28 марта 2023 г.

**Лабораторная работа №2**

В данном тексте обсуждаются основные особенности решаемой задачи, а также даются некоторые рекомендации по написанию программы. Текст заканчивается требованиями к выполнению лабораторной работы.

## Постановка задачи

В рамках данной ЛР рассматривается методы решения уравнения теплопроводности вида:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K(u,x)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad 0 < x < L, \quad 0 < t \leqslant T. \tag{1}$$

Задача дополняется граничными условиями, задаваемыми на левом и правом концах отрезка $x \in [0, L]$ (в каждом столбце можно выбрать по одному условию, но не обязательно из одной строки):

| | | Условие слева | Условие справа |
|---|---|---|---|
| Род | I | $u(0,t) = T_{\text{left}}(t)$ | $u(L,t) = T_{\text{right}}(t)$ |
| | II | $-K(u,0)\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right\vert_{x=0} = P_{\text{left}}(t)$ | $K(u,L)\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right\vert_{x=L} = P_{\text{right}}(t)$ |

**Замечание 1.** В методическом пособии предлагается рассмотреть частные случаи, когда $P_* = 0$ или $T_* = \text{const}$. Мы же предлагаем рассмотреть более общую постановку.

Конкретизацию граничных условий (т.е. выбор функций $T_{\text{right}}$, $T_{\text{left}}$, $P_{\text{right}}$ и $P_{\text{left}}$) в программе можно осуществлять с помощью задания соответствующих указателей на функции.

В рамках данной ЛР предлагается рассмотреть два случая (и, соответственно, различные схемы для них):

- **Случай 1.** Коэффициент теплопроводности зависит только от абсциссы:

  $$K = K(x)$$

  — в таком случае задача фактически становится линейной, и для её решения можно легко построить аналоги хорошо известных схем для уравнения теплопроводности с постоянным коэффициентом.

- **Случай 2.** Коэффициент теплопроводности зависит от температуры:

  $$K = K(u)$$

  — в таком случае задача становится нелинейной, и для её решения необходимо строить нелинейные схемы.

Обсудим варианты решения поставленных задач.

## Рекомендации

**Случай 1.** Для решения задачи в данном случае предлагается использовать следующую схему:

$$c\rho\frac{y_i^{j+1}-y_i^j}{\tau}=\frac{1}{h}\big(\sigma(w_{i+1/2}^{j+1}-w_{i-1/2}^{j+1})+(1-\sigma)(w_{i+1/2}^{j}-w_{i-1/2}^{j})\big),\quad 1\leqslant i\leqslant N-1,\qquad(2)$$

где $w_{i-1/2}^j=a_iy_{\overline{x},i}^j$, $w_{i+1/2}^j=a_{i+1}y_{x,i}^j$, коэффициент $a_i$ представляет собой аппроксимацию интеграла

$$a_i=\left(\frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{K(x)}\right)^{-1}.$$

Видно, что схема (2) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений с трёхдиагональной матрицей относительно набора из $N+1$ неизвестных

$$(y_0^{j+1},y_1^{j+1},\ldots,y_N^{j+1}),$$

— однако уравнений всего $N-1$. Остальные два уравнения получаются из аппроксимации граничных условий (левого и правого соответственно).

**Замечание 2.** Сделаем следующие замечания по поводу программной реализации:

1. Уравнения схемы (2) используются для единократного определения значений сеточной функции $y$ на слое $t_{j+1}$ по значениям той же функции на слое $t_j$. Поэтому в каждый момент времени в памяти ЭВМ достаточно хранить только два массива данных:

   - $y_0^j,\ldots,y_N^j$,
   - $y_0^{j+1},\ldots,y_N^{j+1}$.

   Каждый вновь найденный набор значений $y^{j+1}$ можно сразу записывать в выходной файл.

