Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

Лабораторная работа №5

Методы численного решения интегральных уравнений

Студенты ФН2-62Б (Группа) З.И. Абрамов, Г.А. Швецов (И. О. Фамилия)

Преподаватель С.А. Конев (И. О. Фамилия)

2023 г.

Оглавление

1. Контрольные вопросы

1. *При выполнении каких условий интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода имеет решение? В каком случае решение является единственным?*

   Интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода

   $$u(x) - \lambda \int_a^b K(x,\xi)u(\xi)d\xi = f(x), \quad x \in [a,b].$$

   Ядро K этого уравнения задано в квадрате $[a,b] \times [a,b]$.

   Существование решения уравнения Фредгольма 2-го рода и его единственность зависят от параметра λ.

   (a) Если $\lambda \neq \lambda_i$ (λ_i – собственное число), то уравнение имеет единственное решение.

   (b) $\lambda = \lambda_i$, т.е. параметр совпадает с одним из собственных значений, то при некоторых правых частях решение вообще не существует, а при других – существует и неединственно.

   (c) Множество собственных значений уравнения Вольтерры 2-го рода пусто. Поэтому неоднородное уравнение имеет решение, и притом единстенное.

   Теорема. Если λ не является характеристическим числом, то интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода имеет, и притом единственное, решение для любой непрерывной функции $f(x)$.

2. *Можно ли привести матрицу СЛАУ, получающуюся при использовании метода квадратур, к симметричному виду в случае, если ядро интегрального уравнения является симметричным, т.е. $K(x,\, s) = K(s,\, x)$?*

   Да, можно. При использовании метода квадратур, получаем СЛАУ в следующем виде

   $$y_i - \lambda \sum_{k=0}^{N} a_k^N K(x_i, s_k) y_k = f_i, \qquad i = 0, \ldots, N.$$

   Так как ядро интегрального уравнения симметричное, то $K(x_i, s_k) = K(s_k, x_i)$. Если умножить каждое i-е уравнение системы на a_i^N

   $$a_i^N y_i - \lambda \sum_{k=0}^{N} a_i^N a_k^N K(x_i, s_k) y_k = a_i^N f_i, \qquad i = 0, \ldots, N,$$

   то получаем систему с симметричной матрицей.

3. *Предложите способ контроля точности результата вычислений при использовании метода квадратур.*

Последовательно дробим шаг сетки h и сравниваем величину нормы разности вычисленного значения интеграла с требуемой точностью.

4. *Оцените возможность и эффективность применения методов квадратур, простой итерации и замены ядра при решении интегральных уравнений Вольтерры 2-го рода.*

   (a) Итерационные методы, в частности метод простой итерации, также применимы к решению интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода. Достаточным условием сходимости метода простой итерации в норме $\|.\|_C$ является выполнение условия

   $$|\lambda| \cdot \max_{a \leqslant x \leqslant b} \int\limits_a^b |K(x,s)| ds \leqslant 1.$$

   Недостатком метода простой итерации является необходимость приближенного вычисления большого количества интегралов, что может приводить к значительным затратам машинного времени.

   (b) Возможно применение метода квадратур. Получаем СЛАУ

   $$y_i - \lambda \sum_{k=0}^{N} a_k^N K(x_i, s_k) y_k = f_i$$

   с треугольной матрицей, которая решается за один ход метода Гаусса. При этом решение существует и единственно для любого λ.

   (c) Ядро интегрального уравнения Фредгольма называется вырожденным, если оно представимо в виде

   $$K(x,s) = \sum_{i=1}^{m} \phi_i(x) \psi_i(s),$$

   где $\phi_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$ – система линейно независимых функций. А вот ядро уравнения Вольтерры вырожденным не бывает. Следовательно, метод замены ядра вырожденным для уравнения Вольтерры 2-го рода не применим.

