Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

Лабораторная работа №3

Решение задач интерполирования

Студент ФН2-52Б (Группа) (Подпись, дата) Г.А. Швецов (И. О. Фамилия)

Преподаватель (Подпись, дата) А.О. Гусев (И. О. Фамилия)

2022 г.

Оглавление

1. Контрольные вопросы

1. *Определите количество арифметических операций, требуемое для интерполирования функции в некоторой точке многочленом Лагранжа (включая построение самого многочлена) на сетке с числом узлов, равным n.*

   Многочлен Лагранжа имеет вид

   $$L_n = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{j=0,\, j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}. \tag{1.1}$$

   Как видно из формулы (1.1), в произведении мы имеем ровно n делений и $n-1$ умножений. Каждое произведение мы домножаем на y_k (1 умножение). В результате получаем $n + n - 1 + 1 = 2n$ мультипликативных операций на каждом шаге. Просуммировав от 0 до n, получаем $2n^2 + 2n$ арифметических операций.

2. *Определите количество арифметических операций, требуемое для интерполирования функции в некоторой точке кубическим сплайном (включая затраты на вычисление коэффициентов сплайна) на сетке с числом узлов, равным n.*

   Для нахождения вспомогательного параметра g_i необходимо n делений. Для составления СЛАУ необходимо посчитать коэффициенты, требующие $2(n-1)$ умножений. Решаем СЛАУ методом прогонки, что требует $5n$ операций. Осталось заполнить оставшиеся коэффициенты. Это $5(n-1) + 5 = 5n$ действий. Таким образом, для составления многочлена третьей степени необходимо затратить $n + 2(n-1) + 5n + 5n = 13n - 2$ мультипликативных операций.
   Для интерполирования же функции в некоторой точке по формуле

   $$s_i = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3 \tag{1.2}$$

   требуется затратить еще 6 умножений. Итого $6 + 13n - 2 = 13n + 4$ операций.

3. *Функция $f(x) = e^x$ интерполируется многочленом Лагранжа на отрезке $[0, 2]$ на равномерной сетке с шагом $h = 0,2$. Оцените ошибку экстраполяции в точке $x = 2{,}2$, построив многочлен Лагранжа и подставив в него это значение, а также по формуле для погрешности экстраполяции.*

   Точка $x = 2{,}2$ находится в интервале $x \in [b, b + h] = [2,\ 2{,}2]$, поэтому оценим ошибку экстраполяции по следующей формуле

   $$|y(x) - L_n(x)| \leqslant h^{n+1} \max_{\xi\in[a,\, x]} |y^{(n+1)}(\xi)|.$$

В нашем же случае

$$|y(x) - L_n(x)| = 6.2664084\text{e-}8 \leqslant h^{n+1} \max_{\xi \in [a,\, x]} |y^{(n+1)}(\xi)| = 0.000000184832262.$$

4. *Выпишите уравнения для параметров кубического сплайна, если в узлах x_0 и x_n помимо значений функции y_0 и y_n заданы первые производные $y'(x_0)$ и $y'(x_n)$.*

   На каждом из отрезков $[x_{i-1},\, x_i]$, $i = \overline{1,\, n}$ функция $S(x) = s_i(x)$ ищется в виде многочлена третьей степени:

$$s_i = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3.$$

   Найдем коэффициенты a_i, b_i, c_i, d_i. Т.к. $S(x_i) = y_i$, $i = \overline{0,\, n}$ получим:

$$a_i = y_{i-1}, i = \overline{1,\, n},$$
$$a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i,\ i = \overline{1,\, n}.$$

   Здесь $h_i = x_i - x_{i-1}$ — длина отрезка $[x_{i-1}, x_i]$.
   Из условия непрерывности первой и второй производной для внутренних узлов сетки получим:

$$S'(x_i - 0) = S'(x_i + 0),$$
$$S''(x_i - 0) = S''(x_i + 0),\ i = \overline{1,\, (n-1)},$$

   откуда:

$$b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1},\ i = \overline{1,\, (n-1)},$$
$$2c_i + 6d_i h_i = 2c_{i+1},\ i = \overline{1,\, (n-1)}.$$

