УДК 62-50:519.49

В.М. Григорьев

СОВМЕСТНОСТЬ И ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Актуальность темы. Вопросы анализа совместности и эквивалентности систем входят в число задач математической теории систем, с необходимостью возникающих при анализе объектов управления и синтезе систем управления.

Анализ последних исследований. В рамках операторного подхода к решению задач анализа и синтеза линейные нестационарные системы или объеты управления представляются либо в виде Ax =Bu, либо а виде x = Bz, Az =u, где A и B –операторные матрицы, u - вход, y - выход, z - неизмеряемые выходы. В работе [1] получены условия эквивалентности представлений системы для каждого из двух способов в отдельности. Однако не изучены вопросы эквивалентности представления одной системы в двух различных формах. В работе [1] получены также достаточные условия совместности систем в виде полноты ранга матрицы A.

Постановка задачи. Получить необходимые и достаточные условия совместности и эквивалентности линейных нестационарных систем управления, выраженные в терминах рангов и взаимной простоты матриц над некоммутативным кольцом линейных нестационарных дифференциальных операторов.

Обоснование полученных результатов. В качестве модели линейной нестационарной системы управления (ЛНСУ) будем использовать систему линейных нестационарных дифференциальных уравнений, записаную в операторной фоме

$$A_l x = B_l u,$$

(1)

где $A_l \in R^{n\times n}$, $B_l \in R^{n\times m}$, $u \in X^m$. Здесь R – кольцо линейных нестационарных дифференциальных операторов с коэффициентами из произвольного поля функций Q, замкнутого относительно дифференцирования, X - пространстве сигналов, состоящее из бесконечнодифференцируемых**,** за исключением конечного числа точек, функций [2].

Исследуем условия совместности системы (1), то есть найдём, какие ограничения должны выполняться для матриц A_l и B_l, чтобы при $\forall u \in X^m$ система имела решение $x \in X^n$.

Лемма. Множество пар (x, u), удовлетворяющих систему (1) не изменится, если её умножить слева на произвольную обратимую над R матрицу $U \in R^{n \times n}$.

Доказательство. Если $A_l x_1 = B_l u_1$, где $x_1 \in X^n$, $u_1 \in X^m$, то для $U \in R^{n \times n}$ $A_2 x_1 = B_2 u_1$, где $A_2 = UA_l$, $B_2 = UB_l$. Пусть $U^{-1} \in R^{n \times n}$ и $A_2 x_2 = B_2 u_2$, где $x_2 \in X^n$, $u_2 \in X^m$. Умножая последнее равенство слева на U^{-1}, получим $A_l x_2 = B_l u_2$. Ч.Т.Д.

Теорема 1. Для совместности системы (1) необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы A_l был равен рангу расширенной матрицы $|A_l \ \ B_l|$.

Доказательство. Приведём матрицу в (1) к верхней правой ступенчатой (ВПС) матрице [3] $A_2 = UA_l$, где U, $U^{-1} \in R^{n \times n}$. Умножим систему (1) слева на матрицу U

$$A_2 x = B_2 u \ , \qquad (2)$$

где $A_2 = UA_l$, $B_2 = UB_l$.Согласно Лемме, такие действия не изменят множества пар (x, u), удовлетворяющих систему (1). Не изменятся и ранги (rk) матриц A_l и $|A_l \ \ B_l|$, причём ранг матрицы A_l равен числу ненулевых строк в матрице A_2 [3].