5. *Что называют резольвентой ядра интегрального уравнения?*

Рассмотрим интегральное уравнение

$$f(s) + \lambda \int\limits_a^b K(s,t) \varphi(t) dt = \varphi(s). \tag{1.1}$$

Резольвентой интегрального уравнения, или его **разрешающим ядром** называется такая функция $R(s,t,\lambda)$, что решение уравнения 1.1 представляется в виде

$$u^*(s) = f(s) + \lambda \int\limits_a^b R(s,t,\lambda) f(t) dt.$$

При этом λ не должна быть собственным числом уравнения (1.1)

6. *Почему замену ядра интегрального уравнения вырожденным предпочтительнее осуществлять путем разложения по многочленам Чебышева, а не по формуле Тейлора?*

   Полином Чебышева наилучшим образом аппроксимирует функцию на всем исследуемом отрезке. Формула же Тейлора записывается в окрестности точки, соответственно, чем дальше находится точка, в которой вычисляется приближенное значение функции, тем больше погрешность аппроксимации. Соответственно, замену ядра интегрального уравнения вырожденным предпочтительнее осуществлять путем разложения по многочленам Чебышева.

7. *Какие вы можете предложить методы решения переопределенной системы (5.13), (5.17) помимо введения дополнительно переменной R?*

   Для решения переопределенной СЛАУ применим метод наименьших квадратов или метод вращений.

2. Дополнительные задачи

1. *Метод квадратур. Какие квадратуры Вы использовали в данной лабораторной работе? Какую точность они имеют (порядок, ведущий член погрешности)? Подтвердите расчетами, что такая же точность достигается в Вашей реализации квадратурных формул.*

   В лабораторной работе была использована квадратурная формула трапеций:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}h, \qquad h = x_{i+1} - x_i,$$

   которая имеет оценку локальной погрешности

$$|\psi_{h,i}| \leqslant \frac{1}{12}M_2 h^3.$$

   Отсюда получаем оценку погрешности квадратурной формулы трапеции

$$|\psi_h| \leqslant \frac{1}{12}M_2 h^3 n = \frac{1}{12}M_2 h^3 \frac{b-a}{h} = \frac{1}{12}M_2(b-a)h^2 = O(h^2).$$

2. *Критерий останова. Какой критерий останова использовался для метода простой итерации? Вычислите априорную оценку погрешности (приведена в методическом пособии), содержащую множитель*

$$q = |\lambda| \max_{a \leqslant x \leqslant b} \int_a^b |K(x,s)|ds.$$

   Проверьте, действительно ли достигаемая точность меньше оцениваемой.

   Для метода простой итерации в качестве критерия останова было выбрано условие, что норма разности между последними приближениями меньше некоторого заданного ε:

$$\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\| < \varepsilon.$$

   В качестве тестового примера возьмем уравнение

$$u(x) - \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi s \sin x\, u(s)ds = \cos x, \qquad x, s \in [0, \pi],$$

   точное решение которого имеет вид $u(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}\sin x$.
   Для этого примера

$$q = \left|\frac{1}{2\pi}\right| \max_{0 \leqslant x \leqslant \pi} \int_0^\pi |s \sin x| ds = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2}\pi^2 \max_{0 \leqslant x \leqslant \pi} \sin x = \frac{\pi}{4} \approx 0.785398 < 1.$$

   Было взято 50 узлов.

Для методов типа простой итерации существуют следующие оценки:

$$\|u^{(k)} - u_*\| \leqslant q^k \|u^{(0)} - u_*\|, \qquad \|u^{(k)} - u_*\| \leqslant \frac{q^k}{1-q} \|u^{(1)} - u^{(0)}\|,$$

где u_* — точное решение задачи, k — номер итерации. Будем использовать первую оценку. В качестве начального приближения примем правую часть уравнения $\cos(x)$. Тогда

$$\|u^{(0)} - u_*\| = \left\| \frac{2}{\pi} \sin x \right\| = \frac{2}{\pi}.$$

Таблица 1. Погрешность метода простой итерации

Число итераций	Достигнутая точность	Теоретическая погрешность
1	0.318205	0.5
2	0.15905	0.392699
3	0.0794989	0.308425
4	0.0397364	0.242237
5	0.0198616	0.190252
6	0.00992754	0.149424
7	0.00496212	0.117357
8	0.00248023	0.092172
9	0.00123969	0.0723917
10	0.000619629	0.0568563
11	0.000309699	0.0446549
12	0.000154785	0.0350719

В данном примере погрешность за одну итерацию уменьшается примерно в 2 раза.

