УДК 62-50:519.49

В.М. Григорьев

ЛИНЕЙНЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МАТРИЧНЫЕ ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Получены конструктивные процедуры решения однородных и неоднородных линейных нестационарных дифференциальных матричных операторных уравнений, основанные на приведении матриц к треугольным формам, которое может осуществляться с помощью систем компьютерной алгебры Maple, Reduce, Singular, Gap и т.д.

Ключевые слова: *линейные нестационарные дифференциальные матричные операторные уравнения, приведение матрицы к треугольной форме, Maple, Reduce, Singular, Gap.*

Актуальность темы. Широкий класс объектов и систем управления адекватно представляются в виде системы линейных нестационарных дифференциальных уравнений с производными в правой части. Математическая теория линейных нестационарных многосвязных систем автоматического регулирования основывается либо на использовании методов пространства состояний [1], либо на применении теории матриц над некоммутативным кольцом линейных нестационарных дифференциальных операторов [2]. В рамках операторного подхода анализ и синтез линейных нестационарные систем осуществляется путём решения линейных матричных операторных уравнений.

Анализ последних исследований. Теоретическим основанием работы является линейная алгебра над некоммутативными кольцами [3]

Постановка задачи. Цель работы состоит в получении конструктивных процедур решения однородных и неоднородных линейных нестационарных дифференциальных матричных операторных уравнений.

Обоснование полученных результатов. Рассмотрим кольцо R линейных нестационарных дифференциальных операторов с коэффициентами из произвольного поля функций Q, замкнутого относительно дифференцирования. Операторы действуют в пространстве сигналов, состоящем из бесконечнодифференцируемых**,** за исключением конечного числа точек, функций [4].

Рассмотрим матрицы $A_l \in R^{n\times n}$, $B_l \in R^{n\times m}$ ($A_r \in R^{m\times m}$, $B_r \in R^{n\times m}$). Следуя [5], приведём с помощью элементарных столбцовых (строчных) операций

матрицу $E = |A_l\ B_l|$ ($E = \begin{vmatrix} A_r \\ B_r \end{vmatrix}$) к нижней левой (верхней правой) ступенчатой матрице. Используя следствие из [5], имеем

$$EU = |\ C_l\ 0^{n\times m}\ | \quad (UE = \begin{vmatrix} C_r \\ 0^{nxm} \end{vmatrix}), \tag{1}$$

где $U, U^{-1} \in R^{(n+m)\times(n+m)}$, $C_l \in R^{n\times n}$ ($C_r \in R^{m\times m}$).

Согласно работе [6], матрица C_l (C_r) в (1) является левым (правым) наибольшим общим делителем ЛНОД (ПНОД) матриц A_l и B_l (A_r и B_r). Обозначим

$$U^{-1} = \begin{vmatrix} A_l^{\alpha} & B_l^{\alpha} \\ W & V \end{vmatrix}, \qquad (U^{-1} = \begin{vmatrix} A_r^{\alpha} & W \\ B_r^{\alpha} & V \end{vmatrix}), \tag{2}$$

$$U = \begin{vmatrix} Z & -B_r^{\beta} \\ Y & A_r^{\beta} \end{vmatrix}, \qquad (U = \begin{vmatrix} Z & Y \\ -B_l^{\beta} & A_l^{\beta} \end{vmatrix}), \tag{3}$$

$A_l^{\alpha} \in R^{n\times n}$, $B_l^{\alpha} \in R^{n\times m}$, $W \in R^{m\times n}$, $V \in R^{m\times m}$,

$Z \in R^{n\times n}$, $B_r^{\beta} \in R^{n\times m}$, $Y \in R^{m\times n}$, $A_r^{\beta} \in R^{m\times m}$.

($A_r^{\alpha} \in R^{m\times m}$, $W \in R^{m\times n}$, $B_r^{\alpha} \in R^{n\times m}$, $V \in R^{n\times n}$,

$Z \in R^{m\times m}$, $Y \in R^{m\times n}$, $B_l^{\beta} \in R^{n\times m}$, $A_l^{\beta} \in R^{n\times n}$).

