УДК 62-50:519.49

В.М. Григорьев

ПРАВИЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРНЫЕ МАТРИЦЫ

Актуальность темы. Систематическое применение операторного подхода к решению задач анализа и синтеза линейных многосвязных нестационарных систем автоматического управления приводит к возникновению ряда частных задач в области теории матриц над некоммутативными кольцами и телами. Среди таких задач в работе рассмотрено деление операторных матриц и их правильность.

Постановка задачи. Дробнорациональную функцию называют правильной, если степень полинома в числителе не больше, чем в знаменателе. Матрицу, состоящую из правильных дробнорациональных функций, также называют правильной. Естественно возникает вопрос, когда эту матрицу можно подставить в виде отношения двух полиномиальных матриц [1]. В данной работе эта проблема обобщается на нестационарный случай и решается в терминах теории матриц над некоммутативными кольцами и телами. Полученный результат применяется для осуществления деления двух операторных матриц.

Обоснование полученных результатов. Степень операторной матрицы E ∈ $R^{n\times m}$ d(E) равна максимальной степени входящих в неё элементов. Степень i-й строки (столбца) $rd_i(E)$ (соответственно $cd_i(E)$) равна максимальной степени входящих в неё (в него) элементов. Матрица E может быть записана так:

$$E = \begin{vmatrix} c_{1,1}^{c} \quad p^{d_1} & \cdots & c_{1,m}^{c} \quad p^{d_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n,1}^{c} \quad p^{d_1} & \cdots & c_{n,m}^{c} \quad p^{d_m} \end{vmatrix} + E_l^c ,$$

где $cd_j(E_l^c) < d_j = cd_j(E)$, $c_{i,j}^c \in Q(t)$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$

или $E = C_E^c \operatorname{diag}(p^{d_1} \ldots p^{d_m}) + E_l^c$, где

$$C_E^c = \begin{vmatrix} c_{1,1}^c & \cdots & c_{1,m}^c \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n,1}^c & \cdots & c_{n,m}^c \end{vmatrix}.$$

(1)

Здесь p – оператор дифференцирования, R – некоммутативное кольцо линейных дифференциальных операторов с коэффициентами в поле Q(t).

Так как для любого q из Q(t) pq = qp + q', где q' – производная от q, то имеем, что qp = pq – q' или в общем случае

$$qp^n = \sum_{i=0}^{n} p^i (-1)^{n-i} C_n^i q^{(n-i)},$$

где C_n^i - число сочетаний из n по i. Перепишем элементы матрицы E в виде $e_{i,j} = \sum_{i=0} p^i q_i$, $q_i \in Q(t)$. Теперь E представима следующим образом

$$E = \begin{vmatrix} p^{d_1} & c_{1,1}^r & \cdots & p^{d_1} & c_{1,m}^r \\ & \cdots & \cdots & & \cdots \\ p^{d_n} & c_{n,1}^r & \cdots & p^{d_n} & c_{n,m}^r \end{vmatrix} + E_l^r,$$

где $rd_j(E_l^r) < d_j = rd_j(E)$, $c_{i,j}^r \in Q(t)$, i = $\overline{1,n}$, j= $\overline{1,m}$

или

$$E = \mathrm{diag}(p^{d_1} \ldots p^{d_n}) C_E^r + E_l^r,$$

(2)

где

$$C_E^r = \begin{vmatrix} c_{1,1}^r & \cdots & c_{1,m}^r \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n,1}^r & \cdots & c_{n,m}^r \end{vmatrix}.$$

 ISSN 1562-9945

Докажем, что при n$\geq$m (n$\leq$m) rk C_E^r=m $\Rightarrow$ rk E = m (rk C_E^c =n $\Rightarrow$ rk E = n). Пусть rk C_E^r=m, но rk E < m. Тогда уравнение Ez=0^n имеет в R^m нетривиальное решение z, которое мы распишем следующим образом

$$z = p^k z_k + z_l,\ z_k \neq 0^m, \qquad (3)$$

где $z_k \in$ Q(t) ^{m}, d(z_l) < d(z) = k. Подставим (2) и (3) в уравнение Ez=0^n: diag($p^{s_1} \ldots p^{s_n}$) C_E^r z_k +T = 0^n, где rd_i(T) <s_i = d_i + k. Уравнение C_E^r z_k=0^n имеет нетривиальное решение и, следовательно, rk C_E^r < m. Противоречие. Для матрицы C_E^c доказательство аналогично.

