

КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ В ТЕРМИНАХ ВХОД-ВЫХОД ЛИНЕЙНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Постановка задачи. Цель работы состоит в получении достаточных условий для коэффициентов линейного нестационарного дифференциального уравнения, обеспечивающих экспоненциальное убывание решений при произвольной экспоненциально убывающей правой части.

Обоснование полученных результатов. Характеристический показатель Ляпунова (в дальнейшем просто показатель) функции $x(t)$ из пространства X бесконечно дифференцируемых функций времени $t \geq 0$ определяется как верхний предел [1, 2]

$$\chi(x) = \overline{\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln |x(t)|}{t}}, \quad \chi(0) = -\infty.$$

Функция $x(t)$ имеет строгий показатель, если существует

предел $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln |x(t)|}{t}.$

Для числа $\alpha < 0$ определим множество

$$M_\alpha = \{x \in X \mid \chi(x^{(i)}) < \alpha, i = 0, 1, 2, \dots\}$$

Заметим, что $\forall m \in M_\alpha \quad \overline{\lim_{t \rightarrow \infty} m(t)} = 0.$

Любая функция $m(t)$ из M_α , будет ограниченной. Более того, согласно [1, 2], имеем

$$\forall \varepsilon \exists C > 0 \quad |m(t)| \leq C e^{(\alpha + \varepsilon)t}.$$

(1)

Элементы множества M_α экспоненциально убывают. Следовательно, эти множества можно назвать пространствами устойчивых сигналов со степенью устойчивости α [3].

Рассмотрим произвольное поле Q действительных функций со строгим нулевым показателем, замкнутое относительно дифференцирования. Примером

© Григорьев В.М., 2009

такого поля является множество дробно рациональных функций. Выделим в поле Q подкольцо Q_T , состоящее из функций, не имеющих полюсов при $0 \leq t < \infty$ (полюса в бесконечности допустимы). Рассмотрим кольцо линейных дифференциальных операторов R с коэффициентами в кольце Q_T .

Введём множество дифференциальных операторов

$$S(M_\alpha) = \{s \in R \mid \forall x \in X \forall u \in M_\alpha (sx=u) \Rightarrow x \in M_\alpha\} \quad (2)$$

Если в линейном нестационарном дифференциальном уравнении, представленном в операторной форме $sx=u$, оператор s лежит в множестве $S(M_\alpha)$, то это означает, что все решения этого уравнения вместе со всеми своими производными будут иметь показатели Ляпунова меньше, чем α при любой правой части, имеющей вместе со всеми своими производными показатели Ляпунова меньше, чем α . Назовём такое свойство уравнения устойчивостью в терминах вход/выход со степенью α [3].

Изучим условие принадлежности операторов из R множеству $S(M_\alpha)$. Для этого нам понадобятся некоторые сведения из первого метода Ляпунова [1, 2].

Характеристическим показателем Ляпунова матричной или векторной функции $Y(t)$ называется максимальный среди показателей его элементов. Причём $\mathcal{X}(Y(t)) = \mathcal{X}(\|Y(t)\|)$, где $\|\cdot\|$ - произвольная норма матрицы (вектора). Рассмотрим линейную дифференциальную систему размерности n

$$y'(t) = F(t)y(t), t \geq 0, \quad (3)$$

где элементы матрицы $F(t)$ непрерывны и ограничены при $t \geq 0$. Каждое нетривиальное решение системы (3) имеет конечный показатель. Множество $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m$ показателей решений называется спектром системы. Число m элементов в спектре не превышает размерности системы n . Если в (3) $F(t) =$

$F_1 + F_2(t)$, где F_1 – постоянная матрица и $\lim_{t \rightarrow \infty} F_2(t) = 0^{n \times n}$, то

спектр систем (3) и $y'(t) = F_1 y(t)$, совпадают [2, с. 83]. Пусть фундаментальная система $Y(t)$ решений системы (3) содержит n_s решений с показателем α_s , $s=1, 2, \dots, m$. Рассмотрим величину

$$\sigma_Y = \sum_{s=1}^m n_s \alpha_s, \quad \text{где} \quad \sum_{s=1}^m n_s = n. \quad \text{Существуют фундаментальные}$$

системы с наименьшим значением σ величины σ_Y . Такие фундаментальные системы называются нормальными. Причем для любой фундаментальной системы $Y(t)$ найдётся такая действительная матрица C , что $CY(t)$ будет нормальной системой.

$$\text{Если } \sigma = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \text{Tr}(F(\tau)) d\tau, \quad \text{где } \lim - \text{нижний предел,}$$

$\text{Tr}()$ – след матрицы, то система называется правильной по Ляпунову.

