Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

Лабораторная работа №2

Численное решение краевых задач для одномерного уравнения теплопроводности

Студенты ФН2-62Б (Группа) З.И. Абрамов, Г.А. Швецов (И. О. Фамилия)

Преподаватель С.А. Конев (И. О. Фамилия)

2023 г.

Оглавление

1. Контрольные вопросы

1. *Дайте определения терминам: корректно поставленная задача, понятие аппроксимации дифференциальной задачи разностной схемой, порядок аппроксимации, однородная схема, консервативная схема, монотонная схема, устойчивая разностная схема (условно/абсолютно), сходимость.*

   Задача называется **корректно поставленной**, если ее решение существует, единственно и непрерывно зависит от входных данных. Если же не выполнено хотя бы одно из этих условий, то **задача** называется **некорректно поставленной**.

   Рассмотрим точную задачу

   $$Au = f \text{ в } G, \quad Ru = \mu \text{ на } \Gamma$$

   и «заменяющую» ее разностную схему

   $$A_h y = \varphi \text{ в } G_h, \quad R_h u = \nu \text{ на } \Gamma_h.$$

   В этом случае

   $$\psi_h = (\varphi - f_h) + ((Av)_h - A_h v_h), \quad \chi_h = (\nu - \mu_h) + ((Rv)_h - R_h v_h) -$$

   погрешности аппроксимации разностной задачи (для общего случая произвольной функции v) в G_h и на Γ_h соответственно.

   Разностная схема аппроксимирует исходную **задачу**, если $\|\psi_h\|_\psi \to 0$, $\|\chi_h\|_\chi \to 0$ при $h \to 0$; аппроксимация имеет p-й порядок ($p > 0$), если $\|\psi_h\|_\psi = O(h^p)$, $\|\chi_h\|_\chi = O(h^p)$ при $h \to 0$. В многомерном случае под h можно понимать вектор из шагов сетки (в двумерном случае вектор из шага по времени τ и пространству h), а под p — мультииндекс.

   Разностные схемы, в которых расчет ведется по одним формулам и на одном шаблоне во всех узлах сетки без какого-то специального выделения имеющихся особенностей, называются **однородными**.

   Разностные схемы называют **консервативными** (дивергентыми), если их решение удовлетворяет дискретному аналогу закону сохранения (баланса), присущему исходной задаче. В противном случае схему называют **неконсервативной**, или дисбалансной.

   Схемы, решение которых удовлетворяет принципу максимума или сохраняет пространственную монотонность (в одномерном случае) при условии, что соответствующие свойства справедливы для исходных задач, называются **монотонными**.

Пусть y^I, y^{II} — решения двух разностных задач с одинаковым оператором, соответствующие правым частям φ^I, φ^{II} и граничным условиям ν^I, ν^{II}.

Разностную схему называют **устойчивой**, если решение уравнений разностной схемы непрерывно зависит от входных данных и эта зависимость равномерна по h, т.е.

$$\forall\varepsilon\ \exists\delta(\varepsilon)>0 : \|\varphi^I-\varphi^{II}\|_\varphi<\delta,\ \|\nu^I-\nu^{II}\|_\nu<\delta \Rightarrow \|y^I-y^{II}\|_Y<\varepsilon.$$

При этом отдельно можно отметить, что значение δ не зависит от шага сетки h.

В случае нескольких независимых переменных **устойчивость** называют **безусловной** (или абсолютной), если устойчивость имеет место для любого соотношения шагов, и **условной** в противном случае.

Разностное решение y сходится к решению u точной задачи, если $\|y-p_h u\|_Y\to 0$ при $h\to 0$. Говорят, что имеет место **сходимость** с p-м ($p>0$) порядком, если $\|y-p_h u\|_Y = O(h^p)$ при $h\to 0$.

2. *Какие из рассмотренных схем являются абсолютно устойчивыми? Какая из рассмотренных схем позволяет вести расчеты с более крупным шагом по времени?*

Для исследования на устойчивость применим принцип замороженных коэффициентов, т.е. примем, что $a_i = a_{i+1} = a$. Тогда смешанная схема примет следующий вид:

$$c\rho\frac{y_i^{j+1}-y_i^j}{\tau} = \sigma a\frac{y_{i+1}^{j+1}-2y_i^{j+1}+y_{i-1}^{j+1}}{h^2} + (1-\sigma)a\frac{y_{i+1}^j-2y_i^j+y_{i-1}^j}{h^2}.$$

Далее воспользуемся методом разделения переменных и разложим y по собственным функциям оператора второй разностной производной, т.е.

$$y_i^j = \sum_{k=1}^{n-1} c_k^j\mu_{k,i},\quad \mu_{k,\bar{x}x}+\lambda_k^2\mu_k = 0,\quad \lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin\frac{\pi k h}{2l}.$$

Здесь $\mu_{k,i} = \sin\dfrac{\pi k i h}{l}$, $k=\overline{1,n-1}$ — собственные функции разностной производной. Подставляя в схему, получаем следующее выражение:

$$c\rho\sum_{k=1}^{n-1}\frac{c_k^{j+1}-c_k^j}{\tau}\mu_{k,i} = a\sum_{k=1}^{n-1}(-\lambda_k^2\sigma c_k^{j+1}\mu_{k,i}) + a\sum_{k=1}^{n-1}(-\lambda_k^2(1-\sigma)c_k^j\mu_{k,i}),$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(c\rho\frac{c_k^{j+1}-c_k^j}{\tau}\right)\mu_{k,i} = \sum_{k=1}^{n-1}-\lambda_k^2 a(\sigma c_k^{j+1}+(1-\sigma)c_k^j)\mu_{k,i}.$$

В силу ортогональности функций μ_k для любого $k=\overline{1,n-1}$ должно выполнятся равенство

$$c\rho\frac{c_k^{j+1}-c_k^j}{\tau} = -\lambda_k^2 a(\sigma c_k^{j+1}+(1-\sigma)c_k^j).$$

Из этого следует, что коэффициент у j-й гармоники меняется в

$$\varrho_j = \frac{1-\lambda_k^2\tilde{a}(1-\sigma)}{1+\lambda_k^2\tilde{a}\sigma}, \quad \text{где } \tilde{a} = \frac{a\tau}{c\rho}.$$

