1 Гробы

1. Урна содержит N шаров с номерами от 1 до N . Пусть K – наибольший номер, полученный при n их поштучных извлечениях с возвращением. Найдите:

   (a) распределение K;

   (b) Математического ожидание EK при $N \to \infty$.

2. Восемь мальчиков и семь девочек купили билеты в кинотеатр на 15 подряд идущих мест. Все 15! возможных способов рассадки равновероятны. Вычислите среднее число пар рядом сидящих мальчика и девочки.

3. Хороший, Плохой и Злой так и не выявили победителя. Ковбои попадают с вероятностью p_1, p_2 и p_3 соответственно. Стреляют по очереди: сперва Хороший, затем Плохой, потом Злой, потом снова Хороший и т.д. В свою очередь каждый выбирает мишень с равной вероятностью. Найдите вероятность победы каждого из участников дуэли.

   (a) Суицид запрещён.

   (b) Суицид разрешён (вероятность выстрелить в себя равна вероятности выстрелить в одного из противников, 1/3).

4. Большое число N людей подвергается исследованию крови. Это исследование может быть организовано двумя способами. 1. Кровь каждого человека исследуется отдельно. В этом случае потребуется N анализов. 2. Кровь k людей смешивается, и анализируется полученная смесь. Если результат анализа отрицателен, то этого одного анализа достаточно для k человек. Если же он положителен, то кровь каждого приходится исследовать затем отдельно, и в целом на k человек потребуется $k+1$ анализ. Предполагается, что вероятность положительного результата одна и та же для всех людей и что результаты анализов независимы в теоретико- вероятностном смысле.

   (a) Чему равна вероятность того, что анализ смешанной крови k людей положителен?

   (b) Чему равно математическое ожидание числа анализов, необходимых при втором методе исследования?

   (c) При каком k достигается минимум математического ожидания числа необходимых анализов?

5. Дракон и Принцесса по очереди тянут мышек из мешка, в котором изначально 3 белых и 2 черных мышки. Выигрывает тот, кто первым достает белую мышь. После каждой вытянутой драконом мыши

оставшиеся впадают в панику, и одна из них выпрыгивает из мешка сама (принцесса вытаскивает мышей из мешка аккуратно и не пугает их). Принцесса тянет первой.

Если мыши в мешке закончились, а белую так никто и не вытащил, победителем считается дракон. Мыши, которые выпрыгнули сами, не считаются вытащенными (не определяют победителя). Единожды покинув мешок, мыши в него не возвращаются. Любая мышь вытаскивается из мешка с одинаковой вероятностью, и любая мышь выпрыгивает из мешка с одинаковой вероятностью.

Изобразите марковскую цепь, описывающую данную игру. Определите вероятности победы Принцессы и Дракона.

6. (1б) Рассмотрим цепь с 3 состояниями и матрицей

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1-a & a & 0 \\ 0 & 1-a & a \\ a & 0 & 1-a \end{pmatrix}.$$

Начальное распределение: $(1, 0, 0)$. Найдите a такое, что вероятность оказаться в состоянии 2 на шаге 998244353 максимальна. Если таких a несколько, выберите любое.

7. Прибор Васи испускает α, β и γ-частицы. Прибор может работать в двух режимах, смену которых Вася не может контролировать. При работе в первом режиме прибор испускает α, β и γ-частицы с вероятностями $(0.41, 0.099, 0.491)$ соответственно, при работе во втором: $(0.625, 0.185, 0.19)$. Прибор устроен так, что после каждого пуска частицы режим меняется в соответствии с матрицей

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0.68 & 0.32 \\ 0.696 & 0.304 \end{pmatrix}.$$

Вася нашёл строку $\gamma\beta\alpha\gamma\beta\gamma\alpha\alpha\alpha\gamma$ и задался вопросом: какова вероятность появления такой последовательности частиц. Помогите ему. Считайте, что начальный режим работы прибора выбран равновероятно.

8. Пусть N – размер некоторой популяции, который требуется оценить "минимальными средствами" без простого пересчета всех элементов этой совокупности. Подобного рода вопрос интересен, например, при оценке числа жителей в той или иной стране, городе и т. д. В 1786 г. Лаплас для оценки числа N жителей во Франции предложил следующий метод. Выберем некоторое число, скажем, M, элементов популяции и пометим их. Затем возвратим их в основную совокупность

и предположим, что они “хорошо перемешаны” с немаркированными элементами. После этого возьмем из “перемешанной” популяции n элементов. Обозначим через X число маркированных элементов (в этой выборке из n элементов).

(a) Показать, что вероятность $P_{N,M,n}\{X = m\}$ того, что $X = m$ задается (при фиксированных N, M, n) формулой гипергеометрического распределения

$$P_{N,M,n}\{X = m\} = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

(b) Считая M, n и m заданными, найти максимум $P_{N,M,n}\{X = m\}$ по N, т. е. “наиболее правдоподобный” объем всей популяции, приводящий к тому, что число маркированных элементов оказалось равным m. Показать, что так найденное наиболее правдоподобное значение N (называемое оценкой максимального правдоподобия) определяется формулой

$$\widehat{N} = \left[\frac{Mn}{m}\right],$$

где $[\cdot]$ – целая часть.

9. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство, $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{F}$. Для $J \subset \{1, \ldots n\}$ положим

$$\mathcal{P}_1(J) \sum_{i\in J} A_i,$$

$$\mathcal{P}_2(J) \sum_{i_1,i_2\in J, i_1<i_2} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}),$$

$$\mathcal{P}_k(J) \sum_{i_1,\ldots,i_k\in J, i_1<i_2<\ldots<i_k} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \ldots \cap A_{i_k}).$$

Доказать, что для всех нечетных k справедливо неравенство

$$P(A_{i_1} \cup \ldots A_{i_n}) \leq \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \mathcal{P}_j(\{i_1, \ldots, i_k\}),$$

а для всех четных справедливо неравенство

$$P(A_{i_1} \cup \ldots A_{i_n}) \geq \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \mathcal{P}_j(\{i_1, \ldots, i_k\}).$$

10. Показать также, что алгебра, порожденная системой $\{A_1, \ldots, A_n\}$, где $A_i \subset \Omega$, $i = 1, \ldots, n$ состоит из 2^{2^n} элементов.

11. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ некоторые подмножества Ω, постройте минимальную σ-алгебру, включающую $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$.

12. Дискретная случайная величина ξ принимает k положительных значений $x_1, \ldots, x_k$ с вероятностями, равными соответственно $p_1, \ldots, p_k$. Предполагая, что возможные значения записаны в возрастающем порядке, доказать, что
$$\lim_{n\to\infty} \frac{E\xi^{n+1}}{E\xi^n} = x_k.$$

13. При проведении опыта на распад атома атом распадается с вероятностью p и не распадается с вероятностью $1-p$. Найти асимптотическое значение математического ожидания и дисперсии числа появлений двух распадов подряд (мы считаем, что два распада случились подряд, если распад был на $i-1$ и i-м испытании).

14. Случайным образом выстраиваются в шеренгу n человек разного роста. Найдите вероятность того, что

    (a) самый низкий окажется i-м слева;

    (b) самый высокий окажется первым слева, а самый низкий – последним слева;

    (c) самый высокий и самый низкий окажутся рядом;

    (d) между самым высоким и самым низким расположатся более k человек.