



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ _____ Фундаментальные науки

КАФЕДРА _____ Прикладная математика

Лабораторная работа №3

Численное решение краевых задач для одномерного волнового уравнения

Студенты _____
ФН2-62Б
(Группа)

З.И. Абрамов, Г.А. Швецов
(И. О. Фамилия)

Преподаватель _____

С.А. Конев
(И. О. Фамилия)

2023 г.

Оглавление

1. Контрольные вопросы	3
2. Результаты	9
Список использованных источников	19

1. Контрольные вопросы

1. Предложите разностные схемы, отличные от схемы «крест», для численного решения задачи (3.1)–(3.4).

Для решения волнового уравнения можно построить следующие разностные схемы:

- (а) явную схему вида

$$\frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2} = c^2 \frac{y_{i+1}^{j-1} - 2y_i^{j-1} + y_{i-1}^{j-1}}{h^2},$$

однако она является абсолютно неустойчивой;

- (б) неявную схему вида

$$\frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2} = c^2 \frac{y_{i+1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i-1}^{j+1}}{h^2},$$

Проверим ее на устойчивость *методом гармоник*.

Введем замену $y_i^j = \rho^j e^{\tilde{i}i\varphi}$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau^2} \left(\rho^{j+1} e^{\tilde{i}i\varphi} - 2\rho^j e^{\tilde{i}i\varphi} + \rho^{j-1} e^{\tilde{i}i\varphi} \right) &= \\ &= \frac{c^2}{h^2} \left(\rho^{j+1} e^{\tilde{i}(i+1)\varphi} - 2\rho^{j+1} e^{\tilde{i}i\varphi} + \rho^{j+1} e^{\tilde{i}(i-1)\varphi} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho^{j+1} e^{\tilde{i}i\varphi} - 2\rho^j e^{\tilde{i}i\varphi} + \rho^{j-1} e^{\tilde{i}i\varphi} &= \\ &= \frac{c^2 \tau^2}{h^2} \left(\rho^{j+1} e^{\tilde{i}(i+1)\varphi} - 2\rho^{j+1} e^{\tilde{i}i\varphi} + \rho^{j+1} e^{\tilde{i}(i-1)\varphi} \right) | : \rho^j, : e^{\tilde{i}i\varphi}, \end{aligned}$$

$$\rho - 2 + \rho^{-1} = \frac{c^2 \tau^2}{h^2} (2\rho \cos \varphi - 2\rho),$$

$$\rho - 2 + \rho^{-1} = -4\rho \frac{c^2 \tau^2}{h^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

$$\left(1 + 4 \frac{c^2 \tau^2}{h^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) \rho^2 - 2\rho + 1 = 0,$$

$$D = -16 \frac{c^2 \tau^2}{h^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} < 0,$$

$$\rho_1 = \frac{1 - 2i \frac{c\tau}{h} \sin \frac{\varphi}{2}}{1 + 4 \frac{c^2 \tau^2}{h^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}, \quad \rho_2 = \frac{1 + 2i \frac{c\tau}{h} \sin \frac{\varphi}{2}}{1 + 4 \frac{c^2 \tau^2}{h^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}},$$

$$|\rho_{1,2}| = \frac{1}{1 + 4 \frac{c^2 \tau^2}{h^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \sqrt{1 + 4 \frac{c^2 \tau^2}{h^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}},$$

$$|\rho_{1,2}| = \frac{1}{\sqrt{1 + 4 \frac{c^2 \tau^2}{h^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} \leq 1,$$

следовательно, неявная схема устойчива.

(с) неявную схему вида

$$\frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2} = c^2 \frac{(y_{i+1}^{j-1} - 2y_i^{j-1} + y_{i-1}^{j-1}) + (y_{i+1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i-1}^{j+1})}{2h^2},$$

Проверим ее на устойчивость *методом гармоник*.

Введем замену $y_i^j = \rho^j e^{\tilde{i}i\varphi}$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau^2} \left(\rho^{j+1} e^{\tilde{i}i\varphi} - 2\rho^j e^{\tilde{i}i\varphi} + \rho^{j-1} e^{\tilde{i}i\varphi} \right) = \\ = \frac{c^2}{2h^2} \left(\left(\rho^{j-1} e^{\tilde{i}(i+1)\varphi} - 2\rho^{j-1} e^{\tilde{i}i\varphi} + \rho^{j-1} e^{\tilde{i}(i-1)\varphi} \right) + \right. \\ \left. + \left(\rho^{j+1} e^{\tilde{i}(i+1)\varphi} - 2\rho^{j+1} e^{\tilde{i}i\varphi} + \rho^{j+1} e^{\tilde{i}(i-1)\varphi} \right) \right) | : \rho^j, : e^{\tilde{i}i\varphi}, \end{aligned}$$

$$\rho - 2 + \rho^{-1} = \frac{c^2 \tau^2}{2h^2} (2\rho^{-1} \cos \varphi - 2\rho^{-1} + 2\rho \cos \varphi - 2\rho),$$

$$\rho - 2 + \rho^{-1} = \frac{c^2 \tau^2}{2h^2} (-4\rho^{-1} \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 4\rho \sin^2 \frac{\varphi}{2}),$$

$$\rho - 2 + \rho^{-1} = -2 \frac{c^2 \tau^2}{h^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} (\rho^{-1} + \rho),$$

$$\left(1 + 2 \frac{c^2 \tau^2}{h^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) \rho^2 - 2\rho + \left(1 + 2 \frac{c^2 \tau^2}{h^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) = 0,$$

$$D = -16 \frac{c^2 \tau^2}{h^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \left(1 + \frac{c^2 \tau^2}{h^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) < 0,$$

$$\begin{aligned} \rho_{1,2} = \frac{1 \pm 2i \frac{c\tau}{h} \sin \frac{\varphi}{2} \sqrt{1 + \frac{c^2 \tau^2}{h^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}{1 + 2 \frac{c^2 \tau^2}{h^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}, \\ |\rho_{1,2}| = 1, \end{aligned}$$

следовательно, неявная схема является абсолютно устойчивой.

