силовые граничные условия:

```
def boundary_D(x, on_boundary):
```

```

L = 0.003
tol = 1e-16
return on_boundary and (near(0, x[1], tol)
or near(L, x[1], tol) or near(x[0], L, tol) )
def boundary(x, on_boundary):
    return on_boundary

```

Далее зададим операцию получения тензора деформации, а также переход к нотации Фойгта деформации и напряжений.

```

def eps(v):
    return sym(grad(v))
def strain2voigt(e):
    return as_vector([e[0,0], e[1,1], 2*e[0,1]])
def voigt2stress(s):
    return as_tensor([[s[0], s[2]],
                       [s[2], s[1]]])
def sigma(v):
    return voigt2stress(dot(C, strain2voigt(eps(v))))

```

Для силовых граничных условий для известных аналитических решений зададим зависимость для деформаций и напряжений:

```

sigma_xx = Expression(''lambda*(1 - nu)/nu*(eps_xx) +
    lambda*(eps_yy - alpha*dT) ''', degree=2, nu = nu,
alpha = alpha, dT = dT, lambda = lambda, eps_xx = eps_xx,
eps_yy = eps_yy)
sigma_yy = Expression(''lambda*(1 - nu)/nu*(eps_yy) +
    lambda*(eps_xx - alpha*dT) ''', degree=2, nu = nu,
alpha = alpha, dT = dT, lambda = lambda, eps_xx = eps_xx,
eps_yy = eps_yy)

```

```

sigma_xy = Expression(''2*mu*eps_xy ''', degree=2, E = E,
nu = nu, alpha = alpha, t = t, dT = dT, eps_xy = eps_xy, mu = mu)

```

Далее введем функцию для интегрирования силовых граничных условий:

```
g5 = Expression(''-sigma_xx ''', '' -sigma_xy '''),
degree=2, sigma_xx = sigma_xx, sigma_xy = sigma_xy,
sigma_yy = sigma_yy )
```

Объявим матрицу системы:

```
U = Function(V)
aa = inner(sigma(dU), eps(U_))*dx
```

А также зададим нагрузки:

```
CalphadT = Expression(('(lmbda + lmbda*(1 - nu)/nu)*alpha*dT',
'(lmbda + lmbda*(1 - nu)/nu)*alpha*dT'),
degree=2, kappa = kappa, dT = dT, lmbda = lmbda,
nu=nu, mu=mu, alpha = alpha)
L = dot(b, U_)*dx + dot(CalphadT, U_)*dx
+ dot(g5, U_)*ds
```

Применим решатель для разреженной системы уравнений:

```
#finding the displacements
solve(aa == L, U, bc,solver_parameters=
{'linear_solver':'umfpack',
'preconditioner':'ilu'})
```

Их системы описанной выше найдем перемещения. Далее найдем напряжения и проинтерполируем температуру:

```
#finding the stresses
vertex_values_CalphadT = interpolate(CalphadT , V)
stress = sigma(U)
```

Посчитаем абсолютную и относительную ошибки в норме $L2$ и в норме C :

```
error_L2 = errornorm(U_D, U, 'L2', mesh = mesh)/  
(norm(U_D, 'L2', mesh) + 1e-16)  
vertex_values_U_D = U_D.compute_vertex_values(mesh)  
vertex_values_U = U.compute_vertex_values(mesh)  
error_max = np.max(np.abs(vertex_values_U_D - vertex_values_U))  
/np.max(np.abs(vertex_values_U_D))  
print(error_L2, error_max)
```

4.2. Программная реализация задачи термоупругости с учетом образования трещин

Обратимся к задаче разрушения. Конструирование матрицы перехода $T_{eps} = P$ к главным осям тензора деформации происходит следующим образом. Вначале объявляем все необходимые переменные:

```
def P_mat(eps_current):  
    hes_mat = np.zeros(shape=(mesh.num_vertices(), 2, 2))  
  
    hes = project(eps_current,  
  
TensorFunctionSpace(mesh, 'CG', 1, shape=(2, 2)))  
  
    hes_mat[:, :] = hes.vector().get_local()  
  
.reshape([mesh.num_vertices(), 2, 2])
```

Далее находим собственные вектора и собственные значения матрицы матрицы деформации

```
[eig_values, eig_vectors] = np.linalg.eig(hes_mat)  
eig_vectorsT = np.transpose(eig_vectors, axes=(0, 2, 1))
```

