



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ _____ Фундаментальные науки

КАФЕДРА _____ Прикладная математика

Лабораторная работа №3

Решение задач интерполирования

Студент _____
ФН2-52Б
(Группа)

(Подпись, дата)

Г.А. Швецов

(И. О. Фамилия)

Преподаватель

(Подпись, дата)

А.О. Гусев

(И. О. Фамилия)

2022 г.

Оглавление

1. Контрольные вопросы	3
2. Результаты	7
2.1. Функция x	7
2.2. Функция x^2	7
2.3. Функция $\frac{1}{\operatorname{arccotg}(1+10x^2)}$	10
2.4. Функция $\frac{1}{1+x^2}$	11
2.5. Функция $\frac{1}{1+25x^2}$	12
2.6. Функция $(4x^3+2x^2-4x+2)^{\sqrt{2}} + \arcsin\left(\frac{1}{5+x-x^2}\right) - 5$	13
Список использованных источников	14

1. Контрольные вопросы

1. *Определите количество арифметических операций, требуемое для интерполирования функции в некоторой точке многочленом Лагранжа (включая построение самого многочлена) на сетке с числом узлов, равным n .*

Многочлен Лагранжа имеет вид

$$L_n = \sum_{k=0}^n y_k \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}. \quad (1.1)$$

Как видно из формулы (1.1), в произведении мы имеем ровно n делений и $n - 1$ умножений. Каждое произведение мы домножаем на y_k (1 умножение). В результате получаем $n + n - 1 + 1 = 2n$ мультипликативных операций на каждом шаге. Просуммировав от 0 до n , получаем $2n^2 + 2n$ арифметических операций.

2. *Определите количество арифметических операций, требуемое для интерполирования функции в некоторой точке кубическим сплайном (включая затраты на вычисление коэффициентов сплайна) на сетке с числом узлов, равным n .*

Для нахождения вспомогательного параметра g_i необходимо n делений. Для составления СЛАУ необходимо посчитать коэффициенты, требующие $2(n - 1)$ умножений. Решаем СЛАУ методом прогонки, что требует $5n$ операций. Осталось заполнить оставшиеся коэффициенты. Это $5(n - 1) + 5 = 5n$ действий. Таким образом, для составления многочлена третьей степени необходимо затратить $n + 2(n - 1) + 5n + 5n = 13n - 2$ мультипликативных операций.

Для интерполирования же функции в некоторой точке по формуле

$$s_i = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3 \quad (1.2)$$

требуется затратить еще 6 умножений. Итого $6 + 13n - 2 = 13n + 4$ операций.

3. *Функция $f(x) = e^x$ интерполируется многочленом Лагранжа на отрезке $[0, 2]$ на равномерной сетке с шагом $h = 0,2$. Оцените ошибку экстраполяции в точке $x = 2,2$, построив многочлен Лагранжа и подставив в него это значение, а также по формуле для погрешности экстраполяции.*

Точка $x = 2,2$ находится в интервале $x \in [b, b + h] = [2, 2,2]$, поэтому оценим ошибку экстраполяции по следующей формуле

$$|y(x) - L_n(x)| \leq h^{n+1} \max_{\xi \in [a, x]} |y^{(n+1)}(\xi)|.$$

В нашем же случае

$$|y(x) - L_n(x)| = 6.2664084e-8 \leq h^{n+1} \max_{\xi \in [a, x]} |y^{(n+1)}(\xi)| = 0.000000184832262.$$

4. *Выпишите уравнения для параметров кубического сплайна, если в узлах x_0 и x_n помимо значений функции y_0 и y_n заданы первые производные $y'(x_0)$ и $y'(x_n)$.*

На каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$ функция $S(x) = s_i(x)$ ищется в виде многочлена третьей степени:

$$s_i = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3.$$

Найдем коэффициенты a_i, b_i, c_i, d_i . Т.к. $S(x_i) = y_i$, $i = \overline{0, n}$ получим:

$$\begin{aligned} a_i &= y_{i-1}, i = \overline{1, n}, \\ a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 &= y_i, i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Здесь $h_i = x_i - x_{i-1}$ — длина отрезка $[x_{i-1}, x_i]$.