3. *Замена ядра вырожденным. Как меняется погрешность решения с увеличением числа слагаемых в разложении ядра по формуле?*

Для вычисления погрешности возьмем следующее интегральное уравнения:

$$u(x) - 4 \int_0^1 x^2 e^{x^2 s^4} u(s) ds = x^3 - (e^{x^2} - 1), \qquad s, t \in [0, 1],$$

которое имеет точное решение $u(x) = x^3$.

Разложим ядро:

$$K(x, s) = x^2 e^{x^2 s^4} = x^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^{4k}}{k!} x^{2(k+1)}.$$

Число узлов: $N = 200$.

Таблица 2. Погрешность при замене ядра вырожденным

Число слагаемых	Достигнутая точность
1	0.838659
2	0.100678
3	0.0199564
4	0.00348168
5	0.00059282
6	0.000181023
7	0.00010464
8	9.356e-05
9	9.31759e-05
10	9.31655e-05
11	9.31646e-05
12	9.31645e-05

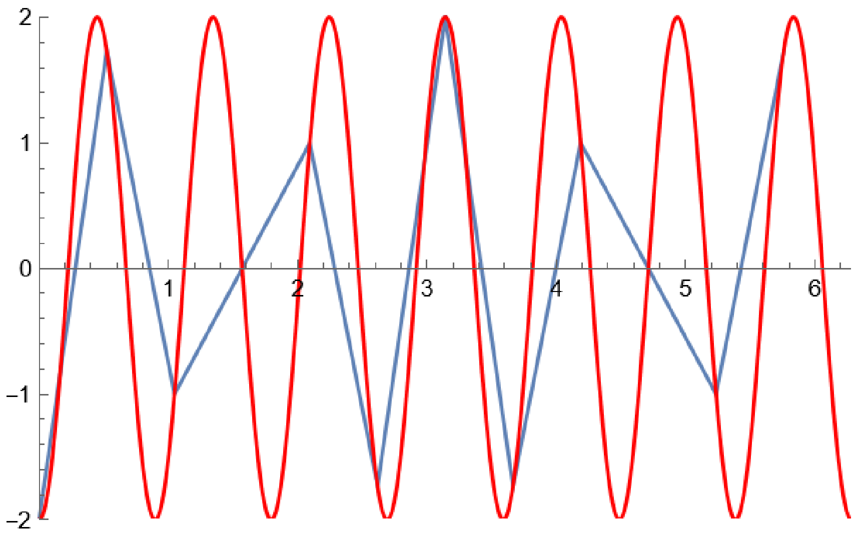
4. *Сингулярные уравнения. Установить расчетным путем наименьшее количество точек разбиения окружности, необходимое для получения точного решения сингулярного интегрального уравнения. Какое количество узлов потребовалось для передачи качественного характера решения?*

   В качестве исследуемого примера возьмем тест 2 из методического пособия с правой частью вида
$$f(\vec{r}) = \sin(7\phi).$$
   Тогда точное решение имеет следующий вид:
$$\gamma(\vec{r}) = -2\cos(7\phi).$$
   Ниже приведена таблица, отражающая зависимость абсолютной ошибки в узлах от количества узлов N.