2. Начальный набор значений $y_i^0$ сеточной функции (т.е. со слоя $t_0$) определяется из начальных условий

   $$u(x,0)=u_0(x)$$

   — аппроксимировать его можно по правилу

   $$y_i^0=u_0(x_i).$$

3. Если представить схему (2) в виде СЛАУ с трёхдиагональной матрицей (относительно неизвестных $y_i^{j+1}$), то можно увидеть, что её коэффициенты $a_i$ и $a_{i+1}$ (в строках с номерами $1\leqslant i\leqslant N$) не меняются от слоя $t_j$ к слою $t_{j+1}$ (уравнения в строках с номерами $i=0$ и $i=N$ определяются из аппроксимации граничных условий и могут меняться от слоя к слою, если в задаче заданы нестационарные условия).

   Поэтому представляется разумным единократное выделение памяти под четыре массива коэффициентов соответствующей матрицы, в которых на каждом слое меняются (в случае нестационарных граничных условий) *только* нулевой и последний коэффициенты.

   Однако необходимо заметить, что вид коэффициентов $a_i$ может меняться в зависимости от выбора типа аппроксимации $K(x)$.

4. Шаги $\tau$ и $h$ схемы (2) обычно являются малыми параметрами, поэтому деление на них может приводить к неустойчивостям. От схемы (2) можно перейти к другой схеме, просто умножив (2) на $h\tau$.

Возможно, Вы предложите другие варианты реализации указанной схемы (2) — это только приветствуется (не забудьте про аппроксимацию граничных условий).

Однако, при реализации рекомендуется следовать следующим базовым принципам: гибкость (когда не нужно каждый раз заново компилировать программу после изменения начальных или граничных условий, размеров шагов и проч.) и экономичность по отношению к памяти.

**Замечание 3.** Для решения исходной задачи (1) имеет место закон сохранения энергии. Действительно, проинтегрируем уравнение по пространственной области $[0, L]$, получим (пользуемся тем, что $c$ и $\rho$ — константы):

$$\int\limits_0^L \frac{\partial c\rho u}{\partial t} dx = K(u, L)\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=L} - K(u, 0)\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0},$$

вспомним, что $\varepsilon = c\rho u$ — это внутренняя энергия, заключённая в единице объёма, тогда

$$\int\limits_0^L \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dx = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^L \varepsilon dx = K(u, L)\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=L} - K(u, 0)\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0},$$

— т.е. изменение суммарной внутренней энергии стержня происходит *только* за счёт потоков теплоты, проходящих через его торцы.

В случае, если торцы стержня теплоизолированы (т.е. проходящие через них потоки, равны нулю), то суммарная внутренняя энергия, запасённая в стержне, сохраняется:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^L \varepsilon dx = 0. \tag{3}$$

Конечно, нам хотелось бы, чтобы указанное свойство (или хотя бы его аналог) выполнялось и для разностного решения. Если мы проинтегрируем (1) по пространственно-временной ячейке $[x_{i-1/2,x_{i+1/2}}]\times[t_j, t_{j+1}]$ (первая фаза интегро-интерполяционного метода):

$$\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (u(x, t_{j+1}) - u(x, t_j))dx = \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \left( K(u, x)\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x_{i+1/2}} - K(u, x)\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x_{i-1/2}} \right) dt$$

то автоматически получим выполнение закона сохранения энергии. Действительно, если мы просуммируем интегралы по ячейкам следующим образом (не забываем о приграничных ячейках), получим:

$$\int\limits_{x_0}^{x_{1/2}} (\ldots)dx + \sum_{i=1}^{N}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (\ldots)dx + \int\limits_{x_{N-1/2}}^{x_N} (\ldots)dx = \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \left( K(u, L)\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=L} - K(u, 0)\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} \right) dt,$$

т.е. энергия действительно сохраняется.

Однако после замены интегралов разностными соотношениями (вторая фаза интегро-интерполяционного метода) мы уже не можем гарантировать выполнения разностных аналогов законов сохранения (действительно, можно так выбрать квадратурную формулу для интеграла, что схема не только не будет консервативной, но и станет неустойчивой).