Матрица E называется **правильной** по строкам (столбцам), если [2] rk C_E^r = rk E (rk C_E^c rk E).

Предложение 1. Каждая матрица E $\in$ R^{nxm} с помощью элементарных строчных (столбцовых) операций приводится к правильной по строкам (столбцам) матрице.

Доказательство. Приведём E к верхней правой ступенчатой матрице $\overline{E}$ = $\begin{vmatrix} E_1 \\ 0^{(n-r)xm} \end{vmatrix}$, где, согласно [3], rk E = r. Обозначим в (1)

$$C_{E_1}^c = \begin{vmatrix} c_1 \\ \ldots \\ c_r \end{vmatrix},\ c_i^T \in Q(t)^m.$$

Если E_1 неправильна по строкам, то существуют q_1, $q_2 \ldots q_m \in$ Q(t) по крайней мере один из которых не равен нулю, такие, что $\sum_{i=1}^{r} q_i$ C_i= 0^{1xn}.

Возьмём k такое, что $q_k \neq 0$ и $rd_j(E_1) \leq rd_k(E_1)$ для каждого j такого, что $q_j \neq 0$. Используя третью элементарную строчную операцию, заменим k-ю строку E_1 строкой $\frac{1}{q_k}\sum_{i=1}^{r} q_i\, p^{d_K - d_i} E_{1,i}$,

где $E_{1,I}$ - i-я строка E_1, $d_i = rd_i(E_1)$. Новая k-я строка имеет степень меньше, чем исходная. Если новая матрица неправильна по строкам, снова применим указанную процедуру, пока не получим желаемого, что гарантируется конечным значением степеней операторов в матрицах. Аналогичным образом дело обстоит с правильностью по столбцам. Ч.Т.Д.

Определим в теле частных R_q кольца R подкольца

$$R_p = \{a^{-1}b \in R_q \mid d(b) \le d(a)\},\ R_{sp} = \{a^{-1}b \in R_q \mid d(b) < d(a)\}.$$

Назовём матрицу $K \in R_q^{nxm}$ **правильной** (**строго правильной**), если её элементы лежат в R_p (R_{sp}).

Предложение 2. Если матрица $K = A^{-1}B$ из R_q^{nxm}, где $A \in R^{nxn}$, $B \in R^{nxm}$ правильная (строго правильная), то

$$rd_i(B) \le rd_i(A) \quad (rd_i(B) < rd_i(A)),\ i = \overline{1,n} . \tag{4}$$

Обратно, если матрица A правильная по строкам и имеет место соотношение (4), то матрица $K = A^{-1}B$ будет правильной (строго правильной).

Доказательство. Приведём все элементы $k_{i,j}$ матрицы K к общему правому знаменателю $s \in R_*$: $k_{i,j} = g_{i,j}\, s^{-1}$, $g_{i,j} \in R$. Тогда $K = A^{-1}B = Gs^{-1}$, $G \in R^{nxm}$ или $Bs = AG$. Распишем последнее равенство по элементам:

$$b_{i,j}s = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, g_{k,j}.$$

(5)

Используя правило для вычисления степени произведения и суммы операторов, имеем $d(b_{i,j}) + d(s) \le \max_k (d(a_{i,k}) + d(g_{k,j}))$.

Пусть матрица K правильная (строго правильная), тогда $d(g_{i,j}) \le d(s)$ $(d(g_{i,j}) < d(s))$. Из (42) получим $d(b_{i,j}) + d(s) \le \max_k (d(a_{i,k})$

 ISSN 1562-9945

$+ d(s))$ $(d(b_{i,j}) + d(s) < \max_k (d(a_{i,k}) + d(s)))$ или $d(b_{i,j}) \leq \max_k d(a_{i,k})$ $(d(b_{i,j}) < \max_k d(a_{i,k}))$.

Следовательно, имеет место соотношение (4).