И начинаем заполнять матрицу перехода к главным осям тензора деформации в соответствии с [13]:

```
Ts = np.zeros(shape=(eig_vectors.shape[0], 3, 3))  
Ps = np.zeros(shape=(eig_vectors.shape[0], 3, 3))  
  
for i in range(eig_vectors.shape[0]):
```

```

l1 = eig_vectors[i, 0, 0]
l2 = eig_vectors[i, 1, 0]
m1 = eig_vectors[i, 0, 1]
m2 = eig_vectors[i, 1, 1]

Tx = np.array([[l1*l1, m1*m1, l1*m1],
               [l2*l2, m2*m2, l2*m2],
               [2*l1*l2, 2*m1*m2, l1*m2 + l2*m1]])

Ts[i, :, :] = Tx.T
Ps[i, :, :] = np.linalg.inv(Tx.T)
return Ts, Ps, hes_mat

```

Далее важной алгоритмической задачей является составление матрицы \hat{E} , которая является матрицей перехода из упругой конфигурации в конфигурацию, связанную с появлением трещин. Программная реализация построения данной матрицы перехода представлена в виде:

```

def e_element(eps):
    AA = -0.024
    BB = 1.69
    CC = 0.5
    E = 1.75e11
    sigmaf = 1.1e+8
    nu = 0.316
    epsf = sigmaf/E*(1 + nu)*(1 - 2*nu)
    eps0 = 5*epsf
    if eps < epsf:
        return 1.0
    elif eps < eps0:
        return epsf/eps*(AA + BB*exp(-CC*eps/epsf))
    else:

```

```
return 1e-10
```

Для решения задачи термоупругости с учетом образования трещин необходимо составить матрицу \hat{C}^{crk} , которая в отсутствие трещин равна матрице коэффициентов упругости C , а при переходе в конфигурацию растрескивания зависит от функций памяти e_i , $i = 1, 2$. Конструирование матрицы \hat{C}^{crk} представлено ниже.

Сначала найдем матрицу перехода к главным осям тензора деформации:

```
def c_crack(dT, Alpha, eps_old, C):
    P, P_inv, eps_s = P_mat(eps_old)
```

Далее выполним проверку, заключающуюся в том, что третья компонента тензора деформации в главных осях должна быть близка к 0.

```
    eps_new = np.matmul(P, strain2voigtdiv2_np
(eps_s))
```

Составим матрицу перехода в конфигурацию растрескивания.

```
    E_mats = np.zeros(shape=(P.shape[0], 3, 3))
    #all loops like this should be vectorized

    for i in range(P.shape[0]):
        e1 = e_element(eps_new[i, 0, 0])
        e2 = e_element(eps_new[i, 1, 0])
        E_mats[i, :, :] = np.array([[e1, 0, 0],
[0, e2, 0], [0, 0, e1*e2]])
    print(np.min(E_mats[:, 0, 0]))
```

Выполним преобразования, необходимые для расчета матрицы \hat{C}^{crk} .

```
    Z = np.matmul(P_inv, np.matmul(E_mats, P))
    ZT = np.transpose(Z, axes=(0,2,1))
    C_cracks = np.zeros(shape=(P.shape[0], 3, 3))
```

```

C_cracks = np.matmul(ZT, np.matmul(C, Z))
C_crack = Function(TensorFunctionSpace(
mesh, 'CG', 1, shape = (3, 3)))

C_crack.vector()[:] = C_cracks.flatten()

e_min = Function(FunctionSpace(mesh, 'CG', 1))
e_min.vector()[:] = np.minimum
(E_mats[:, 0, 0], E_mats[:, 1, 1])
return C_crack, e_min

```

Далее обратимся к основной функции в коде, в которой объявляются переменные и на каждом временном слое решается конечноэлементная задача. При этом в каждый момент времени запоминается решение в виде деформации *eps_{old}* и используется на новом временном слое для составления матрицы конечноэлементной системы, учитывая вклад трещин на предыдущем временном шаге.

В основной функции объявим вначале необходимые для расчета физические величины и параметры для временных расчетов. А также объявим перемещения и деформации, необходимые для хранения информации о растрескивании на предыдущем шаге.

```

T0 = 300
Ta = 1700
Tb = 600
tf = 1
tau = 0.01
N = int(tf/tau + 1)
u_old = Function(VectorFunctionSpace(mesh,
'CG', 1), name="Displacement")
eps_old = eps(u_old)

```

Далее на каждом временном шаге будем решать задачу термоупругого разрушения. Зададим переменные:


```
for i in range(0, int(N)):
```

```
    Vu = VectorFunctionSpace(mesh, 'CG', 1)
```

```
    du = TrialFunction(Vu)
```

```
    u_ = TestFunction(Vu)
```

