УДК 62-50:519.49

В.М. Григорьев

# ФОРМАЛЬНЫЕ ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

*Актуальность темы*. Строгое обоснование понятия передаточной функции для линейной нестационарной системы автоматического управления позволит с единых позиций рассматривать стационарные и нестационарные системы.

Анализ последних исследований.Область применения передаточных функций в теории автоматического управления линейніми стационарными системами чрезвычайно широка. В частности в основе классических частотных методов теории управления лежит аппарат передаточных функций [1]. Существенным является тот факт, что множество передаточных функций образует поле. Это позволяет находить передаточные функции для всевозможных суперпозиций систем: паралельного и последовательного соединения, обратной связи. Строгое математическое обоснование передаточных функций базируется на двух альтернативных подходах: преобразовании Лапласа [2] и алгебраической теории полей частных колец операторов свёртки [3]. Оба подхода накладывают определённые ограничения на постранство сигналов, связанные с интегрируемостью.

*Постановка задачи*. Цель данной работы состоит в введении такого пространства сигналов, которое позволит поставить в соответствие линейной нестационарной системе управления формальную передаточную функцию в виде элемента левого тела частных кольца линейных нестационарных дифференциальных операторов.

Обоснование полученных результатов. Введём пространство сигналов, обеспечивающее существование решения линейного нестационарного дифференциального уравнений с производными в правой части при произвольном входном воздействии из этого пространства.

 ISSN 1562-9945

Рассмотрим множество V подмножеств неотрицательной числовой полуоси $Q_+$ , содержащих конечное число элементов. Положим, что пустое множество лежит в V. Введем ещё одно множество подмножеств из $Q_+$: W **=** { x ¿$Q_+$ **|** ∃ v ¿ V x**=** $Q_+$¿ $\bar{v}$ (v)}, где $\bar{v}$ (v) **=** { y ¿ $Q_+$ | y ¿ v } . Каждый элемент из W можно интерпретировать как неотрицательную числовую полуось с конечным элементов «выколотых» точек. Определим множество вещественных функций $\vec{X}$ каждый элемент **x** из которого обладает следующими свойствами.

1.Область ⊿ (x) определения x принадлежит W.

2.Функция x непрерывна в области своего определения.

3.Производная $p_o$x = $\frac{dx(t)}{dt}$ имеет ⊿ ($p_o$x) ¿ W. Область ⊿ ($p_o$x) включает те точки из ⊿ (x), в которых функция $p_o$x существует и конечна.

4.В W найдется такое зависящее от x множество w, что w¿ ⊿ **(**$p_o^i$x), i=0, 1, 2 …

Иными словами функция x бесконечнодифференцируема**,** за исключением конечного числа точек.

Введем на $\vec{X}$ ¿ $\vec{X}$ отношение ~, полагая, что ∀ x, y¿ $\vec{X}$ x ~ y, если ∀ t ¿ ⊿ (x) ¿ ⊿ (y) x(t) = y(t). Очевидно, что x ~ x и из x ~ y следует y ~ x. Пусть x ~ y и y ~ z, где z ¿ $\vec{X}$ . Если t ¿ ⊿ **(**x**)** ¿ ⊿ **(**z**)** и t¿ ⊿ (y), то x(t) = z(t). Рассмотрим случай, когда t ¿ ⊿ (x) ¿ ⊿ (z), но t ¿ ⊿ (y). По определению $\vec{X}$ $\lim_{\tau\to t}$x($\tau$ )=x(t), $\lim_{\tau\to t}$z($\tau$ )=x(t). Так как ∀ t¿ ⊿ (x)¿ ⊿ (y) ¿ ⊿ (z) x($\tau$ )=y($\tau$ )=z($\tau$ ), то $\lim_{\tau\to t}$y($\tau$ )=x(t), $\lim_{\tau\to t}$y($\tau$ )=z(t). Отсюда x(t) = z(t) и, в целом x ~ z. Следовательно, ~ является отношением эввивалентности и определяет разбиение множества $\vec{X}$ на непересекающиеся смежные классы. Класс, содержащий функцию x, обозначим как [x]. Множество смежных классов обозначим как X. Таким образом, X получается из $\vec{X}$ , если мы отождествим функции, попарно совпадающие на пересечении своих областей определения.

