Задача численного моделирования напряженно – деформированного состояния твердого тела

В постановку рассматриваемой пространственно двумерной плоской залачи в декартовых переменных входят следующие соотношения:

1). Тензор малых деформаций Коши:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \partial u_x / \partial x, \\ \varepsilon_{yy} = \partial u_y / \partial y, \\ \varepsilon_{xy} = 0.5(\partial u_x / \partial y + \partial u_y / \partial x). \end{cases}$$

2). Закон Гука для тензора напряжений:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = 2\mu\varepsilon_{xx} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}), \\ \sigma_{yy} = 2\mu\varepsilon_{yy} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}), \\ \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 2\mu\varepsilon_{xy} = 2\mu\varepsilon_{yx}. \end{cases}$$

3). Уравнения равновесия твердого тела, занимающего пространственную область G:

$$\begin{cases} \partial\sigma_{xx} / \partial x + \partial\sigma_{yx} / \partial y + f_x = 0, \\ \partial\sigma_{xy} / \partial x + \partial\sigma_{yy} / \partial y + f_y = 0. \end{cases}$$

Плотности действующих сил считаются заданными.

4). Граничные условия, заданные на границе тела ∂G:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \partial G_k, \\ \sigma_{ij} n_j = F_i, \mathbf{r} \in \partial G_d, i, j = x, y. \end{cases}$$

Здесь $\partial G_k \bigcup \partial G_d = \partial G$ - части границы, на которых заданы кинематические и динамические условия соответственно. Правило суммирования по повторяющимся индексам принято здесь и далее.

Все необходимые величины (кроме перемещения, тензоров деформации и напряжений) нужно считать известными.

Требуется построить конечно - элементный алгоритм вычисления решения, для чего взять простейшую треугольную сетку. Для начала нужно взять область в виде прямоугольника. Алгоритм нужно реализовать программным образом. Необходимо построить простейшее тестовое решение задачи, на котором проверить программу. Решение нужно визуализировать и представить графически.

Литература

1. Математическое моделирование разрушения хрупкого материала под действием тепловых нагрузок / М.П. Галанин [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2013.№ 100. 36 с.
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-100.
2. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана,

2008. - 512 с.

3. Галанин М.П. Методы численного анализа математических моделей / М.П. Галанин, Е.Б. Савенков.-М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010.-591 с.: ил. (Математическое моделирование в технике и технологии).

4. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. — 512 с.