   Получаем систему из $(4n-2)$ уравнений с $4n$ неизвестными. Недостающие два уравнения получим из граничных условий для $S(x)$:

$$S'(x_0) = y_0', \qquad S'(x_n) = y_n'.$$

   Получим

$$S'(x_0) = s_1'(x_0) = b_1 = y'(x_0),$$
$$S'(x_n) = s_n'(x_n) = b_n + 2c_n h_n + 3d_n h_n^2 = y'(x_n).$$

   Выражения для коэффициентов b_i и d_i имеют вид

$$
\begin{aligned}
b_i &= g_i - \frac{(c_{i+1} + 2c_i)h_i}{3},\\
d_i &= \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i},\ i = \overline{1,\, n},
\end{aligned}
$$

где $g_i = \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h_i}$.

Тогда граничные условия для $S(x)$ можно переписать в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{3(g_1 - y_0')}{2h_1} - \frac{c_2}{2},\\
c_{n+1} &= \frac{3(y_n' - g_n)}{2h_n} - \frac{c_n}{2}.
\end{aligned}
$$

Тогда, исключая из предыдущих уравнений переменные a_i, b_i, d_i, получим систему

$$
\begin{cases}
c_1 = \dfrac{3(g_1 - y_0')}{2h_1} - \dfrac{c_2}{2},\\
h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3(g_i - g_{i-1}),\ i = \overline{2,\, n}.\\
c_{n+1} = \dfrac{3(y_n' - g_n)}{2h_n} - \dfrac{c_n}{2}.
\end{cases}
$$

5. *Каковы достоинства и недостатки сплайн-интерполяции и интерполяции многочленом Лагранжа?*

   Интерполяция многочленом Лагранжа

   Достоинства:

   (a) Построенная функция имеет непрерывные производные любого порядка;

   Недостатки:

   (a) Интерполирование функции при большом числе узлов интерполяции приводит к плохому приближению;

   (b) Рост погрешности округления;

   (c) По сравнению со сплайн-интерполяцией сложность алгоритма на порядок выше ($O(n^2)$);

   (d) При добавлении новых узлов интерполяции, многочлен Лагранжа требуется заново строить;

   (e) Применение многочленов высоких степеней приводит к осцилляциям (пример Рунге).

Сплайн-интерполяция

Достоинства:

(a) Степень многочленов не зависит от числа узлов сетки и, следовательно, не изменяется при его увеличении;

(b) Построенная функция имеет $(p-1)$ непрерывных производных;

(c) В случае интерполяции кубическими сплайнами не только сам сплайн $S(x)$, но и его первая и вторая производные $S'(x)$ и $S''(x)$ также сходятся в равномерной норме к соответствующим производным функциям $y(x)$.

Недостатки:

(a) Большая вероятность, что экстраполяция функции приведет к большой ошибке.

6. *Какие свойства полиномов Чебышева и чебышевских сеток Вам известны?*

При проведении интерполяции желательно, чтобы была достигнута минимальная ошибка $\|f-\tilde{f}\|$ в некоторой норме.

$$\|f-\tilde{f}\|_C = \|r_n\|_C \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\|\omega\|_C. \tag{1.3}$$

Поэтому выбирают такой набор узлов, чтобы норма в правой части оценки (1.3) была минимальной, тем самым уменьшая ошибку интерполяции

$$\min_{x_0,\ldots,x_n} \max_{[a,b]} |\omega(x)|, \quad \omega(x) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i).$$

Это задача о построении полинома $(n{+}1)$-го порядка, которая решена В.А. Марковым. Искомый полином является полиномом Чебышева первого рода и имеет вид

$$\omega(x) = T_{n+1}(x) = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}\cos\left((n+1)\arccos\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right),$$

корни полинома задаются следующим соотношением:

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}, \quad k = 0,\, 1, \ldots, n,$$

при этом они являются узлами интерполяции. Для такого набора узлов

$$\|\omega\|_C = \frac{1}{2^{2n+1}}(b-a)^{n+1}$$

и

$$\|f-L_n\|_C \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}.$$

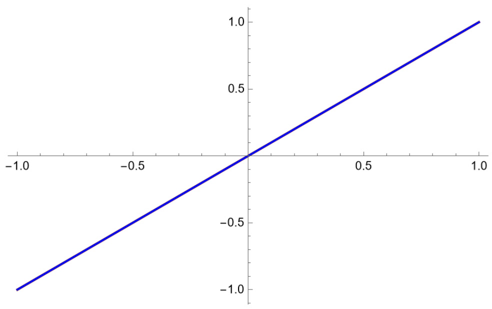
Полученная оценка является неулучшаемой.

