



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ _____ Фундаментальные науки

КАФЕДРА _____ Прикладная математика

Лабораторная работа №1

Методы численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Студенты _____
ФН2-62Б
(Группа)

З.И. Абрамов, Г.А. Швецов
(И. О. Фамилия)

Преподаватель _____

С.А. Конев
(И. О. Фамилия)

2023 г.

Оглавление

1. Контрольные вопросы	3
2. Результаты	15
2.1. Оценка порядка сходимости	15
2.2. Иллюстрация работы стратегии контроля шага	18
2.3. Задача о маятнике	19
2.4. Исследование фазовой плоскости	24
Список использованных источников	27

1. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте условия существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Выполнены ли они для вашего варианта задания?

Пусть функция $f(x, u)$ определена и непрерывна в прямоугольнике:

$$D = \{(x, u) : |x - x_0| \leq a, |u_i - u_0^i| \leq b, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

При этих условиях в прямоугольнике D все компоненты $|f_i| \leq M$. Пусть функция $f(x, u)$ является липшиц-непрерывной (по октаэдрической норме) с постоянной L по переменным u_1, u_2, \dots, u_n :

$$|f(x, u^{(1)}) - f(x, u^{(2)})| \leq L \sum_{i=1}^n |u_i^{(1)} - u_i^{(2)}| \quad \forall (x, u^{(1)}), (x, u^{(2)}) \in D.$$

Тогда существует единственное решение задачи Коши

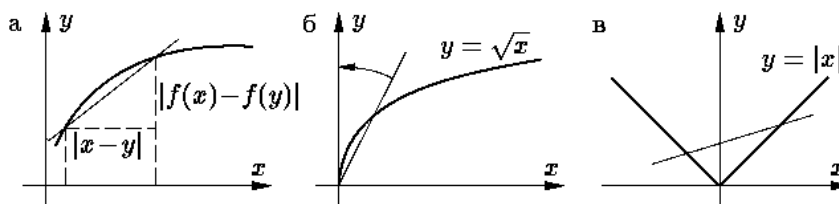
$$\begin{cases} u' = f(x, u), & x > x_0, \\ u(x_0) = u_0, \end{cases}$$

где u и f — вектор-функции из n компонент, на участке

$$|x - x_0| \leq \tilde{x}_0 = \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right\}.$$

Для функции $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ условие Липшица геометрически можно трактовать как ограниченность по модулю угловых коэффициентов всех хорд графика функции f :

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq L.$$



Выражение в левой части неравенства — это угловой коэффициент хорды.

Например, функция $y = \sqrt{x}$ на отрезке $[0, 1]$ не удовлетворяет условию Липшица, т.к. вблизи точки $x = 0$ хорды графика становятся сколь угодно близкими к вертикали. Функция $y = |x|$ (не всюду дифференцируемая) удовлетворяет условию Липшица с константой $L = 1$, т.к. угловой коэффициент хорд графика, очевидно, по модулю не больше единицы.

Для задачи Коши в случае скалярных функций u и f с двумя начальными условиями

$$\begin{cases} u'_1 = f(x, u_1), \\ u_1(x_0) = u_{1,0}, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} u'_2 = f(x, u_2), \\ u_2(x_0) = u_{2,0}, \end{cases}$$

условие Липшица можно трактовать как

$$|u_1(x) - u_2(x)| \leq |u_{1,0} - u_{2,0}| e^{L|x-x_0|},$$

т.е. решения задачи Коши с близкими начальными условиями будут близки при всех x , при которых они определены.

Если функция f ограничена, т.е. $|f| \leq M$ в области D , то

$$|u(x) - u_0| = \left| \int_{x_0}^x f(x, u(x)) dx \right| \leq \int_{x_0}^x |f(x, u(x))| dx \leq \int_{x_0}^x M dx = M|x - x_0|,$$

где $|x - x_0| \leq a$ — отрезок интегрирования. Таким образом, из ограниченности правой части следует то, что решение $u(t)$ лежит внутри плоского конуса с вершиной в точке (x_0, u_0) и образующими, имеющие угловые коэффициенты M и $-M$.

Отметим, что если f непрерывно дифференцируема в D по u_1, \dots, u_n , то она является липшиц-непрерывной по этим переменным.

Правая часть системы Ван-дер-Поля бесконечно дифференцируема по y_1 и y_2 во всем пространстве \mathbb{R}^2 , т.е. для нее выполняется указанная теорема.

Классы функций:

- (a) Аналитические функции
- (b) Бесконечно дифференцируемые функции
- (c) Липшиц-непрерывные функции
- (d) Дифференцируемые функции
- (e) Непрерывно дифференцируемые функции
- (f) Непрерывные функции

Покажем вложенность классов друг в друга:

$$a \subset b \subset c \subset \frac{d}{c} \subset f.$$

2. Что такое фазовое пространство? Что называют фазовой траекторией?
Что называют интегральной кривой?

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений n -го порядка $u' = f(x, u)$, и пусть вектор-функция $u = F(x)$ — решение системы, определенное на промежутке $[a, b]$.

Множество точек $F(x)$, $x \in [a, b]$ есть кривая в пространстве \mathbb{R}_{u^n} . Эту кривую называют **фазовой траекторией системы** (или просто траекторией, или фазовой кривой), а пространство \mathbb{R}_{u^n} , в котором расположены фазовые траектории, называют **фазовым пространством системы**.

Интегральная кривая системы определяется уравнением $u = F(x)$, $x \in [a, b]$ и изображается в $(n + 1)$ -мерном пространстве \mathbb{R}_{x,u^n} .

Фазовая траектория — это проекция интегральной кривой на пространство \mathbb{R}_{u^n} .

3. *Каким порядком аппроксимации и точности обладают методы, рассмотренные в лабораторной работе?*

В данной лабораторной работе представлены три метода четвертого порядка точности: *Метод Рунге – Кутты, Адамса – Бэшфорта, «прогноз-коррекция»*. Также рассматриваются *явный и неявный методы Эйлера* первого порядка точности, а также *симметричная схема и метод Рунге – Кутты* второго порядка. Во всех случаях порядок точности совпадает с порядком аппроксимации.

Условие сходимости ряда Тейлора. Для того чтобы бесконечно дифференцируемая в точке a функция $f(x)$ являлась суммой составленного для нее ряда Тейлора, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}, \quad \xi \in (a, x).$$

Покажем, что явный метод Эйлера обладает первым порядком аппроксимации:

$$\begin{aligned} \psi_h^{(1)} &= f(t_n, u_n) - \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} = |\text{раскл. } u_{n+1} \text{ в ф-ле Тейлора, } f(t_n, u_n) = u'_n| = \\ &= u'_n - \frac{1}{\tau} (u_n + \tau u'_n + O(\tau^2) - u_n) = u'_n - u'_n - \frac{1}{\tau} O(\tau^2) = O(\tau). \end{aligned}$$

Аналогично для неявного метода Эйлера. Разница лишь в том, что вместо u_{n+1} мы раскладываем в ряд u_n .

$$\begin{aligned} \psi_h^{(1)} &= f(t_{n+1}, u_{n+1}) - \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} = u'_{n+1} - \frac{1}{\tau} (u_{n+1} - u_{n+1} - (-\tau)u'_{n+1} - O(\tau^2)) = \\ &= u'_{n+1} - u'_{n+1} + \frac{1}{\tau} O(\tau^2) = O(\tau). \end{aligned}$$

Пользуясь тем же аппаратом, приходим к тому, что симметричная схема имеет второй порядок аппроксимации. В этом случае разложение происходит в серединной точке $t_n + \tau/2$. Значения точного решения $u(t)$ и его производных в

этой точке будут иметь индекс $n + 1/2$.

$$\begin{aligned}\psi_h^{(1)} &= \frac{f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})}{2} - \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} = \frac{u'_n + u'_{n+1}}{2} - \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} = \\ &= \frac{1}{2} \left(u'_{n+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} u''_{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2) + u'_{n+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{2} u''_{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2) \right) - \\ &- \frac{1}{\tau} \left(u_{n+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{2} u'_{n+\frac{1}{2}} + \frac{\tau^2}{8} u''_{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^3) - u_{n+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{2} u'_{n+\frac{1}{2}} - \frac{\tau^2}{8} u''_{n+\frac{1}{2}} - O(\tau^3) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(u'_{n+\frac{1}{2}} + u'_{n+\frac{1}{2}} \right) + O(\tau^2) - \frac{1}{\tau} \tau u'_{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2) = u'_{n+\frac{1}{2}} - u'_{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2) = O(\tau^2).\end{aligned}$$

Показать четвертый порядок аппроксимации метода «прогноз-коррекция» можно тем, что в 6 контрольном вопросе для данного метода было получено, что погрешность аппроксимации имеет слагаемые порядка не ниже 4.