Умножая (1) справа (слева) на матрицу U^{-1}, получим

 ISSN 1562 – 9945

$A_l = C_l A_l^{\alpha}$, $B_l = C_l B_l^{\alpha}$ (4)

($A_r = A_r^{\alpha} C_r$, $B_l = B_r^{\alpha} C_r$)

Рассмотрим однородное матричное уравнение

$$A_l z + B_l y = 0^{n\times k} \qquad (zA_r + yB_r = 0^{k\times m}) \qquad (5)$$

относительно неизвестных матриц $z \in R^{n\times k}$, $y \in R^{m\times k}$ ($z \in R^{k\times m}$, $y \in R^{k\times n}$).

Из соотношения (1) с учётом обозначений (3), получаем частное решение уравнения (5) при k=m (k=n)

$$z = -B_r^{\beta},\ y = A_r^{\beta} \quad (z = -B_l^{\beta},\ y = A_l^{\beta}) \qquad (6)$$

Из обозначений (2) и (3) и соотношения $U^{-1}U = I_{n+m}$ ($UU^{-1} = I_{n+m}$), следует, что $-WB_r^{\beta} + VA_r^{\beta} = I_m$ ($-B_l^{\beta}W + A_l^{\beta}V = I_n$). Согласно работе [6], это означает, что матрицы B_r^{β} и A_r^{β} (B_l^{β} и A_l^{β}) взаимно просты справа (слева).

Для любой матрицы T из $R^{m\times k}$ ($R^{k\times n}$) матрицы

$$z = B_r^{\beta}T,\ y = A_r^{\beta}T \qquad (z = TB_l^{\beta},\ y = TA_l^{\beta})$$

(7)

являются решением уравнения (5) для любого натурального числа k.

Предложение 1. Если в уравнении (5) матрица A_l (A_r) имеет полный ранг, то его общее решение имеет вид (7).

Доказательство. Пусть z и y – произвольное решение уравнения (5). Учитывая (1) и (2), совершим ряд преобразований

$$0^{n\times k} = |A_l\ B_l| \begin{vmatrix} z \\ y \end{vmatrix} = |A_l\ B_l|\, U\, U^{-1} \begin{vmatrix} z \\ y \end{vmatrix} = |\ C_l\ 0^{n\times m}\ | \begin{vmatrix} K \\ * \end{vmatrix}$$

или

$$C_l K = 0^{n\times k},$$

(8)

где

$$K = A_l^{\alpha} z + B_l^{\alpha} y,\ K \in R^{n\times k}.$$

(9)

Согласно (4) $A_l = C_l A_l^{\alpha}$. Так как по условию матрица A_l имеет полный ранг, то, согласно лемме из [5], матрица C_l также имеет полный ранг. Тогда в уравнении (8) $K = 0^{n\times k}$. Обозначая T=Wz-Vy и учитывая (9), запишем

$$\begin{vmatrix} A_l^{\alpha} & B_l^{\alpha} \\ W & V \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z \\ -y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ T \end{vmatrix},$$

(10)

где W и V определены в (2). Умножим (10) слева на U. С учётом принятых в (2) и (3) обозначений, получим соотношение (7).

Предложение 2. Если в уравнении (5) матрица A_l (A_r) имеет полный ранг, то и в соотношении (6) матрица A_r^{β} (A_l^{β}) имеет полный ранг.

Доказательство. В силу обозначений (2), (3) и соотношения $U^{-1}U=I_{n+m}$, имеем

$$\begin{vmatrix} A_l^{\alpha} & B_l^{\alpha} \\ W & V \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -B_r^{\beta} \\ A_r^{\beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0^{nxm} \\ I_m \end{vmatrix}.$$

(11)

Так как первый сомножитель в (11) обратим, ранг второго сомножителя равен m.

$$\mathrm{Rk} \begin{vmatrix} -B_r^{\beta} \\ A_r^{\beta} \end{vmatrix} = m.$$

(12)

Пусть матрица A_r^{β} имеет неполный ранг. Тогда уравнение $A_r^{\beta}x=0^m$ имеет нетривиальное решение $x \in R^m$. Тогда

$$\begin{vmatrix} -B_r^{\beta} \\ A_r^{\beta} \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} a \\ 0^m \end{vmatrix}$$

(13)

для некоторого $a \in R^n$. В силу (12), имеем, что a не равно 0^n. Умножая (13) слева на U^{-1} и учитывая обозначения (2) и (3) получим $A_l^{\alpha}a=0^n$, что означает неполноту ранга матрицы A_l^{α}. Из соотношения (4) $A_l = C_l A_l^{\alpha}$. По условию матрица A_l имеет полный ранг. Согласно лемме из [5], матрица A_l^{α} также имеет полный ранг. Противоречие.