2. Результаты

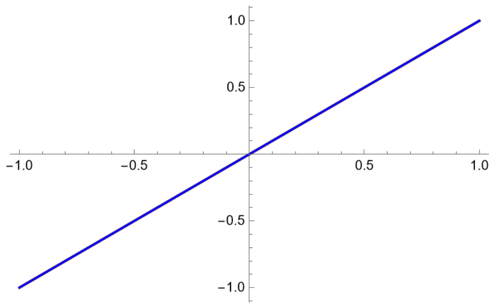
2.1. Функция x

Таблица 1. Нормы ошибок интерполяции.

Количество узлов	Интерполирование многочленом Лагранжа		Сплайн-интерполирование	
	Равномерная сетка	Чебышевская сетка	Равномерная сетка	Чебышевская сетка
4	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
8	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
16	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
32	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
64	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000



(a) Интерполяция многочленом Лагранжа



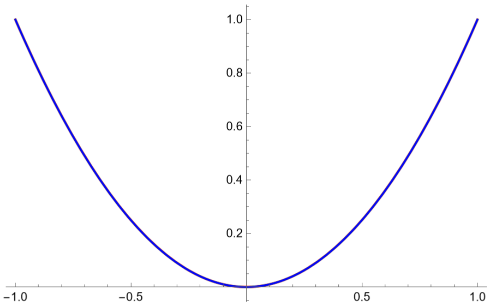
(b) Сплайн-интерполяция

Рис. 1. $n = 8$.

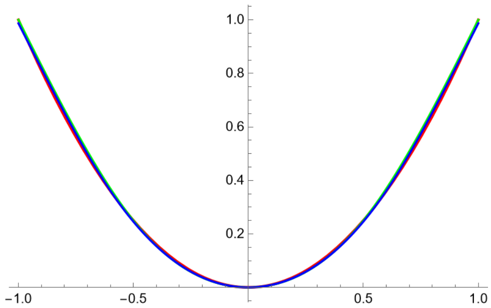
2.2. Функция x^2

Таблица 2. Нормы ошибок интерполяции.

Количество узлов	Интерполирование многочленом Лагранжа		Сплайн-интерполирование	
	Равномерная сетка	Чебышевская сетка	Равномерная сетка	Чебышевская сетка
4	0.00000000	0.00000000	0.02406589	0.01356303
8	0.00000000	0.00000000	0.00613592	0.00150945
16	0.00000000	0.00000000	0.00153414	0.00012378
32	0.00000000	0.00000000	0.00038353	0.00000882
64	0.23398295	0.00000000	0.00000000	0.00000000

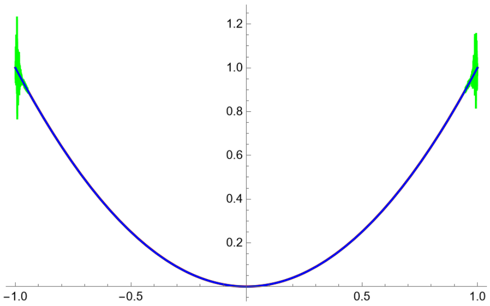


(a) Интерполяция многочленом Лагранжа

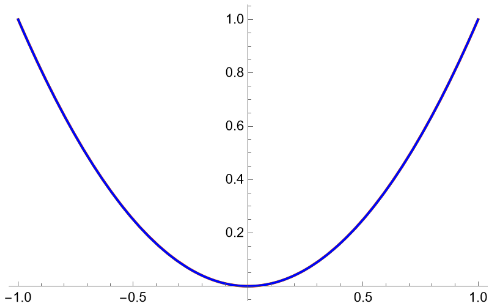


(b) Сплайн-интерполяция

Рис. 2. $n = 4$.