Зададим граничные условия и необходимые параметры для описания температуры:

```
    bcu = [DirichletBC(Vu.sub(0),
Constant(0), point_boundary(0, ra)),
           DirichletBC(Vu.sub(1),
Constant(0), point_boundary(-ra, 0))]
```

```
    u = Function(Vu, name="Displacement")
    t = i*tau
    print(t)
    print ('T1 = ', (Ta - T0)*t/tf + T0)
    print ('T2 = ', (Tb - T0)*t/tf + T0)
    T1 = Expression('(Ta - T0)*t/tf + T0', degree=2,
Ta = Ta, T0 = T0, t = t, tf = tf)
    T2 = Expression('(Tb - T0)*t/tf + T0', degree=2,
Tb = Tb, T0 = T0, t = t, tf = tf)
    r = Expression('sqrt(x[0]*x[0] + x[1]*x[1]) + 1e-10',
degree=2, ra = ra, rb = rb)
```

В главной функции задается изменение температуры:

```
    Delta_T = Expression('(T1*(std::log(rb/r)) - T2*(std::
log(ra/r)))/(std::log(rb/ra)) - T0', degree=2, rb = rb, ra = ra,
    r = r, Ta = Ta, Tb = Tb, T0 = T0, t = t,
tf = tf, T1 = T1, T2 = T2)
    Alpha = 1e-5
```

```
#Wint = inner(sigma(du, Delta_T), eps(u_))*dx
f = Constant((0, 0))
```

Найдем матрицу конечноэлементной системы.

```
C_crack, e_min = c_crack(Delta_T, Alpha, eps_old, C)
stress_crk = voigt2stress(dot(C_crack, strain2voigt(eps(du) -
Alpha*Identity(2)*Delta_T)))
Wint = inner(stress_crk, eps(u_))*dx
aM = lhs(Wint)
```

Зададим правую часть и решим разреженную систему уравнений:

```
LM = rhs(Wint)# + inner(f, u_)*dx
solve(aM == LM, u, bcu)
```

Найдем перемещения, а от них перейдем к напряжениям:

```
stress = voigt2stress(dot(C_crack, strain2voigt(eps(u) -
Alpha*Identity(2)*Delta_T)))
```

Запомним значение деформаций на текущем временном шаге, чтобы на следующем сконструировать функции памяти для составления матрицы \hat{C}^{crk} :

```
u_old.assign(u)
eps_old = eps(u_old) - Alpha*Delta_T*Identity(2)
```

Заключение

В работе рассмотрена плоская задача термоупругости для квадратной пластины. Задача была решена методом конечных элементов на треугольной неравномерной сетке. Для тестовых задач с известными аналитическими решениями был подтвержден порядок точности схемы. Также в тестовых задачах были рассмотрены случаи кинематических и силовых граничных условий.

Была исследована математическая модель разрушения стержня в одномерном случае и горизонтального сечения топливной таблетки в двумерном. Одномерная задача была решена методом конечных разностей, плоская - методом конечных элементов. Был проведен графический анализ распространения трещин, основанный на графиках напряжений, перемещений, а также минимума функций памяти.

Для решений всех вышеуказанных задач был реализован программный пакет на языке «Python», «C++».

Список использованных источников

1. Математическое моделирование разрушения хрупкого материала под действием тепловых нагрузок / М.П. Галанин [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2013. № 100. 36 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-100>.
2. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. — 512 с.
3. Галанин М.П. Методы численного анализа математических моделей/М.П. Галанин, Е.Б. Савенков.—М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010.—591, [1] с.: ил. (Математическое моделирование в технике и технологии)
4. Dahlblom O., Ottosen N. S. Smeared Crack Analysis of Concrete Using a Nonlinear Fracture Model // Fracture Mechanics of Concrete. Nordic Seminar Held at Division of Building Materials, November 6, 1986, p. 31–46.
5. Математическая модель трещины хрупкого разрушения, учитывающая распределение сил сцепления между ее берегами и расстояние между ними / В.В. Шевелев, Р.А. Осипов // Прикладная механика и теоретическая физика. 2013. № 3. С. 170 – 180.
6. Моделирование разрушения упругопластических тел / Н. Г. Бураго // Вычислительная механика сплошных сред. – 2008. – Т. 4, № 4. – С. 5-20
7. Качанов Л. М. Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.
8. URL: <http://knigi.link/obrabotka-metallov-metallurgiya/osnovnyie-vidyi-razrusheniya-39479.html>
9. Цепенников М.В., Стром А.А., Повышев И.А., Сметанников О.Ю. Экспериментально-теоретическое исследование механического поведения 3D композитов при квазистационарном разрушении // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. - 2016. - № 2. - С. 143-158. DOI: 10.15593/perm.mech/ 2016.2.10
10. Заславский Б. В. Краткий курс сопротивления материалов. Учебник для авиационных специальностей вузов. М. : Машиностроение, 1986. — 328 с.

