Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

Лабораторная работа №4

Методы решения проблемы собственных значений

Студент ФН2-52Б (Группа) (Подпись, дата) Г.А. Швецов (И. О. Фамилия)

Преподаватель (Подпись, дата) А.О. Гусев (И. О. Фамилия)

2022 г.

Оглавление

1. Контрольные вопросы

1. *Почему нельзя находить собственные числа матрицы A, прямо решая уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$, а собственные векторы — «по определению», решая систему $(A - \lambda_j E)e_j = 0$?*

   Решение характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$ для получения собственных чисел является сложным процессом с точки зрения вычислений. При вычислении собственных векторов путем решения системы $(A-\lambda_j E)e_j = 0$ нам известно не точное значение собственного число λ_j, а лишь некоторое его приближение λ_j^*. Матрица $(A-\lambda_j^* E)$ оказывается невырожденной и, следовательно, при решении соответствующей системы будем получать только тривиальное решение.

2. *Докажите, что ортогональное преобразование подобия сохраняет симметрию матрицы.*

   Пусть A — симметричная матрица, т.е. $A^{\mathrm{T}} = A$; P — матрица ортогонального преобразования (из этого следует, что $P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$). Нужно доказать, что матрица $R = P^{-1}AP$ — симметричная матрица.

   $$R^{\mathrm{T}} = (P^{-1}AP)^{\mathrm{T}} = P^{\mathrm{T}}(P^{-1}A)^{\mathrm{T}} = P^{-1}A^{\mathrm{T}}(P^{-1})^{\mathrm{T}} = P^{-1}AP = R,$$

   т.е. R — симметричная матрица.

3. *Как преобразование подобия меняет собственные векторы матрицы?*

   Сначала заметим, что при преобразовании подобия собственные значения не изменяются. Пусть $R = P^{-1}AP$. Характеристическое многочлен для этой матрицы:

   $$\begin{aligned}&\det(R - \lambda E) = \det(P^{-1}AP - \lambda E) = \det(P^{-1}AP - P^{-1}(\lambda E)P) = \\ &= \det(P^{-1}(A - \lambda E)P) = \det(P^{-1})\det(A - \lambda E)\det(P) = \det(A - \lambda E).\end{aligned}$$

   Характеристические многочлены исходной и новой матрицы совпадают, из чего следует равенство собственных значений. Теперь рассмотрим задачу поиска собственных векторов x' матрицы R:

   $$Rx' = \lambda x', \quad P^{-1}APx' = \lambda x', \quad APx' = \lambda Px'.$$

   Из условия, что собственные вектора x матрицы A удовлетворяют условию $Ax = \lambda x$, получаем выражение, связывающее собственные вектора обоих матриц: $x = Px'$.

4. *Почему на практике матрицу A подобными преобразованиями вращения приводят только к форме Хессенберга, но не к треугольному виду?*

   При QR-разложении верхнетреугольной матрицы A_k, полученная на k-й итерации, матрица Q будет диагональной, и на ее диагонали будут числа 1 и -1. Диагональные элементы результата каждой итерации A_{k+1} будут совпадать по модулю с соответствующими элементы матрицы A_k. Вследствие этого итерационный метод не будет сходится.

5. *Оцените количество арифметических операций, необходимое для приведения произвольной квадратной матрицы A к форме Хессенберга.*

   В программной реализации алгоритма идет цикл $i = \overline{2, n-1}$. В этот цикл вложен другой цикл $j = \overline{i+1, n}$. В этом же цикл тратится 5 операций на вычисление коэффициентов матрицы T_{ij}, а также происходят два умножения матрицы A на матрицу T_{ij} (слева и справа). В общем случае умножение на матрицу T_{ij} можно выполнить за $4n$ операций: изменяются две строки или два столбца с номерами i и j, на вычисление каждого элемента требуется 2 операции умножения. Для умножения же A на T_{ij} можно сократить количество операций, если учесть, что в процессе работы идет зануление элементов под диагональю, которая находится под главной диагональю. Тогда умножение можно осуществить за $4(n-i-1)$ умножений. Итоговое количество операций равно

$$\sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} (5 + 4n + 4(n-i-1)) = \dots = \frac{10}{3}n^3 - \frac{23}{2}n^2 + \frac{67}{6}n - 3 \approx \frac{10}{3}n^3.$$