Необходимость. Умножим слева матрицу $C = |A_l \ \ B_l|$ на обратимую над R матрицу $T \in R^{n \times n}$, приводящую C к ВПС-матрице C_2. Если rk C = l, то число ненулевых строк в матрице C_2 равно l, а значит, ранг матрицы TA_l, а следовательно и A_l, не может привышать l. Пусть $\mathrm{rk}\, A_l < \mathrm{rk}\, |A_l \ \ B_l|$, но система совместна. Тогда в (2) число ненулевых строк в матрице B_2 больше, чем у матрицы A_2. Следовательно, имеет место соотношение $\sum_{j=1}^{m} b_{k+1,j} u_j = 0$, l = 1, 2… l-k, где $(u_1, u_2 \ldots u_m) = u^T$, $k = \mathrm{rk}\, A_l$, из которого следует, что u должно быть решением некоторой однородной системы, т.е. не может быть произвольным. Противоречие. Следовательно, $rk\ A_l = rk\ |A_l\ \ B_l|$.

Достаточность. Пусть $rk\ A_l = rk\ |A_l\ \ B_l| = r$. Распишем r–ю строку уравнения (2), которая будет первой ненулевой строкой снизу: $\sum_{i=0}^{n-s} a_{r,s+i}x_{s+i} = \sum_{i=0}^{m} b_{r,i}u_i$, где $s \geq r$ – номер первого ненулевого элемента в r–й строке матрицы A_2. Фиксируя для $x_{s+1}, x_{s+2}...x_n, u_1, u_2...u_m$ произвольные элементы из X, получаем уравнение

$$a_{r,s}x_s = -\sum_{i=1}^{n-s} a_{r,s+i}x_{s+i} + \sum_{i=1}^{m} b_{r,i}u_i, \qquad (3)$$

которое согласно [2], всегда имеет решение в X. Рассматривая (r-1)–ю строку системы (2), имеем

$$a_{r-1,s}x_s = -\sum_{i=1}^{n-l} a_{r-1,l+i}x_{l+i} + \sum_{i=1}^{m} b_{r-1,i}u_i, \qquad (4)$$

где $l \geq r-1$– номер первого ненулевого элемента в (r-1)–й строке матрицы A_2. Взяв в (4) для $x_{l+1}, x_{l+2}\ ...\ x_{s-1}$ произвольные элементы из X, а для $x_s, x_{s+1}...x_n, u_1, u_2...u_m$ функции из уравнения (3), найдём, используя [2], решение x_l. Продолжая процесс до первой строки включительно, получим решения $x_k, x_{k+1}\ ...\ x_{l-1}$, где k – номер первого ненулевого элемента в первой строке A_2. Для $x_1, x_2...x_{k-1}$, возьмём любые функци из X. Ч.Т.Д.

В качестве моделей ЛНСУ рассмотрим также последовательное соединение двух систем:

$$x = B_r z,\ A_r z = u, \qquad (5)$$

где $x \in X^n$, $u \in X^m$, $B_r \in R^{n \times m}$, $A_r \in R^{m \times m}$.

Следствие. Если в системе (1) $rk\ A_l = n$ (соответственно в (5) $rk\ A_r = m$) , то она совместна при произвольной матрице B_l (B_r).

Исследуем эквивалентность систем (1) и (5), определяемую следующим образом.

Определение 1. Зафиксируем в X^m произвольную вектор-функцию u. Системы (1) и (5), эквивалентны, если:

1) Для любого решения x уравнения (1) во втором уравнении системы (5) найдётся такое решение z , что $x = B_r z$.

2) Для любого решения z второго уравнения в (5), система (1) имеет решение $x = B_r z$.

Перед доказательством теоремы об эквивалентности приведём ряд сведений из теории матриц над кольцом линейных нестационарных дифференциальных операторов R, касающихся канонических форм и общих делителей.