4. *Какие задачи называются жесткими? Какие методы предпочтительны для их решения? Какие из рассмотренных методов можно использовать для решения жестких задач?*

Систему ОДУ $u' = Au$ с постоянной матрицей $A = A_{m \times m}$ называют жесткой, если

- все собственные значения матрицы A имеют отрицательную действительную часть, т.е. $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, $\lambda_i \in \sigma(A)$, $i = \overline{1, m}$.
- число S , называемое числом жесткости, велико:

$$S = \frac{\max_{1 \leq k \leq m} |\operatorname{Re} \lambda_k|}{\min_{1 \leq k \leq m} |\operatorname{Re} \lambda_k|}.$$

Если матрица A не постоянна и $\lambda_k = \lambda_k(t)$, то вводят понятие числа жесткости системы ОДУ на временном интервале. В этом случае должно быть велико значение $\sup_{t \in (0, T)} S(t)$.

Понятие « S велико» относительно и зависит в первую очередь от применяемого численного метода и того, с насколько большим шагом предпочтительно решать задачу.

Областью устойчивости метода решения задачи Коши называется множество точек $\mu = \lambda \tau$ комплексной плоскости, для которых данный метод применительно к уравнению $u' = \lambda u$ устойчив. Иными словами, должно быть справедливо неравенство $|y_{n+1}| \leq |y_n|$, что выполняется, если корни характеристического уравнения лежат внутри единичного круга $|q| \leq 1$, а на его границе нет кратных корней.

Для решения жестких систем предпочтительно использовать A -устойчивые методы, т.е. методы, у которых область устойчивости содержит левую полуплоскость $\operatorname{Re} \mu < 0$. Это связано с тем, что при решении систем вида $u' = Au$,

где A — диагональная матрица (при произвольной матрице можно сделать замену переменных, при которых матрица правой части будет диагональной), может возникнуть ситуация, когда для разных уравнений $u'_i = \lambda_i u_i$ для достижения определенной точности лучше использовать сильно разные шаги τ , что невозможно, поскольку для всей системы нужно использовать одинаковый шаг. Более того при использовании некоторых методов, например, на уравнениях $u' = \lambda u$, где $\operatorname{Re} \mu < 0$, могут возникать ситуации, когда численное решение ведет себя некорректно, сильно отклоняясь от аналитического на каждом шаге. A -устойчивые методы в этих случаях (при $\operatorname{Re} \mu < 0$) дают разумное сеточное решение, стремящееся к нулю.

Среди рассмотренных методов к A -устойчивым относятся неявный метод Эйлера и симметричная схема.

Найдем область устойчивости явного метода Эйлера.

$$\begin{aligned} \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} &= f(t_n, y_n), \quad f(t, y) = \lambda y \\ q - 1 &= \tau \lambda, \quad q = 1 + \mu, \quad \mu = \mu_x + i\mu_y, \\ |q|^2 &= (1 + \mu_x)^2 + \mu_y^2 \leq 1. \end{aligned}$$

Область устойчивости представляет собой круг единичного радиуса с центром в точке $(-1; 0)$, т.е. метод не является A -устойчивым.

Теперь построим область устойчивости двухстадийного метода Рунге — Кутты второго порядка:

$$k_1 = f(t_n, y_n), \quad k_2 = f(t_n + \tau, y_n + \tau k_1), \quad y_{n+1} = y_n + \frac{\tau}{2} k_1 + \frac{\tau}{2} k_2.$$

Запишем метод применительно к уравнению Далквиста $u' = \lambda u$:

$$k_1 = \lambda y_n, \quad k_2 = \lambda (y_n + \tau \lambda y_n), \quad y_{n+1} = y_n \left(1 + \frac{\tau}{2} \lambda + \frac{\tau}{2} (\lambda + \tau \lambda^2) \right).$$

Для устойчивости метода необходимо, чтобы $|R(\mu)| \leq 1$, где $R(\mu)$ — функция устойчивости:

$$R(\mu) = 1 + \mu + \frac{\mu^2}{2}, \quad \mu \in \mathbb{C}.$$

Множество $|R(\mu)| \leq 1$ изображено на рис. 1. Из него видно, что метод не является A -устойчивым.

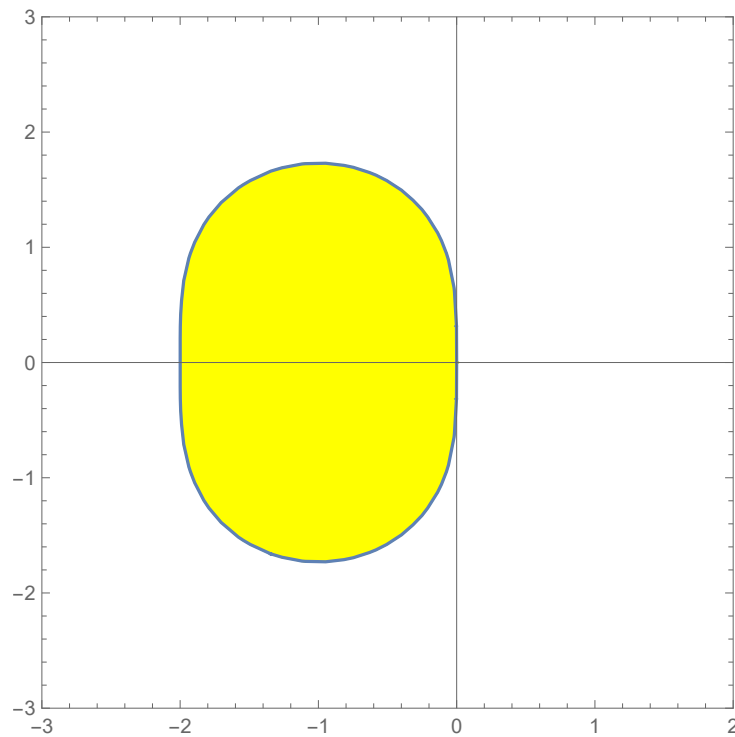


Рис. 1. Область устойчивости метода Рунге — Кутты второго порядка

Для аналогичного метода с формулами

$$k_1 = f(t_n, y_n), \quad k_2 = f(t_n + \frac{\tau}{2}, y_n + \frac{\tau}{2}k_1), \quad y_{n+1} = y_n + \tau k_2$$

получается такая же функция устойчивости [2], т.е. и область устойчивости одна и та же. Также из этого следует, что метод не является A -устойчивым.

Для метода Рунге — Кутты четвертого порядка с расчетными формулами

$$k_1 = f(t_n, y_n), \quad k_2 = f(t_n + \frac{\tau}{2}, y_n + \frac{\tau}{2}k_1), \quad k_3 = f(t_n + \frac{\tau}{2}, y_n + \frac{\tau}{2}k_2), \\ k_4 = f(t_n + \tau, y_n + \tau k_1 + 2\tau k_2 + 2\tau k_3 - \tau k_4), \quad y_{n+1} = y_n + \frac{\tau}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

имеет функцию устойчивости (вычислена в Wolfram Mathematica)

$$R(\mu) = 1 + \mu + \frac{\mu^2}{2} + \frac{\mu^3}{6} + \frac{\mu^4}{24}.$$

Область устойчивости изображена на рис. 2. Метод не является A -устойчивым.