Из условия непрерывности первой и второй производной для внутренних узлов сетки получим:

$$\begin{aligned} S'(x_i - 0) &= S'(x_i + 0), \\ S''(x_i - 0) &= S''(x_i + 0), i = \overline{1, (n-1)}, \end{aligned}$$

откуда:

$$\begin{aligned} b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 &= b_{i+1}, i = \overline{1, (n-1)}, \\ 2c_i + 6d_i h_i &= 2c_{i+1}, i = \overline{1, (n-1)}. \end{aligned}$$

Получаем систему из $(4n - 2)$ уравнений с $4n$ неизвестными. Недостающие два уравнения получим из граничных условий для $S(x)$:

$$S'(x_0) = y'_0, \quad S'(x_n) = y'_n.$$

Получим

$$\begin{aligned} S'(x_0) &= s'_1(x_0) = b_1 = y'(x_0), \\ S'(x_n) &= s'_n(x_n) = b_n + 2c_n h_n + 3d_n h_n^2 = y'(x_n). \end{aligned}$$

Выражения для коэффициентов b_i и d_i имеют вид

$$b_i = g_i - \frac{(c_{i+1} + 2c_i)h_i}{3},$$

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, \quad i = \overline{1, n},$$

где $g_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}$.

Тогда граничные условия для $S(x)$ можно переписать в следующем виде:

$$c_1 = \frac{3(g_1 - y'_0)}{2h_1} - \frac{c_2}{2},$$

$$c_{n+1} = \frac{3(y'_n - g_n)}{2h_n} - \frac{c_n}{2}.$$

Тогда, исключая из предыдущих уравнений переменные a_i, b_i, d_i , получим систему

$$\begin{cases} c_1 = \frac{3(g_1 - y'_0)}{2h_1} - \frac{c_2}{2}, \\ h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_ic_{i+1} = 3(g_i - g_{i-1}), \quad i = \overline{2, n}. \\ c_{n+1} = \frac{3(y'_n - g_n)}{2h_n} - \frac{c_n}{2}. \end{cases}$$

5. Каковы достоинства и недостатки сплайн-интерполяции и интерполяции многочленом Лагранжа?

Интерполяция многочленом Лагранжа

Достоинства:

(а) Построенная функция имеет непрерывные производные любого порядка;

Недостатки:

(а) Интерполирование функции при большом числе узлов интерполяции приводит к плохому приближению;

(b) Рост погрешности округления;

(с) По сравнению со сплайн-интерполяцией сложность алгоритма на порядок выше ($O(n^2)$);

(d) При добавлении новых узлов интерполяции, многочлен Лагранжа требуется заново строить;

(е) Применение многочленов высоких степеней приводит к осцилляциям (пример Рунге).

Сплайн-интерполяция

Достоинства:

- (а) Степень многочленов не зависит от числа узлов сетки и, следовательно, не изменяется при его увеличении;
- (б) Построенная функция имеет $(p - 1)$ непрерывных производных;
- (с) В случае интерполяции кубическими сплайнами не только сам сплайн $S(x)$, но и его первая и вторая производные $S'(x)$ и $S''(x)$ также сходятся в равномерной норме к соответствующим производным функциям $y(x)$.

Недостатки:

- (а) Большая вероятность, что экстраполяция функции приведет к большой ошибке.

6. Какие свойства полиномов Чебышева и чебышевских сеток Вам известны?

При проведении интерполяции желательно, чтобы была достигнута минимальная ошибка $\|f - \tilde{f}\|$ в некоторой норме.

$$\|f - \tilde{f}\|_C = \|r_n\|_C \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \|\omega\|_C. \quad (1.3)$$

Поэтому выбирают такой набор узлов, чтобы норма в правой части оценки (1.3) была минимальной, тем самым уменьшая ошибку интерполяции

$$\min_{x_0, \dots, x_n} \max_{[a, b]} |\omega(x)|, \quad \omega(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

Это задача о построении полинома $(n+1)$ -го порядка, которая решена В.А. Марковым. Искомый полином является полиномом Чебышева первого рода и имеет вид

$$\omega(x) = T_{n+1}(x) = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}} \cos \left((n+1) \arccos \frac{2x - (b+a)}{b-a} \right),$$

корни полинома задаются следующим соотношением:

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

при этом они являются узлами интерполяции. Для такого набора узлов

$$\|\omega\|_C = \frac{1}{2^{2n+1}} (b-a)^{n+1}$$

и

$$\|f - L_n\|_C \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}.$$

Полученная оценка является неулучшаемой.