(a) Интерполяция многочленом Лагранжа

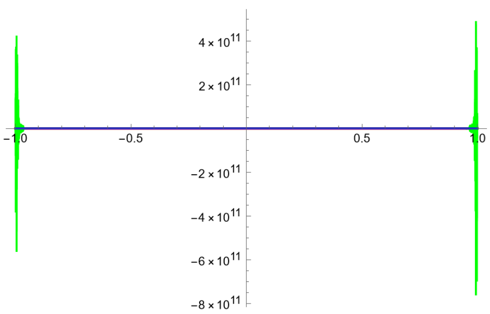


(b) Сплайн-интерполяция

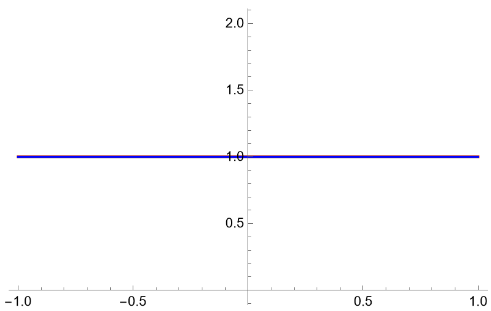
Рис. 3. $n = 64$.

Таблица 3. Нормы ошибок интерполяции.

Количество узлов	Интерполирование многочленом Лагранжа		Сплайн-интерполирование	
	Равномерная сетка	Чебышевская сетка	Равномерная сетка	Чебышевская сетка
100	749213958068.13720703	0.00000000	0.00000000	0.00000000



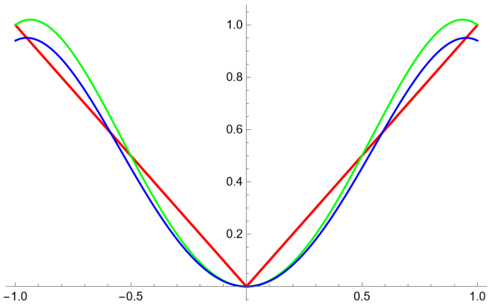
(a) Интерполяция многочленом Лагранжа



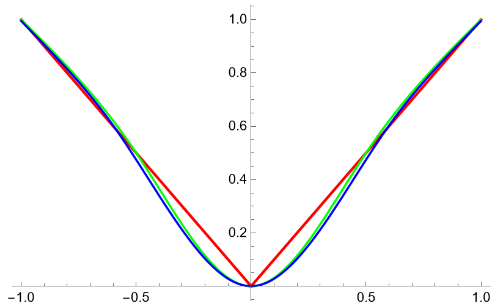
(b) Сплайн-интерполяция

Рис. 4. $n = 100$.

Количество узлов	Интерполирование многочленом Лагранжа		Сплайн-интерполирование	
	Равномерная сетка	Чебышевская сетка	Равномерная сетка	Чебышевская сетка
4	0.14720062	0.12317574	0.08583173	0.09777330
8	0.31575341	0.06697527	0.04251731	0.05758552
16	11.13706900	0.03520988	0.02125762	0.03116576

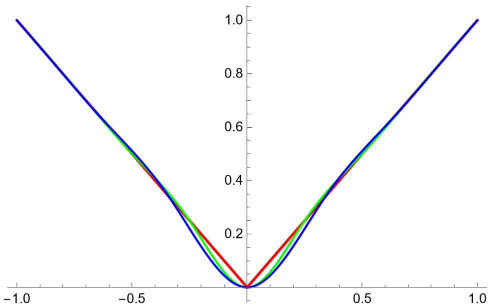


(a) Интерполяция многочленом Лагранжа

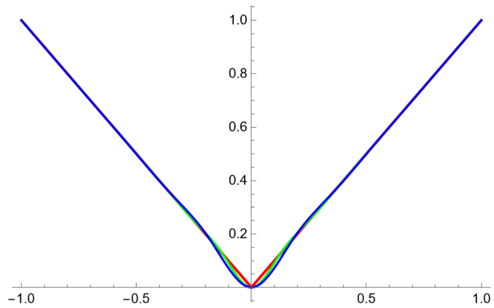


(b) Сплайн-интерполяция

Рис. 5. $n = 4$.