11. Fuel Analysis and Licensing Code:FALCON MOD01, Volume 1: Theoretical and Numerical Bases. Final Report, December 2004.
12. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. — 512 с.
13. Bathe K.-J., Kojic M. Inelastic Analysis of Solids and Structures (Computational Fluid and Solid Mechanics). Springer, 2005. 379 p.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Постановка задачи. Цель

Цель

Построить одномерную и двумерную модели разрушения стержня и сечения топливной таблетки

Постановка задачи

- ❶ Тензор малых деформаций Коши:

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) = \varepsilon_{kl}^e + \varepsilon_{kl}^0, \quad (1)$$

$$\varepsilon_{kl}^0 = \varepsilon_{kl}^T = \alpha_{kl}^T \Delta T).$$

- ❷ Определяющее соотношение (закон Гука):

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^0). \quad (2)$$

- ❸ Уравнение равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + b_i = 0. \quad (3)$$

Одномерная модель

Температура

$$T(x, t) = \tilde{T} + F(x)t \sin(t)$$

Зависимость напряжения от деформации

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} E\varepsilon^e, & E\varepsilon^e < \sigma_f^v(\varepsilon); \\ \sigma_f^v(\varepsilon), & \sigma_f^v(\varepsilon) = \sigma_f \left(A + Be^{-c \frac{\varepsilon - \varepsilon^T}{\varepsilon_f}} \right), \quad E\varepsilon^e \geq \sigma_f^v(\varepsilon), \end{cases} \quad (4)$$

где $\sigma_f^v(\varepsilon): \sigma_f^v(0) = \sigma_f$,

$$\varepsilon^e = \varepsilon - \varepsilon^T - \varepsilon^{crk}, \quad (5)$$

$$\varepsilon^{crk} = \varepsilon - \varepsilon^T - \frac{\sigma(\varepsilon)}{E}. \quad (6)$$

Математическая модель

Одномерная математическая модель

$$\begin{cases} T(x, t) = \tilde{T} + F(x) \sin(t), & t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq l; \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0, & 0 < x < l; \\ \sigma = \sigma(\varepsilon - \varepsilon^0), & \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon^T = \alpha(T - T_0); \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$F(x) \sim \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad F(x) = a \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

Аналитическое решение для линейного случая

$$u(x, t) = \frac{alt\alpha \sin(t) - 2atx\alpha \sin(t) - alt\alpha \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \sin(t)}{\pi}. \quad (8)$$