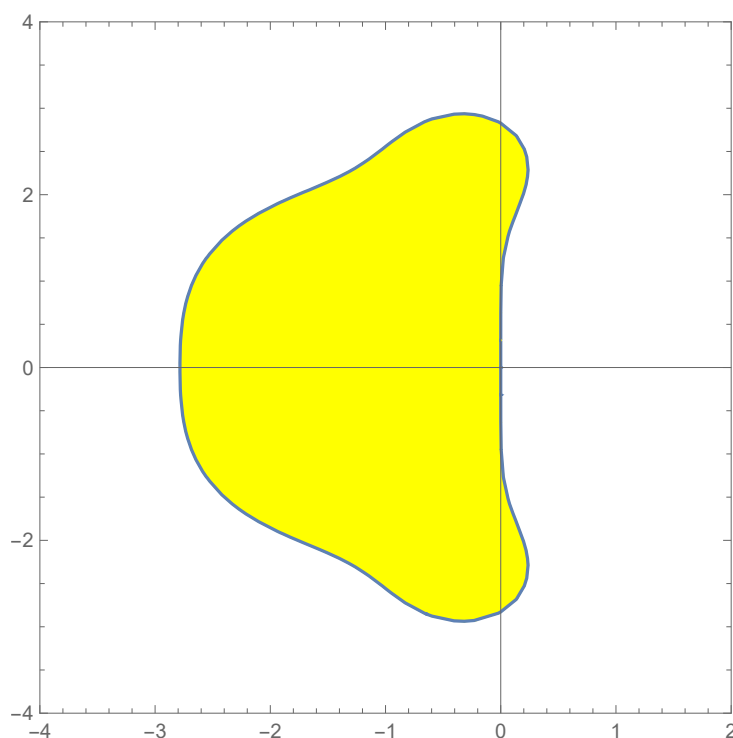


Рис. 2. Область устойчивости метода Рунге — Кутты второго порядка

Для явных методов коэффициент $b_0 = 0$. Из характеристического уравнения получаем, что для любого q справедливо равенство

$$\mu = \sum_{k=0}^m a_k q^{m-k} / \sum_{k=1}^m b_k q^{m-k}.$$

Из этого следует, что при больших по модулю значениях q параметр μ возрастает линейно как $(a_0/b_1)q$, если $b_1 \neq 0$, либо как более высокая степень q , если $b_1 = 0$. Следовательно, для любого достаточно большого μ найдется q из левой полуплоскости, в том числе с $|q| > 1$, для которого справедливо характеристическое уравнение. В результате A -устойчивость отсутствует. Такие же соображения доказывают, что ни для какого α не существует явного $A(\alpha)$ -устойчивого линейного многошагового метода.

5. Как найти $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3$, чтобы реализовать алгоритм прогноза и коррекции?

Для нахождения значений $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3$ требуется использовать одношаговый метод. Причем точность метода должна совпадать с точностью многошагового метода, который мы хотим реализовать. В данной лабораторной работе для реализации методов четвертого порядка Адамса — Башфорта и «прогноза и коррекции» мы использовали метод Рунге — Кутты четвертого порядка.

Приведем без доказательства следующую теорему.

Теорема. Пусть разностный m -шаговый метод удовлетворяет условию корней (т.е. является нуль-устойчивым) и $|f'_y| \leq L$. Тогда для любого $m\tau \leq t_n = n\tau \leq T$ при достаточно малом τ выполнена оценка

$$|y_n - u(t_n)| \leq M \left(\max_{0 \leq j \leq m-1} |y_j - u(t_j)| + \max_{m \leq j \leq n} |\psi_{h,j}^{(1)}| \right),$$

где M — постоянная, не зависящая от m ; $|y_j - u(t_j)|$, $j = \overline{0, m-1}$, — погрешность в задании начальных условий; $\psi_{h,j}^{(1)}$, $j = \overline{m, n}$, — невязка (погрешность аппроксимации).

Из этой теоремы следует, что порядок сходимости напрямую зависит от порядка метода, находящего y_j , $j = \overline{0, m-1}$. При этом все методы Адамса являются нуль-устойчивыми. Из-за этого значения y_1, y_2, y_3 для явного четырехшагового метода Адамса требуется искать методом хотя бы четвертого порядка, чтобы сохранить этот же порядок для самого метода Адамса.

Симметричная схема является неявным методом Адамса второго порядка. Поэтому вследствие этой же теоремы, чтобы сохранить второй порядок сходимости, y_1 должно быть найдено хотя бы со вторым порядком, что накладывает ограничения на метод, находящий корень нелинейного алгебраического уравнения. Для симметричной схемы подходит, например, метод Ньютона, имеющий как раз второй порядок.

Для достижения 4 порядка точности методом прогноза и коррекции требуется, чтобы предиктор имел порядок не меньше. Это необходимо, т.к. корректор не работает до срабатывания условия точности, а выполняет только один шаг, т.е. сам по себе он не способен обеспечить нужный порядок. При этом нужно учесть, что предиктором является явный метод Адамса, для которого y_1, y_2, y_3 необходимо искать методом 4 порядка, как уже было написано ранее. Таким образом, в методе «прогноз-коррекция» y_1, y_2, y_3 также, как и в случае явного метода Адамса, нужно искать с 4 порядком точности.

6. *Какой из рассмотренных алгоритмов является менее трудоемким? Какой из рассмотренных алгоритмов позволяет достигнуть заданную точность, используя наибольший шаг интегрирования? Какие достоинства и недостатки рассмотренных алгоритмов вы можете указать?*

Явный метод Эйлера

Достоинства:

- является самым простым методом решения обыкновенных дифференциальных уравнений, реализуется элементарным образом;
- на одной итерации требуется вызывать всего лишь один раз функцию f .

Недостатки:

- низкий порядок точности (первый);
- не подходит для решения жестких задач.

Неявный метод Эйлера

Достоинства:

- подходит для решения жестких задач, т.к. обладает A -устойчивостью.

Недостатки:

- обладает лишь первым порядком точности;
- на каждом шаге требуется решать в общем случае систему нелинейных уравнений, что сильно повышает количество вызовов функции правой части ДУ.

Симметричная схема

Достоинства:

- является A -устойчивым методом;
- легко реализуется путем модификации неявного метода Эйлера, вследствие чего повышается порядок точности с первого до второго.

Недостатки:

- требует на каждом шаге решать систему нелинейных уравнений;
- второго порядка точности часто бывает недостаточно.

Классический метод Рунге — Кутты 4 порядка

Достоинства:

- обладает четвертым порядком сходимости, что является самым большим среди рассмотренных методов;
- имеет самую большую область устойчивости среди рассмотренных явных методов.

Недостатки:

- слабо подходит для решения жестких задач;
- требует на каждом шаге вычисления четырех раз функции правой части (больше остальных рассмотренных явных методов).

Метод Адамса — Башфорта 4 порядка

Достоинства:

- имеет четвертый порядок точности;
- на одном шаге требуется вычислять всего один раз функцию f .

Недостатки:

- является условно устойчивым (причем область устойчивости меньше только у явного метода Эйлера), вследствие чего плохо подходит для решения жестких задач;
- требует реализации дополнительного метода решения ОДУ для вычисления приближенного решения на первых трех шагах.

Метод «прогноз-коррекция» 4 порядка

Достоинства:

- имеет четвертый порядок точности;
- при нахождении следующего приближения нужно вычислять функцию f два раза, что меньше, чем у метода Рунге — Кутты.
- имеет значительно большую область устойчивости, чем у метода Адамса — Башфорта.

Недостатки:

- является условно устойчивым;
- так как данный метод основан на методе простой итерации, то он требует от функции f дополнительные условия для сходимости;
- требует реализации дополнительного метода решения ОДУ для вычисления приближенного решения на первых трех шагах.

Таблица 1. Трудоемкость методов за один шаг

Метод	Вычисления функций правой части	Умножение вектора на число	Векторные операции сложения
Эйлера (явный)	1	1	1
Эйлера (неявный)*	—	—	—
Симметрическая схема*	—	—	—
Рунге — Кутта (2)	2	2	2
Рунге — Кутта (4)	4	6	10
Адамса — Башфорта**	1	5	4
«Прогноз-коррекция»**	2	9	8

* Из-за применения внутреннего алгоритма, решающего нелинейное уравнение, нельзя сказать, какое именно количество операций будет выполнено на одном шаге.

** Метод используется после подготовки одношаговыми методами.

Таким образом, исходя из таблицы, менее трудоемким методом на один шаг является явный метод Эйлера.