Выделим в $\vec{X}$ произвольное поле функций Q(t), замкнутое относительно дифференцирования. Например, поле дробнорациональных функций. Множество X является линейным пространством над Q(t) со следующими операциями

[x] + [y] = [x + y],

где ⊿ (x + y) = ⊿ (x) ¿ ⊿ (y) и (x + y)(t) = x(t) + y(t) для t ¿ ⊿ (x + y);

-[x] = [-x],

где ⊿ (-x) = ⊿ (x) и (-x)(t) = -x(t) для t ¿ ⊿ (-x);

q[x] = [qx],

где ⊿ (qx) = ⊿ (q) ¿ ⊿ (x) **;**

(qx)(t) =q(t)x(t)

для t ¿ ⊿ (qx).

Здесь x, y ¿ $\vec{X}$ , q¿Q(t). Нулевой элемент $\Theta$ пространства X состоит из функций равных нулю в области своего определения.

Введем на X дифференцирование p, полагая p[x] = [$p_o$x]. Элементы из X, бесконечнодифференцируемы и p является линейным оператором на X.

Определим на X действие множества R линейных нестационарных дифференциальных операторов вида ∀ r ¿ R r **=** $\sum_{i=0} q_i \; p^i$ , где почти все $q_i$ ¿ Q(t) равны нулю.

Рассмотрим на X дифференциальное уравнение с производными в правой части

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(t)x^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i(t)u^{(i)}(t) \quad (x^{(i)} = p^i x,\ u^{(i)} = p^i u),$$

где $a_i$, $b_i$ ¿Q(t), $a_n$ ¿0 или в операторной форме

$$ax = bu \qquad (1)$$

где a = $\sum_{i=0}^{n} a_i p^i$, b = $\sum_{i=0}^{m} b_i p^i$.

Не теряя общности, положим $a_n$ =1 и докажем существование решения x ¿ X в уравнении (1) при ∀ u ¿ X.

При n = 0 из (1) имеем x = bu и очевидно, что x ¿ X. Пусть n > 0. Рассмотрим уравнение (1) над $\vec{X}$

$$\vec{a}\ \vec{x} = \vec{b}\ \vec{u}\ , \quad (\vec{a} = \sum_{i=0}^{n} a_i p_o^i,\ \vec{b} = \sum_{i=0}^{m} b_i p_o^i) \qquad (2)$$

Предположим, что коэффициенты операторов $\vec{a}$ , $\vec{b}$ и функции $\vec{u}$ бесконечнодифференцируемы за исключением

 ISSN 1562-9945

точек из множества $\{t_1, t_2 \ldots t_i, t_{i+1} \ldots t_k\}$, где $0 \le t_1 < t_2 \ldots t_i < t_{i+1} < \ldots < t_k$. Разобъём полуось $Q_+$:

$$Q_+ = \{(t_0, t_1), (t_1, t_2) \ \ldots (t_i, t_{i+1}) \ldots (t_i, t_{i+1}) \},$$

где $t_0 = 0$, и формально обозначим $t_{k+1} = \infty$. При $t_1 = 0$ первый полуотрезок теряет смысл и мы его не рассматриваем. Возьмём произвольный интервал $(t_i, t_{i+1})$. (Строго говоря при $i=0$, $t_1 \neq 0$ мы получим полуотрезок $[t_0, t_1)$ ). Внутри интервала коэффициенты $a_i$, $b_i$ и функция $\vec{u}$, бесконечнодифференцируемы. Зафиксируем точку $\tau_i \in (t_i, t_{i+1})$ и зададимся числами $\tau_{i,0}$, $\tau_{i,1} \ldots \tau_{i,n-1}$. Найдется единственная бесконечнодифференцируемая функция $x_i \in \vec{X}$, $\Delta(x_i) = (t_i, t_{i+1})$, удовлетворяющая при $t \in \Delta(x_i)$ уравнению (2) и начальным условиям $(p_o^l x_i)(\tau_i) = \tau_{i,l}$, $l = \overline{0, n-1}$. Образуем функцию: $\vec{x}(t_1) = x_i(t)$ при $t \in \Delta(x_i)$, $i = \overline{0,k}$. Из определения пространства X вытекает, что $ax = bu$, где $x = [\vec{x}]$ и $u = [\vec{u}]$. Следовательно, введённое пространство сигналов обеспечивает соотношение:

$$\forall\ a \in R \ \ a \neq 0, \forall\ b \in R, \ \forall\ u \in X \ \exists\ x \in X: ax = bu \tag{3}$$

Множество $R_*$, состоящее из ненулевых элементов кольца R линейных нестационарных дифференциальных операторов является множеством левых (правых) знаменателей, т.е. операторы из R обладают левым (правым) кратным в R [4]: $\forall\ r \in R$, $\forall\ s \in R_*$, $\exists\ r_1 \in R$, $\exists\ s_1 \in R_*$, $\exists\ m \in R$

$$s_1\, r = r_1\, s = m \tag{4}$$

$$(rs_1 = sr_1 = m). \tag{5}$$

Соотношение (4) дает возможность применения следующей конструкции дробей для получения левого тела частных $\mathbf{R_q}$ кольца $\mathbf{R}$. Для этого рассмотрим пары ($\mathbf{s, r}$) из $\mathbf{R_*} \times \mathbf{R}$. Будем считать, что ($\mathbf{s_1, r_1}$) эквивалентно ($\mathbf{s_2, r_2}$), если в $\mathbf{R_*}$ существуют такие элементы $\mathbf{u_1}$ и $\mathbf{u_2}$, что $\mathbf{u_1 r_1} = \mathbf{u_2 r_2}$ и $\mathbf{u_1 s_1} = \mathbf{u_2 s_2}$. Это соотношение симметрично, рефлексивно и транзитивно. Обозначая совокупность пар, эквивалентных паре (s, r) в виде левой дроби $s^{-1}r$. Определим

$$s_1^{-1} r_1 + s_2^{-}1 r_2 = (\bar{s}_1 s_2)^{-1} (\bar{s}_2 r_1 + \bar{s}_1 r_2), \tag{6}$$

$$s_1^{-1}r_1 \,.\, s2^{-1}r_2 = (\bar{\bar{s}}_2 s_1)^{-1}(\bar{r}_1 r_2),$$

где $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$, $\bar{\bar{s}}_2 \in R_*$, $\bar{r}_1 \in R$ такие, что $\bar{s}_1 s_2 = \bar{s}_2 s_1$ и $\bar{\bar{s}}_2 r_1 = \bar{r}_1 s_2$. Сумма и произведение определены однозначно и совокупность левых дробей удовлетворяет оределению тела [4]. Тело $R_q$ содержит подкольцо R`, состоящее из элементов $1^{-1}r$, которые находятся в изоморфном соответствии с элементами кольца R. Таким образом, если мы заменим кольцо R` кольцом R, то можем считать, что R является подкольцом кольца $R_{q.}$

Аналогичным образом, на основании соотношения (5) строится правое тело частных, состоящее из дробей $rs^{-1}$, $r \in R$, $s \in R_*$.

Множество $X_0$ называется $R_*$**-**периодическим, если $\forall\ x \in X_0$, $\exists\ r \in R_*\ rx = \Theta$ .

**Предложение**. $X_0$ является абелевой группой, имеющей структуру левого R -модуля.

**Доказательство**. Возьмём в $X_0$ элементы $x_1$ и $x_2$. По определению $X_0$**:** $\exists\ s_i \in R_*\ s_i x_i = 0$, i=1, 2. Из (4) следует, что $\exists\ \bar{s}_1$, $\bar{s}_2 \in R_*\ \ \bar{s}_2 s_1 = \bar{s}_1 s_2 = m$. Отсюда $m(x_1 + x_2) = \bar{s}_2(s_1x_1) + \bar{s}_1(s_2x_2) = \Theta$ , т.е. – абелева группа. Рассмотрим далее $rx_1$, $r \in R$. Из (4) получаем, что $\exists\ r_3 \in R$, $\exists\ s_3 \in R_*\ s_3 r = r_3 s_1$. Тогда $s_3(rx_1) = (s_3 r)x_1 = r_3(s_1x_1) = \Theta$ , т.е $s_3(rx_1) = \Theta$ . **ЧТД**.