Результаты вычислений

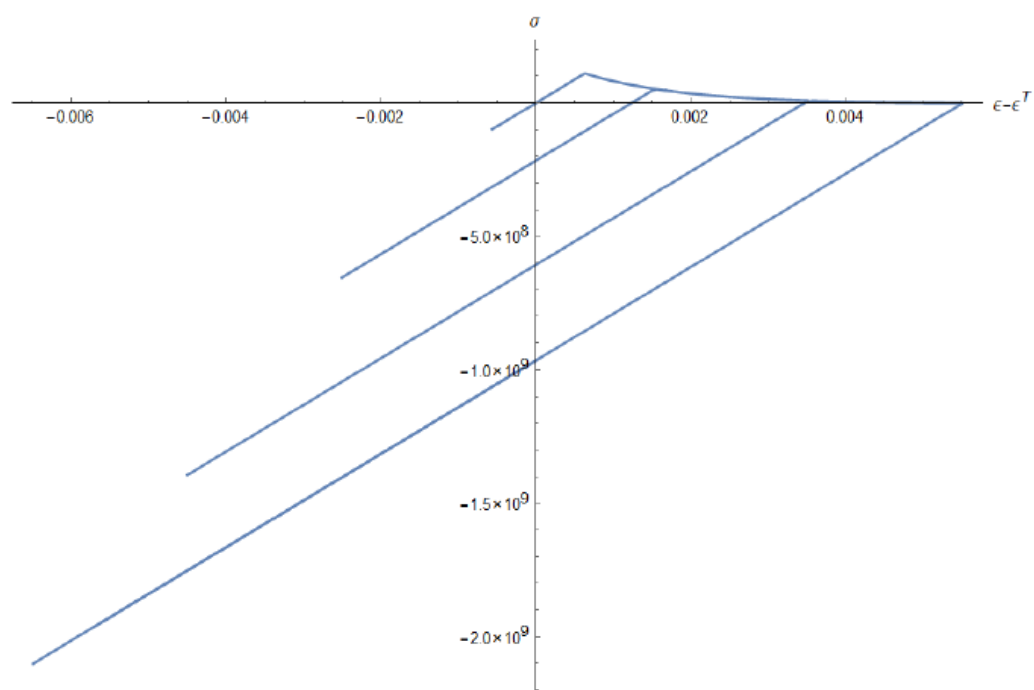
$t = 0.04$

i	h	τ	$\ error\ _C$	$(\ error_i\ _C/\ error_{i+1}\ _C)$
1	0.02	0.02	5.73226e-009	4.00035 4.00008 4.00003 4.
2	0.01	0.02	1.43294e-009	
3	0.005	0.02	3.58228e-010	
4	0.0025	0.02	8.95564e-011	
5	0.00125	0.02	2.23891e-011	

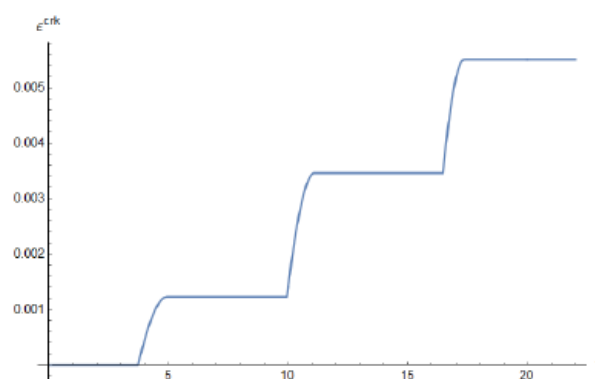
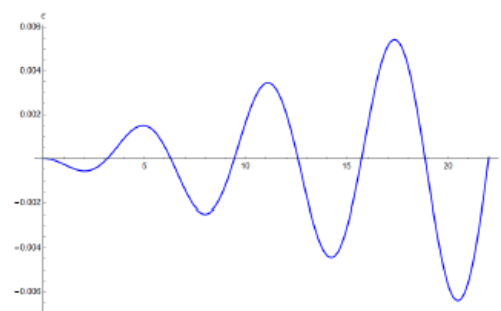
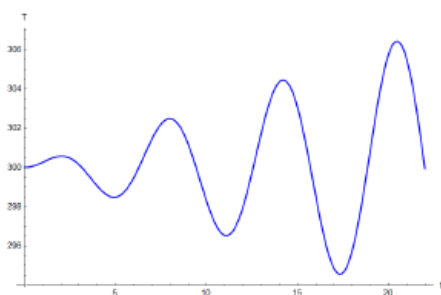
$t = 1$

i	h	τ	$\ error\ $	$(\ error_i\ /\ error_{i+1}\)$
1	0.02	0.02	4.63807e-009	4.00034 4.0001 4.00002 4.
2	0.01	0.02	1.15942e-009	
3	0.005	0.02	2.89848e-010	
4	0.0025	0.02	7.24616e-011	
5	0.00125	0.02	1.81154e-011	

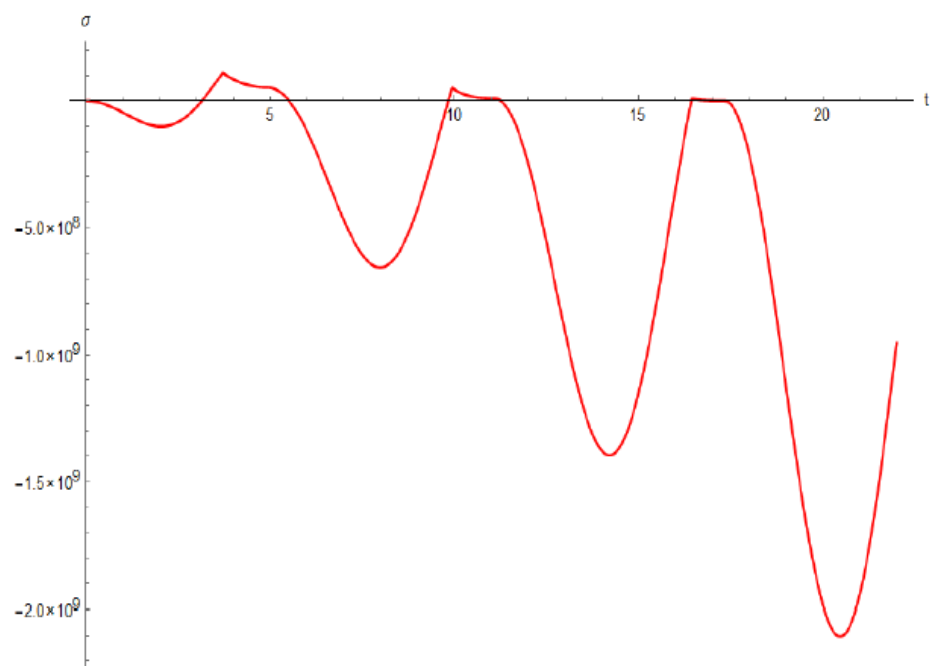
Зависимость σ от ε при знакопеременном нагружении