Для устойчивости требуется, чтобы $|\varrho_j| \leqslant 1$. Т.к. знаменатель положителен, то неравенство записывается как

$$-(1+\lambda_k^2\tilde{a}\sigma) \leqslant 1-\lambda_k^2\tilde{a}+\lambda_k^2\tilde{a}\sigma \leqslant 1+\lambda_k^2\tilde{a}\sigma.$$

Заметим, что правая часть неравенства автоматически выполнена. Тогда получаем, что

$$2\lambda_k^2\tilde{a}\sigma \geqslant \lambda_k^2\tilde{a}-2, \qquad \sigma \geqslant \frac{1}{2}-\frac{1}{\lambda_k^2\tilde{a}}, \qquad \sigma \geqslant \frac{1}{2}-\frac{c\rho h^2}{4a\tau}.$$

Данное неравенство должно выполнятся при любых a. Таким образом, условие устойчивости записывается как

$$\sigma \geqslant \frac{1}{2}-\frac{c\rho h^2}{4a_{\max}\tau}.$$

Из него же следует, что схема абсолютно устойчива при $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$.
В обоснование принципа замороженных коэффициентов можно привести следующее рассуждение на эвристическом уровне строгости. При измельчении сетки коэффициент $a(x,t)$ в окрестности точки (x^*,t^*) за любое фиксированное число шагов сетки длины h по пространству и длины τ по времени ввиду непрерывности функции $a(x,t)$ меняется все меньше и все меньше отличается от значения $a(x^*,t^*)$. Поэтому при мелкой сетке возмущения, наложенные на решение задачи с переменным коэффициентом в момент времени $t=t^*$ в окрестности точки $x=x^*$ развиваются примерно так же, как для задачи с постоянным коэффициентом, равным $a(x^*,t^*)$ [3].
Также принцип можно обосновать тем, что решение должно быть устойчивым при любом диапазоне значений a, даже при самом "плохом". Поэтому можно исходить из того, что мы выбрали то самое плохое значение и исследовать схему при нем. В конце вывода условия мы определили, что таким "плохим"значением является максимальное значение функции a.
Используя Wolfram Mathematica, можно достаточно легко найти порядок аппроксимации ψ_h. При наложении условий, полученных в третьем контрольном вопросе, и при применении описанного там же процесса приходим к тому, что

$$\psi_h = \left[\left(K'(x_i)-2\sigma\frac{a_{i+1}-a_i}{h}\right)\frac{u^j_{i,xt}}{2}+\left(K(x_i)-\sigma(a_i+a_{i+1})\right)\frac{u^j_{i,xxt}}{2}\right]\tau+O(h^2+\tau^2).$$

Заметим, что в случае наложенных условиях на a_i только при $\sigma = \dfrac{1}{2}$ порядок схемы по времени становится равным 2. Таким образом, симметричная схема позволяет вести расчеты с более крупным шагом.

3. *Будет ли смешанная схема (2.15) иметь второй порядок аппроксимации при* $a_i = \dfrac{2K(x_i)K(x_{i-1})}{K(x_i)+K(x_{i-1})}$*?*

Найдем порядок аппроксимации смешанной схемы в случае произвольного a_i:

$$\psi_h = c\rho\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau} - \frac{1}{h}\left[\sigma\left(a_{i+1}\frac{u_{i+1}^{j+1}-u_i^{j+1}}{h} - a_i\frac{u_i^{j+1}-u_{i-1}^{j+1}}{h}\right) + \right.$$
$$\left. + (1-\sigma)\left(a_{i+1}\frac{u_{i+1}^{j}-u_i^{j}}{h} - a_i\frac{u_i^{j}-u_{i-1}^{j}}{h}\right)\right] = c\rho\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau} - \frac{1}{h^2}\cdot$$
$$\left[\sigma\left(a_{i+1}(u_{i+1}^{j+1}-u_i^{j+1}) - a_i(u_i^{j+1}-u_{i-1}^{j+1})\right) + (1-\sigma)\left(a_{i+1}(u_{i+1}^{j}-u_i^{j}) - a_i(u_i^{j}-u_{i-1}^{j})\right)\right].$$

Используя замену $\tau \to \alpha\tau$, $h \to \alpha h$ в аргументах функции решения u, исходное уравнение теплопроводности и систему компьютерной алгебры Wolfram Mathematica, можно разложить ψ_h в ряд по α в нуле и взять значение $\alpha = 1$. Таким образом можно построить разложение по h и τ. Приведем результат:

$$\psi_h = \left[-\left(\frac{a_{i+1}-a_i}{h} - K'(x_i)\right)u_{i,x}^j - \left(\frac{a_{i+1}-a_i}{2} - K(x_i)\right)u_{i,xx}^j\right] +$$
$$+ \left[\frac{1}{6}(a_i - a_{i+1})u_{i,xxx}^j\right]h + O(\tau) + O(h^2) + O(h\tau).$$

Т.к. $O(h\tau) = O(h^2+\tau^2)$, то для второго порядка аппроксимации по пространству достаточно выполнения следующий условий:

$$\begin{cases} \dfrac{a_{i+1}-a_i}{h} = K'(x_i) + O(h^2), \\ \dfrac{a_{i+1}-a_i}{2} = K(x_i) + O(h^2), \\ a_i - a_{i+1} = O(h). \end{cases}$$

Заметим, что из выполнения первого условия автоматически следует выполнение третье. В итоге получаем, что достаточные условия для второго порядка по пространству смешанной схемы такие же, как и у схемы с параметром $\sigma = 1$:

$$\begin{cases} \dfrac{a_{i+1}-a_i}{h} = K'(x_i) + O(h^2), \\ \dfrac{a_{i+1}-a_i}{2} = K(x_i) + O(h^2). \end{cases}$$

Применяя, к примеру, команду Series системы Wolfram Mathematica, нетрудно убедиться, что $a_i = \dfrac{2K(x_i)K(x_{i-1})}{K(x_i)+K(x_{i-1})}$ удовлетворяет полученным требованиям. Таким образом, при использовании указанных a_i численная схема будет обладать вторым порядком аппроксимации по пространству.

4. *Какие методы (способы) построения разностной аппроксимации граничных условий (2.5), (2.6) с порядком точности $O(\tau + h^2)$, $O(\tau^2 + h^2)$ и $O(\tau^2 + h)$ вы знаете?*

Условия (2.5) и (2.6) имеют вид:

$$-K(u,0)\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{(0,t)} = P(t) \quad \text{и} \quad K(u,L)\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{(L,t)} = P(t).$$

Граничные условия можно аппроксимировать следующими способами.