Рассмотрим факторгруппу $X/X_0 = \{x + X_0 \mid x \in \mathbf{X}\}$. Сложение в ней определяется как: $(x_1 + X_0) + (x_2 + X_0) = (x_1 + x_2) + X_0$. Нулём в служим группа $X_0$. Для любых $x_1$ и $x_2$ из X $x_1 + X_0 = x_2 + X_0$, если $(x_1 – x_2) \in X_0$. $X/X_0$ является R–модулем с умножением $r(x + X_0) = rx + X_0$, $r \in R_*$.

**Лемма**. Уравнение $ax = X_0$, имеет в $X/X_0$ единстенное решение $\mathbf{x} = X_0$.

**Доказательство**. Так как $aX_0 = X_0$, то $x = X_0$ является решением уравнения. Пусть существует ещё одно решение $\bar{x} = x_1 + X_0$, где $x_1 \in X$**.** Тогда $ax + X_0 = X_0$ и, следовательно, $ax_1 = m$, для некоторого $m \in X_0$. Так как $\exists\ s \in R_*\ sm = \Theta$ , то $sax_1 = \Theta$ и поэтому $x_1 \in X_0$ . ЧТД.

 ISSN 1562-9945

**Теорема**. Абелева группа $X/X_0$ имеет структуру левого $R_q$ – модуля с умножением $ku$, $k \in R_q$, $u \in X/X_0$, определяемым, как решение $x \in X/X_0$ уравнения

$$a\,x = bu \quad (a \in R_*,\ b \in R,\ k = a^{-1}b). \tag{7}$$

**Доказательство**. Пусть $u = u_1 + X_0$, $u_1 \in X$. Согласно (3), уравнение $ay = bu_1$ разрешимо над X. Возьмём любое решение $y_1$ и рассмотрим класс эквивалентности $x = y_1 + X_0$. Из (7) получаем $ax - bu = ay_1 - bu_1 + X_0 = X_0$, т.е. $ax = bu$. Таким образом, решение существует и, в силу леммы, оно единсвенно.

Покажем, что результат умножения $kx$, $k \in R_q$, $x \in X/X_0$ не зависит от представления k. Пусть $k = s_1^{-1}r_1 = s_2^{-1}r_2$. Рассмотрим уравнения

$$s_1\,y_1 = r_1 v, \tag{8}$$

$$s_2\,y_2 = r_2 v, \quad (v,\ y_1,\ y_1 \in X/X_0)$$

Согласно определению эквивалентности элементов в $R_q$, найдутся такие $u_1, u_2 \in R$, что $u_1 s_1 = u_2 s_2 = m$, $u_1 r_1 = u_2 r_2$. Из (8) следует, что $u_1 s_1\, y_1 = u_1 r_1 v$, $u_2 s_2\, y_2 = u_2 r_2 v$. Вычитая уравнения друг из друга, получим $m(y_1 - y_2) = \Theta$. Используя лемму, имеем $y_1 = y_2$. Операция умножения корректна. Покажем, что абелева группа $X/X_0$ удовлетворяет аксиомам левого $R_q$–модуля:

1. $1x_1 = x_1$.
2. $(k_1k_2)x_1 = k_1(k_2x_1)$. (9)
3. $(k_1 + k_2)x_1 = k_1x_1 + k_2x_1$.
4. $k_1(x_1 + x_2) = k_1x_1 + k_1x_2$.

Пусть $k_i = s_i^{-1}r_i$, $s_i \in R_*$, $r_i \in R$, i = 1, 2, . Докажем выполнения соотношения (9) по пунктам:

1.Равенство $1x_1 = x_1$ следует из соотношения (7), в котором **a** = b = 1, $u = x_1$.