Теорема Перрона гласит, что система (3) правильна по Ляпунову тогда и только тогда, когда для её спектра ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$) с учётом кратности показателей, и спектра ($\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$) сопряжённой системы $y'(t) = -F(t)^T y(t)$, $t \geq 0$, выполнено соотношение

$$\alpha_i + \beta_i = 0, i=1, 2, \dots, n.$$

(4)

Пусть $Y(t)$ – произвольная фундаментальная система решений уравнения (3) и $K(t, \tau)$ – матрица Коши. Если система (3) правильна по Ляпунову, то имеет место неравенство [с. 238]

$$\forall \varepsilon > 0 \exists C > 0 \quad \|K(t, \tau)\| \leq C e^{(\alpha + \varepsilon)(t - \tau) + 2\varepsilon\tau}, \quad t \geq \tau \geq 0,$$

(5)

где α - максимальный элемент спектра системы (3).
Используя приведенные сведения, докажем теорему.

Теорема. Если в операторе $S = \sum_{i=0}^n a_i(t)p^{(i)}$, $a_n = 1$, $p = d/dt$ коэффициенты $a_i(t) \in Q_T$, $i=0, 1 \dots n-1$ имеют пределы s_i и максимальная действительная часть корней стационарного многочлена $\sum_{i=0}^n s_i p^{(i)}$, $s_n = 1$ меньше, чем α , то S лежит в $S(M_\alpha)$.

Рассмотрим в пространстве X бесконечно дифференцируемых за исключением конечного числа точек функций времени $t \geq 0$ дифференциальное уравнение $Sx(t) = u(t)$,

$\forall u(t) \in M_\alpha$ и представим его в виде

$$(p^n + (s_{n-1} + q_{n-1}(t))p^{n-1} + (s_0 + q_0(t)))x(t) = u(t),$$

где функции $q_i(t) \in Q_T$, $i=0, 1 \dots n-1$ имеют строгий нулевой предел при $t \rightarrow \infty$.

Запишем последнее уравнение в пространстве состояний

$$y'(t) = F(t)y(t) + Gu(t)$$

(6)

$$x(t) = Hy(t),$$

где $y(t) = |x(t) \ x'(t) \dots \ x^{(n-1)}(t)|^T$,

$$G^T = |0 \ 0 \dots 1|, \quad H = |1 \ 0 \dots 0|, \quad F(t) = F_1 + F_2(t),$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & 1 \\ s_0 & s_1 & & s_{n-1} \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & 0 \\ q_0 & q_1 & & q_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Так как $\lim_{t \rightarrow \infty} F_2(t) = 0^{n \times n}$, то системы

$$y'(t) = F(t)y(t) \tag{7}$$

и

$$y'(t) = F_1 y(t)$$

(8)

имеют одинаковый спектр $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ с учётом кратности показателей.

Поскольку $\lim_{t \rightarrow \infty} (-F_2^T(t)) = 0^{n \times n}$, то спектр сопряжённой к (7) системы $y'(t) = -F(t)^T y(t)$, совпадает со спектром $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ стационарной системы $y'(t) = -F_1^T y(t)$. Так как F_1 - постоянная матрица, то имеет место соотношение (4) и согласно теореме Перрона система (7) будет правильной по Ляпунову.