2. Постройте разностную схему с весами для уравнения колебаний струны.

Является ли такая схема устойчивой и монотонной?

Построим неявную схему с весами:

$$\frac{\hat{y} - 2y + \check{y}}{\tau^2} = \Lambda (\sigma \hat{y} + (1 - 2\sigma)y + \sigma \check{y}), \quad \Lambda y = \frac{c^2}{h^2} (y_{+1} - 2y + y_{-1}).$$

Погрешность аппроксимации $\psi = O(\tau^2 + h^2) \forall \sigma \in [0, 1]$.

Используя, например, энергетический метод можно получить условие устойчивости [1]:

$$\sigma \geq \frac{1}{4} - \frac{h^2}{4c^2 \tau^2}.$$

Такой же результат можно получить и методом гармоник. Подставим в схему $y_i^j = \rho^j e^{\tilde{i}i\varphi}$, поделив левую и правую части $\rho^{j-1} e^{\tilde{i}i\varphi}$ и вынеся за скобку в правой части $e^{\tilde{i}\varphi} - 2 + e^{-\tilde{i}\varphi}$:

$$\frac{\rho^2 - 2\rho + 1}{\tau^2} = \frac{c^2}{h^2} (e^{\tilde{i}\varphi} - 2 + e^{-\tilde{i}\varphi}) (\sigma \rho^2 + (1 - 2\sigma)\rho + \sigma).$$

Вынесенный множитель можно записать как $-4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$. Тогда после замены и домножения на τ^2 получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \rho^2 - 2\rho + 1 &= -4 \left(\frac{c\tau}{h} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} (\sigma \rho^2 + (1 - 2\sigma)\rho + \sigma), \\ \left(1 + 4\sigma \left(\frac{c\tau}{h} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) \rho^2 + \left(4 \left(\frac{c\tau}{h} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} (1 - 2\sigma) - 2 \right) \rho + \left(1 + 4\sigma \left(\frac{c\tau}{h} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) &= 0, \\ \rho^2 - 2 \frac{1 - 2 \left(\frac{c\tau}{h} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} (1 - 2\sigma)}{1 + 4\sigma \left(\frac{c\tau}{h} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \rho + 1 &= 0. \end{aligned}$$

По теореме Виета произведение корней $\rho_1 \rho_2 = 1$. Значит, условие устойчивости $\rho \leq 1$ может быть выполнено, если $|\rho_1| = |\rho_2| = 1$. Для уравнения с действительными коэффициентами это возможно, если корни являются комплексно сопряженными, т.е. дискриминант не должен быть положительным:

$$\begin{aligned} D/4 &= \left(\frac{1 - 2 \left(\frac{c\tau}{h} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} (1 - 2\sigma)}{1 + 4\sigma \left(\frac{c\tau}{h} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \right)^2 - 1 \leq 0, \\ \left| \frac{1 - 2 \left(\frac{c\tau}{h} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} (1 - 2\sigma)}{1 + 4\sigma \left(\frac{c\tau}{h} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \right| &\leq 1, \\ \left| 1 - 2 \left(\frac{c\tau}{h} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} (1 - 2\sigma) \right| &\leq \left| 1 + 4\sigma \left(\frac{c\tau}{h} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right| = 1 + 4\sigma \left(\frac{c\tau}{h} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \\ -1 - 4\sigma \left(\frac{c\tau}{h} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} &\leq 1 - 2 \left(\frac{c\tau}{h} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} (1 - 2\sigma) \leq 1 + 4\sigma \left(\frac{c\tau}{h} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \\ -1 - 8\sigma \left(\frac{c\tau}{h} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} &\leq 1 - 2 \left(\frac{c\tau}{h} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \leq 1. \end{aligned}$$

В полученном выражении правое неравенство выполняется автоматически. Рассмотрим левое:

$$\begin{aligned} 2 - 2(1 - 4\sigma) \left(\frac{c\tau}{h} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} &\geq 0, \quad 1 - (1 - 4\sigma) \left(\frac{c\tau}{h} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \geq 0, \\ 1 - 4\sigma &\leq \frac{h^2}{c^2 \tau^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}, \quad \sigma \geq \frac{1}{4} - \frac{h^2}{4c^2 \tau^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}. \end{aligned}$$

Данное неравенство должно выполняться при любом значении φ . Учитывая этот факт, получаем итоговое выражение:

$$\sigma \geq \frac{1}{4} - \frac{h^2}{4c^2 \tau^2}.$$

При $\sigma \geq \frac{1}{4}$ схема безусловно устойчива. Если $\sigma < \frac{1}{4}$, то схема условно устойчива при $c\tau \leq \frac{h}{\sqrt{1-4\sigma}}$. Схема при $\sigma = 0$ переходит в схему «крест», а условие устойчивости — в условие Куранта.

Проверим данную схему на монотонность. Распишем ее:

$$\frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2} = \frac{c^2}{h^2} \left(\sigma(y_{i+1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i-1}^{j+1}) + (1 - 2\sigma)(y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j) + \sigma(y_{i+1}^{j-1} - 2y_i^{j-1} + y_{i-1}^{j-1}) \right).$$

Теперь приведем к каноническому виду, т.е. оставим слева только y_i^{j+1} :

$$\left(\frac{1}{\tau^2} + 2\frac{c^2\sigma}{h^2} \right) y_i^{j+1} = \frac{c^2\sigma}{h^2} y_{i+1}^{j+1} + \frac{c^2\sigma}{h^2} y_{i-1}^{j+1} + \frac{c^2(1-2\sigma)}{h^2} y_i^{j+1} + \left(-2\frac{c^2(1-2\sigma)}{h^2} + \frac{2}{\tau^2} \right) y_i^j + \frac{c^2(1-2\sigma)}{h^2} y_{i-1}^j + \frac{c^2\sigma}{h^2} y_{i+1}^{j-1} + \left(-2\frac{c^2\sigma}{h^2} - \frac{1}{\tau^2} \right) y_i^{j-1} + \frac{c^2\sigma}{h^2} y_{i-1}^{j-1}.$$

Из-за наличия отрицательного коэффициента у переменной y_i^{j-1} условие положительности коэффициентов не выполняется.