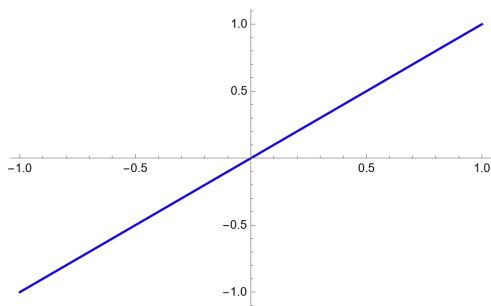
2. Результаты

● Точная функция ● Равномерная сетка ● Чебышевская сетка

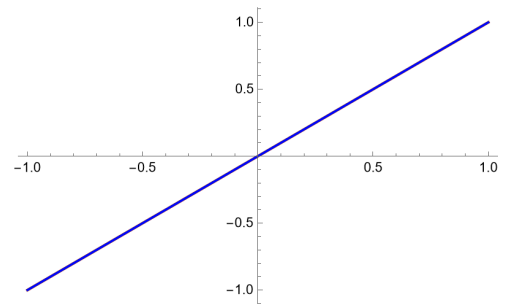
2.1. Функция x

Таблица 1. Нормы ошибок интерполяции.

Количество узлов	Интерполирование многочленом Лагранжа		Сплайн-интерполирование	
	Равномерная сетка	Чебышевская сетка	Равномерная сетка	Чебышевская сетка
4	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
8	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
16	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
32	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
64	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000



(а) Интерполяция многочленом Лагранжа



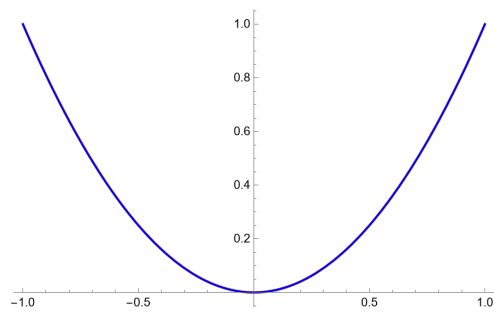
(b) Сплайн-интерполяция

Рис. 1. $n = 8$.

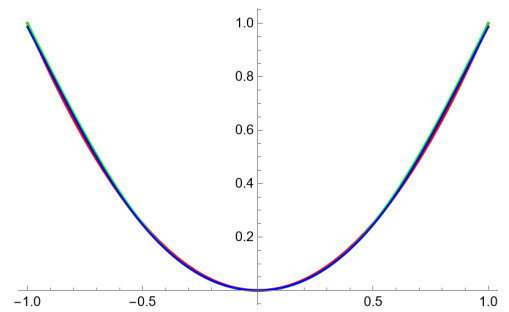
2.2. Функция x^2

Таблица 2. Нормы ошибок интерполяции.

Количество узлов	Интерполирование многочленом Лагранжа		Сплайн-интерполирование	
	Равномерная сетка	Чебышевская сетка	Равномерная сетка	Чебышевская сетка
4	0.00000000	0.00000000	0.02406589	0.01356303
8	0.00000000	0.00000000	0.00613592	0.00150945
16	0.00000000	0.00000000	0.00153414	0.00012378
32	0.00000000	0.00000000	0.00038353	0.00000882
64	0.23398295	0.00000000	0.00000000	0.00000000

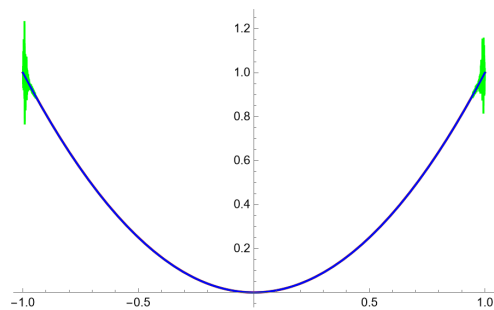


(a) Интерполяция многочленом Лагранжа

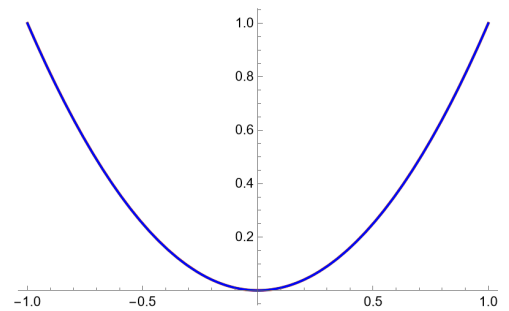


(b) Сплайн-интерполяция

Рис. 2. $n = 4$.