6. *Сойдется ли алгоритм обратных итераций, если в качестве начального приближения взять собственный вектор, соответствующий другому собственному значению? Что будет в этой ситуации в методе обратной итерации, использующем отношение Рэлея?*

   Из собственных векторов матрицы A можно составить ОНБ $e_i, i = \overline{1, n}$. Пусть $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i$. Запишем для этих векторов метод обратных итераций при условии, что нам известно приближение λ_j^* собственного значения λ_j:

$$\begin{gathered}
(A - \lambda_j^*)y = x; \\
\textstyle\sum_{i=1}^n (A - \lambda_j^*)\beta_i e_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i; \\
\textstyle\sum_{i=1}^n \beta_i(\lambda_i - \lambda_j^*)e_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i; \\
\beta_i(\lambda_i - \lambda_j^*) = \alpha_i \ \forall i; \\
\beta_i = \frac{\alpha_i}{\lambda_i - \lambda_j^*} \ \forall i.
\end{gathered}$$

Получаем, что

$$y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\lambda_i - \lambda_j^*} e_i = \frac{\alpha_j}{\lambda_j - \lambda_j^*} e_j + \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \frac{\alpha_i}{\lambda_i - \lambda_j^*} e_i = \\ = \frac{1}{\lambda_j - \lambda_j^*} \left(\alpha_j e_j + \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \frac{\lambda_j - \lambda_j^*}{\lambda_i - \lambda_j^*} \alpha_i e_i \right).$$

Заметим, что при условии $|\lambda_j - \lambda_j^*| \ll |\lambda_i - \lambda_j^*|$, то слагаемые под знаком суммы малы по сравнению с $\alpha_j e_j$. По этой причине метод будет сходится к собственному вектору e_j, даже если взять в качестве начального приближения взять собственный вектор, отвечающий другому собственному числу.

Т.к. соотношение Рэлея позволяет вычислять приближение собственного значения на основе приближения собственного вектора, то в случае выбора в качестве начального приближения собственного вектора, отвечающему другому собственному числу, метод обратной итерации на основе соотношения Рэлея сойдется к этому самому другому собственному значению.

7. *Сформулируйте и обоснуйте критерий останова для QR-алгоритма отыскания собственных значений матрицы.*

   Алгоритм поиска собственных значений методом QR-разложение составляет последовательность матриц A_k, сходящуюся к верхнетреугольной матрице, на диагонали которой стоят собственные значения. При этом изначально берется матрица Хессенберга и на каждой итерации A_k тоже является матрицей Хессенберга. По определению матрицы Хессенберга H $h_{ij} = 0$ при $i > j + 1$. Используя данное свойство достаточно проверять не все элементы нижней строки $a_{ni}, i = \overline{1, n-1}$, а только элемент $a_{n,n-1}$. Таким образом, в качестве критерия останова итерационного алгоритма можно использовать критерий $|a_{n,n-1}| < \varepsilon$. После выполнения этого условия можно перейти к задаче поиска собственных чисел матрицы размером $(n-1) \times (n-1)$.

8. *Предложите возможные варианты условий перехода к алгоритму со сдвигами. Предложите алгоритм выбора величины сдвига.*

   Переходить к алгоритму со сдвигами следует в том случае, если есть близки по модулю собственные числа. В этом случае сходимость метода будет очень медленной.

   Используя круги Гершгорина, можно оценить по модулю собственные числа матрицы. Если по этой оценке получились близки собственные значения, то рекомендуется переходить к алгоритму со сдвигами.

Также если для матриц $A^{(k)}$ и $A^{(k-1)}$ для элементов ниже главной диагонали ($i > j$) выполняется $\frac{|a_{ij}^{(k)}|}{|a_{ij}^{(k-1)}|} \approx 1$, т.е. эти элементы матрицы изменяются незначительно, то следует переходить к алгоритму со сдвигами.

