



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ _____ Фундаментальные науки

КАФЕДРА _____ Прикладная математика

Лабораторная работа №4

Численное решение краевых задач для двумерного уравнения Пуассона

Студенты _____
ФН2-62Б
(Группа)

З.И. Абрамов, Г.А. Швецов
(И. О. Фамилия)

Преподаватель _____

С.А. Конев
(И. О. Фамилия)

2023 г.

Оглавление

1. Контрольные вопросы	3
2. Дополнительные вопросы	5
3. Результаты	8
Список использованных источников	11

1. Контрольные вопросы

1. *Оцените число действий, необходимое для перехода на следующий слой по времени методом переменных направлений.*

Выпишем первые этапы метода переменных направлений в случае граничных условий I рода:

$$\begin{aligned} F(y) &= \frac{2}{\tau}y + \Lambda_2 y + \varphi, \quad F_{ij}^k = F(y_{ij}^k), \\ \frac{1}{h_1^2}y_{i-1,j}^{k+1/2} - 2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{\tau}\right)y_{ij}^{k+1/2} + \frac{1}{h_1^2}y_{i+1,j}^{k+1/2} &= -F_{ij}^k, \\ u_{0,j} &= \Omega_{0,j}, \quad u_{N_1,j} = \Omega_{N_1,j}, \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1. \end{aligned}$$

Для вычисления F_{ij}^k требуется порядка $3N_1N_2$ умножений. 2 и 3 строки представляет собой $N_2 - 1$ трехдиагональных СЛАУ размерности $N_1 - 1$. Для их решения требуется примерно $5N_1N_2$ операций. Такой же порядок операций получается и для остальных этапов:

$$\begin{aligned} \hat{F}(y) &= \frac{2}{\tau}y + \Lambda_1 y + \varphi, \quad \hat{F}_{ij}^{k+1/2} = \hat{F}(y_{ij}^{k+1/2}), \\ \frac{1}{h_2^2}y_{i,j-1}^{k+1} - 2\left(\frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{\tau}\right)y_{ij}^{k+1} + \frac{1}{h_2^2}y_{i,j+1}^{k+1} &= -\hat{F}_{ij}^{k+1/2}, \\ u_{i,0} &= \Omega_{i,0}, \quad u_{i,N_2} = \Omega_{i,N_2}, \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1. \end{aligned}$$

Таким образом, для перехода на следующий слой по времени требуется порядка $16N_1N_2$ операций.

2. *Почему при увеличении числа измерений резко возрастает количество операций для решения неявных схем (по сравнению с одномерной схемой)?*

При повышении размерности увеличивается размерность F , т.е. увеличивается количество операций, причем во столько раз, сколько узлов N_n по добавленной размерности, а также количество таких элементов F . Также увеличивается сложность прогонки в такое же количество раз. Таким образом, количество операций составляет $O(N_1 \dots N_n)$, где n — размерность пространства, что резко увеличивает сложность перехода к новому временному слою, N_i — количество узлов по каждой координатной оси.

3. *Можно ли использовать метод переменных направлений в областях произвольной формы?*

Да, метод переменных направлений достаточно просто использовать в случае области произвольного вида. Основное отличие от прямоугольной области будет состоять в том, что при решении СЛАУ для $y_{ij}^{k+1/2}$ диапазон изменения

индекса i будет не константным, а зависеть от j . Также при нахождении y_{ij}^{k+1} диапазон j будет зависеть от i .

4. *Можно ли использовать метод переменных направлений для решения пространственных и вообще n -мерных задач?*

Продольно-поперечная схема на задачи с $p \geq 3$ непосредственно не обобщается вследствие возникающих несимметричности и условной устойчивости. Имевшаяся в двумерном случае симметричность давала равные (по модулю) ошибки с разными знаками на двух последовательных шагах, компенсировавшие друг друга.

Однако в этом случае можно использовать локально-одномерную схему также с использованием промежуточных (дробных) слоев. Эта схема имеет лишь суммарную аппроксимацию, а на промежуточных слоях она не аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение. Однако ошибки аппроксимации при суммировании гасят друг друга. Так что решение на «целом» слое оказывается приближением точного. Ее запись приведена в дополнительном вопросе «Трехмерный случай».