(a) Сплайн-интерполяция ($n = 8$)



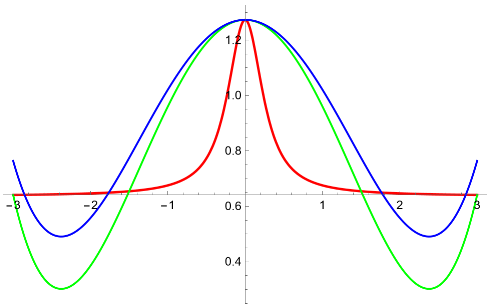
(b) Сплайн-интерполяция ($n = 16$)

Рис. 6. $n = 8$.

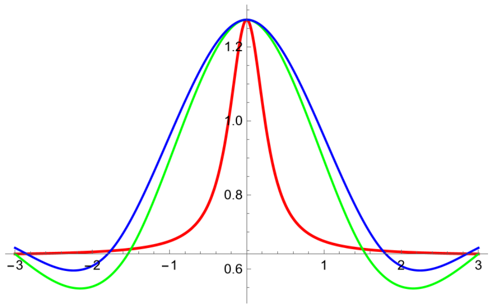
2.3. Функция $\dfrac{1}{\operatorname{arcctg}(1+10x^2)}$

Таблица 4. Нормы ошибок интерполяции.

Количество узлов	Интерполирование многочленом Лагранжа		Сплайн-интерполирование	
	Равномерная сетка	Чебышевская сетка	Равномерная сетка	Чебышевская сетка
4	0.41874070	0.43984510	0.37888740	0.40442884
8	1.24549676	0.31118342	0.20291020	0.28341571
16	54.25190820	0.14203880	0.04443190	0.12179101
32	194964.99928579	0.02735275	0.00297114	0.01344388
64	3255214956736.39648438	0.00108219	0.00049753	0.00236323

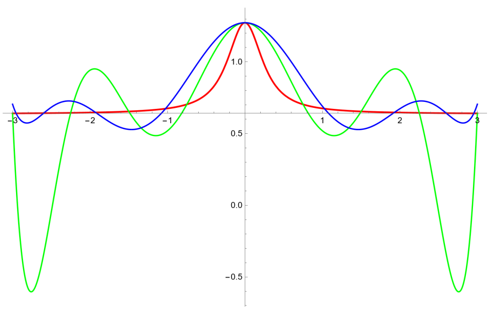


(a) Интерполяция многочленом Лагранжа

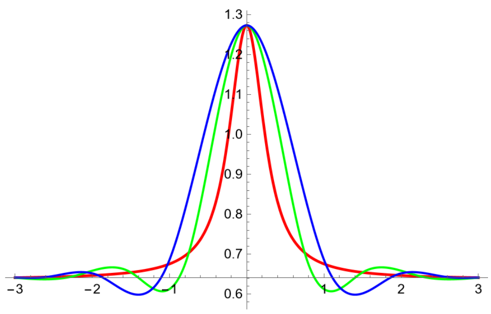


(b) Сплайн-интерполяция

Рис. 7. $n = 4$.



(a) Интерполяция многочленом Лагранжа



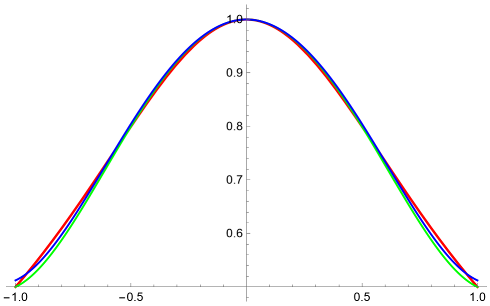
(b) Сплайн-интерполяция

Рис. 8. $n = 8$.

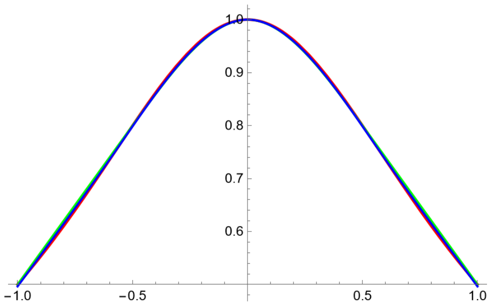
2.4. Функция $\dfrac{1}{1+x^2}$

Таблица 5. Нормы ошибок интерполяции.