В качестве величины сдвига можно можно использовать $a_{nn}^{(k)}$.

9. *Для чего нужно на каждой итерации нормировать приближение к собственному вектору?*

   Если $|\lambda| > 1$, то последовательность норм векторов приближений собственного вектора экспоненциально стремится к бесконечности. Если же $|\lambda| < 1$, то эта последовательность также экспоненциально стремится к нулю. В силу этого рационально на каждой итерации нормировать приближение собственного вектора.

10. *Приведите примеры использования собственных чисел и собственных векторов в численных методах.*

    (1) Приведение матрицы к жордановой нормальной форме, диагональными элементами которой являются собственные числа, позволяет более эффективно возводить матрицу в степень.

    (2) В электрических и механических системах собственные числа отвечают частотам колебаний, а собственные векторы характеризуют соответствующие формы (моды) колебаний.

    (3) На информации о собственных значениях и собственных векторах матриц основана оценка величин критических нагрузок при расчете строительных конструкций.

    (4) Знание собственных значений матрицы позволяет сделать вывод об устойчивости нулевого решения системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

    (5) Отношение максимального и минимального по модулю собственных значений определяет число обусловленности соответствующей матрицы.

    (6) Собственные вектора являются главными направлениями кривых второго порядка. Также собственные числа позволяют определить к какому типу относится кривая второго порядка: к параболическому, гиперболическому или эллиптическому.

11. Количество операций. Приведение матрицы к матрице Хессенберга

$$\sum_{i=1}^{n-2}((4n+4(n-i+1)+5)(n-i-1)) = \frac{10n^3}{3} - \frac{11n^2}{2} - \frac{41n}{6} + 9.$$

Разложение матрицы $A = RQ$ на каждой итерации

$$\sum_{i=0}^{n-2} (4n + 4(n - i + 1) + 5) = 6n^2 + 7n - 13.$$

Таким образом получаем

$$\frac{10n^3}{3} - \frac{11n^2}{2} - \frac{41n}{6} + 9 + 6n^2 + 7n - 13 = \frac{10n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} - 4$$

мультипликативных операций.

2. Результаты

Точность $\varepsilon = 1\text{e-}3$.

2.1. Вариант 1

$$A = \begin{pmatrix} 28.60 & -7.89 & 2.66 & 6.64 \\ -7.89 & 37.00 & 8.63 & -7.74 \\ 2.66 & 8.63 & 52.80 & -2.11 \\ 6.64 & -7.74 & -2.11 & 0.80 \end{pmatrix}$$

Точный результат (вычисленный в Wolfram Mathematica):

$$\lambda_1 = 57.165516324888 \qquad \Longleftrightarrow \qquad e_1 = \begin{pmatrix} -0.063563494887 \\ 0.443928222700 \\ 0.888001562853 \\ -0.101688935383 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_2 = 41.343846802611 \qquad \Longleftrightarrow \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0.600071540219 \\ -0.663245923611 \\ 0.397904166529 \\ 0.204184391401 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_3 = 22.359615081837 \qquad \Longleftrightarrow \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0.777968847720 \\ 0.582505207755 \\ -0.229455791959 \\ 0.052935757783 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_4 = -1.668978209337 \qquad \Longleftrightarrow \qquad e_4 = \begin{pmatrix} -0.175037997915 \\ 0.154013833283 \\ 0.021806837607 \\ 0.972196430911 \end{pmatrix}.$$

Последовательность приближений $H^{(k)}$:

$$H^{(0)} = \begin{pmatrix} 28.6000 & 10.6498 & 0.0000 & 0.0000 \\ 10.6498 & 27.2128 & 15.0657 & 0.0000 \\ 0.0000 & 15.0657 & 9.9958 & 12.0438 \\ 0.0000 & 0.0000 & 12.0438 & 53.3914 \end{pmatrix}$$

$$H^{(1)} = \begin{pmatrix} 20.6596 & -9.8357 & -0.0000 & 0.0000 \\ -9.8357 & 12.6257 & 17.4321 & 0.0000 \\ 0.0000 & 17.4321 & 28.8825 & 1.6738 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.6738 & 57.0323 \end{pmatrix}$$