Зависимость T , ε , ε_{crk} от t



Зависимость σ от t



Двумерный случай

Уравнение равновесия и матрица упругих коэффициентов

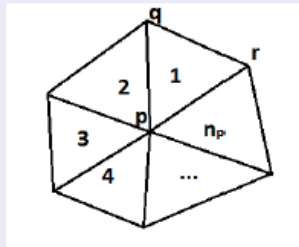
$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + b_x = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + b_y = 0. \end{cases}$$

$$C = E \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\nu}{1 - \nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1 - \nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \end{pmatrix}$$

МКЭ на треугольной неравномерной сетке

$$[K]\{U\} = R_U(T),$$

$$u = \sum_{p=1}^N \sum_{i=1}^{n_p} u_{pi} N_{pi}(x, y)$$



$$N_{pi} = \frac{1}{\Delta} (a_{pi} + b_{pi}x + c_{pi}y)$$

Результаты вычислений для кинематических граничных условий

$$u_i(\vec{x}, t) = \tilde{u}_i(\vec{x}, t)$$

$$\Delta T(x, y, t) = -1000t\sqrt{(x - x_f/2)^2 + (y - y_f/2)^2}$$

h	$ error $	$(error_i / error_{i+1})$
$u(x, t) = (y^2 e^x ; \cos(xy) + \sin(xy))^T$		
7.5e-4	4.9698e-08	
3.75e-4	1.1785e-08	4.2170
1.875e-4	3.2510e-09	3.6250
$u(x, t) = (e^{x^2+y^2} ; \tanh(xy))^T$		
7.5e-4	3.7796e-08	
3.75e-4	1.0721e-08	3.5255
1.875e-4	3.2510e-09	3.6345
$u(x, t) = \arctan(x + y) ; \sinh(xy))^T$		
7.5e-4	5.3041e-06	
3.75e-4	1.1476e-06	4.6218
1.875e-4	3.3861e-07	3.3892

Результаты вычислений для кинематических и силовых граничных условий

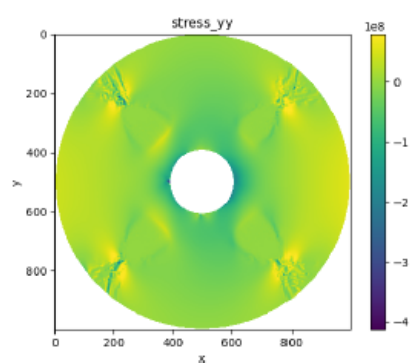
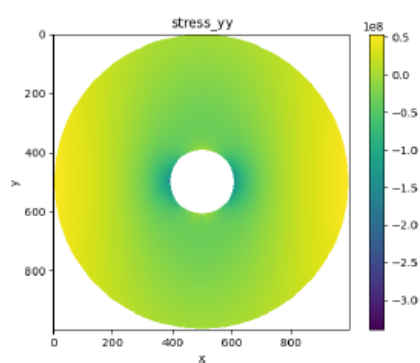
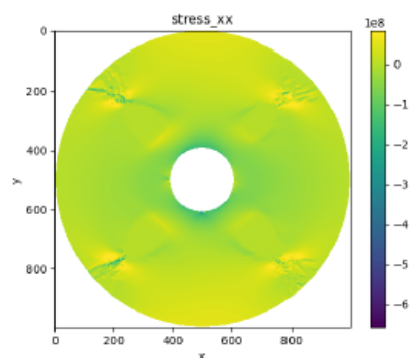
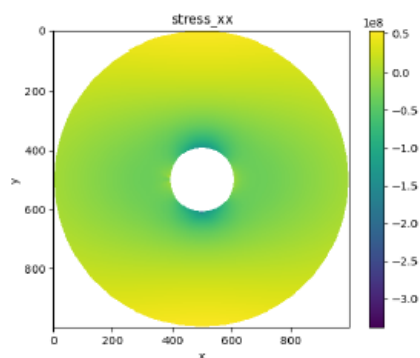
$$u_i(\vec{x}, t) = \tilde{u}_i(\vec{x}, t), \sigma_{ij}(\vec{x})n_j(\vec{x}) = \tilde{p}_i(\vec{x})$$