5. *Можно ли использовать метод переменных направлений на неравномерных сетках?*

Метод переменных направлений невозможно использовать на неравномерных сетках, так как в этом случае невозможно выделить эти самые направления.

2. Дополнительные вопросы

1. *Монотонность. Выведите условия положительности коэффициентов для схемы переменных направлений.*

Схема записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{2}{\tau}y^{k+1/2} - \Lambda_1 y^{k+1/2} &= \frac{2}{\tau}y^k + \Lambda_2 y^k + \varphi, \\ \frac{2}{\tau}y^{k+1} - \Lambda_2 y^{k+1} &= \frac{2}{\tau}y^{k+1/2} + \Lambda_1 y^{k+1/2} + \varphi.\end{aligned}$$

Вычтем первое выражение из второго и выразим $y^{k+1/2}$:

$$\begin{aligned}\frac{2}{\tau}y^{k+1} - \frac{2}{\tau}y^{k+1/2} - \Lambda_2 y^{k+1} + \Lambda_1 y^{k+1/2} &= \frac{2}{\tau}y^{k+1/2} - \frac{2}{\tau}y^k + \Lambda_1 y^{k+1/2} - \Lambda_2 y^k, \\ \frac{2}{\tau}(y^{k+1} + y^k) - \Lambda_2(y^{k+1} - y^k) &= \frac{4}{\tau}y^{k+1/2}, \\ y^{k+1/2} &= \frac{1}{2}(y^{k+1} + y^k) - \frac{\tau}{4}\Lambda_2(y^{k+1} - y^k).\end{aligned}$$

Подставим во второе выражение исходной схемы и сократим слагаемые:

$$\frac{1}{\tau}y^{k+1} - \frac{1}{2}\Lambda y^{k+1} + \frac{\tau}{4}\Lambda_1\Lambda_2 y^{k+1} = \frac{1}{\tau}y^k + \frac{1}{2}\Lambda y^k + \frac{\tau}{4}\Lambda_1\Lambda_2 y^k + \varphi,$$

где $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$. Заметим, что узлы $y_{i+1,j+1}^{k+1}$, $y_{i+1,j-1}^{k+1}$, $y_{i-1,j+1}^{k+1}$ и $y_{i-1,j-1}^{k+1}$ указаны только лишь в слагаемом вида $\Lambda_1\Lambda_2 y^{k+1}$. Распишем его:

$$\begin{aligned}\Lambda_1\Lambda_2 y^{k+1} &= \Lambda_1 \left(\frac{y_{i,j+1}^{k+1} - 2y_{i,j}^{k+1} + y_{i,j-1}^{k+1}}{h_2^2} \right) = \frac{1}{h_2^2} (\Lambda_1 y_{i,j+1}^{k+1} - 2\Lambda_1 y_{i,j}^{k+1} + \Lambda_1 y_{i,j-1}^{k+1}) = \\ &= \frac{1}{h_1^2 h_2^2} (y_{i+1,j+1}^{k+1} - 2y_{i,j+1}^{k+1} + y_{i-1,j+1}^{k+1} - 2(y_{i+1,j}^{k+1} - 2y_{i,j}^{k+1} + y_{i-1,j}^{k+1}) + y_{i+1,j-1}^{k+1} - 2y_{i,j-1}^{k+1} + y_{i-1,j-1}^{k+1}).\end{aligned}$$

Видно, что коэффициенты при указанных узлах положительны. Таким образом, после переноса их направо они станут отрицательными. Также можно показать, что коэффициенты при $y_{i,j+1}^{k+1}$, $y_{i,j-1}^{k+1}$, $y_{i-1,j}^{k+1}$ и $y_{i-1,j}^{k+1}$ будут положительными, т.е. условие положительности коэффициентов в любом случае не выполняется.

2. *Критерий останова. Какой критерий останова Вы использовали в счете на установление?*

Наиболее простым критерием останова является выполнение условия

$$\|\hat{y} - y\| \leq \varepsilon;$$

однако он недостаточно надежен, поскольку разностное решение устанавливается медленно.