$$H^{(2)} = \begin{pmatrix} 15.1552 & 11.4617 & 0.0000 & 0.0000 \\ 11.4617 & 7.5614 & 7.6339 & -0.0000 \\ 0.0000 & 7.6339 & 39.3180 & 0.0116 \\ -0.0000 & -0.0000 & 0.0116 & 57.1655 \end{pmatrix}$$

$$H^{(3)} = \begin{pmatrix} 8.8081 & -11.9717 & 0.0000 & 0.0000 \\ -11.9717 & 12.1871 & 2.7456 & 0.0000 \\ -0.0000 & 2.7456 & 41.0393 & 0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 57.1655 \end{pmatrix}$$

. . . .

$$H^{(7)} = \begin{pmatrix} -1.6690 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & 22.3596 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & 41.3438 & 0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 57.1655 \end{pmatrix}$$

Последовательность приближений к собственным векторам:

$$\lambda_1 = 57.16551632:$$
$$e_1^{(0)} = \begin{pmatrix}1.00000000\\0.00000000\\0.00000000\\0.00000000\end{pmatrix} \quad e_1^{(1)} = \begin{pmatrix}-0.06356349\\0.44392822\\0.88800156\\-0.10168894\end{pmatrix} \quad e_1^{(2)} = \begin{pmatrix}0.06356349\\-0.44392822\\-0.88800156\\0.10168894\end{pmatrix}$$
$$\lambda_2 = 41.34384680:$$
$$e_2^{(0)} = \begin{pmatrix}1.00000000\\0.00000000\\0.00000000\\0.00000000\end{pmatrix} \quad e_2^{(1)} = \begin{pmatrix}0.60007154\\-0.66324592\\0.39790417\\0.20418439\end{pmatrix} \quad e_2^{(2)} = \begin{pmatrix}0.60007154\\-0.66324592\\0.39790417\\0.20418439\end{pmatrix}$$
$$\lambda_3 = 22.35961508:$$
$$e_3^{(0)} = \begin{pmatrix}1.00000000\\0.00000000\\0.00000000\\0.00000000\end{pmatrix} \quad e_3^{(1)} = \begin{pmatrix}0.77796885\\0.58250521\\-0.22945579\\0.05293576\end{pmatrix} \quad e_3^{(2)} = \begin{pmatrix}0.77796885\\0.58250521\\-0.22945579\\0.05293576\end{pmatrix}$$
$$\lambda_4 = -1.66897821:$$
$$e_4^{(0)} = \begin{pmatrix}1.00000000\\0.00000000\\0.00000000\\0.00000000\end{pmatrix} \quad e_4^{(1)} = \begin{pmatrix}-0.17503800\\0.15401383\\0.02180684\\0.97219643\end{pmatrix} \quad e_4^{(2)} = \begin{pmatrix}0.17503800\\-0.15401383\\-0.02180684\\-0.97219643\end{pmatrix}$$

Результаты работы комбинированного метода:

$$\lambda_1 = -1.66897820 : e_1 = \begin{pmatrix}-0.17503800\\0.15401383\\0.02180684\\0.97219643\end{pmatrix}; \lambda_2 = 22.35961508 : e_2 = \begin{pmatrix}-0.77796885\\-0.58250521\\0.22945579\\-0.05293576\end{pmatrix};$$
$$\lambda_3 = 57.16551632 : e_3 = \begin{pmatrix}-0.06356349\\0.44392822\\0.88800156\\-0.10168894\end{pmatrix}; \lambda_4 = 41.34384680 : e_4 = \begin{pmatrix}0.60007154\\-0.66324592\\0.39790417\\0.20418439\end{pmatrix}.$$

Оценка эффективности QR-алгоритма

Метод	**Хессенберг+Сдвиг**	**Хессенберг**	**Сдвиг**	**-**
Кол-во итераций	7	37	9	37
Кол-во операций	107+507	107+1787	869	2200