Найдем в погрешности аппроксимации слагаемые более высокого порядка путем замены в вычислительной схеме τ на $\alpha\tau$. Далее разложим сеточную функцию $\psi_h^{(1)}$ по α в нуле до более высокой степени, чем при обычном вычислении порядка аппроксимации, и примем $\alpha = 1$. Покажем приведенный процесс на примере явного метода Эйлера:

$$\begin{aligned}\psi_h^{(1)} &= \left[f(t_n, u_n) - \frac{u_{n+1} - u_n}{\alpha\tau} \right] \Big|_{\alpha=1} = \\ &= \left[u'_n - \frac{1}{\tau} \left(u_n + \alpha\tau u'_n + \frac{1}{2}(\alpha\tau)^2 u''_n + O((\alpha\tau)^3) - u_n \right) \right] \Big|_{\alpha=1} = \\ &= u'_n - \frac{1}{\tau} \left(u_n + \tau u'_n + \frac{1}{2}\tau^2 u''_n - u_n \right) + O(\tau^2) = -\frac{1}{2}u''_n\tau + O(\tau^2).\end{aligned}$$

Для остальных методов приведем результаты без вывода (операции были проведены в системе Wolfram Mathematica):

Неявный метод Эйлера: $\psi_h^{(1)} = \frac{1}{2}u''_n\tau + O(\tau^2)$.

Симметричная схема: $\psi_h^{(1)} = \frac{1}{12}u'''_n\tau^2 + O(\tau^3)$.

Явный метод Адамса: $\psi_h^{(1)} = -\frac{251}{720}u_n^{(5)}\tau^4 + O(\tau^5)$.

Метод прогноза и коррекции: $\psi_h^{(1)} = \frac{19}{720}u_n^{(5)}\tau^4 + O(\tau^5)$.

Метод Рунге — Кутты 2 порядка: $\psi_h^{(1)} = -\frac{1}{24}(u'''_n + 3u''_nf_u(t_n, u_n))\tau^2 + O(\tau^3)$.

Метод Рунге — Кутты 4 порядка (для краткости приведем в случае ДУ вида $u' = f(u)$): $\psi_h^{(1)} = \frac{1}{2880}(u_n^{(5)} - 5u_n^{(4)}f'(u_n) - 5(4u'_nf'(u_n)^4 - 9u_n'^2f'(u_n)^2f''(u_n) + 2u_n'^3f''(u_n)^2))\tau^4 + O(\tau^5)$.

Таким образом, среди методов второго порядка нельзя выделить «победителя», т.е. разница между константами незначительная (два раза), но в случае метода Рунге — Кутты 2 порядка присутствуют дополнительные слагаемые, которые могут вносить существенный вклад. Также можно предположить, что метод «прогноз-коррекция» в большинстве случаев будет точнее метода Адамса — Башфорта. Дополнительно можно выдвинуть предположение, что метод Рунге — Кутты 4 порядка будет точнее метода прогноза и коррекции, из-за значительно более меньшей константы. Т.е. метод Рунге — Кутты 4 порядка позволяет достигнуть заданную точность, используя больший шаг интегрирования.

7. Какие алгоритмы, помимо правила Рунге, можно использовать для автоматического выбора шага?

Для выбора шага можно использовать так называемые вложенные методы Рунге — Кутты. Идея состоит в том, чтобы вместе с приближенным значе-

нием решения y_{n+1} вычислять более точное (более высокого порядка) приближение \hat{y}_{n+1} , используя при этом минимальные вычислительные ресурсы. Для этого можно использовать пару методов Рунге — Кутты, внутренние стадии которых совпадают (хотя бы частично), т.е. использовать пару методов со следующей таблицей Бутчера:

0					
a_2	b_{21}				
a_3	b_{31}	b_{32}			
\dots	\dots	\dots	\dots		
a_m	b_{m1}	b_{m2}	\dots	$b_{m,m-1}$	
<hr/>					
	σ_1	σ_2	\dots	σ_{m-1}	σ_m
	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_2$	\dots	$\hat{\sigma}_{m-1}$	$\hat{\sigma}_m$

Тогда если первый метод имеет порядок p , а второй — \hat{p} , при этом $\hat{p} > p$, а также предположить, что в качестве y_n взято точное решение, то

$$u_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^m \sigma_i k_i + \varepsilon = y_{n+1} + \varepsilon, \quad \varepsilon = O(h^{p+1}),$$

$$u_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^m \hat{\sigma}_i k_i + \hat{\varepsilon} = \hat{y}_{n+1} + \hat{\varepsilon}, \quad \hat{\varepsilon} = O(h^{\hat{p}+1}).$$

Вычитая первую строку из второй и перенося ε и $\hat{\varepsilon}$ вправо, получаем:

$$h \sum_{i=1}^m (\hat{\sigma}_i - \sigma_i) k_i = \varepsilon - \hat{\varepsilon} = \varepsilon + O(h^{\hat{p}+1}).$$

Пренебрегая слагаемыми более высокого порядка, получаем формулу для оценки погрешности:

$$\varepsilon \approx \hat{y}_{n+1} - y_{n+1}.$$

Отметим, что использование для дальнейших расчетов в качестве значения приближенного решения величины \hat{y}_{n+1} нежелательно, несмотря на ее потенциально более высокую точность. Дело в том, что в таком случае ε уже не является оценкой погрешности приближенного решения, в связи с чем эта оценка может быть существенно занижена.

2. Результаты

В качестве тестового примера возьмем следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{5}u(x) \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{5}\right) + 2\frac{u(x)}{x} + x \sin\left(\frac{x}{5}\right), \\ u(1) = 0, \quad x \in [1, 5]. \end{cases}$$

Она имеет аналитическое решение вида

$$u(x) = x^2 \ln(x) \sin\left(\frac{x}{5}\right).$$

2.1. Оценка порядка сходимости

Сокращенный набор таблиц (только с помощью точного решения и только в узле $t_* = 10\tau$):

Таблица 2. Явный и неявный методы Эйлера

τ	Явный м. Эйлера			Неявный м. Эйлера		
	AbsErr(τ)	Δ	$\log_2 \Delta$	AbsErr(τ)	Δ	$\log_2 \Delta$
0.1000000	0.218727	—	—	0.325049	—	—
0.0500000	0.119105	1.83643	0.87690	0.144913	2.24306	1.16547
0.0250000	0.0623276	1.91095	0.93429	0.0687332	2.10834	1.07611
0.0125000	0.0319072	1.9534	0.96599	0.0335057	2.05139	1.0366
0.0062500	0.0161462	1.97615	0.98269	0.0165456	2.02505	1.01796
0.0031250	0.00812212	1.98793	0.99127	0.0082220	2.01237	1.0089
0.0015625	0.00407343	1.99393	0.99561	0.0040984	2.00615	1.00443

Таблица 3. Методы Рунге — Кутты 2 и 4 порядка

τ	м. РК2			м. РК4		
	AbsErr(τ)	Δ	$\log_2 \Delta$	AbsErr(τ)	Δ	$\log_2 \Delta$
0.1000000	0.0145975	—	—	5.2622e-05	—	—
0.0500000	0.003943	3.70213	1.88835	3.68212e-06	14.2912	3.83706
0.0250000	0.00102438	3.84915	1.94454	2.43446e-07	15.125	3.91886
0.0125000	0.000261037	3.92427	1.97242	1.5648e-08	15.5576	3.95955
0.0062500	6.58838e-05	3.96209	1.98626	9.91786e-10	15.7776	3.97981
0.0031250	1.65494e-05	3.98103	1.99314	6.24207e-11	15.8887	3.98993
0.0015625	4.14719e-06	3.99052	1.99658	3.9142e-12	15.9472	3.99524

Таблица 4. Методы Адамса — Башфорта и «прогноз-коррекция» и 4 порядка

τ	м. Адамса — Башфорта			м. «прогноз-коррекция»		
	AbsErr(τ)	Δ	$\log_2 \Delta$	AbsErr(τ)	Δ	$\log_2 \Delta$
0.1000000	1.5999e-05	—	—	3.2231e-05	—	—
0.0500000	3.25667e-06	4.91269	2.29651	1.56866e-06	20.5468	4.36084
0.0250000	3.11602e-07	10.4514	3.38562	7.24652e-08	21.6471	4.4361
0.0125000	2.37127e-08	13.1407	3.71597	3.46218e-09	20.9305	4.38754
0.0062500	1.63099e-09	14.5388	3.86184	1.77943e-10	19.4567	4.28219
0.0031250	1.06879e-10	15.2601	3.93169	9.83102e-12	18.1001	4.17793
0.0015625	6.83942e-12	15.627	3.96597	5.71765e-13	17.1942	4.10385