Можно показать [2], что разность решений уравнения теплопроводности и уравнения Пуассона экспоненциально стремится к нулю по норме $\|\cdot\|_{L_2}$ при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, установление происходит почти по геометрической прогрессии, и можно получить более надежный критерий:

$$\|\hat{y} - y\| \leq \varepsilon(1 - \nu), \quad \text{где } \nu = \frac{\|\hat{y} - y\|}{\|y - \tilde{y}\|}.$$

Этот критерий и был реализован в нашей программе.

3. *Трёхмерный случай. Обобщите продольно-поперечную схему на трёхмерный случай. Предоставьте запись схемы.*

Для многомерного случая обобщением продольно-поперечной схемы является локально-одномерная схема. Рассмотрим уравнение

$$u_t = \sum_{i=1}^p u_{x_i x_i} + f.$$

Аппроксимируем это уравнение, используя симметричную неявную схему

$$y_t = \sum_{i=1}^p \Lambda_i y^{(0,5)} + \varphi,$$

(Λ_i — разностная вторая производная по координате x_i).

Наряду с исходной схемой построим локально-одномерную схему. Для этого между слоями t и \hat{t} введем $p + 1$ промежуточных слоев с шагами τ/p между ними. Первый слой соответствует моменту времени t , последний с номером $p+1$ — моменту времени \hat{t} . На каждом таком слое с номером α суммарный оператор в правой части заменим оператором Λ_α . Обозначим решение на промежуточных шагах через w_α , $\alpha = 1, 2, \dots, p$. Тогда w_α является решением следующей разностной задачи:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau}(\hat{w}_\alpha - w_\alpha) &= \frac{1}{2}\Lambda_\alpha(\hat{w}_\alpha + w_\alpha) + \varphi_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p; \\ w_1 &= y, w_2 = \hat{w}_1, \dots, w_p = \hat{w}_{p-1}, \hat{w}_p = \hat{y}. \end{aligned}$$

Очевидно, что для любого p соответствующее уравнение является одномерным, решаемым методом обычной прогонки. Остальные независимые переменные участвуют в нем только в качестве параметров. Поэтому и схема называется локально-одномерной.

4. *Порядок сходимости. Покажите, что рассматриваемая схема имеет порядок сходимости, предсказываемый теорией (составьте таблицу погрешностей и порядков сходимости в зависимости от шагов τ , h_1 и h_2).*

Метод переменных направлений обладает квадратичной скоростью сходимости по времени и пространству, т.е. $O(\tau^2 + h_1^2 + h_2^2)$.

Для проверки порядка сходимости возьмем следующий пример уравнения теплопроводности:

$$u_t = \Delta u, \quad (x_1, x_2) \in [0, 2] \times [0, 1],$$

$$u|_{(x_1, x_2) \in \Gamma} = 0, \quad u(x_1, x_2, 0) = \sin\left(\frac{\pi x_1}{2}\right) \sin(\pi x_2),$$

точное решение которого имеет вид $u = \exp\left(-\frac{5\pi^2}{4}t\right) \sin\left(\frac{\pi x_1}{2}\right) \sin(\pi x_2)$.

Таблица 1. Порядок сходимости

$h_1, h_2 = h_1/2, \tau = 5h_1$	AbsErr(τ, h_1, h_2)	Δ	$\log_2 \Delta$
0.02	0.0265178	—	—
0.01	0.00607478	4.36523	2.12606
0.005	0.00152092	3.99415	1.99789
0.0025	0.000370375	4.10643	2.03788
0.00125	9.36522e-05	3.9548	1.9836
0.000625	2.35981e-05	3.96863	1.98864

5. *Время выхода на стационар. Как в зависимости от τ меняется время выхода решения на стационар?*

Для поиска времени выхода на стационар возьмем следующий пример:

$$\Delta u = 0, \quad (x_1, x_2) \in [0, 4] \times [0, 2],$$

$$u|_{x_2=0} = 6 - \frac{3}{4}x_1, \quad u|_{x_2=2} = 3 - \frac{3}{4}x_1,$$

$$u|_{x_1=0} = 6 - \frac{3}{2}x_2, \quad u|_{x_1=4} = 3 - \frac{3}{2}x_2,$$

точное решение которого имеет вид $u = 6 - \frac{3}{4}x_1 - \frac{3}{2}x_2$.