(a) Интерполяция многочленом Лагранжа

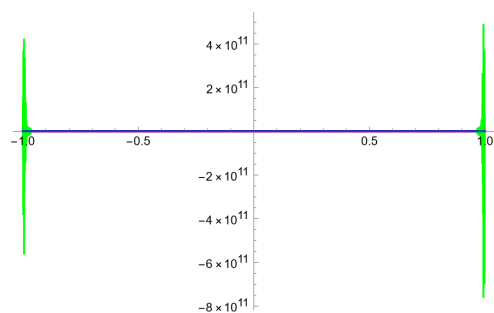


(b) Сплайн-интерполяция

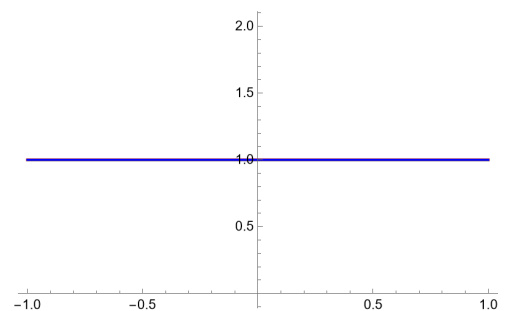
Рис. 3. $n = 64$.

Таблица 3. Нормы ошибок интерполяции.

Количество узлов	Интерполирование многочленом Лагранжа		Сплайн-интерполирование	
	Равномерная сетка	Чебышевская сетка	Равномерная сетка	Чебышевская сетка
100	749213958068.13720703	0.00000000	0.00000000	0.00000000



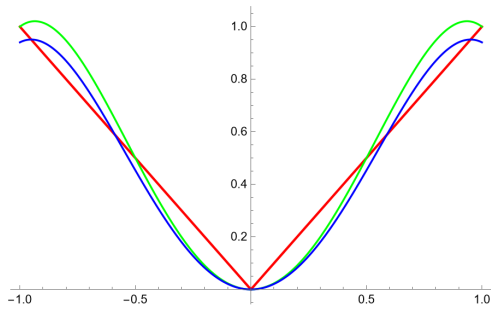
(a) Интерполяция многочленом Лагранжа



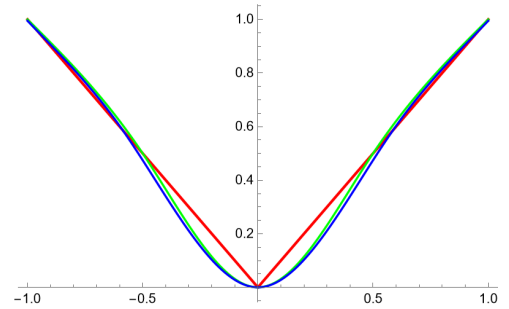
(b) Сплайн-интерполяция

Рис. 4. $n = 100$.

Количество узлов	Интерполирование многочленом Лагранжа		Сплайн-интерполирование	
	Равномерная сетка	Чебышевская сетка	Равномерная сетка	Чебышевская сетка
4	0.14720062	0.12317574	0.08583173	0.09777330
8	0.31575341	0.06697527	0.04251731	0.05758552
16	11.13706900	0.03520988	0.02125762	0.03116576

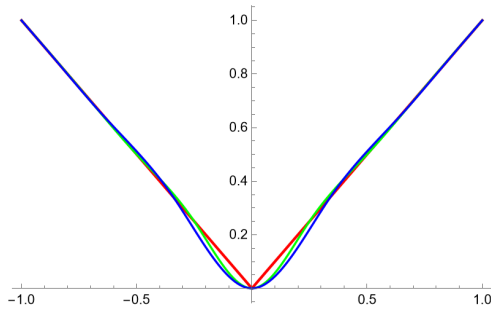


(a) Интерполяция многочленом Лагранжа

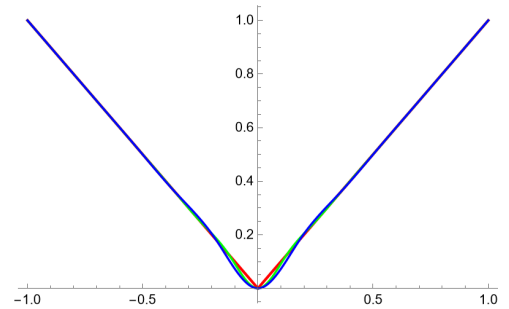


(b) Сплайн-интерполяция

Рис. 5. $n = 4$.