3. Предложите способ контроля точности полученного решения.

Пусть численная схема имеет p -й порядок сходимости по пространству и q -й по времени, т.е. верно следующее выражение:

$$u(x_i, t_j) = y_i^j + O(h^p + \tau^q).$$

Теперь распишем $O(h^p + \tau^q)$ более подробно:

$$u(x_i, t_j) = y_i^j + C_x(x, t)h^p + C_t(x, t)\tau^q + O(h^{p+1} + \tau^{q+1}),$$

где C_x и C_t — некоторые непрерывные функции, которые в общем случае являются вектор-функциями (если u — вектор-функция). В дальнейшем для простоты будем опускать их аргументы.

Далее сгущаем сетку в r_x раз по пространству и в r_t раз по времени. Тогда получаем, что

$$u(x_{r_x i}, t_{r_t j}) = y_{r_x i}^{r_t j} + C_x \left(\frac{h}{r_x} \right)^p + C_t \left(\frac{\tau}{r_t} \right)^q + O \left(\left(\frac{h}{r_x} \right)^{p+1} + \left(\frac{\tau}{r_t} \right)^{q+1} \right),$$

где под $(r_x i, r_t j)$ понимается номер узла сгущенной сетки, координаты которого совпадают с координатами узла, имеющего номер (i, j) , исходной сетки. Таким образом, $u(x_{r_x i}, t_{r_t j}) = u(x_i, t_j)$. Однако это неверно для $y_{r_x i}^{r_t j}$ и y_i^j .

Для того, чтобы теперь получить оценку погрешности, потребуем выполнения $r_x^p = r_t^q$. Данное условие называется условием согласования коэффициентов сгущения по времени и пространству.

Введем следующее обозначение, описывающее искомую оценку погрешности на сгущенной сетке:

$$R(x, t) = C_x \left(\frac{h}{r_x} \right)^p + C_t \left(\frac{\tau}{r_t} \right)^q.$$

Приходим к системе, через которую можно выразить R путем вычитания одной строки из другой:

$$\begin{cases} u(x_i, t_j) = y_i^j + r_x^p R + O(h^{p+1} + \tau^{q+1}), \\ u(x_i, t_j) = y_{r_x i}^{r_t j} + R + O(h^{p+1} + \tau^{q+1}) \end{cases} \Rightarrow y_{r_x i}^{r_t j} - y_i^j \approx (r_x^p - 1)R \Rightarrow R \approx \frac{y_{r_x i}^{r_t j} - y_i^j}{r_x^p - 1}.$$

Таким образом, если для некоторой заданной точности ε получили, что $R \geq \varepsilon$, то следует дробить сетку до тех пор пока данное выражение не станет ложным. В качестве итогового ответа можно взять решение на последней сетке.

4. Приведите пример трехслойной схемы для уравнения теплопроводности. Как реализовать вычисления по такой разностной схеме? Является ли эта схема устойчивой?

В качестве трехслойной схемы для уравнения теплопроводности можно привести схему Рундсона:

$$\frac{\hat{y} - \check{y}}{2\tau} = K \frac{y_{+1} - 2y + y_{-1}}{h^2}$$

Погрешность аппроксимации $\psi = O(\tau^2 + h^2)$.

Схема является явной, однако требует задания двух начальных временных слоев. Значение на втором временном слое можно получить из первого, заданного начальным условием, следующим образом:

$$y_i^1 \approx u(\tau, x_i) = u(0, x_i) + \tau u_t(0, x_i) + O(\tau^2), \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Значения y_0^1 и y_N^1 определяются из граничных условий (при условии, что они являются условиями I рода). Заметим, что первое слагаемое можно найти используя начальное условие $u(0, x) = \varphi(x)$, а из самого уравнения теплопроводности известно, что $u_t = Ku_{xx}$, т.е. $u_t(0, x_i) = Ku_{xx}(0, x_i) = K\varphi''(x_i)$. Заменяя вторую производную функции φ на ее разностный аналог (при этом второй порядок аппроксимации остается), получаем итоговую формулу:

$$y_i^1 = \varphi(x_i) + \tau \varphi_{\bar{x}x}(x_i), \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Исследуем схему на устойчивость методом гармоник:

$$\frac{\hat{y} - \check{y}}{2\tau} = K \frac{y_{+1} - 2y + y_{-1}}{h^2} \Rightarrow \hat{y} = \frac{2K\tau}{h^2}(y_{+1} - 2y + y_{-1}) + \check{y}.$$

Введем замену $y_i^j = \rho^j e^{\tilde{i}i\varphi}$. Тогда

$$\rho^{j+1} e^{\tilde{i}i\varphi} = \frac{2K\tau}{h^2} (\rho^j e^{\tilde{i}(i+1)\varphi} - 2\rho^j e^{\tilde{i}i\varphi} + \rho^j e^{\tilde{i}(i-1)\varphi}) + \rho^{j-1} e^{\tilde{i}i\varphi} \mid : \rho^j, : e^{\tilde{i}i\varphi},$$

$$\rho = \frac{2K\tau}{h^2} (e^{\tilde{i}\varphi} - 2 + e^{-\tilde{i}\varphi}) + \rho^{-1},$$

$$\rho = -\frac{8K\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \rho^{-1},$$

$$\rho^2 + \frac{8K\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \rho - 1 = 0.$$

Видно, что его дискриминант

$$D/4 = \left(\frac{4K\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right)^2 + 1 > 0,$$

следовательно, корни действительны и различны, причем $\rho_1 \rho_2 = -1$. Отсюда получаем, что один из корней заведомо больше единицы по модулю. Таким образом схема является безусловно неустойчивой.

