УДК 62-50:519.49

В.М. Григорьев

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В ОПЕРАТОРНОЙ ФОРМЕ

Актуальность темы. Для работы с линейными нестационарными системами, представленными в операторной форме, широко используется теория матриц над кольцом линейных нестационарных дифференциальных операторов. Для изучения устойчивости таких систем пространство устойчивых сигналов должно быть замкнуто относительно действия дифференциальных операторов. В работе предлагается пространство устойчивых сигналов, абелева группа которого имеет структуру левого модуля над кольцом операторов.

Постановка задачи. В работе предлагается модификация понятия устойчивости системы в терминах вход-выход, учитывающая собственные движения систем и базирующаяся на первом методе Ляпунова.

Обоснование полученных результатов. Характеристический показатель Ляпунова (в дальнейшем просто показатель) функции x из пространства X бесконечно дифференцируемых за исключением конечного числа точек функций определяется как верхний предел

$$\mathcal{X}(x) = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\ln|x(t)|}{t}, \ \mathcal{X}(0) = -\infty.$$

Функция x имеет строгий показатель, если существует предел $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{\ln|x(t)|}{t}$.

Для числа α <0 определим множество

$$M_\alpha = \{x \in X | \mathcal{X}(x^{(i)}) < \alpha, \ i = 0, 1, 2 \ldots\} \qquad (1)$$

Заметим, что $\forall m \in \mathcal{M}_\alpha$ $\overline{\lim\limits_{t \to \infty}}$ m(t) = 0. Выделим в подмножество

$\overline{\mathcal{M}_\alpha}$ ={m∈ $\mathcal{M}_\alpha$| $\exists C_i>0$ $\forall t \in D(m^{(i)})$ $|m^{(i)}(t)| \le C_i$, i = 0, 1,2 …} , (2)

где D(.) – область определения функции.

Если, например, α =-2, то $e^{-3t}/t \in \mathcal{M}_\alpha$, но $e^{-3t}/t \notin \overline{\mathcal{M}_\alpha}$.

Любая функция из $\mathcal{M}_\alpha$, начиная с некоторого момента T будет ограниченной. Имеем

$\forall \varepsilon$ $\exists$C > 0, |m(t)| $\le$ C $e^{(\chi(m)+\varepsilon)t}$, t > T, t∈ D(m). (3)

Рассмотрим произвольное поле Q функций со строгим нулевым показателем, замкнутое относительно дифференцирования. Примером такого поля является множество дробно рациональных функций. Рассмотрим кольцо линейных дифференциальных операторов с коэффициентами в поле Q. Выделим в поле Q подкольцо Q_T, состоящее из функций, не имеющих полюсов при $0 \le t < \infty$ (полюса в бесконечности допустимы). Выделим в R подкольцо R_T операторов с коэффициентами из Q_T.

Теорема 1. Множества $\mathcal{M}_\alpha$ и $\overline{\mathcal{M}_\alpha}$ являются абелевыми группами, имеющими структуру левого R и R_T модулей, соответственно.

Согласно [1, 2]

$\mathcal{X}(x_1 + x_2) \le \max(\mathcal{X}(x_1), \mathcal{X}(x_2))$, $\forall x_1, x_2 \in X$ (4)

Из соотношений (1), (4) и линейности дифференцирования следует, что $\mathcal{M}_\alpha$ - абелева группа. Рассмотрим теперь $m_1, m_2 \in \overline{\mathcal{M}_\alpha}$. Согласно (2) $\exists C_{1,i}$, $\exists C_{2,i}$ $\forall t \in D(m_1^{(i)})$ $|m_1^{(i)}(t)| \le C_{1,i}$, $\forall t \in$

$D(m_2^{(i)})$ $|m_2^{(i)}(t)| \le C_{2,i}$. Тогда $\forall t \in D((m_1^{)}(t) + m_2^{)}(t))^{(i)}) \supseteq D(m_1^{(i)}) \cap D(m_2^{(i)})$ $|(m_1^{)}(t) + m_2^{)}(t))^{(i)}| \le C_{1,i} + C_{2,i}$, т.е. $m_1 + m_2$ лежит в $\overline{M}_\alpha$.