Поэтому консервативность схемы (2) нужно доказывать отдельно. Поэтому умножим уравнения схемы (2) на $h\tau$ и просуммируем по $i = \overline{0, N}$[1]:

$$c\rho\left(\frac{h}{2}y_0^{j+1} + h\sum_{i=1}^{N-1} y_i^{j+1} + \frac{h}{2}y_N^{j+1}\right) - c\rho\left(\frac{h}{2}y_0^{j} + h\sum_{i=1}^{N-1} y_i^{j} + \frac{h}{2}y_N^{j}\right) =$$
$$= \tau\Big(\sigma(w_0^{j+1} - w_N^{j+1}) + (1-\sigma)(w_0^j - w_N^j)\Big),$$

где $w_0^j$ и $w_N^j$ — аппроксимации потоков на левой и правой границе соответственно (для слоя $t_j$). Следовательно, если эти потоки равны нулю, то

$$c\rho\left(\frac{h}{2}y_0^{j+1} + h\sum_{i=1}^{N-1} y_i^{j+1} + \frac{h}{2}y_N^{j+1}\right) = c\rho\left(\frac{h}{2}y_0^{j} + h\sum_{i=1}^{N-1} y_i^{j} + \frac{h}{2}y_N^{j}\right) \qquad (4)$$

что и задаёт разностный аналог закона сохранения (3). Следовательно, построенная схема (2) действительно является *консервативной.*

**Случай 2.**

В случае нелинейной задачи предлагается использовать для решения следующую схему (не забудьте про аппроксимацию граничных условий):

$$c\rho\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{h}\left(a\big(y_{i+1}^{j+1}\big)\frac{y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1}}{h} - a\big(y_i^{j+1}\big)\frac{y_i^{j+1} - y_{i-1}^{j+1}}{h}\right), \quad 1 \leqslant i \leqslant N, \qquad (5)$$

— для её решения предлагается применить вариант метода простой итерации:

$$c\rho\frac{y_i^{(s+1)} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{h}\left(a\big(y_{i+1}^{(s)}\big)\frac{y_{i+1}^{(s+1)} - y_i^{(s+1)}}{h} - a\big(y_i^{(s)}\big)\frac{y_i^{(s+1)} - y_{i-1}^{(s+1)}}{h}\right), \quad 1 \leqslant i \leqslant N, \qquad (6)$$

— т.е. на каждой итерации нужно решать систему с трёхдиагональной матрицей (коэффициенты которой *полностью* меняются от стадии к стадии). В этом, пожалуй, основное отличие от случая 1.

[1]Вывод аппроксимации граничных условий при $i = 0$ и $i = N$ предлагается в качестве упражнения.

## Требование к выполнению лабораторной работы

Условно процесс выполнения данной лабораторной работы можно разделить на следующие части.

**Часть 0. Теория.** Подготовить ответы на контрольные вопросы, представленные в методическом пособии. Как и ранее, дополнительные вопросы формулируются в рамках личного общения с преподавателем по результатам ответов на контрольные вопросы.

**Часть 1. Программирование.** Реализовать программу численного решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности. Основные требования к программе:

- гибкость реализации;
- недопустимость утечек памяти;
- предусмотреть возможность решения задачи с помощью схемы с весами (при произвольном значении веса $\sigma \in [0,1]$);
- экономное использование памяти (недопустимо хранить весь массив решения в оперативной памяти ЭВМ);
- для решения возникающих задач использовать метод прогонки и его варианты (в комбинации с методом простой итерации).

**Часть 2. Тестирование программы.** На тестовых примерах продемонстрировать работоспособность созданных программ и совпадение наблюдаемого порядка с теоретическим.

**В случае 1** возможно построить частное эталонное решение задачи, положив $K = \mathrm{const}$.

Также в данном случае возможно определить порядок сходимости метода.

**Замечание 4.** В случае схем для уравнений в частных производных мы можем иметь разный порядок сходимости по времени и по пространству.

Допустим, наша схема схема имеет погрешность аппроксимации $\psi_h = O(\tau + h^2)$ — тогда очевидно, что при измельчении шага $h$ в $q$ раз необходимо измельчить шаг $\tau$ в $q^2$ раз (рассуждения в общем случае очевидны).

Поскольку теперь погрешность метода зависит как от шага по времени, так и от шага по пространству, то для определения ошибки метода необходимо искать максимум на *пространственно-временной* сетке.