2.2. Вариант 20

$$A = \begin{pmatrix} 99.40 & -2.90 & -9.98 & 0.63 \\ -2.90 & 106.40 & -9.43 & -8.02 \\ -9.98 & -9.43 & -159.40 & -5.89 \\ 0.63 & -8.02 & -5.89 & 58.20 \end{pmatrix}$$

Точный результат (вычисленный в Wolfram Mathematica):

$$\lambda_1 = -160.298356125032 \qquad \Longleftrightarrow \qquad e_1 = \begin{pmatrix} -0.038699472277 \\ -0.036561095822 \\ -0.998185292796 \\ -0.028138201150 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 108.744492116884 \qquad \Longleftrightarrow \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0.283298382777 \\ -0.946791113565 \\ 0.019424623695 \\ 0.151496856684 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 99.013350459912 \qquad \Longleftrightarrow \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0.958175988212 \\ 0.280375504121 \\ -0.046470683202 \\ -0.033598034245 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = 57.140513548235 \qquad \Longleftrightarrow \qquad e_4 = \begin{pmatrix} -0.011964646888 \\ 0.153751260924 \\ -0.033004254926 \\ 0.987485754908 \end{pmatrix}$$

Последовательность приближений $H^{(k)}$:

$$H^{(0)} = \begin{pmatrix} 99.4000 & 10.4119 & 0.0000 & 0.0000 \\ 10.4119 & -142.0647 & 66.5965 & -0.0000 \\ -0.0000 & 66.5965 & 88.9314 & 8.0087 \\ 0.0000 & 0.0000 & 8.0087 & 58.3333 \end{pmatrix}$$

$$H^{(1)} = \begin{pmatrix} 89.7767 & 51.0623 & 0.0000 & -0.0000 \\ 51.0623 & -148.8974 & -16.1277 & 0.0000 \\ 0.0000 & -16.1277 & 106.5795 & 0.1922 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.1922 & 57.1412 \end{pmatrix}$$

$$H^{(2)} = \begin{pmatrix} -33.3365 & 130.4573 & 0.0000 & 0.0000 \\ 130.4573 & -26.1476 & 5.2161 & -0.0000 \\ 0.0000 & 5.2161 & 106.9436 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 57.1405 \end{pmatrix}$$

....

$$H^{(6)} = \begin{pmatrix} -160.2984 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 99.0134 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 108.7445 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 57.1405 \end{pmatrix}$$

Последовательность приближений к собственным векторам:

$$\lambda_1 = 57.14051355:$$

$$e_1^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.00000000 \\ 0.00000000 \\ 0.00000000 \\ 0.00000000 \end{pmatrix} \quad e_1^{(1)} = \begin{pmatrix} -0.01196465 \\ 0.15375126 \\ -0.03300425 \\ 0.98748575 \end{pmatrix} \quad e_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.01196465 \\ -0.15375126 \\ 0.03300425 \\ -0.98748575 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 108.74449212:$$

$$e_2^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.00000000 \\ 0.00000000 \\ 0.00000000 \\ 0.00000000 \end{pmatrix} \quad e_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.28329838 \\ -0.94679111 \\ 0.01942462 \\ 0.15149686 \end{pmatrix} \quad e_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.28329838 \\ -0.94679111 \\ 0.01942462 \\ 0.15149686 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 99.01335046:$$

$$e_3^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.00000000 \\ 0.00000000 \\ 0.00000000 \\ 0.00000000 \end{pmatrix} \quad e_3^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.95817599 \\ 0.28037550 \\ -0.04647068 \\ -0.03359803 \end{pmatrix} \quad e_3^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.95817599 \\ 0.28037550 \\ -0.04647068 \\ -0.03359803 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = -160.29835613:$$

$$e_4^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.00000000 \\ 0.00000000 \\ 0.00000000 \\ 0.00000000 \end{pmatrix} \quad e_4^{(1)} = \begin{pmatrix} -0.03869947 \\ -0.03656110 \\ -0.99818529 \\ -0.02813820 \end{pmatrix} \quad e_4^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.03869947 \\ 0.03656110 \\ 0.99818529 \\ 0.02813820 \end{pmatrix}$$