В качестве шагов по пространству возьмем $h_1 = 0.02$, $h_2 = 0.01$, точность $\varepsilon = 0.01$.

Таблица 2. Время выхода на стационар

τ	Количество временных слоев	Время выхода на стационар
0.02	283	5.66
0.01	269	2.69
0.005	181	0.905
0.0025	174	0.435
0.00125	196	0.245

3. Результаты

Тестовая задача 1

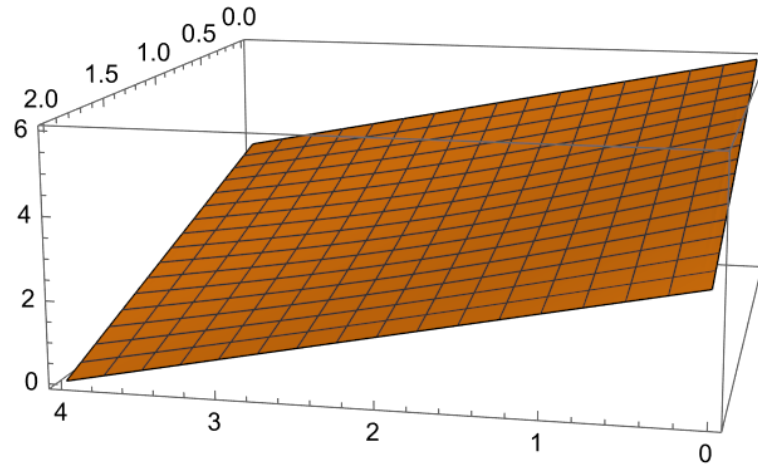
$$\Delta u = 0, \quad (x_1, x_2) \in G = [0, 1] \times [0, 1],$$

$$u(x_1, x_2) = 1, \quad (x_1, x_2) \in \partial G.$$

Точное решение $u(x_1, x_2) = 1$.

Численное решение

$$L_1 = 1.0, L_2 = 2.0, h_1 = 0.001, h_2 = 0.001, eps = 1e-3, \tau = 0.1$$



Тестовая задача 2

$$\Delta u = 0, \quad (x_1, x_2) \in G = [0, 1] \times [0, 1],$$

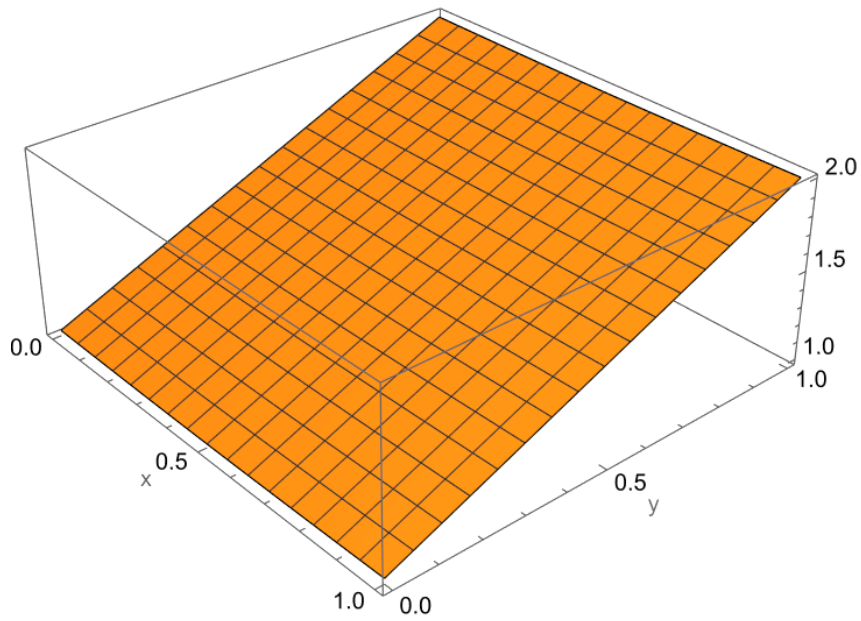
$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{x_2=0} = -1, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{x_2=1} = 1,$$

$$u|_{x_1=0} = 1 + x_2, \quad u|_{x_1=1} = 1 + x_2.$$

Точное решение $u(x_1, x_2) = 1 + x_2$.