Определим операции умножения

$$\forall m \in M_\alpha \ \forall r \in R \ rm = (\sum_i q_i p^i)m = \sum_i q_i m^{(i)}),\ q_i \in Q.$$

$$\forall m \in \overline{M}_\alpha \ \forall r \in R \ rm = (\sum_i q_i p^i)m = \sum_i q_i m^{(i)}),\ q_i \in Q_T.$$

Так как абелевы группы M_α и $\overline{M}_\alpha$ замкнуты относительно дифференцирования, то для доказательства теоремы следует показать, что $\forall q \in Q$, $\forall m \in M_\alpha$ $qm \in M_\alpha$ и $\forall q_T \in Q_T$, $\forall m \in \overline{M}_\alpha$ $q_T m \in \overline{M}_\alpha$.

Элементы из Q и Q_T имеют строгий нулевой показатель, поэтому согласно [1, 2] для любого q из Q и m из M_α $\varkappa(qm) = \varkappa(m) < \alpha$. Дифференцируя qm произвольное число раз, убеждаемся, что $\varkappa((qm)^{(i)}) < \alpha$. Отсюда следует, что qm лежит в M_α.

Пусть $q_T \in Q_T$, $\forall m \in \overline{M}_\alpha$, тогда $q_T m \in M_\alpha$. q_T и m ограничены вместе со всеми своими производными в своих областях определения. Следовательно $q_T m \in \overline{M}_\alpha$.

Согласно неравенства (3), элементы множеств M_α и $\overline{M}_\alpha$ экспоненциально убывают. Следовательно, эти множества можно назвать пространствами устойчивых сигналов.

Введём множества

$$S_0(M_\alpha^n) = \{S \in R^{n\times n} | \forall x \in X^n\ (Sx=0^n) \Rightarrow x \in M_\alpha^n\} \quad (5)$$

$$S(M_\alpha^n) = \{S \in R^{n\times n} | \forall x \in X^n\ \forall u \in M_\alpha^n\ (Sx=u) \Rightarrow x \in M_\alpha^n\} \quad (6)$$

$S_0(\overline{M}_\alpha{}^n) = \{S\in R^{nxn} | \forall x\in X^n\ (Sx=0^n) \Rightarrow x\in \overline{M}_\alpha{}^n\}$ (7)

$S(\overline{M}_\alpha{}^n) = \{S\in R^{nxn} | \forall x\in X^n\ \forall u\in \overline{M}_\alpha{}^n\ (Sx=u) \Rightarrow x\in \overline{M}_\alpha{}^n\}$ (8)

Очевидно, что $S(M_\alpha{}^n) \subseteq S_0(M_\alpha{}^n)$, $S(\overline{M}_\alpha{}^n) \subseteq S_0(\overline{M}_\alpha{}^n)$.

Изучим свойства множеств (5) – (8).

Утверждение 1. Пусть $S_1\in S(M_\alpha{}^n)$, $S_2\in S_0(M_\alpha{}^n)$, а матрицы $U_1, U_2\in R^{nxn}$ обратимы над R. Обозначим $\overline{S}_1 = U_1S_1 U_2$, $\overline{S}_2 = U_1 S_2 U_2$. Тогда , $\overline{S}_1 \in S(M_\alpha{}^n)$, $\overline{S}_2 \in S_0(M_\alpha{}^n)$.

Рассмотрим уравнения $\overline{S}_1 x_1=u$, $u\in M_\alpha{}^n$ и $\overline{S}_2 x_2=0^n$. Произведём замену неизвестных: $z_i= U_2x_i$, $i=1,2$ и умножим уравнения слева на U_1^{-1}. От последнего действия решения уравнений согласно Леммы из [3] не изменятся. Получим $S_1z_1=u_1$, $S_2z_2=0^n$, где $u_1= U_1^{-1} u$. В силу теоремы 1 $u_1\in M_\alpha{}^n$. Из определения множеств $S_0(M_\alpha{}^n)$ и $S(M_\alpha{}^n)$ следует, что в последних равенствах функции z_i, $i=1,2$ лежат в $M_\alpha{}^n$. Так как $x_i = U_2^{-1} z_i$ и $U_2^{-1}\in R^{nxn}$, то в силу теоремы 1 $x_i\in M_\alpha{}^n$, $i=1,2$. Согласно определениям (5) и (6) имеем $\overline{S}_1 \in S(M_\alpha{}^n)$, $\overline{S}_2 \in S_0(M_\alpha{}^n)$.

Утверждение 2. Пусть $S_1\in S_0(\overline{M}_\alpha{}^n)$, $S_2\in S(\overline{M}_\alpha{}^n)$, а матрица $U\in R^{nxn}$ обратима над R. Тогда $US_1\in S_0(\overline{M}_\alpha{}^n)$. Однако в общем случае $S_1U\notin S_0(\overline{M}_\alpha{}^n)$, и $S_2U, US_2\notin S(\overline{M}_\alpha{}^n)$.