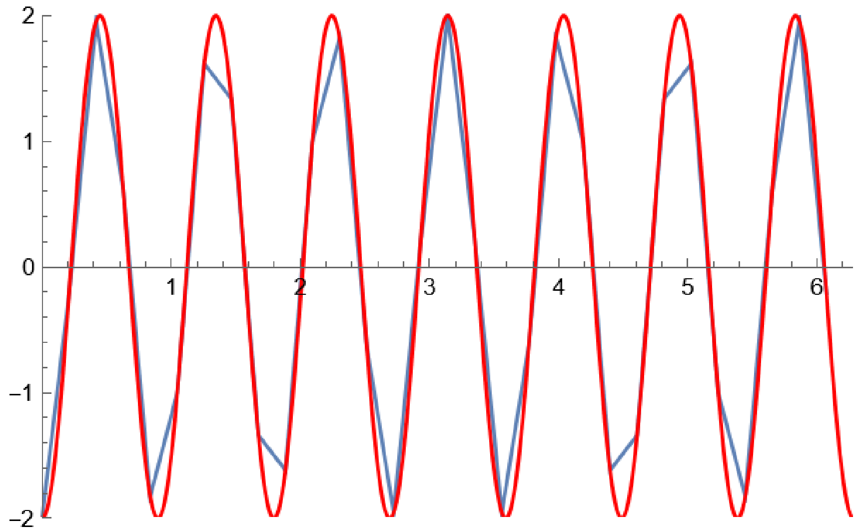
Таблица 3. Абсолютная ошибка в зависимости от количества узлов

Число узлов	Абсолютная ошибка
4	4
5	4
6	4
7	3
8	3.9968e-15
9	4.44089e-15
10	7.54952e-15
11	6.66134e-15
12	7.32747e-15

Таким образом, наименьшее количество точек разбиения окружности, необходимое для получения точного решения сингулярного интегрального уравнения, равно 8. Однако при N = 12 картина выглядит следующим образом:



Для передачи качественного характера решения требуется примерно 30 узлов:



5. *Регуляризация. Для решения сингулярного интегрального уравнения в методическом пособии предлагается вводить дополнительную неизвестную R. Постройте таблицу, содержащую зависимость величины R от числа узлов сетки.*

   В качестве исследуемого примера возьмем тест 2 из методического пособия с правой частью вида

$$f(\vec{r}) = \sin(\phi).$$

   Тогда точное решение имеет следующий вид:

$$\gamma(\vec{r}) = -2\cos(\phi).$$

Таблица 4. Значение R при разных количествах узлов

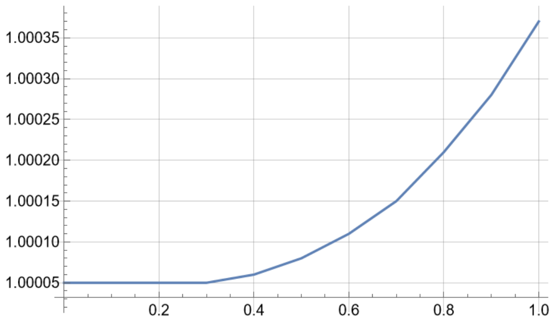
Число узлов	Значение R
10	-3.21965e-16
20	9.71445e-17
30	-1.25918e-15
40	6.21725e-16
50	-3.59712e-16
60	-2.9791e-16
70	-3.17207e-18
80	-8.24341e-16
90	1.38161e-16
100	1.9984e-16

3. Результаты

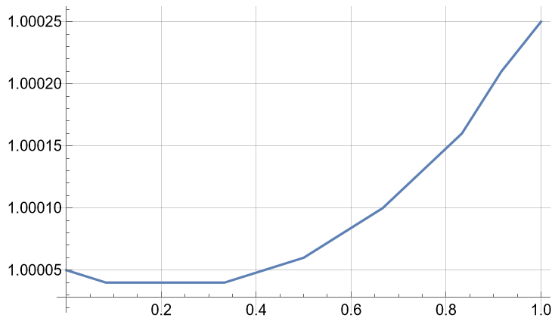
$$u(x) - \int\limits_a^b \frac{1}{2}(1 - x\cos(xs))u(s)\,ds = f(x), \quad x \in [a, b],$$

1. $f(x) = \frac{1}{2}(1 + \sin x)$.