Количество узлов	Интерполирование многочленом Лагранжа		Сплайн-интерполирование	
	Равномерная сетка	Чебышевская сетка	Равномерная сетка	Чебышевская сетка
4	0.02228186	0.01219512	0.01027558	0.00448152
8	0.00225838	0.00035894	0.00162533	0.00085716
16	0.00003991	0.00000031	0.00038882	0.00007959
32	0.00000003	0.00000000	0.00009620	0.00000530
64	16.96613580	0.00000000	0.00002399	0.00000034

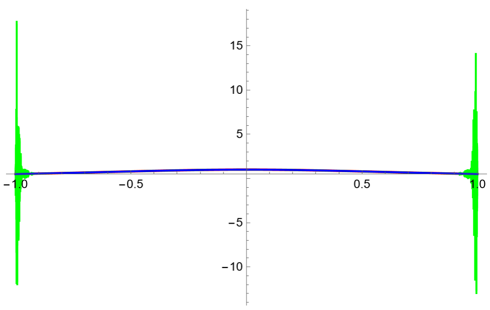


(a) Интерполяция многочленом Лагранжа

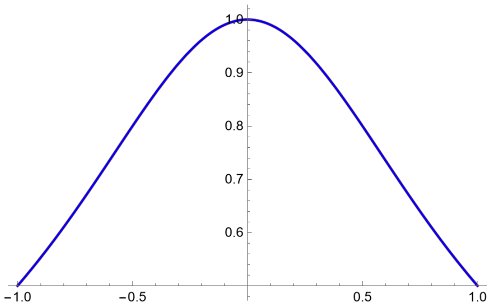


(b) Сплайн-интерполяция

Рис. 9. $n = 4$.



(a) Интерполяция многочленом Лагранжа



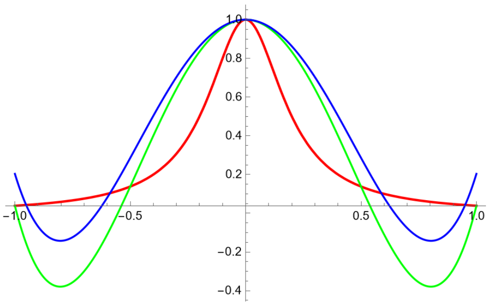
(b) Сплайн-интерполяция

Рис. 10. $n = 64$.

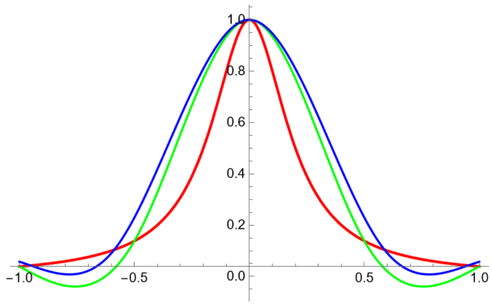
2.5. Функция $\frac{1}{1+25x^2}$

Таблица 6. Нормы ошибок интерполяции.

Количество узлов	Интерполирование многочленом Лагранжа		Сплайн-интерполирование	
	Равномерная сетка	Чебышевская сетка	Равномерная сетка	Чебышевская сетка
4	0.43835712	0.40201690	0.27931341	0.33008954
8	1.04517650	0.17083545	0.05607385	0.13375079
16	14.39385129	0.03261358	0.00374540	0.01362665
32	5058.95984109	0.00140174	0.0006555	0.00275683
64	1078549277.25717545	0.00000245	0.00004034	0.00024212