Метод разностной аппроксимации заключается в том, что каждая производная, входящая в дифференциальное уравнение и краевые условия, заменяется каким-либо разностным (включающим только узлы шаблона). Для достижения нужного порядка аппроксимации необходимо использовать разностные аналоги производных соответствующего порядка. Например, в граничных условиях, указанных выше, можно заменить производную на ее разностный аналог в виде производной назад и получить первый порядок по пространству и бесконечный по времени. Также можно применить другие разностные производные, например, получаемые при выводе методов Адамса — Башфорта.

Интегро-интерполяционный метод. При использовании данного метода дифференциальное уравнение интегрируется по ячейке и приводят к интегральной форме, соответствующей физическому закону сохранения. Приближенно вычисляя полученные интегралы по каким-либо квадратурным формулам, составляют разностную схему. Именно выбор квадратурных формул и ячейки интегрирования определяют порядок аппроксимации численной схемы. Например, в методическом пособии при выводе схемы с весами для достижения второго порядка по пространству используется квадратурная формула центральных прямоугольников, имеющая как раз второй порядок.

Метод неопределенных коэффициентов заключается в том, что в качестве разностной схемы берут линейную комбинацию значений разностного решения в узлах заданного шаблона. Коэффициенты этой линейной комбинации определяют из условия, чтобы невязка схемы имела необходимый порядок малости относительно τ и h.

Для уравнения теплопроводности $u_t = ku_{xx}$ можно искать разностную схему в следующем виде:

$$\alpha\hat{y}_{n-1} + \beta\hat{y}_n + \gamma\hat{y}_{n+1} + \delta y_n = 0.$$

Разложим выражение и вычтем его схему выше:

$$\psi_h = u_t - ku_{xx} - (\alpha+\beta+\gamma+\delta)u + \tau\delta u_t + (\alpha-\gamma)hu_x - \\ - \frac{1}{2}(\alpha+\gamma)hu_{xx} + \delta O(\tau^2) + (\alpha-\gamma)O(h^3) + \ldots$$

Таким образом, для получения второго порядка по времени и третьего по пространству надо положить

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = 0, \quad \tau\delta = -1, \quad \alpha-\gamma = 0, \quad \frac{1}{2}(\alpha+\gamma)h^2 = -k.$$

Решив полученные уравнения, находим коэффициенты схемы.

Метод фиктивной точки заключается в добавлении дополнительного узла вне области сетки. Приведем пример для уравнения вида $u_t = ku_{xx}$ и условия $u_x(0,t) = \mu(t)$. Введем вне области интегрирования фиктивную точку $x_{-1} = x_0 - h$ и будем считать исходное уравнение справедливым при $x_{-1} \leqslant x$. Тогда можно составить разностную схему при $i = 0$:

$$\frac{1}{\tau}(\hat{y}_0 - y_0) = \frac{k}{h^2}(y_{-1} - 2y_0 + y_1).$$

Заменим в краевом условии производную симметричной разностью:

$$\frac{1}{2h}(y_{-1} - y_0) = \mu(t_j).$$

Из данных двух уравнений можно исключить фиктивную точку и получить разностный аналог краевого условия:

$$\frac{1}{h}(y_1 - y_0) = \mu(t_j) + \frac{h}{2k\tau}(\hat{y}_0 - y_0).$$

Можно заметить, что получившаяся схема является явной.

Для получения разных порядков аппроксимации можно менять первое и второе разностные уравнения.

5. *При каких h, τ и σ смешанная схема монотонна? Проиллюстрируйте результатами расчетов свойства монотонных и немонотонных разностных схем.*

Для проверки на монотонность приведем схему к следующему виду:

$$A(x)y(x) = \sum_{\xi\in S'(x)} B(x,\xi)y(\xi) + F(x), \quad x \in G_h,$$

В данном случае $F \equiv 0$. Исходная схема записывается подобным образом:

$$c\rho\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{h^2}\Big[\sigma\left(a_{i+1}(y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1}) - a_i(y_i^{j+1} - y_{i-1}^{j+1})\right) + \\ + (1-\sigma)\left(a_{i+1}(y_{i+1}^j - y_i^j) - a_i(y_i^j - y_{i-1}^j)\right)\Big].$$

Сгруппировав слагаемые при одинаковых значениях сеточной функции, получаем необходимый вид разностной схемы:

$$\left(\frac{\sigma(a_{i+1}+a_i)}{h^2}+\frac{c\rho}{\tau}\right)y_i^{j+1}=\left(\frac{\sigma a_{i+1}}{h^2}\right)y_{i+1}^{j+1}+\left(\frac{\sigma a_i}{h^2}\right)y_{i-1}^{j+1}+$$
$$+\left(\frac{(1-\sigma)a_{i+1}}{h^2}\right)y_{i+1}^{j}+\left(\frac{(1-\sigma)a_i}{h^2}\right)y_{i-1}^{j}+\left(\frac{c\rho}{\tau}-\frac{(1-\sigma)(a_{i+1}+a_i)}{h^2}\right)y_i^{j}.$$

Условие положительности коэффициентов определяется как

$$A(x)>0,\qquad D(x)=A(x)-\sum_{\xi\in S'(x)}B(x,\xi)\geqslant 0,\qquad B(x,\xi)>0,\quad \xi\in S'(x).$$

Проверим его:

$$A(x)=\frac{\sigma(a_{i+1}+a_i)}{h^2}+\frac{c\rho}{\tau}>0 \text{ — верно},$$
$$D(x)=0\geqslant 0 \text{ — верно (все слагаемые сокращаются)}.$$

В последнем условии все коэффициенты $B(x,\xi)$ кроме одного больше нуля. Этот коэффициент и создает достаточные условия монотонности:

$$\frac{c\rho}{\tau}>\frac{(1-\sigma)(a_{i+1}+a_i)}{h^2}.$$

Если взять в качестве $a_i=\dfrac{K(x_i)+K(x_{i-1})}{2}$, то $a_{i+1}+a_i=\dfrac{K(x_{i+1})+2K(x_i)+K(x_{i-1})}{2}$ и условие принимает следующий вид:

$$\frac{h^2}{\tau(1-\sigma)}>\frac{2\tilde{K}}{c\rho},\qquad \text{где } \tilde{K}=\max_{0\leqslant x\leqslant L}K(x).$$

Монотонный случай. Для иллюстрации монотонности возьмем явную схему ($\sigma=0$) и уравнение с $K\equiv 1$, $c\rho=1$, $L=1$. Тогда условие монотонности достаточное записывается как $\tau<h^2/2$.