Доказательство для матрицы A_r и A_l^{β} проводится аналогично.

 ISSN 1562 – 9945

Предложение 3. ЛНОД (ПНОД) матриц A_l и B_l (A_r и B_r), где ранг rk A_l равен n (rk A_r =m), определён с точностью до умножения справа (слева) на обратимую над R матрицу.

Доказательство. Пусть

$$A_L = C_i A_i,\ \ B_L = C_i B_i \qquad (14)$$

где $C_i \in R^{nxn}$ - ЛНОД матриц A_L и B_L, i=1,2. Согласно предложению 1, уравнение (5) имеет решение $A_L(-B_r^{\beta}) + B_L A_r^{\beta} = 0^{n\times m}$. Из предложения 2 следует, что rk A_r^{β}= m. Так как rk A_l = n, то согласно лемме из [5], получим, что rk C_i= n и из (14) имеем

$$A_i B_r^{\beta} = B_i A_r^{\beta}. \qquad 15)$$

Рассмотрим второе уравнение в (5), полагая $A_r = A_r^{\beta}$ и $B_r = B_r^{\beta}$. Так как rk A_r = m, то согласно предложению 1, в (15) найдутся такие матрицы T_i, что $A_i = T_i B_l^{\beta}$, $B_i = T_i A_l^{\beta}$, i=1,2. Поскольку матрицы A_i и B_i взаимно просты слева, то $T_i^{-1} \in R^{nxn}$. Отсюда $A_2 = T_2 T_1^{-1} A_1$, $B_2 = T_2 T_1^{-1} B_1$ и тогда в (14) $A_L = C_2 T_2 T_1^{-1} A_1 = C_1 A_1$ и $B_L = C_2 T_2 T_1^{-1} B_1 = C_1 B_1$. Следовательно, $C_1 = C_2 G$, где матрица $G = T_2 T_1^{-1}$ лежит в R^{nxn} и обратима над R.

Доказательство для A_r и B_r проводится аналогично.

Перейдём к матричным линейным неоднородным уравнениям.

Предложение 4. Уравнение $ZA + YB = \Delta$, где Δ, $A \in R^{m\times m}$, $B \in R^{n\times m}$, $A = A_1C$, $B = B_1C$, где $C \in R^{m\times m}$ – ПНОД матриц A и B, имеет хотя бы одно решение $Z \in R^{m\times m}$, $Y \in R^{m\times n}$, тогда и только тогда, когда C является правым делителем матрицы Δ.

Необходимость. Пусть уравнение имеет решение Z и Y. Тогда $ZA_1C + YB_1C = \Delta_1 C = \Delta$, где $\Delta_1 = A_1C + YB_1$.

Достаточность. По условию матрицы A_1 и B_1 взаимно просты справа. Следуя предложению 1 из [6], имеем

$$Z_0A_1 + Y_0B_1 = I_m, \qquad (16)$$

для некоторых $Z_0 \in R^{m \times m}$, $Y_0 \in R^{m \times n}$. Если $\Delta = \Delta_1 C$, то умножая (16) слева на Δ_1 а справа на C получим частное решение исходного уравнения $Z = \Delta_1 Z_0$, $Y = \Delta_1 Y_0$.

Теорема. Предположим, что матрицы $A_r \in R^{m \times m}$, rk $A_r = m$ и $B_r \in R^{n \times m}$, взаимно просты справа. Тогда уравнение

$$ZA_r + YB_r = \Delta, \tag{17}$$

при любой матрице $\Delta \in R^{m \times m}$ имеет хотя бы одно такое решение $Z \in R^{m \times m}$, $Y_0 \in R^{m \times n}$, что

$$d(Y) < d(A_l^{\beta}), \tag{18}$$

где матрица A_l^{β} определена в (3) и d(.) - наивысшая степень дифференциальных операторов в матрице.