(a) Сплайн-интерполяция ($n = 8$)



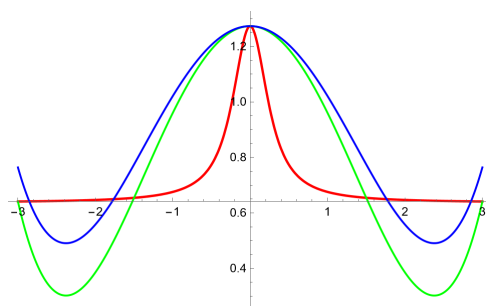
(b) Сплайн-интерполяция ($n = 16$)

Рис. 6. $n = 8$.

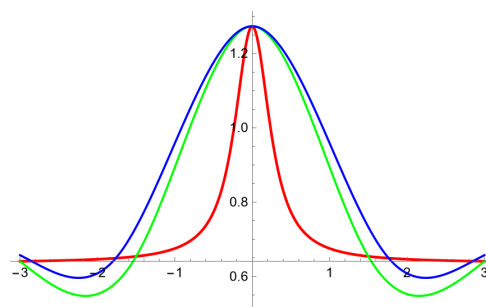
2.3. Функция $\frac{1}{\operatorname{arccotg}(1+10x^2)}$

Таблица 4. Нормы ошибок интерполяции.

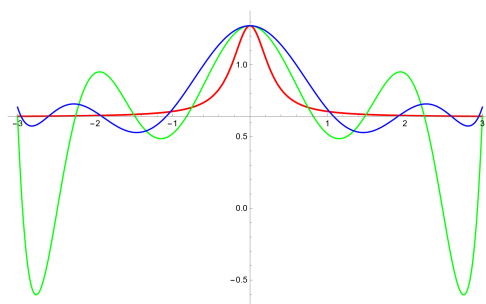
Количество узлов	Интерполирование многочленом Лагранжа		Сплайн-интерполирование	
	Равномерная сетка	Чебышевская сетка	Равномерная сетка	Чебышевская сетка
4	0.41874070	0.43984510	0.37888740	0.40442884
8	1.24549676	0.31118342	0.20291020	0.28341571
16	54.25190820	0.14203880	0.04443190	0.12179101
32	194964.99928579	0.02735275	0.00297114	0.01344388
64	3255214956736.39648438	0.00108219	0.00049753	0.00236323



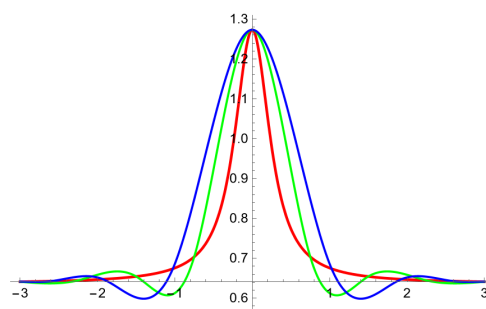
(a) Интерполяция многочленом Лагранжа



(b) Сплайн-интерполяция

Рис. 7. $n = 4$.

(a) Интерполяция многочленом Лагранжа



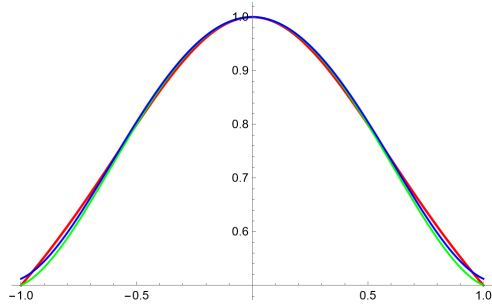
(b) Сплайн-интерполяция

Рис. 8. $n = 8$.