(a) $x \in [0, 1]$

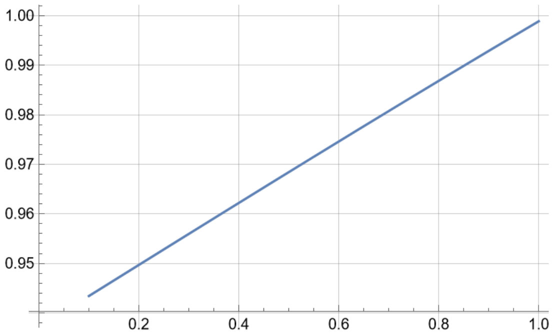


(a) Метод простой итерации

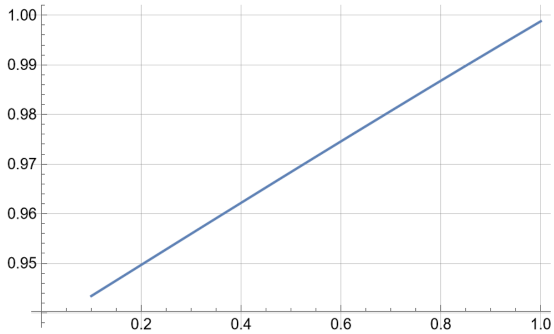


(b) Метод квадратур

(b) $x \in [0.1, 1]$



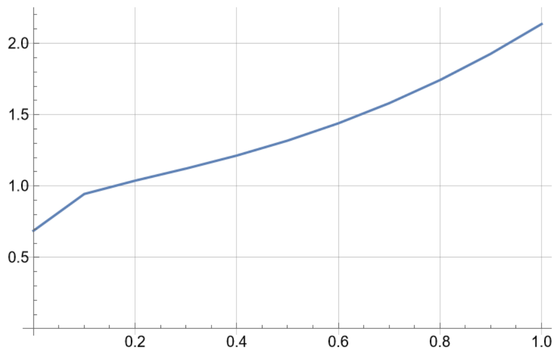
(a) Метод простой итерации



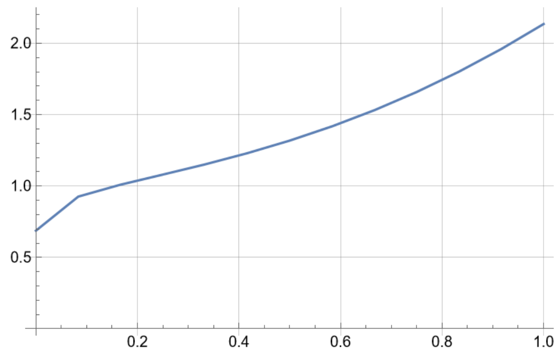
(b) Метод квадратур

2. $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$.

(a) $x \in [0, 1]$

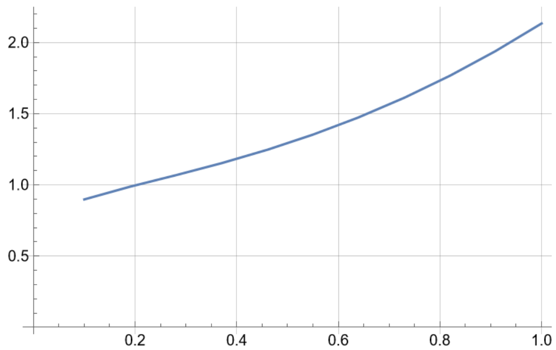


(a) Метод простой итерации

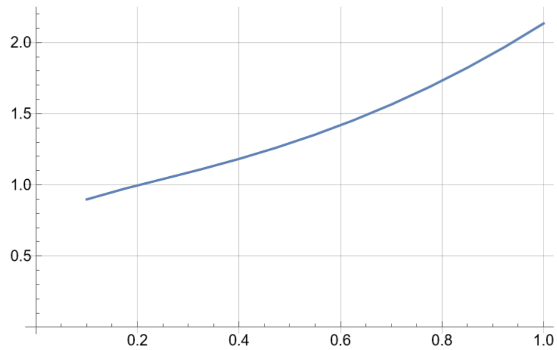


(b) Метод квадратур

(b) $x \in [0.1, 1]$



(a) Метод простой итерации



(b) Метод квадратур

Список использованных источников

1. *Галанин М.П., Савенков Е.Б.* Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 592 с.