Если матрицы A_r и Δ собственные по столбцам [7] и наивысшие степени дифференциальных операторов в столбцах (cd(.)) матриц удовлетворяют соотношениям

$$cd_i(B_r) < cd_i(A_r) = d_i, \tag{19}$$

$$cd_i(\Delta) = k + d_i,\ i = 1,2\ldots m, \tag{20}$$

где $k = d(A_l^{\beta}) - 1$, то все решения уравнения (17), удовлетворяющие неравенству (18), будут таковы, что матрица Z будет полного ранга и правильной по строкам. Причём

$$rd_i(Y) \le rd_i(Z) = k, \quad i = 1,2\ldots m, \tag{21}$$

где $rd_i(Y)$ - наивысшая степень дифференциальных операторов в i-й строке матрицы.

Доказательство. Так как A_r и B_r взаимно просты справа, то согласно [6], найдутся такие матрицы $Z_0 \in R^{m \times m}$, $Y_0 \in R^{m \times n}$, что

$Z_0 A_1 + Y_0 B_1 = I_m$. Отсюда получаем частное решение уравнения (17). Согласно предложению 1, общее решение однородного уравнения $ZA_r + YB_r = 0^{m\times m}$ равно $Z = -TB_l^{\beta}$, $Y = T A_l^{\beta}$, где мат-

 ISSN 1562 – 9945

рицы A_l^{β} и B_l^{β} определены в (3) и T – произвольная матрица из $R^{n \times n}$. Общее решение уравнения (17) примет вид

$$Z= \triangle Z_0 - T B_l^{\beta},\ Y= \triangle Y_0 + T A_l^{\beta}, \qquad (22)$$

Согласно предложению 2 rk A_l^{β}=n. Согласно предложению 4 в [7], найдутся такие матрицы R, Q$\in$ $R^{m \times n}$, что $\triangle Y_0$= Q A_l^{β}+ R и степень d(R) <d(A_l^{β})=k+1. Полагая в (22) T = -Q, получим решение уравнения (17) Y=R, Z= $\triangle Z_0$ +Q B_l^{β}, которое удовлетворяет неравенству (18).

Заметим, что степень решения может быть понижена, если, следуя предложению 1 из [7], сделать матрицу A_l^{β} правильной по строкам.

Следуя [7], и учитывая обозначения (19) и (20), запишем A_r и $\triangle$ в форме

$$A_r=C_A\mathrm{diag}(p^{d1}\ldots p^{dm})+(A_r)_l,\quad cd_i((A_r)_l)< d_i,$$
$$\triangle =C_D\mathrm{diag}(p^{d1+k}\ldots p^{dm+k})+(\triangle)_l,\quad cd_i((\triangle)_l)< d_i+k,\ i=1,2\ldots m, \qquad (23)$$

где C_A и C_D – матрицы коэффициентов при наивысших степенях оператора дифференцирования p дифференциальных операторов в столбцах матриц A_r и $\triangle$.

Матрицу Z представим в виде

$$Z = p^r C_Z + (Z)_l, \qquad (24)$$

где C_Z – матрица коэффициентов и $d((Z)_l)<r$. Подставляя (23) и (24) в (17) и учитывая неравенства (18), (19) и (20), получаем $C_ZC_A\ \mathrm{diag}(p^{d1+r}\ldots p^{dm+r})+D+ YB_r=C_D\mathrm{diag}(p^{d1+k}\ldots p^{dm+k})+(\triangle)_l$ для некоторой матрицы D$\in$ $R^{m \times m}$. Причём $cd_i(D)< d_i+r$, $cd_i(YB_r)< d_i+k$, i=1,2…m. Отсюда имеем r=k и $C_ZC_A=C_D$. По условию матрицы A_r и $\triangle$ собственные по столбцам, что равносильно тому, что матрицы коэффициентов C_A и C_D имеют полный ранг [7]. Тогда и матрица C_Z будет невырожденной. Следовательно, невырожденной будет и матрица Z. Таким образом, матрица Z в (24) будет правильной по строкам со степенями строк $rd_i(Z)=k$, i=1,2…m, а

ISSN 1562- 9945

поскольку имеет место неравенство (18), то справедливо и неравенство (21).

Следствие. В скалярном случае (m=n=1) решение уравнения (17), удовлетворяющее условию (18) единственно. Причём при $d(\Delta)=2d-1$, где $d=d(A_r)$, получаем $d(Y) \leq d(Z)=d-1$.

