

# Гробы

1. Урна содержит  $N$  шаров с номерами от 1 до  $N$ . Пусть  $K$  – наибольший номер, полученный при  $n$  их поштучных извлечений с возвращением. Найдите:
  - (a) распределение  $K$ ;
  - (b) Математического ожидание  $EK$  при  $N \rightarrow \infty$ .
2. Восемь мальчиков и семь девочек купили билеты в кинотеатр на 15 подряд идущих мест. Все  $15!$  возможных способов рассадки равновероятны. Вычислите среднее число пар рядом сидящих мальчика и девочки.
3. Хороший, Плохой и Злой так и не выявили победителя. Ковбои попадают с вероятностью  $p_1, p_2$  и  $p_3$  соответственно. Стреляют по очереди: сперва Хороший, затем Плохой, потом Злой, потом снова Хороший и т.д. В свою очередь каждый выбирает мишень с равной вероятностью. Найдите вероятность победы каждого из участников дуэли.
  - (a) Суицид запрещён.
  - (b) Суицид разрешён (вероятность выстрелить в себя равна вероятности выстрелить в одного из противников,  $1/3$ ).
4. Большое число  $N$  людей подвергается исследованию крови. Это исследование может быть организовано двумя способами. 1. Кровь каждого человека исследуется отдельно. В этом случае потребуется  $N$  анализов. 2. Кровь  $k$  людей смешивается, и анализируется полученная смесь. Если результат анализа отрицателен, то этого одного анализа достаточно для  $k$  человек. Если же он положителен, то кровь каждого приходится исследовать затем отдельно, и в целом на  $k$  человек потребуется  $k + 1$  анализ. Предполагается, что вероятность положительного результата одна и та же для всех людей и что результаты анализов независимы в теоретико- вероятностном смысле.
  - (a) Чему равна вероятность того, что анализ смешанной крови  $k$  людей положителен?
  - (b) Чему равно математическое ожидание числа анализов, необходимых при втором методе исследования?
  - (c) При каком  $k$  достигается минимум математического ожидания числа необходимых анализов?
5. Дракон и Принцесса по очереди тянут мышек из мешка, в котором изначально 3 белых и 2 черных мышки. Выигрывает тот, кто первым достает белую мышь. После каждой вытянутой драконом мышью

оставшиеся впадают в панику, и одна из них выпрыгивает из мешка сама (принцесса вытаскивает мышей из мешка аккуратно и не пугает их). Принцесса тянет первой.

Если мыши в мешке закончились, а белую так никто и не вытащил, победителем считается дракон. Мыши, которые выпрыгнули сами, не считаются вытащенными (не определяют победителя). Единожды покинув мешок, мыши в него не возвращаются. Любая мышь вытаскивается из мешка с одинаковой вероятностью, и любая мышь выпрыгивает из мешка с одинаковой вероятностью.

Изобразите марковскую цепь, описывающую данную игру. Определите вероятности победы Принцессы и Дракона.

6. Рассмотрим цепь с 3 состояниями и матрицей

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a & 0 \\ 0 & 1-a & a \\ a & 0 & 1-a \end{pmatrix}.$$

Начальное распределение:  $(1, 0, 0)$ . Найдите  $a$  такое, что вероятность оказаться в состоянии 2 на шаге 998244353 максимальна. Если таких  $a$  несколько, выберите любое.

7. Прибор Васи испускает  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ -частицы. Прибор может работать в двух режимах, смену которых Вася не может контролировать. При работе в первом режиме прибор испускает  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ -частицы с вероятностями  $(0.41, 0.099, 0.491)$  соответственно, при работе во втором:  $(0.625, 0.185, 0.19)$ . Прибор устроен так, что после каждого пуска частицы режим меняется в соответствии с матрицей

$$P = \begin{pmatrix} 0.68 & 0.32 \\ 0.696 & 0.304 \end{pmatrix}.$$

Вася нашёл строку  $\gamma\beta\alpha\gamma\beta\gamma\alpha\alpha\gamma$  и задался вопросом: какова вероятность появления такой последовательности частиц. Помогите ему. Считайте, что начальный режим работы прибора выбран равновероятно.

8. Пусть  $N$  – размер некоторой популяции, который требуется оценить “минимальными средствами” без простого пересчета всех элементов этой совокупности. Подобного рода вопрос интересен, например, при оценке числа жителей в той или иной стране, городе и т. д. В 1786 г. Лаплас для оценки числа  $N$  жителей во Франции предложил следующий метод. Выберем некоторое число, скажем,  $M$ , элементов популяции и пометим их. Затем возвратим их в основную совокупность

и предположим, что они “хорошо перемешаны” с немаркированными элементами. После этого возьмем из “перемешанной” популяции  $n$  элементов. Обозначим через  $X$  число маркированных элементов (в этой выборке из  $n$  элементов).

- (a) Показать, что вероятность  $P_{N,M,n}\{X = m\}$  того, что  $X = m$  задается (при фиксированных  $N, M, n$ ) формулой гипергеометрического распределения

$$P_{N,M,n}\{X = m\} = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

- (b) Считая  $M, n$  и  $m$  заданными, найти максимум  $P_{N,M,n}\{X = m\}$  по  $N$ , т. е. “наиболее правдоподобный” объем всей популяции, приводящий к тому, что число маркированных элементов оказалось равным  $m$ . Показать, что так найденное наиболее правдоподобное значение  $N$  (называемое оценкой максимального правдоподобия) определяется формулой

$$\hat{N} = \left[ \frac{Mn}{m} \right],$$

где  $[\cdot]$  – целая часть.

9. Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  – вероятностное пространство,  $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$ . Для  $J \subset \{1, \dots, n\}$  положим

$$\mathcal{P}_1(J) \triangleq \sum_{i \in J} A_i,$$

$$\mathcal{P}_2(J) \triangleq \sum_{i_1, i_2 \in J, i_1 < i_2} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}),$$

$$\mathcal{P}_k(J) \triangleq \sum_{i_1, \dots, i_k \in J, i_1 < i_2 < \dots < i_k} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \dots \cap A_{i_k}).$$

Доказать, что для всех нечетных  $k$  справедливо неравенство

$$P(A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_n}) \leq \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} \mathcal{P}_j(\{i_1, \dots, i_k\}),$$

а для всех четных справедливо неравенство

$$P(A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_n}) \geq \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} \mathcal{P}_j(\{i_1, \dots, i_k\}).$$

10. Показать также, что алгебра, порожденная системой  $\{A_1, \dots, A_n\}$ , где  $A_i \subset \Omega$ ,  $i = 1, \dots, n$  состоит из  $2^{2^n}$  элементов.

11. Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  некоторые подмножества  $\Omega$ , постройте минимальную  $\sigma$ -алгебру, включающую  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ .
12. При проведении опыта на распад атома атом распадается с вероятностью  $p$  и не распадается с вероятностью  $1 - p$ . Найти асимптотическое значение математического ожидания и дисперсии числа появлений двух распадов подряд (мы считаем, что два распада случились подряд, если распад был на  $i - 1$  и  $i$ -м испытании).
13. Случайным образом выстраиваются в шеренгу  $n$  человек разного роста. Найдите вероятность того, что
  - (а) самый низкий окажется  $i$ -м слева;
  - (б) самый высокий окажется первым слева, а самый низкий – последним слева;
  - (с) самый высокий и самый низкий окажутся рядом;
  - (d) между самым высоким и самым низким расположатся более  $k$  человек.
14. В социальной сети зарегистрировано конечное число пользователей. Доказать, что матожидание числа друзей у пользователя меньше или равно матожиданию матожидания числа друзей у друзей пользователя.