2.Согласно (6)

$$k_1k_2 = (\bar{\bar{s}}_2 s_1)^{-1}\,(\bar{r}_1 r_2), \tag{10}$$

где

$$\bar{\bar{s}}_2 r_1 = \bar{r}_1 s_2,\ (\bar{\bar{s}}_2 \in R_*,\ \bar{r}_1 \in R). \tag{11}$$

Результат произведения $y = k_1(k_2x_1)$ является решением y системы $s_1y = r_1z$, $s_2z = r_2x_1$; $y, z, x_1 \in X/X_0$. Обозначим

$$v = s_1 y = r_1 z,\ w = s_2 z = r_2 x_1. \qquad (12)$$

Рассмотрим в (12) равенства $v = r_1 z$, $w = s_2 z$. Умножим их слева на операторы $\bar{s}_2$ и $\bar{r}_1$, определённые в (11): $\bar{s}_2 v = \bar{s}_2 r_1 z$, $\bar{r}_1 s_2 z = \bar{r}_1 w$. Из (11) следует, что $\bar{s}_2 v = \bar{r}_1 w$. Подставляя $v$ и $w$ из (12), получаем $\bar{s}_2 s_1 y = \bar{r}_1 r_2 x_1$. Сравнивая с (10), имеем $y = (k_1 k_2) x_1$.

3.Согласно (6)

$$k_1 + k_2 = (\bar{s}_1 s_2)^{-1} (\bar{s}_2 r_1 + \bar{s}_1 r_2), \qquad (13)$$

где

$$\bar{s}_1 s_2 = \bar{s}_2 s_1,\ (\bar{s}_1, \bar{s}_2 \in R_*). \qquad (14)$$

Соотношение $y = k_1 x_1 + k_2 x_1$ равносильно системе уравнений: $s_1 z_1 = r_1 x_1$, $s_2 z_2 = r_2 x_1$, $y = z_1 + z_2$; $y, x_1, z_1, z_2 \in X/X_0$. Запишем: $\bar{s}_2 s_1 z_1 = \bar{s}_2 r_1 x_1$, $\bar{s}_1 s_2 z_2 = \bar{s}_1 r_2 x_1$, где $\bar{s}_{\mathbf{1}}$ и $\bar{s}_{\mathbf{2}}$ определены в (14). Складывая последние уравнения и учитывая (14), получаем $(\bar{s}_1 s_2 y) \mathbf{=} (\bar{s}_2 r_1 + \bar{s}_1 r_2) x_1$. Сравнивая с (13), имеем $y = (k_1 + k_2) x_1$.

4.Запишем сумму $y = k_1 x_1 + k_1 x_2$ в виде системы уравнений $y = z_1 + z_2$, $s_1 z_i = r_1 x_i$, $z_i \in X/X_0$, $i = 1, 2$. Складывая два последних соотношения, получим $\mathbf{s_1 y = r_1(x_1 + x_2)}$ или $k_1(x_1 + x_2)$. **ЧТД**.

*Выводы.* Доказанная теорема позволяет поставить в соответствие линейной нестационарной системе $ax = bu$, $a, b \in R$, $x, u \in X$, формальную передаточную функцию в виде элемента левого тела частных $R_q$ кольца сигналов линейных нестационарных дифференциальных операторов $R$ : $x = ku = a^{-1}b$, $k \in R_q$, $x, u \in X/X_0$. Сложение в теле соответствует паралельному, а умножение последовательному соединениям систем. Формальные передаточные фунции действуют на пространстве сигналов $X/X_0$, в котором отождествляются функции, разнящиеся друг от друга на функцию, являющуюся решением некоторого линейныого нестационарного дифференциального уравнения.

## ЛИТЕРАТУРА

 ISSN 1562-9945

1.Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1966. - 992 с.

2. Диткин В.А., Прудников А.Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Наука, 1961. - 520 с.

3. Микусинский Я. Операторное исчисление. М.: Наука, 1956. - 380с.

4. Кон П. Свободные кольца и их связи. М.: Мир, 1974. - 424 с.

Получено 17.08.03.