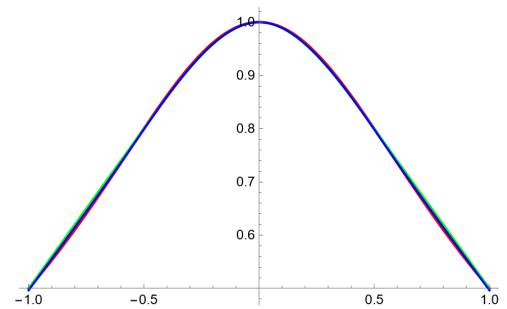
2.4. Функция $\frac{1}{1+x^2}$

Таблица 5. Нормы ошибок интерполяции.

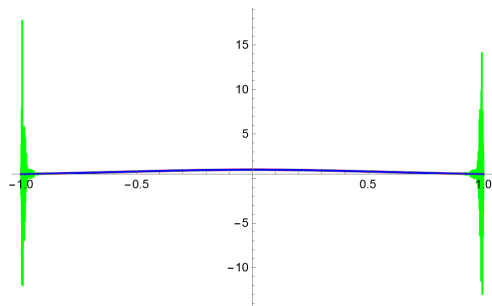
Количество узлов	Интерполирование многочленом Лагранжа		Сплайн-интерполирование	
	Равномерная сетка	Чебышевская сетка	Равномерная сетка	Чебышевская сетка
4	0.02228186	0.01219512	0.01027558	0.00448152
8	0.00225838	0.00035894	0.00162533	0.00085716
16	0.00003991	0.00000031	0.00038882	0.00007959
32	0.00000003	0.00000000	0.00009620	0.00000530
64	16.96613580	0.00000000	0.00002399	0.00000034



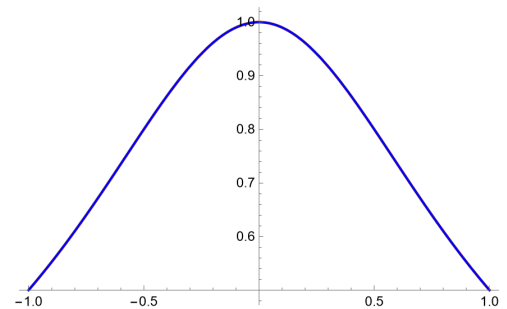
(a) Интерполяция многочленом Лагранжа



(b) Сплайн-интерполяция

Рис. 9. $n = 4$.

(a) Интерполяция многочленом Лагранжа



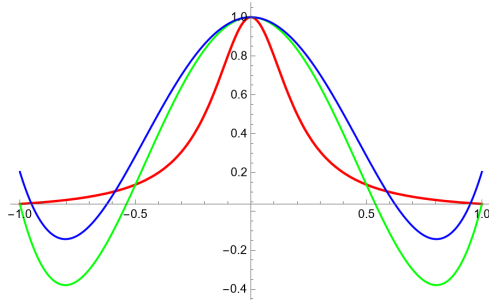
(b) Сплайн-интерполяция

Рис. 10. $n = 64$.

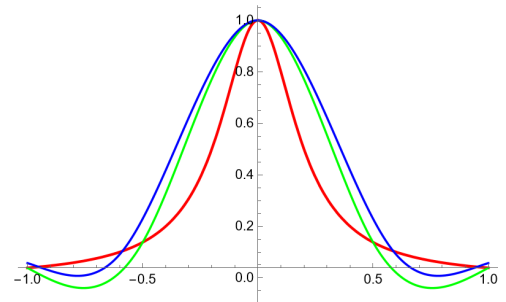
2.5. Функция $\frac{1}{1+25x^2}$

Таблица 6. Нормы ошибок интерполяции.

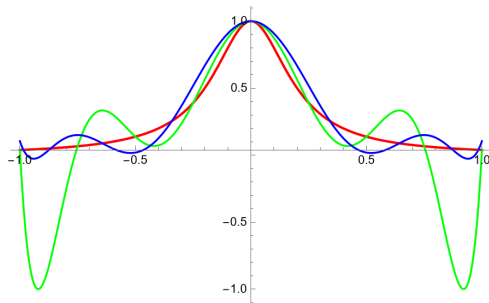
Количество узлов	Интерполирование многочленом Лагранжа		Сплайн-интерполирование	
	Равномерная сетка	Чебышевская сетка	Равномерная сетка	Чебышевская сетка
4	0.43835712	0.40201690	0.27931341	0.33008954
8	1.04517650	0.17083545	0.05607385	0.13375079
16	14.39385129	0.03261358	0.00374540	0.01362665
32	5058.95984109	0.00140174	0.0006555	0.00275683
64	1078549277.25717545	0.00000245	0.00004034	0.00024212