В качестве начального условия примем $u(x,0)=5+x(1-x)$, а граничных условий $u(0,t)=u(1,t)=5$. Интегрировать будем на временном отрезке $[0,1]$. Тогда при $h=0.1$, $\tau=0.005$ будем наблюдать монотонность численного решения (рис. 1).

Немонотонный случай. В случае же $h=0.1$, $\tau=1.0$, $\sigma=0.5$ и задании на границах нулевого потока монотонность (пространственная) отсутствует (серия графиков с разных временных слоев представлена рис. 2).

Условия устойчивости и нарушения монотонности (на основе необходимого и достаточного условия монотонности схемы с весами для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами [2]):

$$\begin{cases}\sigma\geqslant \dfrac{1}{2}-\dfrac{h^2}{4K\tau},\\[2mm] \tau\geqslant \dfrac{(2-\sigma)h^2}{4K(1-\sigma)^2}.\end{cases}$$

Для немонотонного примера эти условия выполняются.

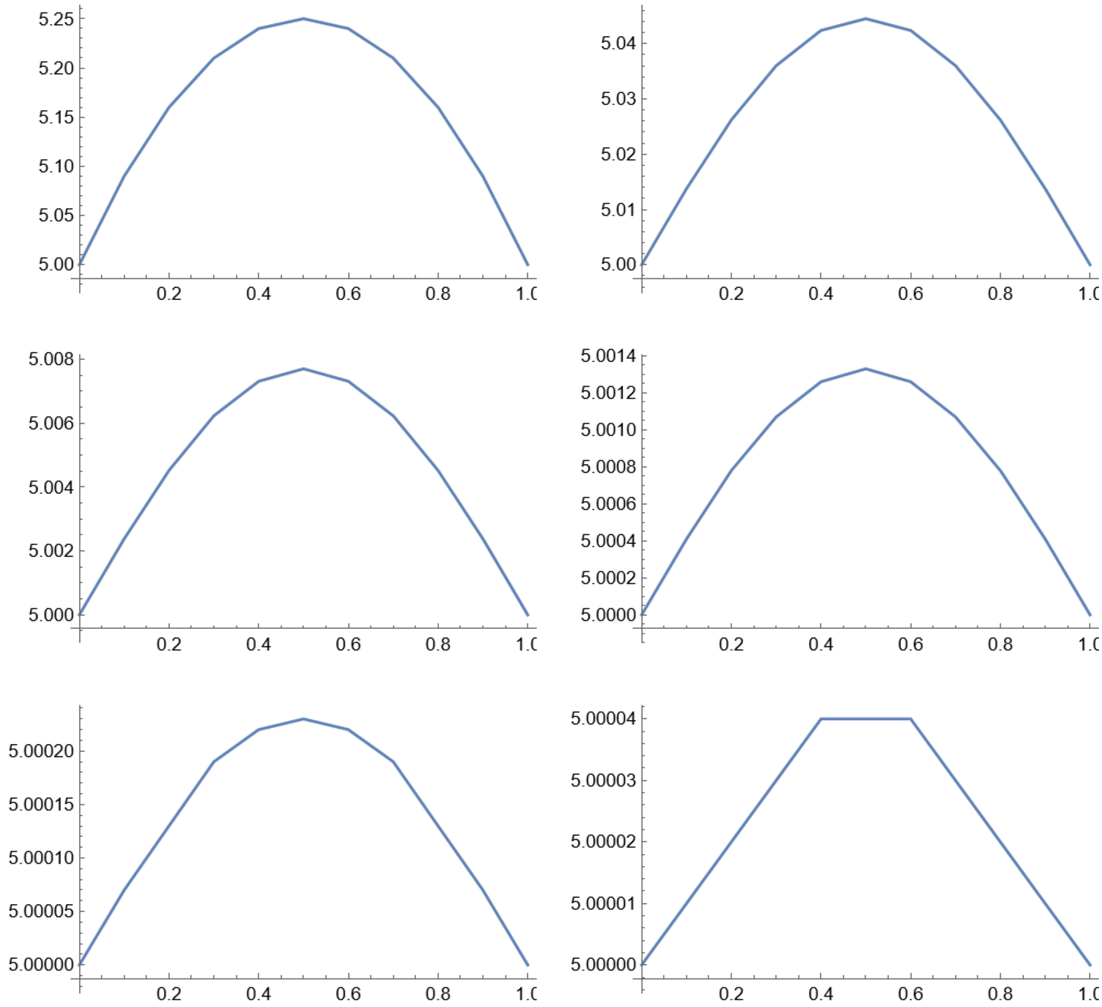

Рис. 1. Иллюстрация монотонности

6. *Какие ограничения на h, τ и σ накладывают условия устойчивости прогонки?*

Однородная консервативная разностная схема для уравнения теплопроводности:

$$c\rho\frac{\hat{y}_i - y_i}{\tau} = \frac{1}{h}\left[\sigma\left(\hat{k}_{i+\frac{1}{2}}\frac{\hat{y}_{i+1} - \hat{y}_i}{h} - k_{i-\frac{1}{2}}\frac{\hat{y}_i - \hat{y}_{i-1}}{h}\right) + \right.$$
$$\left. + (1-\sigma)\left(k_{i+\frac{1}{2}}\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - k_{i-\frac{1}{2}}\frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right)\right]$$

Разностная задача решается методом прогонки:

$$A_i\hat{y}_{i-1} - C_i\hat{y}_i + B_i\hat{y}_{i+1} = -F_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1,$$
$$\hat{y}_0 = u_0,\ \hat{y}_N = \varkappa\hat{y}_{N-1} + \mu,$$