$$\Delta T(x, y, t) = -1000t\sqrt{(x - x_f/2)^2 + (y - y_f/2)^2}$$

h	$\ error\ $	$(\ error_i\ /\ error_{i+1}\)$
$u(x, t) = (y^2 e^x ; \cos(xy) + \sin(xy))^T$		
7.5e-4	1.4322e-07	
3.75e-4	3.5424e-08	4.0430
1.875e-4	9.4731e-09	3.7394
$u(x, t) = (e^{x^2+y^2} ; \tanh(xy))^T$		
7.5e-4	1.0206e-07	
3.75e-4	2.4944e-08	4.0914
1.875e-4	6.8848e-09	3.6231
$u(x, t) = \arctan(x + y) ; \sinh(xy))^T$		
7.5e-4	9.3674e-06	
3.75e-4	2.3254e-06	4.0283
1.875e-4	0.6060e-06	3.76084

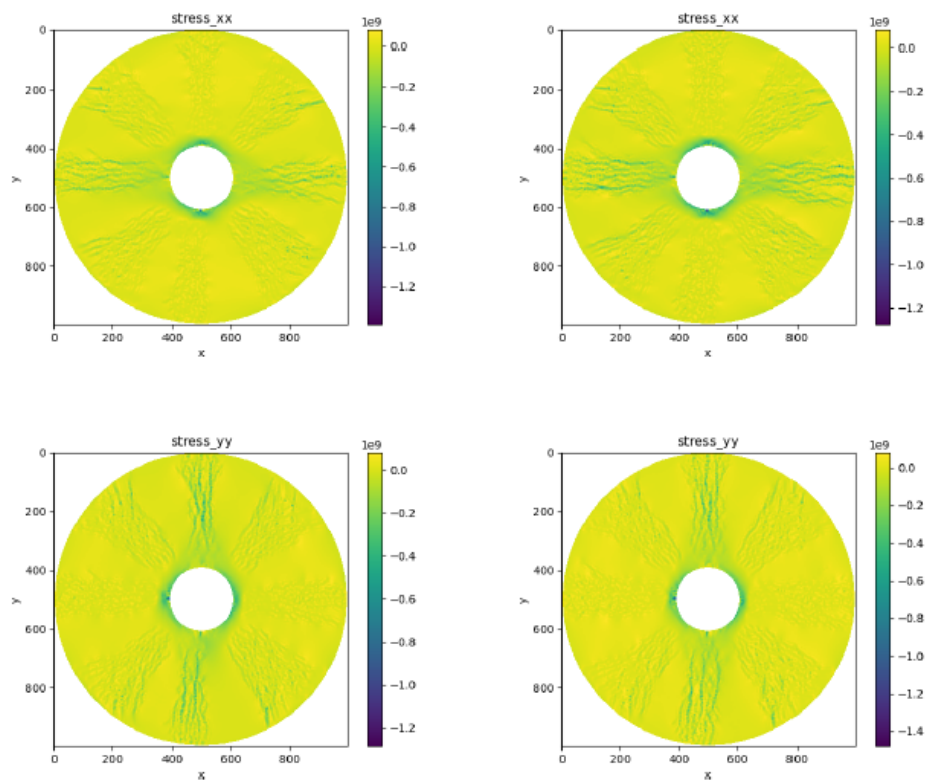
Математическое моделирование термоупругого ра