2. Результаты

Тестовая задача 1

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \sin \pi x, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0.$$

Точное решение:

$$u(x, t) = \sin \pi x \cos \pi t.$$

Численное решение ($\tau = 0.01$, $h = 0.02$, $T = 10.0$, $L = 1.0$):

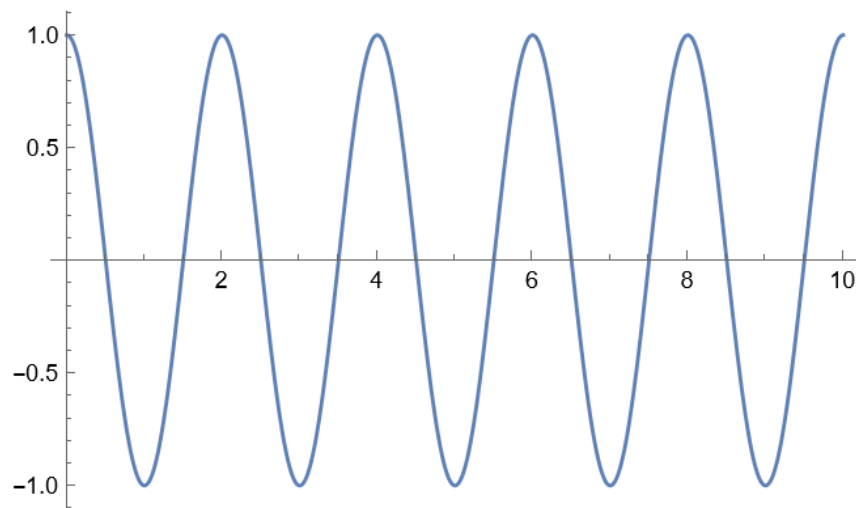


Рис. 1. Численное решение

График погрешности:

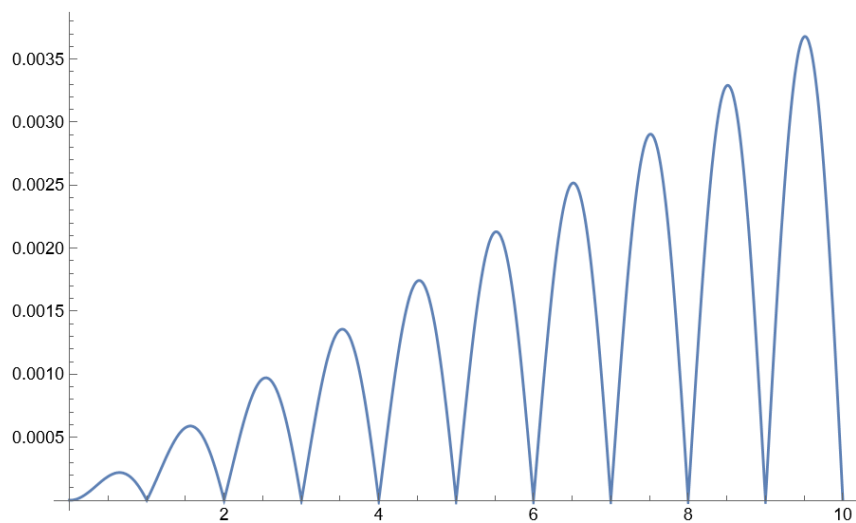


Рис. 2. Разность численного и точного решения

Тестовая задача 2

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = x(1 - x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0.$$

Точное решение:

$$u(x, t) = \frac{8}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \sin((2n+1)\pi x) \cos((2n+1)\pi t).$$

Численное решение ($\tau = 0.01$, $h = 0.02$, $T = 10.0$, $L = 1.0$, $k = 10$):

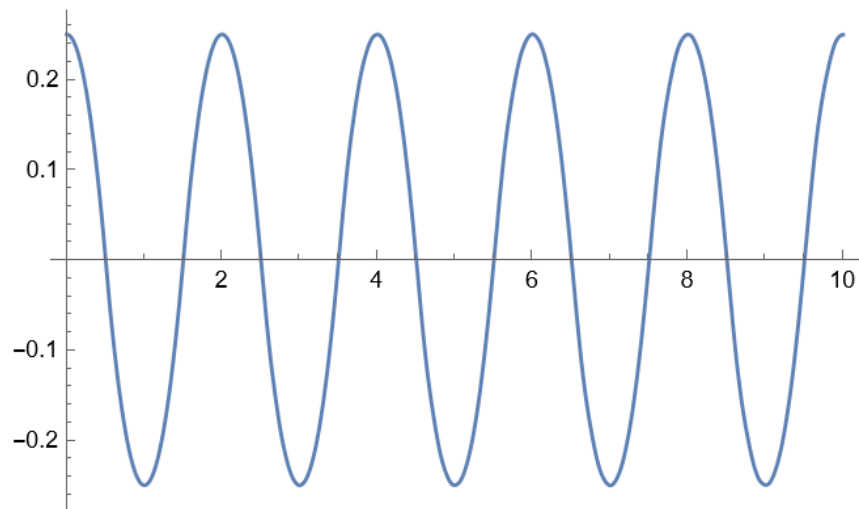


Рис. 3. Численное решение

График погрешности:

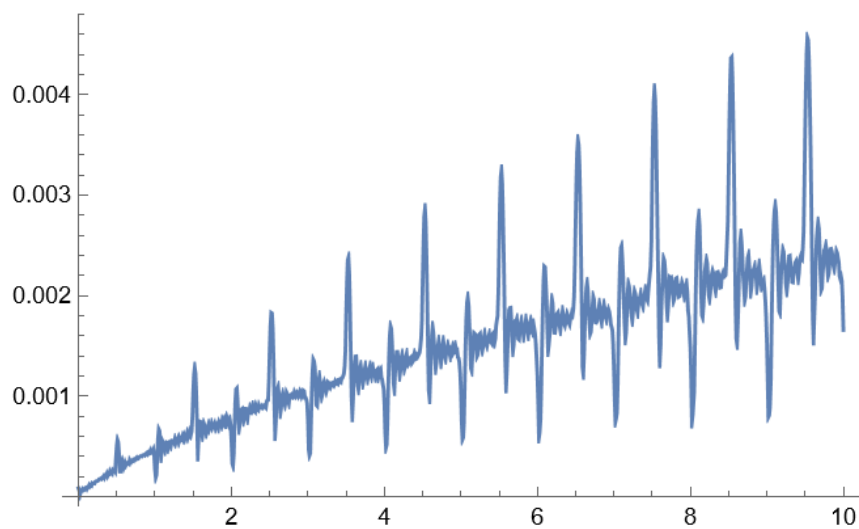


Рис. 4. Разность численного и точного решения

Тестовая задача 3

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad -2 < x < 2, \quad t > 0,$$

$$u(-2, t) = 0, \quad u(2, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad -2 < x < 2,$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}], \\ 0, & x \notin [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]. \end{cases}$$