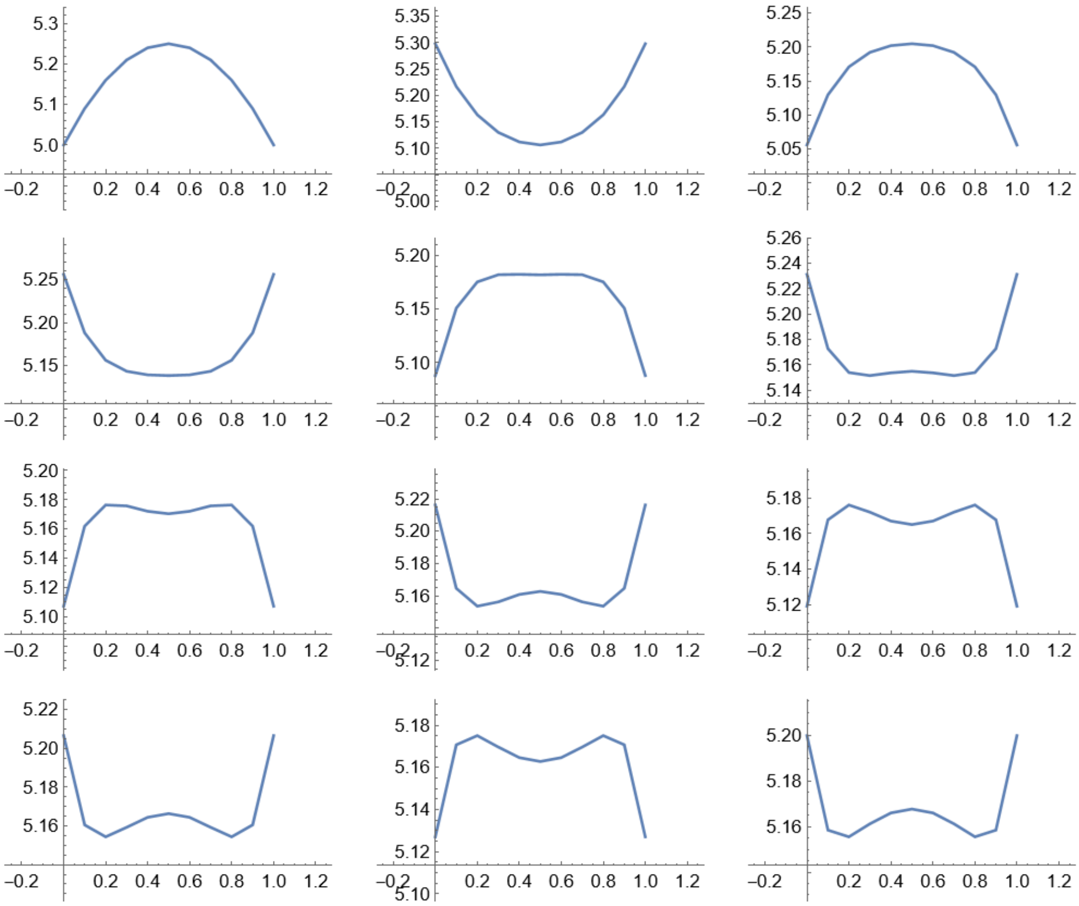

Рис. 2. Иллюстрация отсутствия монотонности

где

$$A_i = \frac{\sigma}{h} a_i,\ B_i = \frac{\sigma}{h} a_{i+1},\ C_i = \frac{\sigma}{h} a_i + \frac{\sigma}{h} a_{i+1} + c\rho \frac{h}{\tau},$$

$$F_i = c\rho \frac{h}{\tau} y_i + (1-\sigma)(w_{i+\frac{1}{2}} - w_{i-\frac{1}{2}}),$$

$$\varkappa = \frac{\sigma a_N / N}{c\rho h/(2\tau) + \sigma a_N / h},$$

$$\mu = \frac{c\rho y_N h/(2\tau) + \sigma P(t_{j+1}) + (1-\sigma)(P(t_j) - w_{N-\frac{1}{2}})}{c\rho h/(2\tau) + \sigma a_N / h}.$$

Определение. ***Метод прогонки*** называется ***корректным***, если знаменатели в формулах для прогоночных коэффициентов не обращаются в нуль, и ***устойчивым***, если все прогоночные коэффициенты $|\alpha_i| \leqslant 1$.

Теорема. Пусть в трехдиагональной матрице выполнено ***условие диагонального преобладания***

$$|C_i| \geqslant |A_i| + |B_i|,\ i = 1, \ldots, n,$$

в котором хотя бы для одного i выполнено строгое неравенство, $|C_1| > 0$ и $|B_i| > 0$, $i = 2, \ldots, n-1$. Тогда система уравнений с такой матрицей имеет решение, которое может быть получено методом прогонки. Алгоритм прогонки в указанных условиях устойчив и корректен.

$$\left|\frac{\sigma}{h}a_i + \frac{\sigma}{h}a_{i+1} + c\rho\frac{h}{\tau}\right| \geqslant \left|\frac{\sigma}{h}a_i\right| + \left|\frac{\sigma}{h}a_{i+1}\right|, \ i = 1, \ldots, N-1.$$

Условия теоремы выполнены, значит метод прогонки устойчив.

Ограничения за счет граничных условий (условия I рода никак не повлияют на устойчивость прогонки, т.к. они влияют только на F_1 и F_{N-1}, которые никак не упоминаются в теореме):

$$\varkappa\hat{y}_{N-1} - \hat{y}_N = -\mu, \text{ где } A_N = \varkappa, \ C_N = 1, \ F_N = \mu,$$

$$|C_N| = 1 \geqslant \left|\frac{\sigma a_N/h}{c\rho h/(2\tau) + \sigma a_N/h}\right| = |A_N|,$$

$$-1 \leqslant \frac{\sigma a_N/h}{c\rho h/(2\tau) + \sigma a_N/h} \leqslant 1,$$

Т.к. $c > 0, \quad \rho > 0, \quad h > 0, \quad \tau > 0, \quad 0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, получаем

$$0 \leqslant \frac{\sigma a_N/h}{c\rho h/(2\tau) + \sigma a_N/h} \leqslant 1$$

Таким образом, получаем, что для $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $\tau > 0$, $h > 0$ прогонка будет устойчивой. При задании теплового потока на левом конце аналогично.