Канонические формы. Пусть $C \in R^{n\times n}$ и rk C = n. Приведём C к ВПС-матрице D = UC, где U - элементарная строчная матрица. Матрица U обратима, следовательно rk D =n . Отсюда D– есть верхнетреугольная матрица с ненулевыми диагональными элементами. Рассмотрим в D элемент $d_{2,2}$. Если $d(d_{2,2}) \leq d(d_{1,2})$, то применим левый алгоритм деления: $d_{1,2} = cd_{2,2} + l$, c, l $\in$ R, $d(l)<d(d_{2,2})$. Здесь d(.) – степень дифференциальгого оператора. Вычтем из первой строки вторую, умноженную слева на c. Рассмотрим элемент $d_{2,2}$. Если $d(d_{3,3}) \leq d(d_{2,3})$ и/или $d(d_{3,3}) \leq d(d_{1,3})$, то используя левый алгоритм деления: $d_{1,3} = c_1 d_{3,3} + l_1$, $d_{2,3} = c_2 d_{3,3} + l_2$, c_i, $l_i \in$ R, $d(l_i)<d(d_{3,3})$, i=1, 2. Вычтем из первой и/или второй строки третью строку, умноженую на c_1 и c_2 соответственно. Продолжая этот процесс вплоть до элемента $d_{n,n}$ включительно, получим матрицу, у которой степень (i, i)–го элемента выше степени (j, i)–го элемента, j<i, i=2…n. Применяя вторую строчную операцию, сделаем диагональные элементы матрицы моническими операторами у которых коэффициенты при старших степенях оператора дифференцирования равны единице. Полученную матрицу обозначим как F. Причём F = VD, где V, $V^{-1} \in R^{n\times n}$. В целом F =LC, где L =VU, L, $L^{-1} \in R^{n\times n}$.

Покажем, что полученная верхнетреугольная матрица F определена единственым образом. Доказательство производится аналогично стационарному случаю [4]. Пусть ${}_1F = L_1 C$ и ${}_2F = L_2 C$, где ${}_iF$ получены из матрицы C указанным выше способом и L_i, $L_i^{-1} \in R^{n\times n}$, i=1, 2. Тогда: ${}_1F = T^{1,2}\,{}_2F$, ${}_2F = T^{2,1}\,{}_1F$, где $T^{1,2} = L_1 L_2^{-1}$, $T^{2,1} = L_2 L_1^{-1}$. $T^{1,2}$,$(T^{1,2})^{-1}$, $T^{2,1}$, $(T^{2,1})^{-1} \in R^{n\times n}$.

Так как ${}_1F$ и ${}_2F$ веерхнетреугольная матрица, то такими же будут и матрицы $T^{1,2}$ и $T^{2,1}$. Рассмотрим в ${}_1F$ и ${}_2F$ диагональные элементы: ${}_1f_{j,j} = (t^{1,2})_{j,j}\,{}_2f_{j,j}$, ${}_2f_{j,j} = (t^{2,1})_{j,j}\,{}_1f_{j,j}$, j = 1,2…n. Отсюда

$d({}_1f_{j,j}) = d({}_2f_{j,j})$ и $d((t^{1,2})_{j,j}) = d((t^{2,1})_{j,j})$, а так как ${}_1f_{j,j}$, ${}_2f_{j,j}$ – монические операторы, то $(t^{1,2})_{j,j} = (t^{2,1})_{j,j} = 1$ и ${}_1f_{j,j} = {}_2f_{j,j}$, $j = 1, 2…n$. Возьмём в ${}_1F$ второй столбец. Так как $(t^{1,2})_{1,1} = 1$, то ${}_1f_{1,2} = {}_2f_{1,2} + (t^{1,2})_{1,2}\,{}_2f_{2,2}$. Пусть $(t^{1,2})_{1,2} \neq 0$. По построению ${}_2F$ $d({}_2f_{1,2}) < d({}_2f_{2,2})$. Следовательно $d({}_1f_{1,2}) \geq d({}_2f_{2,2})$. Однако ${}_1f_{2,2} = {}_2f_{2,2}$, тогда $d({}_1f_{1,2}) \geq d({}_1f_{2,2})$, что противоречит структуре матрицы ${}_1F$. Отсюда $(t^{1,2})_{1,2} = 0$ и ${}_1f_{1,2} = {}_2f_{1,2}$. Перейдём в к третьему столбцу. Учитывая, что $(t^{1,2})_{1,2} = 0$, $(t^{1,2})_{2,2} = (t^{1,2})_{3,3} = 1$, имеем ${}_1f_{1,3} = {}_2f_{1,3} + (t^{1,2})_{1,3}\,{}_2f_{3,3}$. Пусть $(t^{1,2})_{1,3} \neq 0$. Так как $d({}_2f_{1,3}) < d({}_2f_{3,3})$, то $d({}_1f_{1,3}) \geq d({}_2f_{3,3})$, но ${}_1f_{3,3} = {}_2f_{3,3}$. Противоречие. Следовательно $(t^{1,2})_{1,3} = 0$ и ${}_1f_{1,3} = {}_2f_{1,3}$. Далее получаем, что $(t^{1,2})_{2,3} = 0$ и ${}_1f_{2,3} = {}_2f_{2,3}$. Рассуждая аналогично для последующих столбцов, доказываем, что ${}_1F = {}_2F$.

