

# Совместное распределение.

## Базовый

1. Даны маргинальные распределения  $Y = (1/2, 1/2^2, 1/2^3, 1/2^3)$ ,  $X = (1/3, 1/6, 1/2)$ . Найти совместное распределение вектора  $(Y, X)$ .  $X$  и  $Y$  считать независимыми.
2. Двумерное распределение пары целочисленных случайных величин  $\xi$  и  $\eta$  задаётся с помощью таблицы

	$\xi = -1$	$\xi = 0$	$\xi = 1$
$\eta = -1$	$1/8$	$1/12$	$7/24$
$\eta = 1$	$5/24$	$1/6$	$1/8$

где в пересечении столбца  $\xi = i$  и строки  $\eta = j$  находится вероятность  $P\{\xi = i, \eta = j\}$ . Найти:

- (a) Маргинальные распределения
  - (b) Мат. ожидание  $E\xi$  и  $E\eta$
  - (c) Дисперсия  $D\xi$  и  $D\eta$
  - (d) Среднеквадратичное отклонение:  $\sigma(\xi)$  и  $\sigma(\eta)$
  - (e) Ковариацию:  $cov(\xi, \eta)$ ,
  - (f) Корреляцию:  $\rho(\xi, \eta)$
  - (g) Информацию от выпадения  $\xi = 1$
  - (h) Энтропию  $H(\xi)$
  - (i) Информацию от выпадения  $(\xi, \eta) = (-1, -1)$
  - (j) Совместную энтропию  $H((\eta, \xi))$
  - (k) Условную энтропию  $H(\eta|\xi)$
3. Монета выпадает орлом с вероятностью  $p > 0$ . Пусть  $\xi$  – число подбрасываний, необходимых для достижения 1 выпадения орла. Найти производящую функцию для вероятности  $\xi$ , а также среднее и дисперсию  $\xi$ .

# Совместное распределение.

## Дополнительный

1. Двумерное распределение пары целочисленных случайных величин  $\xi$  и  $\eta$  задаётся с помощью таблицы

	$\xi = 1$	$\xi = 2$	$\xi = 3$
$\eta = 1$	3/24	2/24	5/24
$\eta = 2$	2/24	2/24	3/24
$\eta = 3$	3/24	2/24	2/24

где в пересечении столбца  $\xi = i$  и строки  $\eta = j$  находится вероятность  $P\{\xi = i, \eta = j\}$ . Найти:

- (a) (0.4) Ковариацию:  $cov(\xi, \eta)$ ,
  - (b) (0.4) Корреляцию:  $\rho(\xi, \eta)$
  - (c) (0.4) Информацию от выпадения  $(\xi, \eta) = (2, 3)$
  - (d) (0.4) Совместную энтропию  $H((\eta, \xi))$
  - (e) (0.4) Условную энтропию  $H(\eta|\xi)$
2. Монета выпадает орлом с вероятностью  $p > 0$ . Пусть  $\xi_k$  – число подбрасываний, необходимых для достижения  $k$  выпадений орла. Найти производящую функцию для моментов  $\xi_k$ , а также среднее и дисперсию  $\xi_k$ .
    - (a) (1б)  $k = 2$
    - (b) (2б)  $k$  – произвольное положительное
  3. (1б) Рассмотрим бесконечную последовательность  $a_0, a_1, \dots, a_n$ . Пусть случайная величина  $\xi$  принимает значение  $a_i$  с вероятностью  $\frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda}$  для некоторого заданного  $\lambda$ . Найдите дисперсию случайной величины  $\xi^m$  для заданного  $m$ .
  4. (0.5) В бар с целью застрелить Бессмертного Джо за час в среднем заходит 1 снайпер и 2 ламера. Предполагая, что каждый заходящий не уйдет, пока не пристрелит Джо, при этом ламер попадает с вероятностью 1/4, снайпер с вероятностью 3/4, найдите среднее за час число выстрелов.
  5. (0.5) Дана марковская цепь.

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\xi(t)$  - случайная величина, обозначающая длину пути, пройденного по марковской цепи, начиная в позиции 0. Найти  $\xi(2)$