Результаты работы комбинированного метода:

$$\lambda_1 = 57.14051354 : e_1 = \begin{pmatrix} -0.01196465 \\ 0.15375126 \\ -0.03300425 \\ 0.98748575 \end{pmatrix}; \lambda_2 = 99.01335045 : e_2 = \begin{pmatrix} 0.95817599 \\ 0.28037551 \\ -0.04647068 \\ -0.03359803 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_3 = 108.74449211 : e_3 = \begin{pmatrix} -0.28329838 \\ 0.94679111 \\ -0.01942462 \\ -0.15149686 \end{pmatrix}; \lambda_4 = -160.29835612 : e_4 = \begin{pmatrix} -0.03869947 \\ -0.03656110 \\ -0.99818529 \\ -0.02813820 \end{pmatrix}.$$

Оценка эффективности QR-алгоритма

Метод	**Хессенберг+Сдвиг**	**Хессенберг**	**Сдвиг**	**-**
Кол-во итераций	6	111	7	91
Кол-во операций	107+433	107+7617	765	9275

2.3. Тест 2 (несимметричная матрица)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & 2 & 5 & 9 \\ 4 & 5 & 1 & 3 \\ 7 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Точный результат (вычисленный в Wolfram Mathematica):

$$\lambda_1 = 17.902099820455 \qquad \Longleftrightarrow \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 0.724593586004 \\ 0.895697899626 \\ 0.613939330165 \\ 1.000000000000 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_2 = -6.763156386957 \qquad \Longleftrightarrow \qquad e_2 = \begin{pmatrix} -1.251099077649 \\ -1.179485159695 \\ 1.017862028691 \\ 1.000000000000 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_3 = -1.562927995541 \qquad \Longleftrightarrow \qquad e_3 = \begin{pmatrix} -0.447030936159 \\ 0.855145114104 \\ -2.141145531763 \\ 1.000000000000 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_4 = -0.576015437956 \qquad \Longleftrightarrow \qquad e_4 = \begin{pmatrix} 1.029162539057 \\ -0.789544290409 \\ 2.010721867225 \\ 1.000000000000 \end{pmatrix}.$$

Исходная матрица A Транспонированная матрица A

$$\lambda_1 = -0.5755956637 \qquad \lambda_1^* = -0.5760057752$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0.39684407 \\ -0.30444754 \\ -0.77533216 \\ 0.38559891 \end{pmatrix}; \quad e_1^* = \begin{pmatrix} 0.64061807 \\ -0.66103775 \\ -0.26269859 \\ 0.28918338 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_2 = -1.5633429842 \qquad \lambda_2^* = -1.5629370408$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0.17512983 \\ -0.33501346 \\ 0.83881945 \\ -0.39176199 \end{pmatrix}; \quad e_2^* = \begin{pmatrix} 0.66723473 \\ -0.55127768 \\ 0.43139107 \\ -0.25454368 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_3 = -6.7631615068 \qquad \lambda_3^* = -6.7631722638$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0.55992990 \\ 0.52787906 \\ -0.45554456 \\ -0.44755040 \end{pmatrix}; \quad e_3 : * = \begin{pmatrix} 0.53872703 \\ 0.46482522 \\ -0.23594038 \\ -0.66184805 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_4 = 17.9021001547 \qquad \lambda_4^* = 17.9021150799$$

$$e_4 = \begin{pmatrix} 0.44062842 \\ 0.54467767 \\ 0.3733391 \\ 0.6081042 \end{pmatrix} \quad e_4^* = \begin{pmatrix} 0.44940459 \\ 0.43463357 \\ 0.39432338 \\ 0.67352672 \end{pmatrix}.$$

Оценка эффективности QR-алгоритма

Метод	**Хессенберг+Сдвиг**	**Хессенберг**	**Сдвиг**	**-**
Кол-во итераций A	7	11	7	11
Кол-во итераций A^{T}	5	11	7	11

Список использованных источников

1. *Галанин М.П., Савенков Е.Б.* Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 592 с.