Таблица 5. Симметричная схема

τ	Симметричная схема		
	AbsErr(τ)	Δ	$\log_2 \Delta$
0.1000000	0.00582793	—	—
0.0500000	0.00145389	4.00851	2.00306
0.0250000	0.00036328	4.00212	2.00077
0.0125000	9.08079e-05	4.00053	2.00019
0.0062500	2.27012e-05	4.00013	2.00005
0.0031250	5.67526e-06	4.00003	2.00001
0.0015625	1.41881e-06	4.00001	2.00000

Полный набор таблиц для Рунге — Кутты 4 порядка и метода Адамса — Башфорта 4 порядка:

Таблица 6. Метод Рунге — Кутты с $t_* = 10\tau$

τ	С помощью эталонного решения			Правилом Эйткена	
	AbsErr(τ)	Δ	$\log_2 \Delta$	ErrEstim(τ)	p_{estim}
0.1000000	5.2622e-05	—	—	—	—
0.0500000	3.68212e-06	14.2912	3.83706	4.89399e-05	—
0.0250000	2.43446e-07	15.125	3.91886	3.43867e-06	3.83109
0.0125000	1.5648e-08	15.5576	3.95955	2.27798e-07	3.91602
0.0062500	9.91786e-10	15.7776	3.97981	1.46563e-08	3.95817
0.0031250	6.24207e-11	15.8887	3.98993	9.29365e-10	3.97913
0.0015625	3.9142e-12	15.9472	3.99524	5.85065e-11	3.98958

Таблица 7. Метод Рунге — Кутты с $t_* = T$

τ	С помощью эталонного решения			Правилом Эйткена	
	AbsErr(τ)	Δ	$\log_2 \Delta$	ErrEstim(τ)	p_{estim}
0.1000000	0.000793183	—	—	—	—
0.0500000	5.5156e-05	14.3807	3.84606	0.000738027	—
0.0250000	3.63581e-06	15.1702	3.92317	5.15202e-05	3.84046
0.0125000	2.33359e-07	15.5803	3.96165	3.40245e-06	3.92049
0.0062500	1.47798e-08	15.789	3.98085	2.18579e-07	3.96035
0.0031250	9.29845e-10	15.8949	3.99049	1.38499e-08	3.9802
0.0015625	5.82858e-11	15.9532	3.99577	8.71559e-10	3.99014

Таблица 8. Метод Адамса с $t_* = 10\tau$

τ	С помощью эталонного решения			Правилом Эйткена	
	AbsErr(τ)	Δ	$\log_2 \Delta$	ErrEstim(τ)	p_{estim}
0.1000000	1.5999e-05	—	—	—	—
0.0500000	3.25667e-06	4.91269	2.29651	1.27423e-05	—
0.0250000	3.11602e-07	10.4514	3.38562	2.94506e-06	2.11326
0.0125000	2.37127e-08	13.1407	3.71597	2.87889e-07	3.35471
0.0062500	1.63099e-09	14.5388	3.86184	2.20817e-08	3.70459
0.0031250	1.06879e-10	15.2601	3.93169	1.52411e-09	3.85681
0.0015625	6.83942e-12	15.627	3.96597	1.0004e-10	3.92932

Таблица 9. Метод Адамса с $t_* = T$

τ	С помощью эталонного решения			Правилом Эйткена	
	AbsErr(τ)	Δ	$\log_2 \Delta$	ErrEstim(τ)	p_{estim}
0.1000000	0.000462605	—	—	—	—
0.0500000	5.90139e-05	7.83891	2.97065	0.000403591	—
0.0250000	5.13645e-06	11.4892	3.52221	5.38774e-05	2.90514
0.0125000	3.77913e-07	13.5916	3.76465	4.75854e-06	3.50109
0.0062500	2.56204e-08	14.7505	3.88269	3.52293e-07	3.75567
0.0031250	1.66773e-09	15.3625	3.94134	2.39527e-08	3.87852
0.0015625	1.06297e-10	15.6893	3.97171	1.56143e-09	3.93925

2.2. Иллюстрация работы стратегии контроля шага

Ниже представлены графики (рис. 3-6), демонстрирующие работу алгоритма Рунге — Кутты 4 порядка с автоматической регулировкой шага. Расчеты велись для тестового примера с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$ и начальным шагом $\tau = 0.05$. На графиках изображены 32 точки; последняя точка $x = 5$ не изображена, т.к. в этой точке не определены оценка ошибки и шаг. На графиках шага и оценки используется логарифмический масштаб.