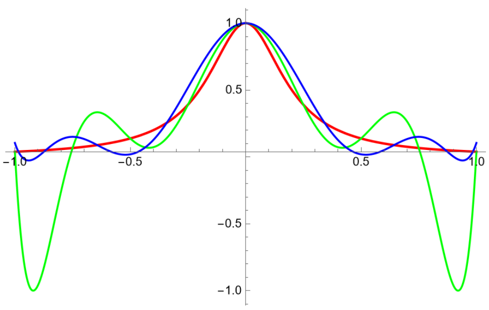


(a) Интерполяция многочленом Лагранжа

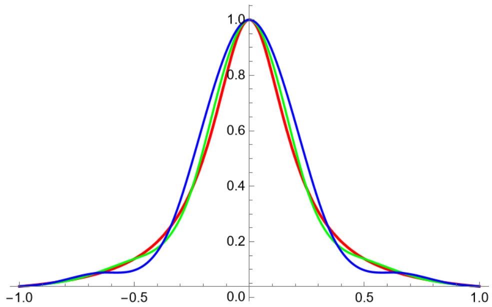


(b) Сплайн-интерполяция

Рис. 11. $n = 4$.



(a) Интерполяция многочленом Лагранжа



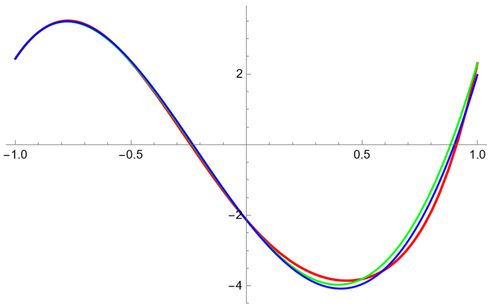
(b) Сплайн-интерполяция

Рис. 12. $n = 8$.

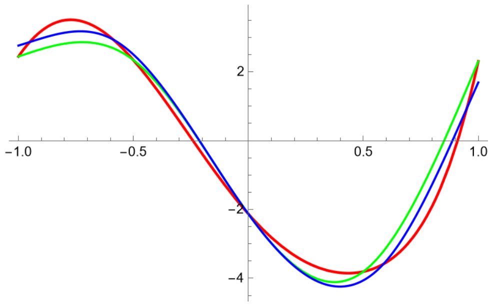
2.6. Функция $(4x^3 + 2x^2 - 4x + 2)^{\sqrt{2}} + \arcsin\left(\dfrac{1}{5 + x - x^2}\right) - 5$

Таблица 7. Нормы ошибок интерполяции.

Количество узлов	Интерполирование многочленом Лагранжа		Сплайн-интерполирование	
	Равномерная сетка	Чебышевская сетка	Равномерная сетка	Чебышевская сетка
4	0.59961429	0.33079347	1.15371582	0.63506019
8	0.02477320	0.00794910	0.32412950	0.07820568
16	0.00853480	0.00007259	0.08226211	0.00660738
32	0.00321827	0.00000003	0.02065464	0.00047461
64	33.93813773	0.00000000	0.00516903	0.00003170

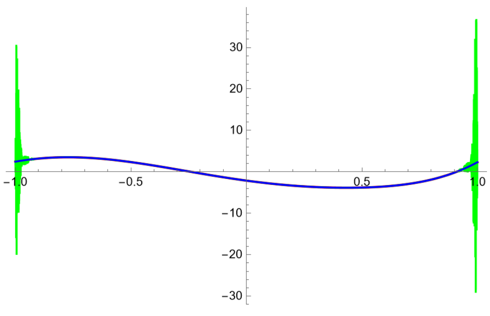


(a) Интерполяция многочленом Лагранжа

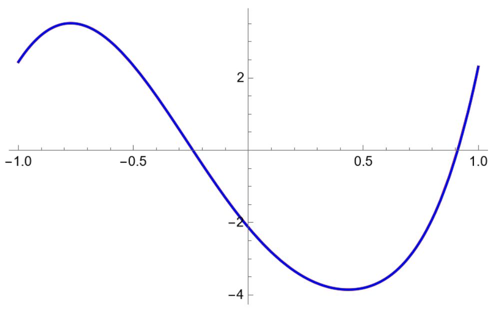


(b) Сплайн-интерполяция

Рис. 13. $n = 4$.



(a) Интерполяция многочленом Лагранжа



(b) Сплайн-интерполяция

Рис. 14. $n = 4$.

Список использованных источников

1. *Галанин М.П., Савенков Е.Б.* Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 592 с.