Доказательство. Пусть существует два решения Y_1, $Y_2 \in R$, удовлетворяющие (18). Согласно (22), имеем

$$Y_1 - Y_2 = T A_l^{\beta}, \tag{25}$$

для некоторого оператора $T \in R$. Из (5) и (6) следует, что $B_l^{\beta} A_r = A_l^{\beta} B_r$. По условию операторы A_r и B_r взаимно просты справа. По построению операторы B_l^{β} и A_l^{β} взаимно просты слева. Тогда

$$d = d(A_r) = d(A_l^{\beta}),\ d(B_r) = d(B_l^{\beta}). \tag{26}$$

Так как, согласно (18) $d(Y) \leq d-1$, то в (25) имеем $d(Y_1 - Y_2) \leq d-1$ и $d(T A_l^{\beta}) \geq d$. Противоречие, следовательно, $Y_1 = Y_2$. Перепишем уравнение (17) $ZA_r = - YB_r + \Delta$. При заданных A_r и B_r и полученном решении Y последнее уравнение имеет единственное решение Z.

В скалярном случае условие (20) с учётом (26) примет вид $d(\Delta)=2d-1$. Тогда в (21) получим $d(Y) \leq d(Z)=d-1$.

Выводы. Получены конструктивные процедуры решения однородных и неоднородных линейных нестационарных дифференциальных матричных операторных уравнений, основанные на приведении матриц к треугольным формам, которое может осуществляться с помощью систем компьютерной алгебры Maple, Reduce, Singular, Gap и т.д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев Ю.Н. Алгебраические методы пространства состояний в теории управления линейными объектами. Обзор

 ISSN 1562 – 9945

зарубежной литературы // Автоматика и телемеханика, 1977. № 3. с. 5-50.

2. Ylinen. An algebraic theory for analysis and synthesis of time-varying linear differentials systems // Acta Politechnica Scandinavica: Math. and Comput., Ser. N 32, Helsinki, 1980. 62 p.

3. Кон П. Свободные кольца и их связи. М.: Мир, 1974. 424 с.

4. Григорьев В.М. Формальные передаточные функции для линейных нестационарных систем // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных трудов. - Выпуск 5 (28). - Днепропетровск, 2004. - с. 3–9.

5. Григорьев В.М. Ранги операторных матриц. // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных трудов. - Выпуск 5 (28). - Днепропетровск, 2004. - с. 15–19.

6. Григорьев В.М. Совместность и эквивалентность линейных нестационарных систем управления // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных трудов. - Выпуск 2 (10). - Дніпропетровськ, 2003. - с. 104–112.

7. Григорьев В.М. Правильные операторные матрицы // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных трудов. - Выпуск 6 (41). - Днепропетровск, 2005. - с. 10–14.

Получено 14.10.09.

УДК 62-50:519.49

Григорьев В.М. Линейные нестационарные дифференциальные матричные операторные уравнения // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных трудов. - Выпуск 5 (4). – Днепропетровск, 2009. - С.

Получены конструктивные процедуры решения однородных и неоднородных линейных нестационарных дифференциальных матричных операторных уравнений, основанные на приведении матриц к треугольным формам, которое может осуществляться с помощью систем компьютерной алгебры Maple, Reduce, Singular, Gap и т.д.

Библ. 7.

УДК 62-50:519.49

Григор'єв В.М. Лінійні нестаціонарні диференціальні матричні операторні рівняння // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. - Випуск 5 (64). - Дніпропетровськ, 2009. - С..

Отримані конструктивних процедури вирішення однорідних і неоднорідних лінійних нестаціонарних диференціальних матричних операторних рівнянь, засновані на приведення матриць до трикутної форми, яка може здійснюватися за допомогою систем комп'ютерної алгебри Maple, Reduce, Singular, Gap і т. і.

Бібл. 7.

УДК 62-50:519.49

Grigor'yev V. M. Linear time-dependent differential matrix operator equation // System technologies. N 5(64). – Dnepropoetrovsk. 2009. - P .

A constructive solution procedure for homogeneous and inhomogeneous linear nonstationary differential matrix operator equations based on the reduction of matrices to triangular forms, which may be implemented by computer algebra systems Maple, Reduce, Singular, Gap, etc.

Bibl.7