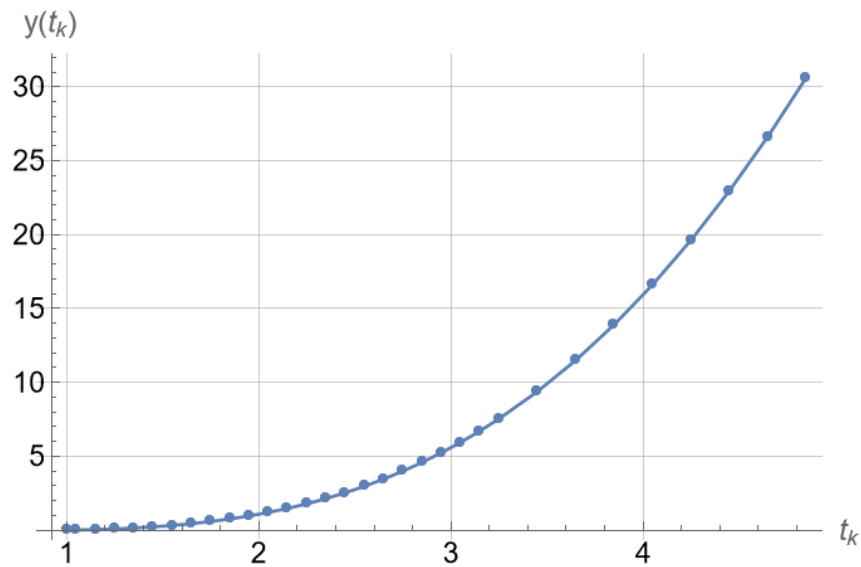


Рис. 3. Сеточное решение $y(t_k)$

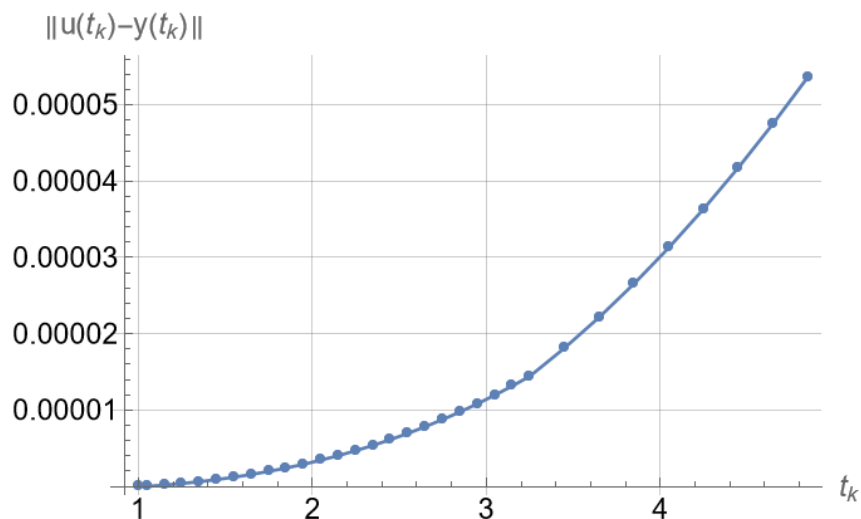
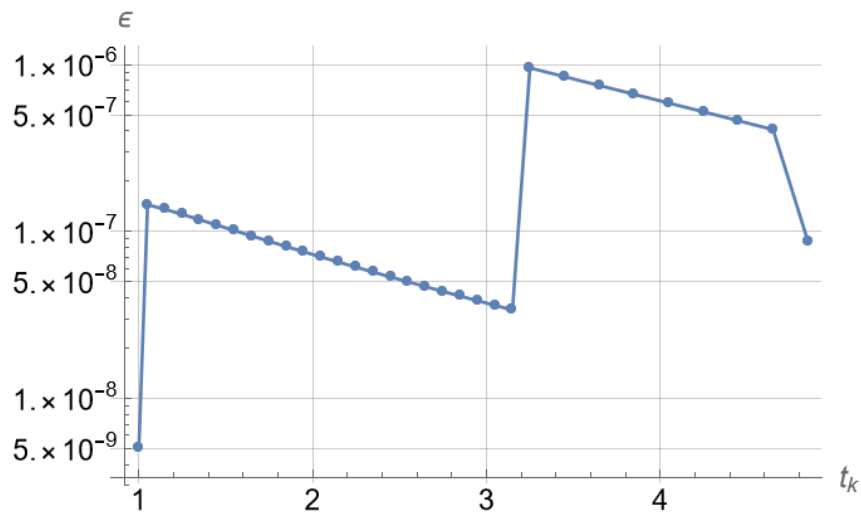
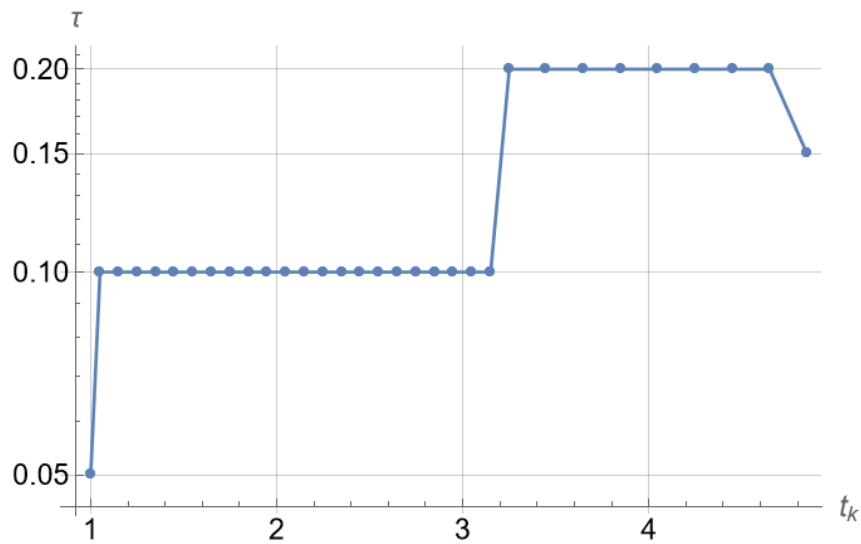


Рис. 4. Поточечная норма абсолютного отклонения $\|u(t_k) - y(t_k)\|$

Рис. 5. Поточечная оценка локальной ошибки ε , полученной по правилу РунгеРис. 6. Величина шага интегрирования τ в узлах t_k

2.3. Задача о маятнике

Уравнение математического маятника записывается в форме

$$m\ddot{x} + kx = 0.$$

Его можно привести к системе

$$\begin{cases} u'_1 = u_2, \\ u'_2 = -\omega^2 u_1, \end{cases}$$

где $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Данную систему можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \text{ где } G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Исходное уравнение имеет вид $x(t) = r \cos(\omega t + \alpha)$, где r и α — амплитуда и начальная фаза колебаний соответственно. Т.е. в плоскости (x, \dot{x}) решение представляет собой эллипс.

Воспользуемся численными методами для решения системы. Возьмем $\omega^2 = \frac{20}{3}$, $u_1(0) = u_2(0) = 1$. Явный метод Эйлера дает «неустойчивый фокус» (рис. 7). Черной точкой отмечено состояние системы в начальный момент времени.

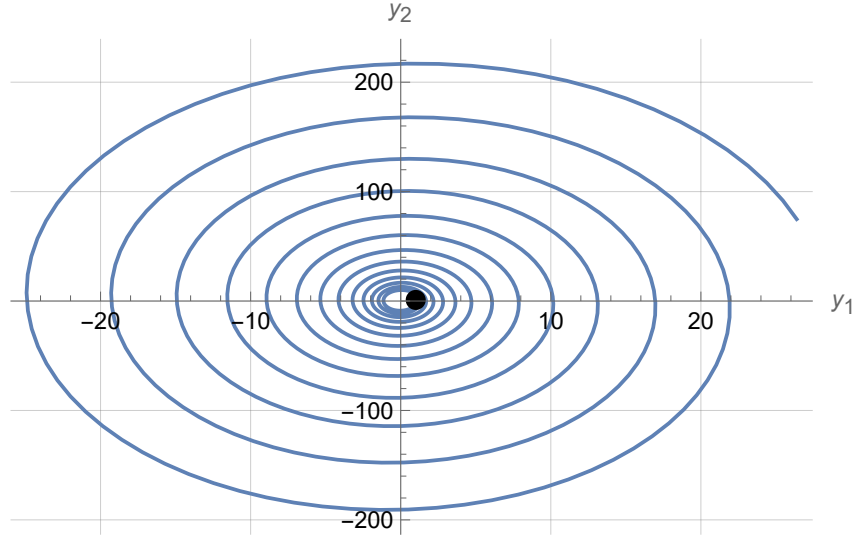


Рис. 7. Решение уравнения математического маятника явным методом Эйлера

Явный метод Эйлера записывается в следующем виде:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = f(t_n, y_n) \text{ или } y_{n+1} = y_n + \tau f(t_n, y_n).$$

Применительно к текущей системе:

$$\vec{y}_{n+1} = (E + \tau G) \vec{y}_n,$$

что также можно записать как

$$\vec{y}_n = (E + \tau G)^n \vec{y}_0,$$

где \vec{y}_0 — начальные условия.

Матрица G имеет два собственных значения $\lambda^\pm = \pm i\omega$, которым соответствуют два линейно независимых собственных вектора \vec{v}^+ и \vec{v}^- . Можно записать разложения вектора \vec{y}_0 по этому базису: $\vec{y}_0 = \alpha^+ \vec{v}^+ + \alpha^- \vec{v}^-$. При условии, что $G\vec{v}^+ = \lambda^+ \vec{v}^+$ и $G\vec{v}^- = \lambda^- \vec{v}^-$, выражение выше записывается так:

$$\vec{y}_n = (1 + \tau \lambda^+)^n \alpha^+ \vec{v}^+ + (1 + \tau \lambda^-)^n \alpha^- \vec{v}^-.$$

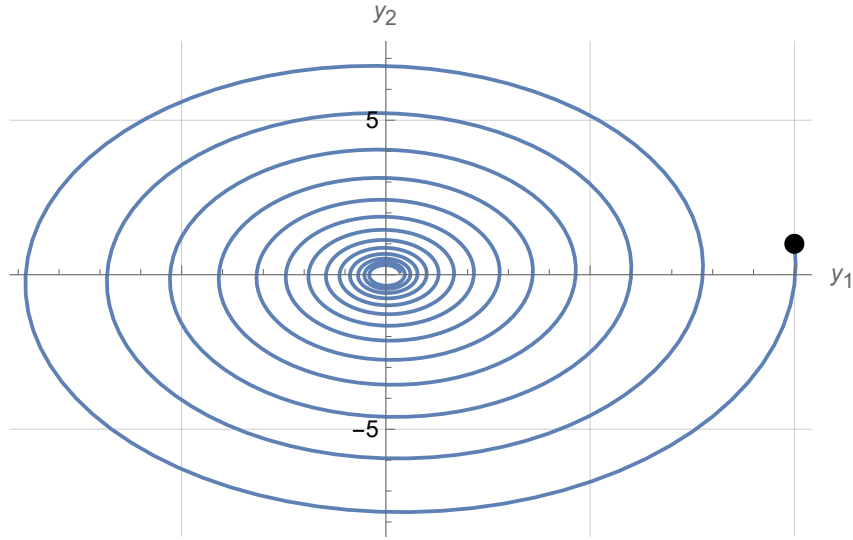


Рис. 8. Решение уравнения математического маятника неявным методом Эйлера

Т.к. $|1 + \tau\lambda^\pm| = \sqrt{1 + \omega^2\tau^2} > 1$, то при $n \rightarrow \infty$ норма вектора \vec{y}_n стремится к бесконечности. Вследствие этого наблюдается «неустойчивым фокус».