1. $\gamma = 0.1$ ($\tau = 0.01, h = 0.1$):

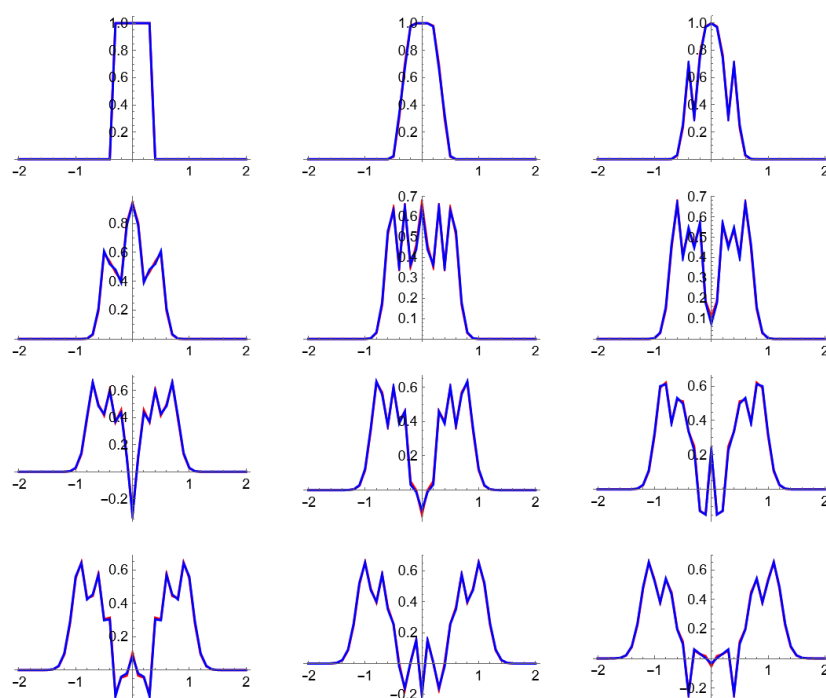


Рис. 5. Численное решение

2. $\gamma = 0.5$ ($\tau = 0.01, h = 0.02$):

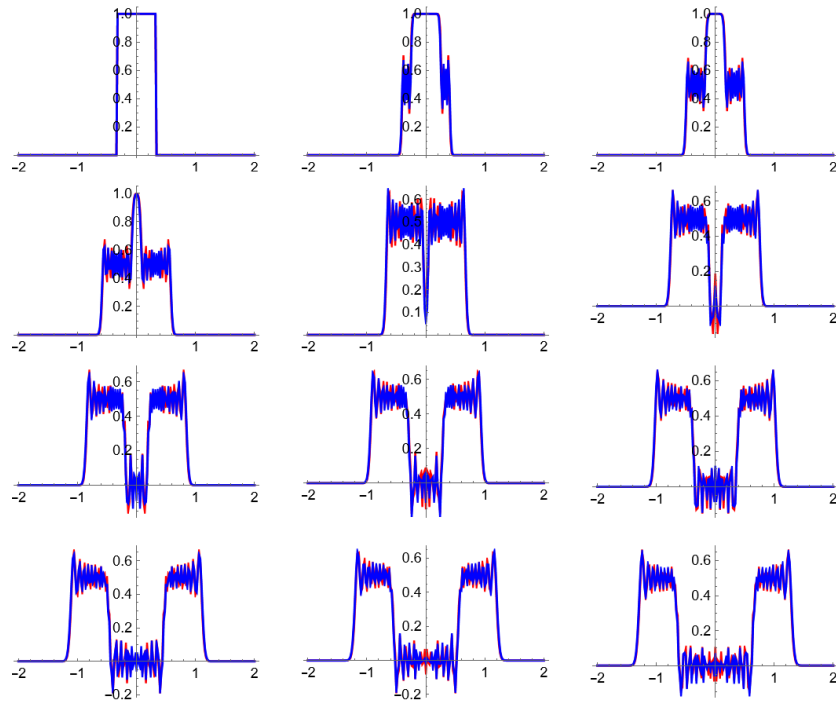


Рис. 6. Численное решение

3. $\gamma = 0.75$ ($\tau = 0.1125, h = 0.15$):