7. *В случае $K = K(u)$ чему равно количество внутренних итераций, если итерационный процесс вести до сходимости, а не обрывать после нескольких первых итераций?*

   Возьмем пример из методического пособия.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\varkappa_0 u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x}\right), \qquad x > 0, \qquad t > 0,$$

$$u(x,0) = 0, \qquad u(0,t) = u_0 t^{1/\sigma}, \qquad u_0 = \left(\frac{\sigma c^2}{\varkappa_0}\right)^{1/\sigma},$$

$$\sigma = 2, \qquad \varkappa_0 = 0.5, \qquad c = 5, \qquad h = 0.2, \qquad \tau = 2 \cdot 10^{-4},$$

$$L = 10, \qquad T = 1, \qquad K(u)\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=L} = 0,$$

$$\text{точное решение: } u(x,t) = \begin{cases} [\sigma c \varkappa_0^{-1}(ct - x)]^{1/\sigma}, x \leqslant ct, \\ 0, x \geqslant ct. \end{cases}$$

Если вести внутренний итерационный процесс до выполнения условия $||y_i^{(s+1)} - y_i^{(s)}|| \leqslant \varepsilon = 1e{-9}$ в евклидовой норме, то требуется от 3 до 5 итераций (рис. 3).

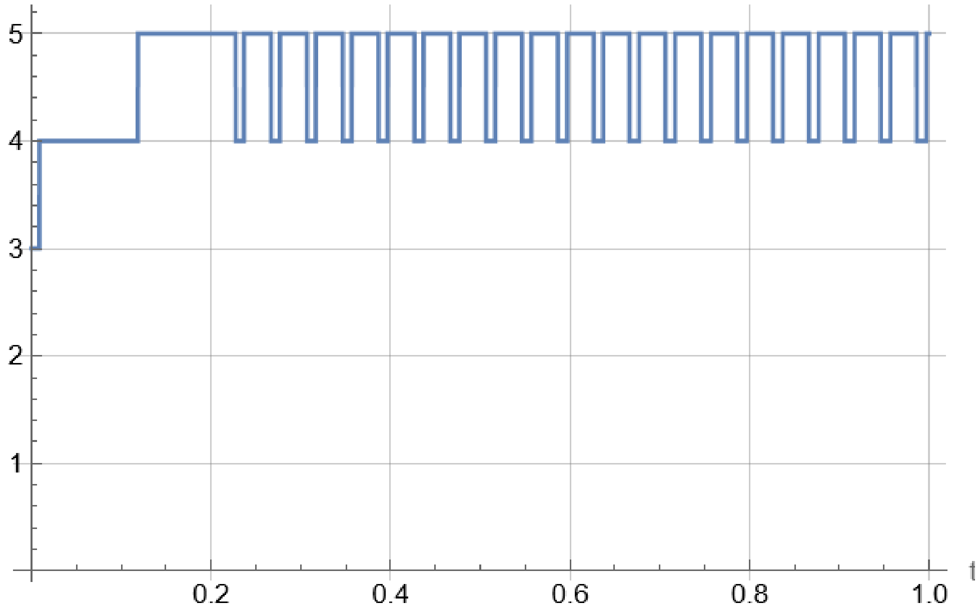

Рис. 3. Количество выполненных итераций для каждого временного слоя

8. *Для случая $K = K(u)$ предложите способы организации внутреннего итерационного процесса или алгоритмы, заменяющие его.*

   Внутренний метод простой итерации можно представить в виде указанного ниже алгоритма.

   (a) Принимаем в качестве начального приближения y_i^j, $i = \overline{0, n}$, значения с предыдущего временного слоя y_i^{j-1}.

   (b) Считаем значения коэффициента теплопроводности в узлах текущего временного слоя: $K_i = K(y_i^j)$, $i = \overline{0, N}$.

   (c) Считаем значения $a_i = \dfrac{K(y_i^j) + K(y_{i-1}^j)}{2}$, $i = \overline{1, N}$.

   (d) Вычисляем коэффициенты трехдиагональной СЛАУ по следующий формулам:

$$A_i y_{i-1}^j - C_i y_i^j + B_i y_{i+1}^j = -F_i, \quad i = \overline{1, N-1},$$
$$A_i = \frac{a_i}{h}, \quad B_i = \frac{a_{i+1}}{h}, \quad C_i = \frac{c\rho h}{\tau} + \frac{a_i + a_{i+1}}{h},$$
$$F_i = \frac{c\rho h}{\tau} y_i^{j-1}.$$

   В случае граничного условия I рода на левом конце мы принимаем $y_0^j = \phi_1(t)$, $A_1 = 0$ и делаем поправку к F_1 на величину $\frac{a_1}{h} y_0^j$. При граничных условиях II рода в СЛАУ можно добавить строку с номером 0 вида

$$-y_0^j + \varkappa y_1^j = -\nu, \quad \varkappa = \frac{a_1/h}{c\rho h/(2\tau) + a_1 h}, \quad \nu = \frac{c\rho h y_0^{j-1} + P(t_j)}{c\rho h/(2\tau) + a_1 h}.$$

   Аналогично для условий I и II рода на правом конце.

(e) Используя метод прогонки, находим новое приближение y_i^j;

(f) Если не было выполнено нужно количество итераций внутреннего метода, то переходим обратно к пункту (b), иначе переходим на следующий временной слой.

Также вместо метода простой итерации можно использовать метод Ньютона. Для систем нелинейных уравнений вида $F(x) = 0$ его итерационная формула записывается как

$$F'(x^k)(x - x^k) = -F(x^k).$$

Для неявной схемы уравнения теплопроводности при граничных условиях I рода

$$F_i(y) = \frac{a(y_i)}{h} y_{i-1} - \left(\frac{c\rho h}{\tau} + \frac{a(y_{i+1}) + a(y_i)}{h}\right) y_i + \frac{a(y_{i+1})}{h} y_{i+1} - \frac{c\rho h}{\tau} y_i^{j-1},$$
$$a(y_k) = \frac{K(y_k) + K(y_{k-1})}{2}, \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Как и в случае метода простой итерации при заданных границах I рода y_0 и y_N считаются известными и не входят в систему уравнений как переменные, требующие определения.