Например, пусть
$$\omega_h = \{x_i, \quad i = \overline{0, N}\} \subset [0, L]$$
— пространственная сетка на отрезке;
$$\omega_\tau = \{t_j, \quad j = \overline{0, M}\} \subset [0, T]$$
— временна́я сетка задачи.

Тогда погрешность метода $z = y - u(x,t)$ необходимо искать на множестве $\Omega_{h,\tau} = \omega_h \times \omega_\tau$, т.е.
$$\mathrm{AbsErr} = \max_{\Omega_{h,\tau}} \|y_i^j - u(x_i, t_j)\|.$$

**Замечание 5.** В рамках выполнения ЛР№1 мы с Вами подробно обсудили, что ошибку метода лучше оценивать на *первых* временны́х слоях, поэтому и в данном случае вместо множества $\omega_\tau$ лучше использовать
$$\omega_\tau(t_*) = \{t_j \in \omega_\tau : t_j < t_*\},$$

где $t_*$ — момент времени, близкий к начальному слою $t_0$.

**Замечание 6.** Для оценки порядка сходимости необходимо решить задачу на серии сеток (не менее пяти!) и заполнить следующую таблицу (ниже пример таблицы для случая $\psi_h = O(\tau + h^2)$): где AbsErr — абсолютная ошибка, $\Delta$ — модуль отношения ошибок на двух

| $\tau$, $h$ | AbsErr$(\tau, h)$ | $\Delta$ | $\log_q \Delta$ |
|---|---|---|---|
| $\tau_1$, $h_1$ | | | |
| $q^2\tau_1$, $qh_1$ | | | |
| $q^4\tau_1$, $q^2h_1$ | | | |
| $\ldots$ | | | |

соседних сетках, $\log_q$ — логарифм отношения ошибок.

Желательно рассмотреть случаи $\sigma = 0, 1, 1/2$.

**В случае 2** определять порядок сходимости метода не нужно, но обязательно необходимо проверить качество работы алгоритма на эталонном решении.

В методическом пособии построено эталонное решение задачи Коши для полупространства (например, в случае правого полупространства)

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad x > 0, \quad t > 0; \tag{7a}$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x > 0; \tag{7b}$$

$$u(0, t) = f(t), \quad t > 0. \tag{7c}$$

в виде бегущей волны.

В то же время схема (5) построена для задачи *на отрезке*. Поэтому применим численный метод к решению следующей задачи на отрезке:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad 0 < x < L, \quad t > 0; \tag{8a}$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < L; \tag{8b}$$

$$u(0, t) = f(t), \quad t > 0; \tag{8c}$$

$$K(u)\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=L} = 0, \quad t > 0. \tag{8d}$$

— т.е. мы теплоизолируем торец стержня, в направлении которого идёт тепловая волна.

Тогда в первые моменты времени $t$ (до тех пор, пока фронт волны не дойдёт до правого конца стержня) решения задач (7) и (8) будут совпадать.

Случай левого полупространства рассматривается аналогично.

**Часть 3. Физическая интерпретация.**

Дополнительно требуется решить следующие задачи

**Для случая 1:**

1. Вывести достаточные условия монотонности разностных схем, рассматриваемых в данной лабораторной работе.

2. Рассмотреть задачу для стержня с теплоизолированными концами. Предоставить:

    - пример расчёта с монотонным решением и расчёта с немонотонным решением;
    - значения параметров численного метода и начальные условия задачи, при которых наблюдается немонотонный расчёт.

Объяснить полученные результаты — какая физическая интерпретация у немонотонных решений?

3. На основе результатов расчёта доказать консервативность схемы (2), непосредственно проверив выполнение (4) на каждом временно́м слое (желательно вывести график соответствующей разности в зависимости от номера слоя $t_j$). Меняется ли результат в зависимости от выбора разностной схемы?

**Для случая 2:** построить графики погрешности (для эталонного решения) в разные моменты времени $t$ и объяснить наблюдаемые эффекты.

# Список литературы

[1] *Галанин М.П., Савенков Е.Б.* Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2010. 591 с.