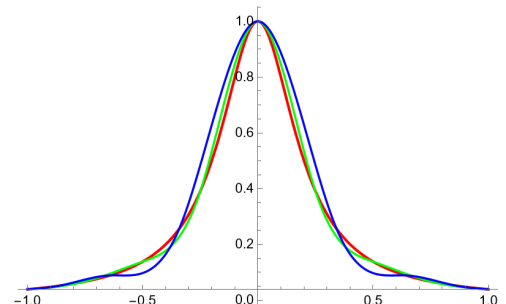
(a) Интерполяция многочленом Лагранжа



(b) Сплайн-интерполяция

Рис. 11. $n = 4$.

(a) Интерполяция многочленом Лагранжа



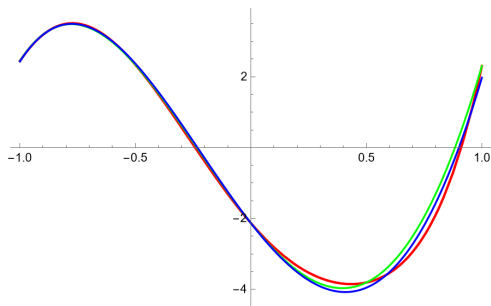
(b) Сплайн-интерполяция

Рис. 12. $n = 8$.

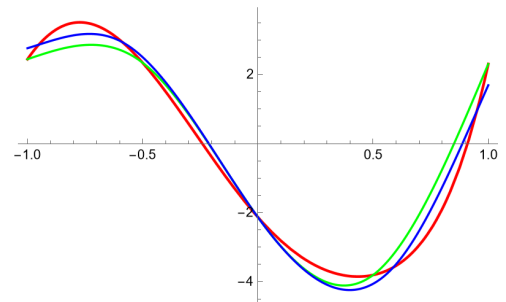
2.6. Функция $(4x^3 + 2x^2 - 4x + 2)^{\sqrt{2}} + \arcsin\left(\frac{1}{5+x-x^2}\right) - 5$

Таблица 7. Нормы ошибок интерполяции.

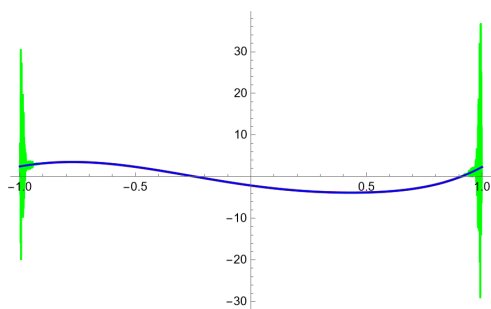
Количество узлов	Интерполирование многочленом Лагранжа		Сплайн-интерполирование	
	Равномерная сетка	Чебышевская сетка	Равномерная сетка	Чебышевская сетка
4	0.59961429	0.33079347	1.15371582	0.63506019
8	0.02477320	0.00794910	0.32412950	0.07820568
16	0.00853480	0.00007259	0.08226211	0.00660738
32	0.00321827	0.00000003	0.02065464	0.00047461
64	33.93813773	0.00000000	0.00516903	0.00003170



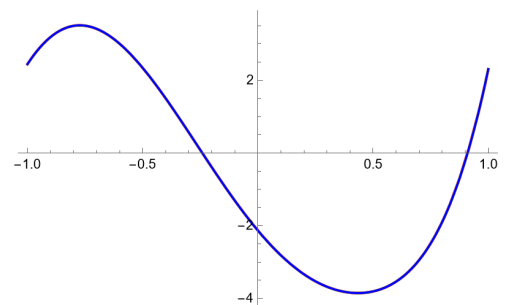
(a) Интерполяция многочленом Лагранжа



(b) Сплайн-интерполяция

Рис. 13. $n = 4$.

(a) Интерполяция многочленом Лагранжа



(b) Сплайн-интерполяция

Рис. 14. $n = 4$.

Список использованных источников

1. *Галанин М.П., Савенков Е.Б.* Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 592 с.