Заметим, что т.к. в i-ом уравнении участвуют только переменные y_{i-1}, y_i и y_{i+1}, то матрица Якоби решаемой системы будет трехдиагональной. Таким образом, для решения СЛАУ итерационной формулы можно также применять метод прогонки. Распишем коэффициенты указанной матрицы для $a(y_k) = \frac{K(y_k) + K(y_{k-1})}{2}$:

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_{i-1}} = \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial y_{i-1}}(a(y_i) y_{i-1}) - \frac{1}{h}\frac{\partial a(y_i)}{\partial y_{i-1}} y_i, \quad \frac{\partial a(y_i)}{\partial y_{i-1}} = \frac{1}{2} K'(y_{i-1}),$$
$$\frac{\partial F_i}{\partial y_{i-1}} = \frac{1}{2h} K'(y_{i-1})(y_{i-1} - y_i) + \frac{a(y_i)}{h},$$
$$\frac{\partial F_i}{\partial y_{i+1}} = \frac{1}{2h} K'(y_{i+1})(y_{i+1} - y_i) + \frac{a(y_{i+1})}{h},$$
$$\frac{\partial F_i}{\partial y_i} = \frac{K'(y_i)}{2h}(y_{i-1} + y_{i+1}) - \frac{c\rho h}{\tau} - \frac{a(y_{i+1}) + a(y_i)}{h} - \frac{K'(y_i)}{h} y_i,$$
$$\frac{\partial F_i}{\partial y_i} = \frac{K'(y_i)}{2h}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) - \frac{c\rho h}{\tau} - \frac{a(y_{i+1}) + a(y_i)}{h}.$$

2. Результаты

2.1. Проверка консервативности

$$K \equiv 3, \quad c\rho = 1, \quad L = 20, \quad T = 1, \quad h = 0.55, \quad \tau = 0.005,$$
$$-K(u)\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = K(u)\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=L} = 0.$$

При $\sigma = 0, 0.5$ и 1 график разности $\left|\frac{h}{2}y_0^{j+1} + h\sum_{i=1}^{N-1} y_i^{j+1} + \frac{h}{2}y_N^{j+1} - \frac{h}{2}y_0^{j} - h\sum_{i=1}^{N-1} y_i^{j} - \right.$ $\left. - \frac{h}{2}y_N^{j}\right|$ представлен на рис. 4, 5 и 6 соответственно.