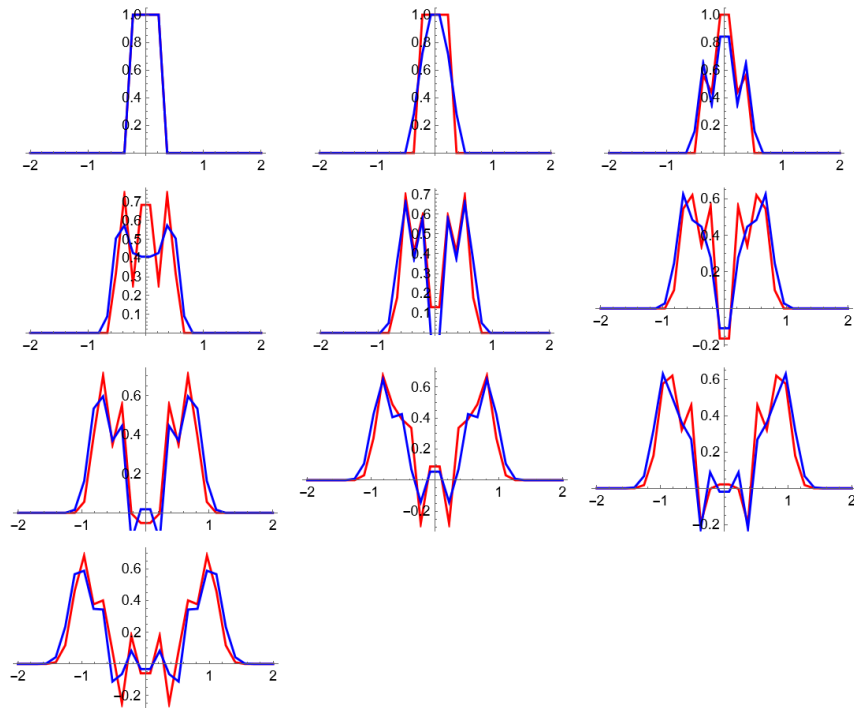


Рис. 7. Численное решение

4. $\gamma = 1.0$ ($\tau = 0.01, h = 0.01$):

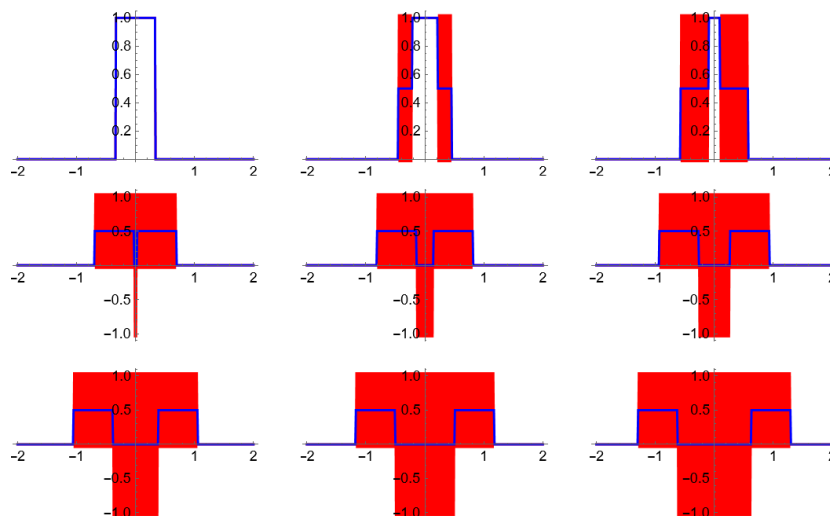


Рис. 8. Численное решение

Тестовая задача 4

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad -1 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u(-1, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0.$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad -1 < x < 1,$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 - 2|x|, & x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \\ 0, & x \notin [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]. \end{cases}$$

Численное решение

1. $\gamma = 0.1$ ($\tau = 0.01, h = 0.1$):

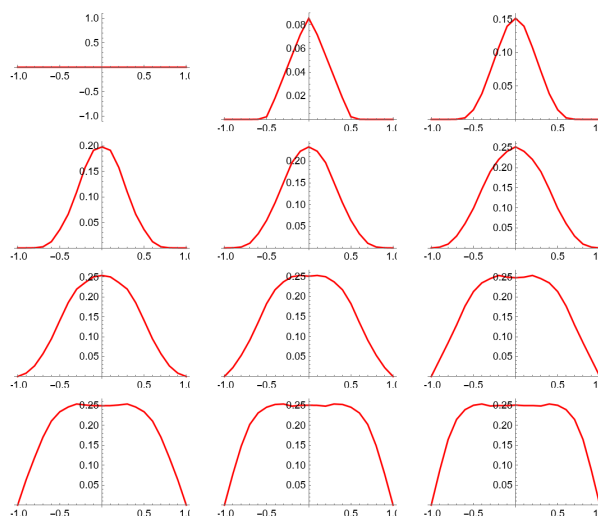


Рис. 9. Численное решение

2. $\gamma = 0.5$ ($\tau = 0.01, h = 0.02$):

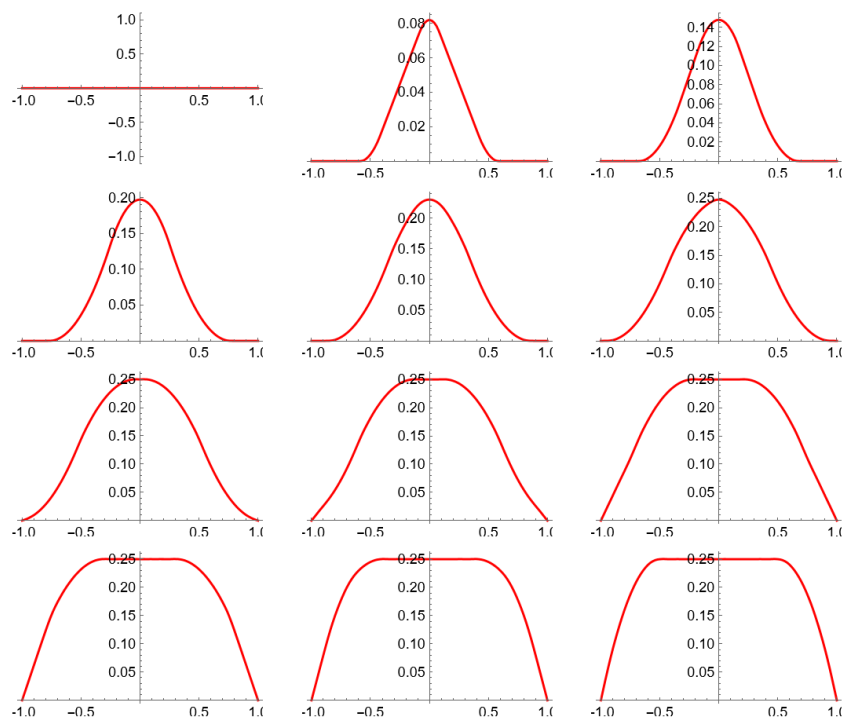


Рис. 10. Численное решение

3. $\gamma = 0.75$ ($\tau = 0.1125, h = 0.15$):