Рассмотрим уравнение $S_1x=0^n$. Так как $x\in \overline{M_\alpha}^n$, то в силу Леммы из [3] $US_1\in S_0(\overline{M_\alpha}^n)$. Для уравнения $S_2Ux=u$, $u\in \overline{M_\alpha}^n$ сделаем замену $z=Ux$. Так как $S_2\in S(\overline{M_\alpha}^n)$ и $S_2z=u$, то $z\in \overline{M_\alpha}^n$. В общем случае $U^{-1}\notin R_T^{nxn}$ и $x= U^{-1}z$ не лежит в $\overline{M_\alpha}^n$, т.е. $S_2U\notin S(\overline{M_\alpha}^n)$. Взяв уравнение $S_1Ux=0^n$ аналогично доказываем, что $S_1U\notin S_0(\overline{M_\alpha}^n)$. Перейдём к уравнению $US_2x=u$, $u\in \overline{M_\alpha}^n$. В Q^{nxn} найдётся такая матрица V, что $VS_2 \in R_T^{nxn}$. Тогда $\overline{S}_2x=u_1$, где $\overline{S}_2=VS_2$ и $u_1= VU^{-1}u$. В общем случае $U^{-1}\notin R_T^{nxn}$ и $u_1 \notin \overline{M_\alpha}^n$. Пусть $x\in \overline{M_\alpha}^n$. Согласно теореме 1 $\overline{S}_2x\in \overline{M_\alpha}^n$. Противоречие.

Утверждение 3. Пусть $A\in R^{nxn}$, $rkA=n$. Приведём A к верхней правой треугольной матрице B. Если диагональные элементы $b_{1,1}$, $b_{1,2}$ … $b_{n,n}$ матрицы B лежат в $S(M_\alpha)$, то $A\in S(M_\alpha^n)$. При $b_{n,n}\in S_0(M_\alpha)$ и $b_{1,1}$, $b_{1,2}$ … $b_{n-1,n-1} \in S(M_\alpha)$ имеем $A\in S_0(M_\alpha^n)$. Из того, что матрица A лежит в $S(M_\alpha^n)$ или в $S(\overline{M_\alpha}^n)$, следует, что диагональные элементы матрицы B лежат в $S_0(M_\alpha)$ $(S_0(\overline{M_\alpha}))$.

Рассмотрим систему уравнений $Ax=u$, $u\in M_\alpha^n$. Умножим её слева на обратимую в R^{nxn} матрицу U, приводящую A к B: $Bx=v$, $v=Bu$. Распишем последнее уравнение построчно

$$
\begin{aligned}
b_{1,1}x_1 &= -(b_{1,2}x_2 + \ldots + b_{1,n}x_n) + v_1 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
b_{n-1,n-1}x_{n-1} &= -b_{n-1,n}x_n + v_{n-1} \\
b_{n,n}x_n &= v_n,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где $x=(x_1\ x_2 \dots x_{n-1})^T$, $v=(v_1\ v_2 \dots v_{n-1})^T$.

Так как по условию $b_{i,i} \in S(M_\alpha)$, i=1, 2 … n, то решая (9) снизу вверх, на основании теоремы 1 и определения множества $S(M_\alpha)$ имеем, что $x \in M_\alpha^n$. Следовательно, $B \in S(M_\alpha^n)$. Используя утверждение 1, получаем $A \in S(M_\alpha^n)$. Пусть $b_{n,n} \in S_0(M_\alpha)$ и $b_{1,1}$, $b_{1,2}$ … $b_{n-1,n-1} \in S(M_\alpha)$. Аналогично имеем $A \in S_0(M_\alpha^n)$. Положим $u=0^n$. Согласно определению $S(M_\alpha^n)$ $(S(\overline{M}_\alpha^n))$ все решения x_i , i=1, 2 … n лежат в M_α $(\overline{M}_\alpha)$. Система (9) допускает решения в виде $(x_1\ x_2 \dots x_i\ 0 \dots 0)^T$, где x_i - любое решение уравнения $b_{i,i}x_i=0$, i=1, 2 … n. Из (5) (соответственно (7)) следует, что $b_{i,i} \in S_0(M_\alpha)$ $(b_{i,i} \in S_0(\overline{M}_\alpha))$.

