Совместное распределение. Условное матожидание

Классная работа

Важные формулы:

$$F_{\xi,\eta}(x,y) = P(\xi \le x, \eta \le y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\rho_{\xi,\eta}(x,y)dxdy$$

$$\rho_\eta(x) = \frac{\rho_\xi(g^{-1}(x))}{|g'(g^{-1}(x))|} \qquad \eta = g(\xi) \qquad g - monotonic$$

$$\rho_{\xi|\eta}(x|y_0) = \frac{\rho_{\xi,\eta}(x,y_0)}{\rho_\eta(y_0)}$$

$$F_{\xi|\eta}(x|y) = P(\xi < x|\eta < y) = \frac{P(\xi < x, \eta < y)}{P(\eta < y)} = \frac{F_{\xi,\eta}(x,y)}{F_\eta(y)} = \frac{\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\rho_{\xi,\eta}(u,v)dudv}{\int_{-\infty}^{y}\rho_\eta(w)dw}$$

$$\rho_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\rho_{\xi|\eta}(x|y)\rho_\eta(y)dy$$

$$E(X|Y)(y) = \int_{-\infty}^{\infty}x\rho_{X|Y}(x|y)dx$$

1. Пусть совместная плотность случайного вектора (ξ,η) равна:

$$\rho_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)}, & 0 \le x, y \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

   Найти:

   (a) одномерные(маргинальные распределения) ξ и η

   (b) условные плотности ξ по η и η по ξ

   (c) $E(\xi|\eta)$, $E(\eta|\xi)$

2. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, имеющие равномерное распределение в отрезке $[0, 1]$. Найти:

   (a) $E(\xi|\xi+\eta)$

   (b) $E(\xi^2 - \eta^2|\xi+\eta)$

3. Пусть случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение. Найти $E(\xi|\xi^2)$

Совместное распределение. Условное матожидание

Домашняя работа

1. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, имеющие равномерное распределение в отрезке [0, 1]. Найти:

   (a) $(0.5) E(\xi - \eta|\xi + \eta)$

   (b) $(0.5) E(\xi|\xi + 2\eta)$

2. (0.5)Найти $E(\xi|\eta)$, если совместная плотность случайного вектора (ξ, η) равна:

$$\rho_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} 4xy, & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

3. Пусть случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром 1, а t > 0. Найти:

   (a) $(0.5) E(\xi|min(\xi, t))$

   (b) $(0.5) E(\xi|max(\xi, t))$

4. (2)Пусть независимые случайные величины ξ и η имеют стандартное нормальное распределение. Найти $E(\xi^2 + \eta^2|\xi + \eta)$.

5. (1)Найти $E(\xi|\eta)$, если совместная плотность случайного вектора (ξ, η) равна:

$$\rho_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} \frac{1+9x^2y^2}{8}, & -1 \le x, y \le 1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

6. Пусть $\xi_1, \ldots \xi_n$ — независимые случайные величины, имеющие равномерное распределение в отрезке $[0, 1]$. Найти:

   (a) $(0.5) E(\xi_1|max(\xi_1, \ldots \xi_n))$

   (b) $(0.5) E(\xi_1|min(\xi_1, \ldots \xi_n))$