В случае неявного метода Эйлера получается график, представленный на рис. 8.

В этом случае для математического маятника получается следующая запись:

$$(E - \tau G)\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n.$$

Если $\vec{y}_n = \alpha_1\vec{v}^+ + \alpha_2\vec{v}^-$, $\vec{y}_{n+1} = \beta_1\vec{v}^+ + \beta_2\vec{v}^-$, то приравняв соответствующие коэффициенты при собственных векторах, получаем уравнения, через которые можно выразить β_1 и β_2 :

$$\begin{cases} \beta_1 - \tau\lambda^+\beta_1 = \alpha_1, \\ \beta_2 - \tau\lambda^-\beta_2 = \alpha_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = \frac{1}{1 - \tau\lambda^+}\alpha_1, \\ \beta_2 = \frac{1}{1 - \tau\lambda^-}\alpha_2. \end{cases}$$

Используя полученные результаты, можно выписать общую формулу для \vec{y}_n :

$$\vec{y}_n = \left(\frac{1}{1 - \tau\lambda^+}\right)^n \alpha^+ \vec{v}^+ + \left(\frac{1}{1 - \tau\lambda^-}\right)^n \alpha^- \vec{v}^-.$$

Т.к. $\left|\frac{1}{1 - \tau\lambda^\pm}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}} < 1$, то в расчетах амплитуда колебаний затухает, из-за чего получается «устойчивый фокус».

Для метода Рунге — Кутты 2 порядка с расчетными формулами

$$k_1 = f(t_n, y_n), \quad k_2 = f\left(t_n + \frac{\tau}{2}, y_n + \frac{\tau}{2}k_1\right), \quad y_{n+1} = y_n + \tau k_2$$

график представлен на рис. 9. Для того, чтобы показать, что график является «неустойчивым фокусом», пришлось увеличить интервал интегрирования в 10 раз.

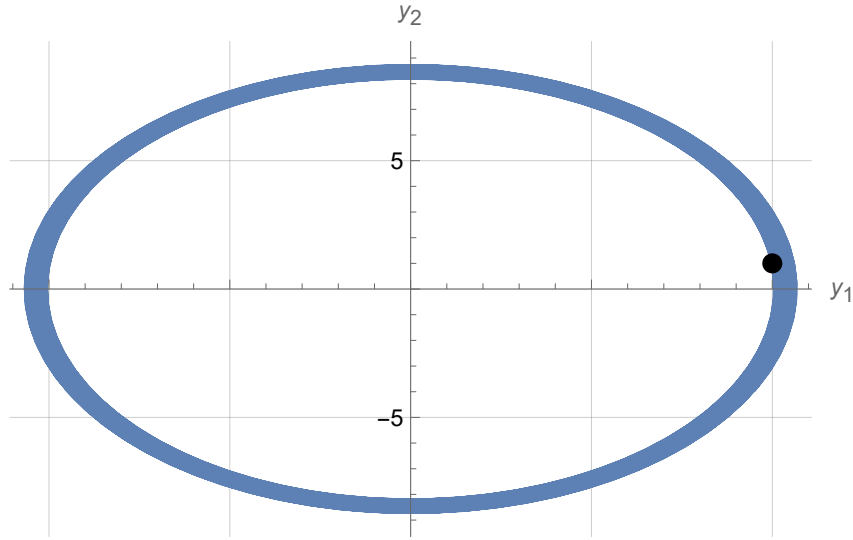


Рис. 9. Решение уравнения маятника методом Рунге — Кутты 2 порядка

Для математического маятника получаем, что

$$\vec{k}_1 = G\vec{y}_n, \quad \vec{k}_2 = G(\vec{y}_n + \frac{\tau}{2}G\vec{y}_n) = (G + \frac{\tau}{2}G^2)\vec{y}_n, \quad \vec{y}_{n+1} = \left(E + \tau G + \frac{\tau^2}{2}G^2\right)\vec{y}_n.$$

Выражая через \vec{y}_0 , приходим к следующему выражению:

$$\vec{y}_n = \left(E + \tau G + \frac{\tau^2}{2}G^2\right)^n \vec{y}_0.$$

Перепишем полученное равенство, используя разложение вектора \vec{y}_0 :

$$\vec{y}_n = \left(1 + \tau\lambda^+ + \frac{\tau^2}{2}(\lambda^+)^2\right)^n \alpha^+ \vec{v}^+ + \left(1 + \tau\lambda^- + \frac{\tau^2}{2}(\lambda^-)^2\right)^n \alpha^- \vec{v}^-.$$

Аналогично найдем модули коэффициентов, находящихся под степенью:

$$\begin{aligned} \left|1 + \tau\lambda^\pm + \frac{\tau^2}{2}(\lambda^\pm)^2\right| &= \sqrt{\left(1 - \frac{\tau^2\omega^2}{2}\right)^2 + \tau^2\omega^2} = \\ &= \sqrt{1 - 2\frac{\tau^2\omega^2}{2} + \frac{\tau^4\omega^4}{4} + \tau^2\omega^2} = \sqrt{1 + \frac{\tau^4\omega^4}{4}} > 1. \end{aligned}$$

Из-за того, что получившиеся коэффициенты больше 1, получается «неустойчивый фокус», но в отличие от явного метода Эйлера скорость «расхождения» сильно меньше из-за большей степени у τ , что и подтверждается экспериментально.

Теперь исследуем симметричную схему:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \frac{f(t_n, y_n) + f(t_n + \tau, y_{n+1})}{2}.$$

Фазовый портрет для маятника представлен на рис. 10. Даже для увеличенного интервала интегрирования (в 10 раз по сравнению с метод Рунге — Кутты) график

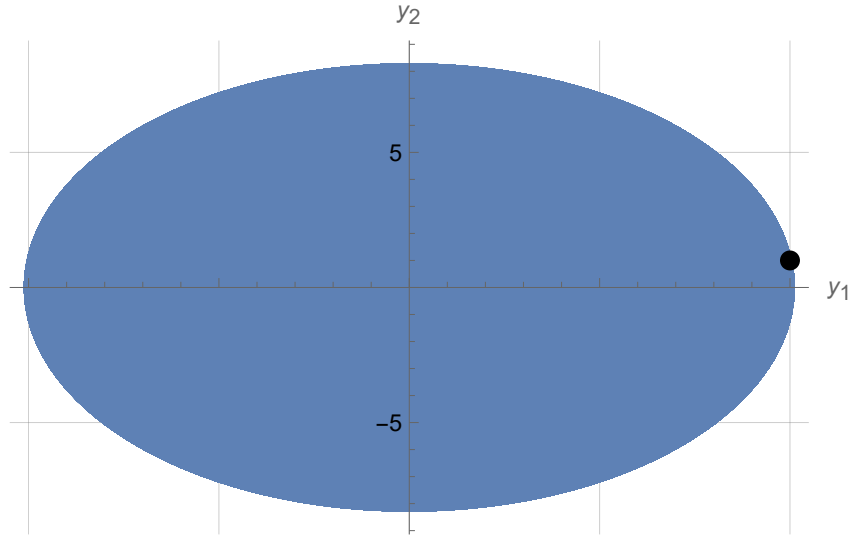


Рис. 10. Решение уравнения математического маятника симметричной схемой

всё равно представляет собой замкнутую траекторию, т.е. «центр», который получается при аналитическом решении.