$\sigma_{xx}(x, y), \sigma_{yy}(x, y)$ при $t = 0.09t_f, t = 0.2t_f$



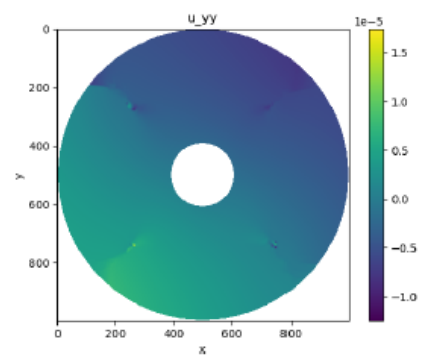
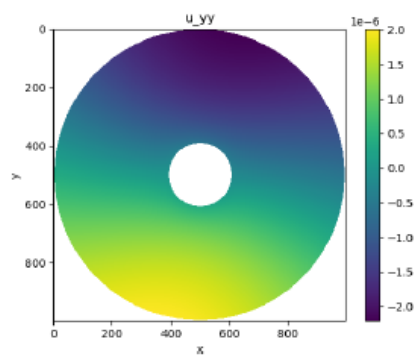
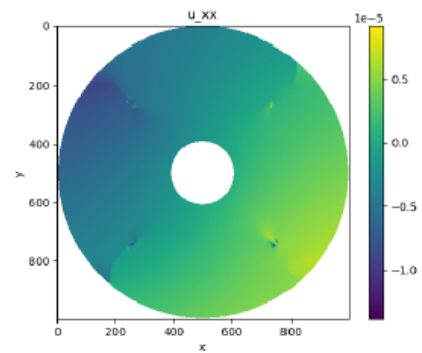
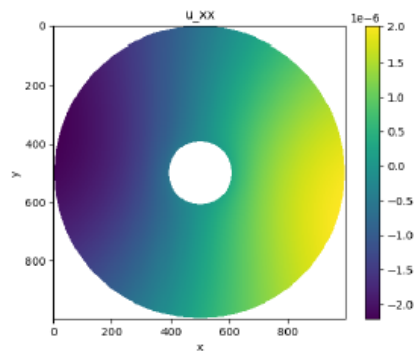
Математическое моделирование термоупругого ре

$\sigma_{xx}(x, y), \sigma_{yy}(x, y)$ при $t = 0.8t_f, t = t_f$



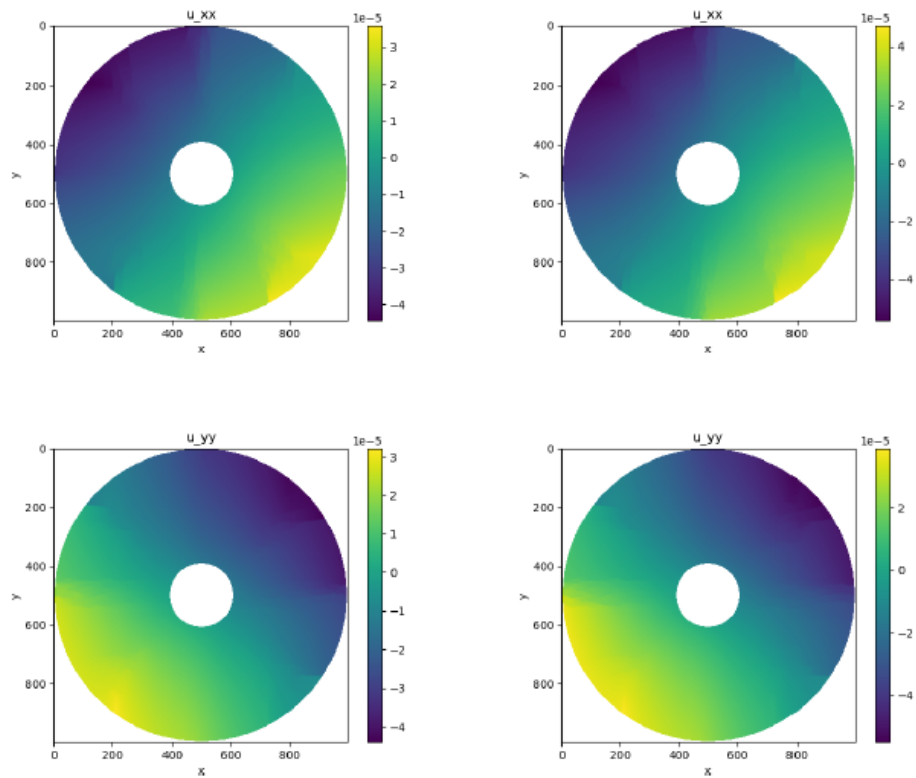
Математическое моделирование термоупругого ра

$u_x(x, y), u_y(x, y)$ при $t = 0.09t_f, t = 0.2t_f$



Математическое моделирование термоупругого ра

$u_x(x, y), u_y(x, y)$ при $t = 0.8t_f, t = t_f$



- ❶ Построена математическая модель разрушения стержня в одномерном случае и сечения топливной таблетки в двумерном
- ❷ Методом конечных элементов на неравномерной треугольной сетке решена задача термоупругости
- ❸ Во всех задачах подтвержден порядок точности схемы на известных аналитических решениях
- ❹ Проведен графический анализ распространения трещин, основанный на графиках напряжений, перемещений в различные временные промежутки

Спасибо за внимание!