Утверждение 4. Пусть диагональные элементы $b_{i,i}$, i=1, 2 … n-1 матрицы B лежат в $S(\overline{M}_\alpha)$ и $b_{n,n} \in S_0(\overline{M}_\alpha)$, а наддиагональные элементы расположены в R_T. Тогда $A \in S_0(\overline{M}_\alpha^n)$.

Рассмотрим уравнение (9) при $v_i=0$, i=1, 2 … n. Так как $b_{n,n} \in S_0(\overline{M}_\alpha)$, то $x_n \in \overline{M}_\alpha$. Решая уравнение снизу вверх и учитывая, что $b_{i,i} \in S(\overline{M}_\alpha)$, i=1, 2 … n-1, $b_{i,j} \in R_T$, i=1, 2 … n-1, j=i+1, i+2 … n в силу теоремы 1 имеем $x_i \in \overline{M}_\alpha$, i=1, 2 … n-1. Следовательно $B \in S_0(\overline{M}_\alpha^n)$. Поскольку $A=U^{-1}B$, то воспользовавшись утверждением 2, получим $A \in S_0(\overline{M}_\alpha^n)$.

Определим следующую разновидность устойчивости в терминах вход-выход [4], которая учитывает собственные движения системы.

Назовём линейную нестационарную многосвязную систему

$Ax = Bu,$

(10)

где $A \in R_T^{n \times n}$, $B \in R_T^{n \times m}$ $\overline{M}_\alpha$-инвариантной, если при любом входе , $u \in \overline{M}_\alpha^{\,m}$ её выходы x лежат в $\overline{M}_\alpha^{\,n}$.

Утверждение 5. Если система (10) $\overline{M}_\alpha$-инвариантна, то $A \in S_0(\overline{M}_\alpha^{\,n})$. Обратно, если $A \in S(\overline{M}_\alpha^{\,n})$, то эта система $\overline{M}_\alpha$-инвариантна.

Пусть система (10) $\overline{M}_\alpha$- инвариантна. Положим $u = 0^n$. Все решения уравнения $Ax = 0^n$ лежат в $\overline{M}_\alpha^{\,n}$, что в соответствии с (7) означает $A \in S_0(\overline{M}_\alpha^{\,n})$.

Обратно. Пусть $A \in S(\overline{M}_\alpha^{\,n})$. Из теоремы 1 получим $Bu \in \overline{M}_\alpha^{\,n}$. Из определения множества $S(\overline{M}_\alpha^{\,n})$ в (8) следует, что $x \in \overline{M}_\alpha^{\,n}$, т.е. система (10) $\overline{M}_\alpha$- инвариантна.

Выводы. Первый метод Ляпунова позволил определить пространство устойчивых сигналов, замкнутое относительно действия линейных нестационарных дифференциальных операторов. Изучены условия устойчивости линейных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. - М.: Наука, 1967. 472 с.

2. Теория показателей Ляпунова и её приложение к вопросам устойчивости. / Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. - М.: Наука, 1966. 576 с.

3. Григорьев В.М. Совместность и эквивалентность линейных нестационарных систем управления // Системные технологии.

Региональный межвузовский сборник научных трудов. - Выпуск 2 (10). - Дніпропетровськ, 2003. - С. 104–112.

4. Дезоер Ч., Видъясагар М. Синтез систем с обратной связью: вход-выходные соотношения. М.: Наука, 1983. 280 с.

УДК 62-50:519.49

Григорьев В.М. **Устойчивость линейных систем в операторной форме**// Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных трудов. - Выпуск 1 (55). - Дніпропетровськ, 2008. - С..

В работе предлагается модификация понятия устойчивости системы в терминах вход-выход, учитывающая собственные движения систем и базирующаяся на первом методе Ляпунова.

Библ. 4.

УДК 62-50:519.49

Григор’єв В.М. **Стійкість лінійних систем в операторній формі** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. - Випуск 1 (55). - Дніпропетровськ, 2008. - с..

У роботі пропонується модифікація поняття стійкості системи в термінах вхід-вихід, що враховує власні рухи систем і базується на першому методі Ляпунова.

Бібл. 4.

UDC 62-50:519.49

Grigor’yev V. M. Stability of systems in operator form // System technologies. N 1(55). – Dnepropoetrovsk. 2008. - P .

In work the updating of concept of stability of system in the terms an input - output taking into account own movement of systems and basing on the first method Lyapunov is offered.