В случае маятника после группировки симметричная схема приобретает следующий вид:

$$\left(E - \frac{\tau}{2}G\right) \vec{y}_{n+1} = \left(E + \frac{\tau}{2}G\right) \vec{y}_n.$$

Если $\vec{y}_n = \alpha_1 \vec{v}^+ + \alpha_2 \vec{v}^-$, $\vec{y}_{n+1} = \beta_1 \vec{v}^+ + \beta_2 \vec{v}^-$, то при подстановке в выражение приходим к системе:

$$\begin{cases} \beta_1 - \frac{\tau}{2}\beta_1\lambda^+ = \alpha_1 + \frac{\tau}{2}\alpha_1\lambda^+, \\ \beta_2 - \frac{\tau}{2}\beta_2\lambda^- = \alpha_2 + \frac{\tau}{2}\alpha_2\lambda^-. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = \frac{2 + \tau\lambda^+}{2 - \tau\lambda^+}\alpha_1, \\ \beta_2 = \frac{2 + \tau\lambda^-}{2 - \tau\lambda^-}\alpha_2. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\vec{y}_n = \left(\frac{2 + \tau\lambda^+}{2 - \tau\lambda^+}\right)^n \alpha^+ \vec{v}^+ + \left(\frac{2 + \tau\lambda^-}{2 - \tau\lambda^-}\right)^n \alpha^- \vec{v}^-.$$

При этом $\left|\frac{2 + \tau\lambda^\pm}{2 - \tau\lambda^\pm}\right| = 1$, следовательно, получаем устойчивое положение – «центр».

Таблица 10. Шаг, обеспечивающий необходимую точность решения

Метод	$\varepsilon = 10^{-2}$	$\varepsilon = 10^{-4}$	$\varepsilon = 10^{-7}$
Эйлера (явный)	3.71039e-06	—*	—*
Эйлера (неявный)	3.71039e-06	—*	—*
Симметрическая схема	0.00164759	0.000164628	5.20796e-06
Рунге — Кутта (2)	0.00116539	0.000116467	3.68059e-06
Рунге — Кутта (4)	0.0254059	0.00802755	0.00142097
Адамса — Башфорта	0.00999832	0.00314903	0.000558615
«Прогноз-коррекция»	0.0182991	0.00599289	0.00106716

* Провести вычисления до достижения заданной точности не позволяют большой объем необходимой оперативной памяти и долгое время выполнения программы.

2.4. Исследование фазовой плоскости

Вариант 1, уравнение Ван-дер-Поля:

$$\begin{cases} y'' - 2\delta y'(1.0 - \alpha y^2) + \omega^2 y = 0, \\ \delta = 0.3, \quad \omega = 1.0, \quad \alpha = 1.0, \\ t = 0 \dots 200, \\ y(0) = 0.1, \quad y'(0) = 0.1. \end{cases}$$

Приведем дифференциальное уравнение к системе заменой $y_1 = y$, $y_2 = y' = y'_1$. Тогда

$$\begin{cases} y'_1 = y_2, \\ y'_2 = 2\delta y_2(1.0 - \alpha y_1^2) - \omega^2 y_1, \\ \delta = 0.3, \quad \omega = 1.0, \quad \alpha = 1.0, \\ t = 0 \dots 200, \\ y_1(0) = 0.1, \quad y_2(0) = 0.1. \end{cases}$$

Найдем особые точки системы, приравняв правые части к нулю:

$$\begin{cases} y_2 = 0, \\ 2\delta y_2(1.0 - \alpha y_1^2) - \omega^2 y_1 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2 = 0, \\ y_1 = 0. \end{cases}$$

Т.е. у системы одна особая точка, имеющая координаты $(0, 0)$.

На рис. 11-13 представлены результаты численного решения системы тремя различными методами с двумя начальными условиями: $y_1(0) = 0.1, y_2(0) = 0.1$ и $y_1(0) = -0.1, y_2(0) = -0.1$. Все методы показали, что точка $(0, 0)$ является неустойчивой. Также по графикам видно, что у системы имеется также устойчивый аттрактор, называемый аттрактором Ван-дер-Поля (зеленые и красные кривые на графиках показывают сходимость к нему снаружи).

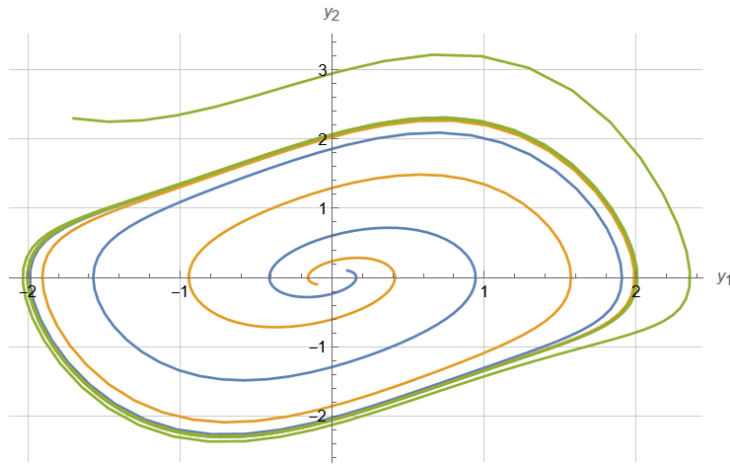


Рис. 11. Решение системы методом Рунге — Кутты 4 порядка

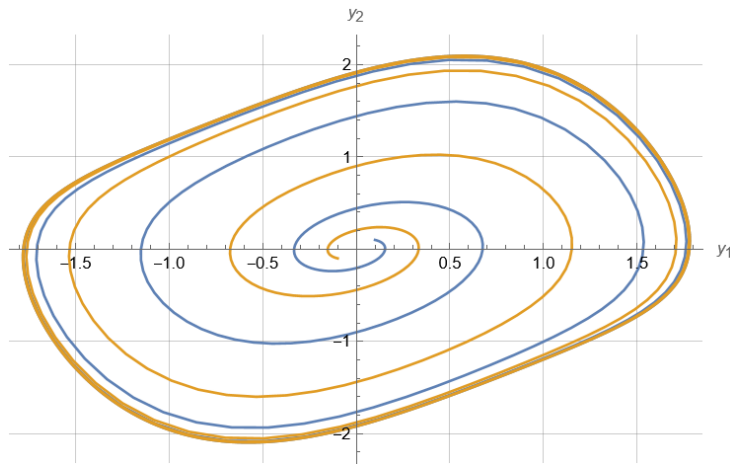


Рис. 12. Решение системы неявным методом Эйлера

Проверим это аналитически. Линеаризуем систему ДУ:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = 2\delta y_2 - \omega^2 y_1, \\ \delta = 0.3, \quad \omega = 1.0. \end{cases}$$

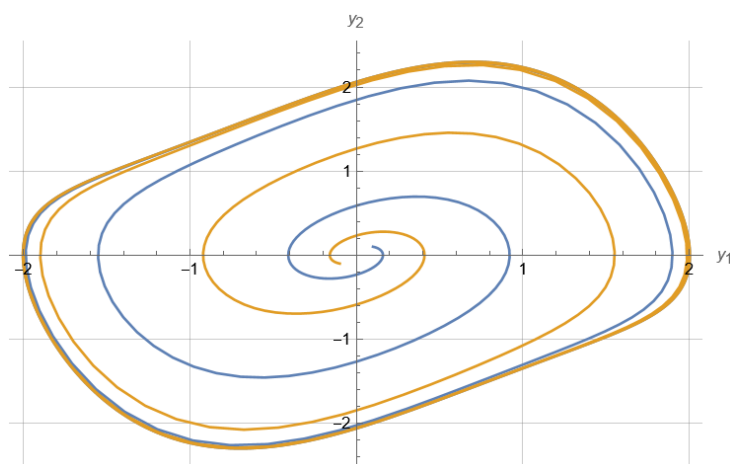


Рис. 13. Решение системы симметричной схемой

Собственные значения матрицы соответствующей системы:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 & 2\delta - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\delta\lambda + \omega^2 = 0,$$

$$D/4 = \delta^2 - \omega^2 < 0 \quad (\delta = 0.3, \omega = 1.0),$$

$$\lambda_{1,2} = \delta \pm i\sqrt{-D/4} \Rightarrow \operatorname{Re} \lambda_{1,2} > 0.$$

Следовательно, по теореме Ляпунова об устойчивости по I приближению особая точка исходной системы является неустойчивой.

Список использованных источников

1. *Галанин М.П., Савенков Е.Б.* Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 592 с.
2. *Галанин М.П., Лукин В.В., Щерица О.В.* Методы вычислений. Задачи алгебры и анализа. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2022. 376 с.