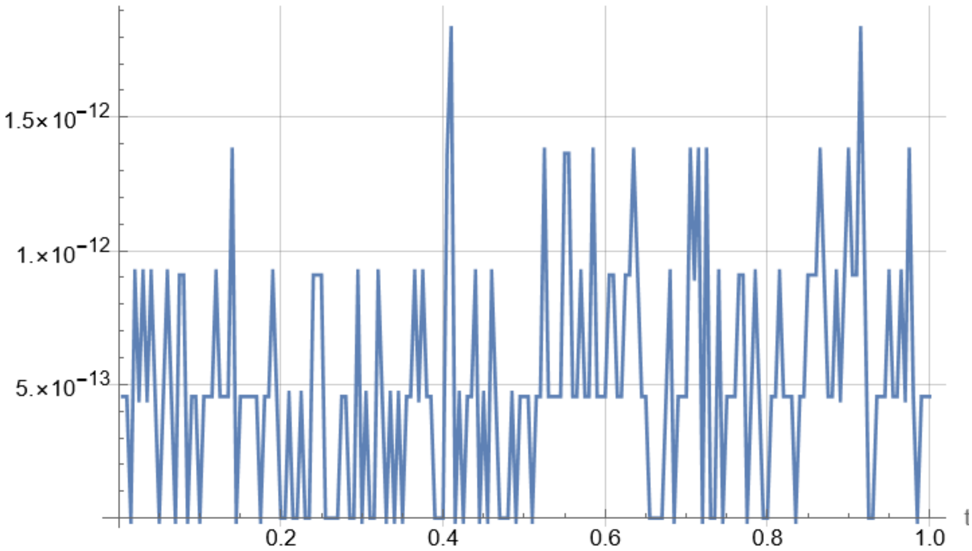

Рис. 4. График разности при $\sigma = 0$

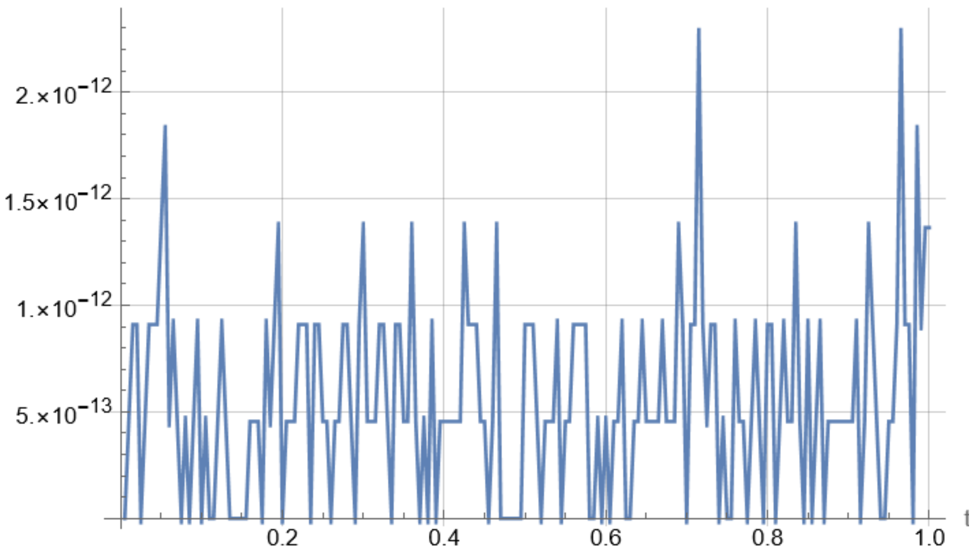

Рис. 5. График разности при $\sigma = 0.5$

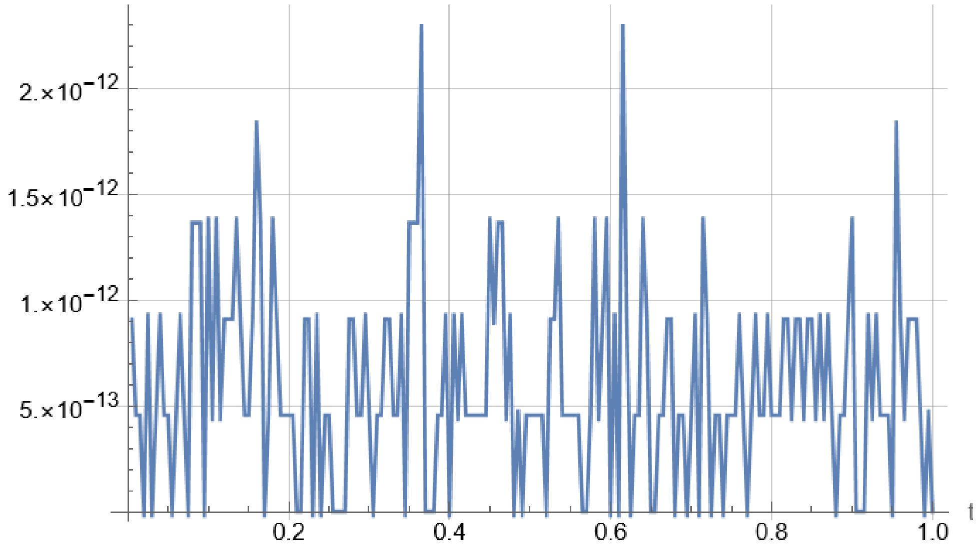

Рис. 6. График разности при $\sigma = 1$

2.2. График погрешности в случае K(u)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\varkappa_0 u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x}\right), \qquad x > 0, \qquad t > 0,$$

$$u(x,0) = 0, \qquad u(0,t) = u_0 t^{1/\sigma}, \qquad u_0 = \left(\frac{\sigma c^2}{\varkappa_0}\right)^{1/\sigma},$$

$$\sigma = 2, \qquad \varkappa_0 = 0.5, \qquad c = 5, \qquad h = 0.2, \qquad \tau = 2 \cdot 10^{-4},$$

$$L = 10, \qquad T = 1, \qquad K(u)\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=L} = 0,$$

$$\text{точное решение: } u(x,t) = \begin{cases} [\sigma c \varkappa_0^{-1}(ct - x)]^{1/\sigma}, x \leqslant ct, \\ 0, x \geqslant ct. \end{cases}$$

График погрешности представлен на рис. 7. Такое поведение графика можно объяснить тем, что при $x = ct$ производная точного решения терпит разрыв. Получаем, что в точках, близких к $x = ct$, погрешность аппроксимации резко возрастает.

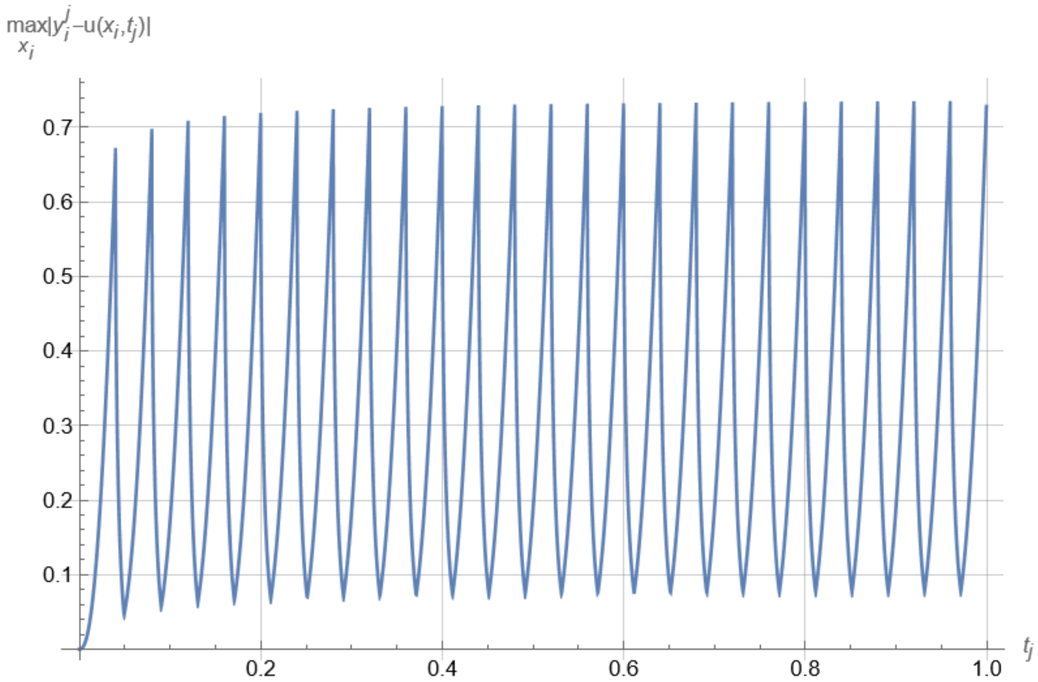

Рис. 7. График погрешности численного решения в случае $K(u)$

2.3. Оценка порядка сходимости

Таблица 1. Порядок сходимости ($\sigma = 0$), пример неустойчив

$\tau,\ h$	$\mathrm{AbsErr}(\tau,\ h)$	Δ	$\log_q \Delta$
0.5, 0.5			
—, —			
—, —			
—, —			
—, —			
—, —			

Таблица 2. Порядок сходимости ($\sigma = 1$)

$\tau,\ h$	$\mathrm{AbsErr}(\tau,\ h)$	Δ	$\log_q \Delta$
0.05, 0.5	0. 0.014611	—	—
0.0125, 0.25	0.00390149	0.267024	1.90496
0.003125, 0.125	0.000990189	0.253798	1.97825
0.00078125, 0.0625	0.000248762	0.251227	1.99728
0.000195313, 0.03125	6.23079e-05	0.250472	1.99728
4.88281e-05, 0.015625	1.57214e-05	0.252317	1.98669

Таблица 3. Порядок сходимости ($\sigma = \frac{1}{2}$)

$\tau,\ h$	AbsErr($\tau,\ h$)	Δ	$\log_q \Delta$
0.05, 0.5	0. 0.00678697	—	—
0.0125, 0.25	0.00178249	0.262634	1.92888
0.003125, 0.125	0.000451189	0.253123	1.98209
0.00078125, 0.0625	0.000113204	0.250902	1.9948
0.000195313, 0.03125	2.83079e-05	0.250061	1.99965
4.88281e-05, 0.015625	7.52347e-06	0.265773	1.91173

Список использованных источников

1. *Галанин М.П., Савенков Е.Б.* Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 592 с.
2. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
3. *Годунов С.К., Рябенький В.С.* Разностные схемы (введение в теорию). М.: Наука, 1977. 440 с.