Обратно. Пусть матрица A – правильная по строкам и выполняется соотношение (4). Предположим, что матрица K не является правильной (строго правильной), т.е. в матрице G существует такой столбец, например j-й, что $d(s)<cd_j(G)$ $(d(s) \leq cd_j(G))$. Так как матрица A собственная по строкам, то найдется такое i, что, с учётом соотношения (4), имеем $d(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, g_{k,j}) = rd_i(A) + cd_j(G) > rd_i(B) + d(s)$. С другой стороны из соотношения (5) имеем $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, g_{k,j} = b_{i,j}s < rd_i(B) + d(s)$. Противоречие. **Ч.Т.Д.**

Предложение 3. Если матрица $K = BA^{-1}$ из R_q^{nxm}, где $A \in R^{mxm}$, $B \in R^{nxm}$ правильная (строго правильная), то $cd_i(B) \leq cd_i(A)$

$(cd_i(B) < cd_i(A))$, $i = \overline{1,n}$.

Обратно, если матрица A правильная по столбцам и имеет место соотношение (5), то матрица $K = BA^{-1}$ будет правильной (строго правильной).

Доказательство аналогично доказательству предложения 2.

Предложение 4. Пусть $A \in R^{nxn}$, rk A = n, $B \in R^{nxm}$ ($A \in R^{mxm}$, rk A = m, $B \in R^{nxm}$) тогда существуют матрицы $Q \in R^{nxm}$, $R \in R^{nxm}$ такие, что выполняется правый (левый) матричный алгоритм деления

$$B = AQ + R, \qquad rd_iR < rd_i(A),\ i = \overline{1,n}\ .$$

$$(B = QA + R \qquad cd_iR < cd_i(A),\ i = \overline{1,n}\ .)$$

Доказательство. Используя правый алгоритм деления, представим каждый элемент $k_{i,j} = d_{i,j}^{-1} n_{i,j}$ матрицы $K = A^{-1}B$ в виде $k_{i,j} = d_{i,j}^{-1} c_{i,j} + q_{i,j}$, $c_{i,j}$, $q_{i,j} \in R$, где $n_{i,j} = d_{i,j}\, q_{i,j} + c_{i,j}$, $d(c_{i,j}) < d(d_{i,j})$. Тогда $K = Q + G$, $Q \in R^{nxm}$, $G \in R_{sp}^{nxm}$, где $g_{i,j} = d_{i,j}^{-1} c_{i,j}$. Запишем $G = A^{-1}R$. Тогда $A^{-1}B = Q + A^{-1}R$ и $R = B - AQ$. Так как $G \in R_{sp}^{nxm}$, то из предложения 2 следует, что $rd_i(R) < rd_i(A)$.

Доказательство существования левого алгоритма деления проводится аналогично.

Выводы. В работе получены условия правильности операторных матриц и предложена процедура для деления матриц над кольцом линейных нестационарных дифференциальных операторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rosenbrock H.H. System and polynomial matrix //Geometry method for theory of linear system. Dodrecht, 1980, p. 233-255.
2. Ylinen. An algebraic theory for analysis and synthesis of time-varying linear differentials systems // Acta Politechnica Scandinavica: Math. and Comput. Ser., N 32. Helsinki, 1980, 62 p.
3. Григорьев В.М. Ранги операторных матриц // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных трудов. - Выпуск 5 (28). - Днепропетровск, 2003. - С. 15–19.

Получено 22.11.2005 г.

УДК 62-50:519.49

Григорьев В.М. **Правильные операторные матрицы** // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных трудов. - Выпуск 6 (41). - Днепропетровск, 2005. - С..

Получены условия правильности операторных матриц и предложена процедура для деления матриц над кольцом линейных нестационарных дифференциальных операторов.

Библ. 4.

УДК 62-50:519.49

Григор’єв В.М. **Правильні операторні матриці** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. - Випуск 6 (41). - Дніпропетровськ, 2005. - С. .

Здобуто умови справжності операторних матриць та запропонована процедура для поділення матриць над кільцем лінійних нестаціонарних диференційних операторів.

Бібл. 4.

UDC 62-50:519.49

Grigor’yev V. M. **Correct operator’s matrixes** s// System technologies. N. 6(41). – Dnepropoetrovs, 2005. - P .

The conditions are received that the matrix of the operators is proper and the procedure for division of matrixes above a ring of the linear non-stationary differential operators is offered