Численное решение

$$L_1 = 1.0, L_2 = 2.0, h_1 = 0.001, h_2 = 0.001, eps = 1e-3, \tau = 0.1$$



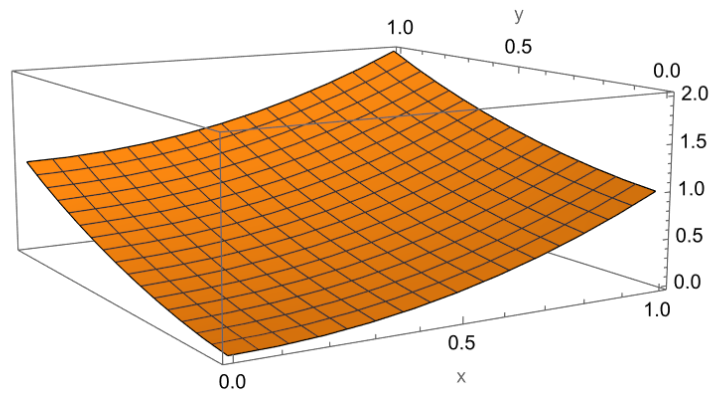
Тестовая задача 3

$$\begin{aligned} \Delta u &= 4, \quad (x_1, x_2) \in G = [0, 1] \times [0, 1], \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{x_1=0} &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{x_1=1} = 2, \\ u|_{x_2=0} &= x_1^2, \quad u|_{x_2=1} = 1 + x_1^2. \end{aligned}$$

Точное решение $u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

Численное решение

$$L_1 = 1.0, \quad L_2 = 2.0, \quad h_1 = 0.001, \quad h_2 = 0.001, \quad eps = 1e-3, \quad \tau = 0.1$$



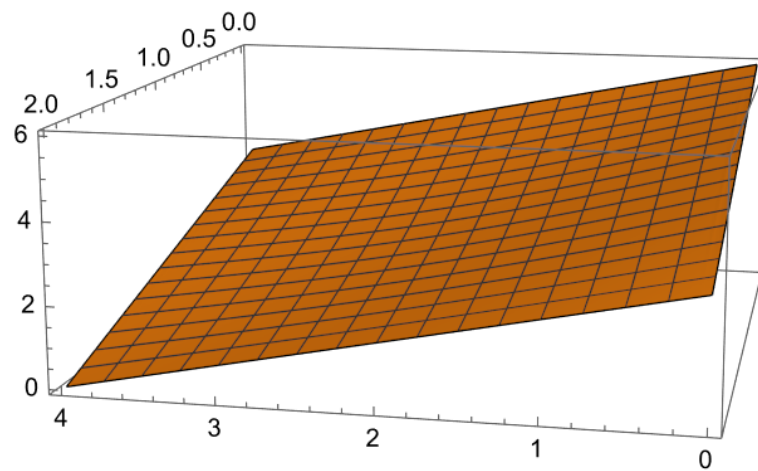
Тестовая задача 4 (наш тест)

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0, \quad (x_1, x_2) \in [0, 4] \times [0, 2], \\ u|_{x_2=0} &= 6 - \frac{3}{4}x_1, \quad u|_{x_2=2} = 3 - \frac{3}{4}x_1, \\ u|_{x_1=0} &= 6 - \frac{3}{2}x_2, \quad u|_{x_1=4} = 3 - \frac{3}{2}x_2,\end{aligned}$$

Точное решение $u(x_1, x_2) = 6 - \frac{3}{4}x_1 - \frac{3}{2}x_2$.

Численное решение

$$L_1 = 4.0, L_2 = 2.0, h_1 = 0.02, h_2 = 0.01, eps = 1e-2, \tau = 0.1$$



Список использованных источников

1. *Галанин М.П., Савенков Е.Б.* Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 592 с.
2. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.