Система (8) соответствует линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами $(p^n + s_{n-1}p^{n-1} + \dots + s_0) x(t) = 0$. По условию теоремы максимальный показатель Ляпунова этой системы меньше, чем α . Обозначим этот максимальный показатель как $\gamma (\gamma < \alpha)$. Показатель произвольной фундаментальной системы решений $Y(t)$ системы (7) также равен γ . Так как система (7) правильна по Ляпунову, то для её матрицы Коши имеет место неравенство (5)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists C_1 > 0 \|K(t, \tau)\| \leq C_1 e^{(\gamma+\varepsilon)(t-\tau)+2\varepsilon\tau}, t \geq \tau \geq 0, \quad (9)$$

Пусть показатель $u(t)$ равен δ , тогда, согласно (1)

$$\forall \varepsilon \exists C_2 > 0 |u(t)| \leq C_2 e^{(\delta+\varepsilon)t}, t > 0. \quad (10)$$

Произвольное решение уравнения (6) имеет вид $x(t) = Hy(t)$ где

$$y(t) = Y(t)y(0) + \int_0^t K((t, \tau)Gu(\tau)d\tau = z_0(t) + z_u(t)$$

для некоторого начального условия $y(0)$. Так как показатель γ фундаментальной системы $Y(t)$ меньше чем α , то $z_0(t)$ лежит в пространстве M_α . Рассмотрим второе слагаемое. Учитывая (9) и (10), имеем

$$\|z_u(t)\| \leq C_1 C_2 e^{(\gamma+\varepsilon)t} \int_0^t e^{(-\gamma+2\varepsilon+\delta)\tau} d\tau = \frac{C_1 C_2}{-\gamma+2\varepsilon+\delta} e^{(\gamma+\varepsilon)t} (e^{(-\gamma+2\varepsilon+\delta)t} - 1) =$$

$$\frac{C_1 C_2}{-\gamma + 2\varepsilon + \delta} (e^{(3\varepsilon + \delta)t} - e^{(\gamma + \varepsilon)t}).$$

Так как $\gamma < \alpha$ и $\delta < \alpha$, то в силу произвольности ε всегда можно добиться, чтобы $-\gamma + 2\varepsilon + \delta \neq 0$ и $\max(3\varepsilon + \delta, \gamma + \varepsilon) < \alpha$. Тогда показатель $\|z_u(t)\| < \alpha$ и, следовательно, показатели решений системы (6) будут меньше, чем α .

Дифференцирую систему (6) и, учитывая, что коэффициенты имеют строгий нулевой показатель, получаем, что и все производные решения будут меньше, чем α и, следовательно, принадлежат пространству M_α . Учитывая определение множества $S(M_\alpha)$, завершаем доказательство теоремы.

Выводы. Доказано, что если коэффициенты линейного нестационарного дифференциального уравнения стремятся к устойчивому с некоторой степенью стационарному уравнению, то нестационарное уравнение будет устойчиво с той же степенью в терминах вход/выход. Доказательство базируется на первом методе Ляпунова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
2. Теория показателей Ляпунова и её приложение к вопросам устойчивости. / Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. - М.: Наука, 1966. 576 с.
3. Григорьев В.М. Устойчивость линейных систем в операторной форме// Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных трудов. - Выпуск 2 (10). - Днепропетровск, 2008. - С. 104-112.

Получено 15.12.08.

УДК 62-50: 517.926.4

Григорьев В.М. **Критерий устойчивости в терминах вход-выход линейного нестационарного дифференциального уравнения** // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных трудов. - Выпуск 1 (60). - Днепропетровск, 2009. - С..

В работе показано, что если коэффициенты линейного нестационарного дифференциального уравнения стремятся к устойчивому с некоторой степенью стационарному уравнению, то нестационарное уравнение будет устойчиво с той же степенью в терминах вход-выход. Доказательство базируется на первом методе Ляпунова.

Библ. 3.

УДК 62-50:519.49

Григор'єв В.М. **Критерій стійкості в термінах вхід-вихід лінійного нестационарного диференціального рівняння** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. - Випуск 1 (60). - Дніпропетровськ, 2009. - С..

У роботі показано, що якщо коефіцієнти лінійного нестационарного диференціального рівняння прагнуть до стійкого з деяким ступенем стаціонарного рівняння, то нестационарне рівняння буде стійко з тим же ступенем у термінах вхід-вихід. Доказ базується на першому методі Ляпунова.

Бібл. 4.

УДК 62-50:519.49

Grigor'yev V. M. **Criterion of input-output stability of linear time-varying differential equation** // System technologies. - N 1(60). - Dnepropetrovsk, 2009. - P .

It is shown in work, that if the coefficients of linear time-varying differential equation trend to stable with some degree stationary equation, time-varying equation will be stable with a same degree in terms input-output. Proof based on first Lyapunov method.