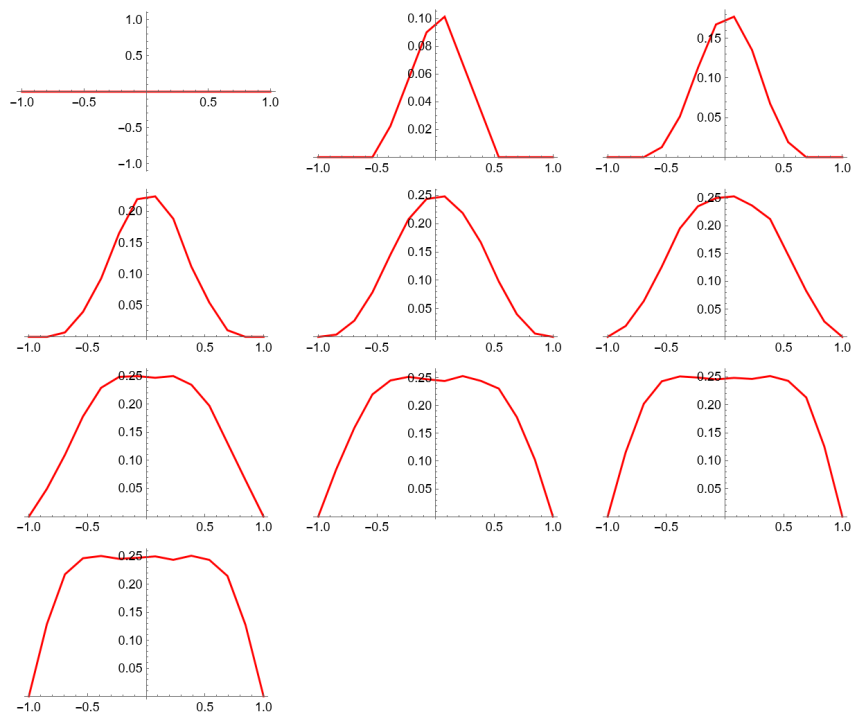


Рис. 11. Численное решение

4. $\gamma = 1.0$ ($\tau = 0.01, h = 0.01$):

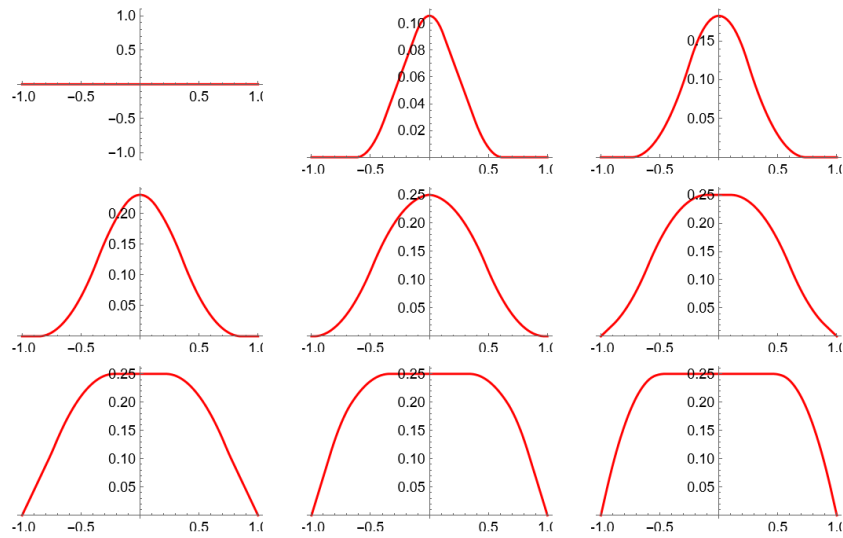


Рис. 12. Численное решение

Тестовая задача 5

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < 4\pi, \quad t > 0,$$

$$u(0, t) = \sin t, \quad u(4\pi, t) = 0, \quad t > 0.$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 4\pi,$$

1. $\gamma = 0.1$ ($\tau = 0.01, h = 0.1$):

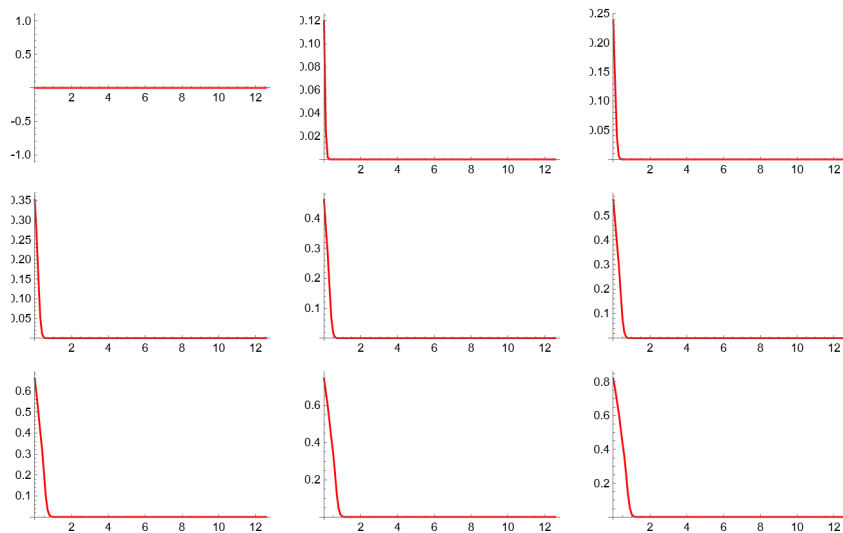


Рис. 13. Численное решение

2. $\gamma = 0.5$ ($\tau = 0.01, h = 0.02$):

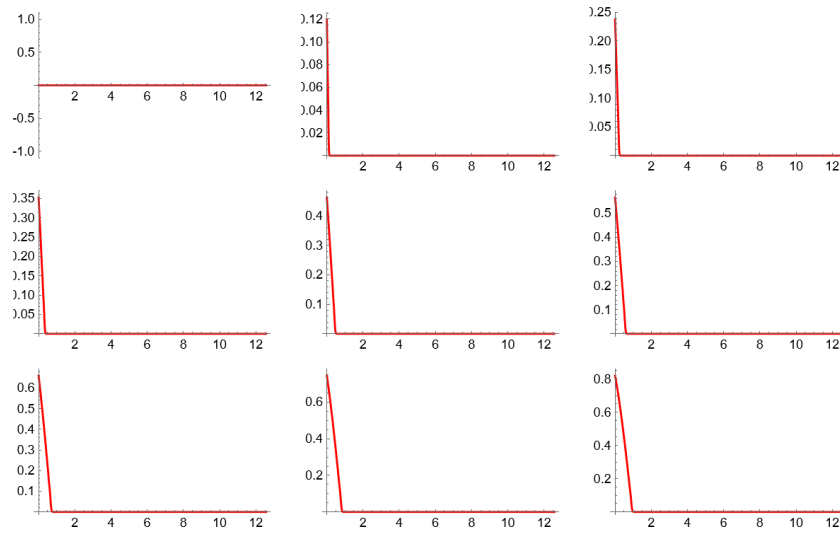


Рис. 14. Численное решение

3. $\gamma = 0.75$ ($\tau = 0.1125, h = 0.15$):

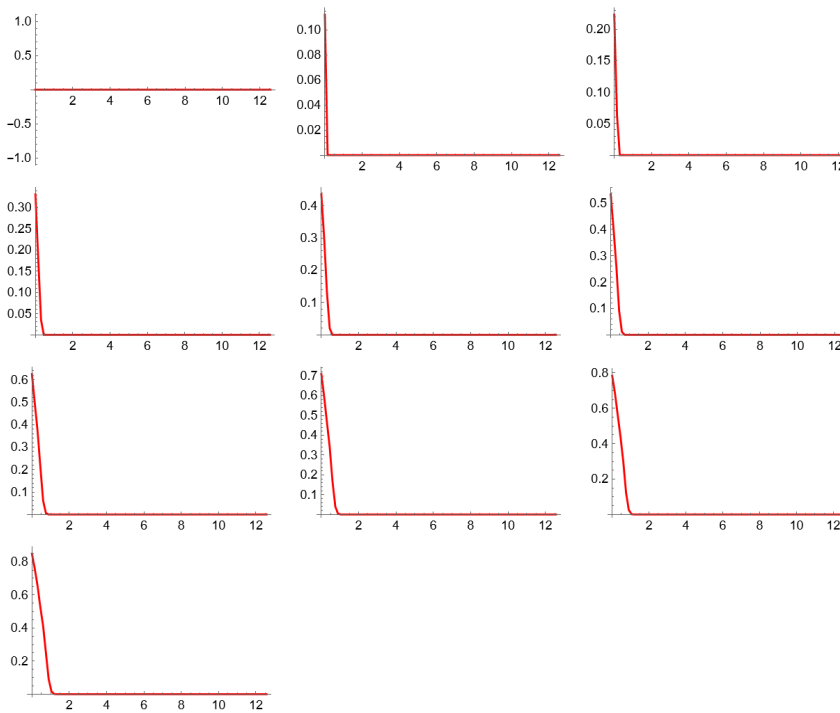


Рис. 15. Численное решение

4. $\gamma = 1.0$ ($\tau = 0.01, h = 0.01$):

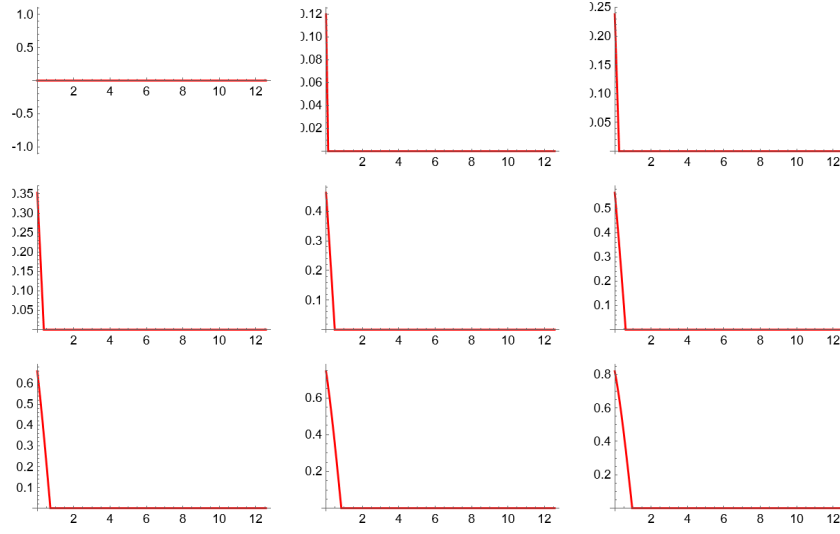


Рис. 16. Численное решение

Первое дифференциальное приближение

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad y_{\bar{t}\bar{t}} = y_{\bar{x}\bar{x}},$$

$$\begin{aligned} \psi_h &= u_{tt} + \frac{\tau^2}{12} u_{tttt} + O(\tau^4) - u_{xx} - \frac{h^2}{12} u_{xxxx} + O(h^4) = \\ &= (u_{tt} - u_{xx}) + \left(\frac{\tau^2}{12} u_{tttt} - \frac{h^2}{12} u_{xxxx} \right) + O(\tau^4 + h^4). \end{aligned}$$

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u_{tttt} = u_{xxtt} = (u_{tt})_{xx} = u_{xxxx}.$$

$$v_{tt} - v_{xx} + \frac{1}{12}(\tau^2 - h^2)v_{xxxx} = 0,$$

$$v_{tt} - v_{xx} + \frac{h^2}{12}(\gamma^2 - 1)v_{xxxx} = 0.$$

Список использованных источников

1. *Галанин М.П., Савенков Е.Б.* Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 592 с.