Доказанная единственность матрицы F позволяет назвать F верхней правой канонической формой (ВПКФ) матрицы C. Используя элементарные строчные операции, аналогичным образом определим левую нижнюю каноническую форму (НЛКФ) матрицы C.

Пусть матрица C обратима над R. Обратная к F матрица $E \in R^{n\times m}$ будет верхнетреугольной. Отсюда $e_{i,i}f_{i,i} = 1$ и $d(e_{i,i}) = d(f_{i,i}) = 0$, $i = 1,2…n$, а так как $f_{i,i}$ - монические операторы, то $e_{i,l} = 1$. По построению, структура матрицы F такова, что $d(f_{j,i}) < d(f_{i,i})$, $i=2, 3…n$, $j<i$. Отсюда $F = I_n$. L является элементарной строчной матрицей. Следовательно, такой же будет и матрица $C = L^{-1}$. Приводя матрицу C к НЛКФ, можно показать, что C является элементарной столбцовой матрицей. Следовательно, доказано, что такие свойства матриц над R как элементарность по строкам, столбцам и обратимость над R являются эквивалентными понятиями.

Наибольшие общие делители. Необратимая над R матрица $C_l \in R^{n\times n}$ ($C_r \in R^{m\times m}$) называется левым (правым) наибольшим общим делителем (ЛНОД) (соответсвенно ПНОД) матриц $A_l \in R^{n\times n}$, $B_l \in R^{n\times m}$ ($A_r \in R^{m\times m}$, $B_r \in R^{n\times m}$), если C_l (C_r) является общим левым (правым) делителем A_l и B_l (A_r и B_r):

$$A_l = C_l A_l^{\alpha},\ B_l = C_l B_l^{\alpha}\ (A_l^{\alpha} \in R^{n\times n},\ B_l^{\alpha} \in R^{n\times m}) \quad (6)$$

$$((A_r = A_r^{\alpha} C_r,\ B_r = B_r^{\alpha} C_r)\ (A_r^{\alpha} \in R^{m\times m},\ B_r^{\alpha} \in R^{n\times m})),$$

а все общие левые (правые) делители A_l^{α} и B_l^{α} (A_r^{α} и B_r^{α}) обратимы над R. A_l и B_l (A_r и B_r) взаимно просты слева (справа), если все их левые (правые) делители обратимы над R.

Предложение 1. Матрицы A_l и B_l (A_r и B_r) взаимно просты слева (справа) тогда и только тогда, когда существуют такие матрицы $Z \in R^{n\times n}$, $Y \in R^{m\times n}$ ($Z \in R^{m\times m}$, $Y \in R^{m\times n}$), что

$$A_l Z + B_l Y = I_n \qquad (ZA_r + Y B_r = I_m) \quad (7)$$

Достаточность. Пусть выполнено соотношение (7) и матрицы A_l и B_l имеют общий делитель C_l. Тогда в (7) $A_l Z + B_l Y = I_n = C_l D$, где $D = A_l^{\alpha} Z + B_l^{\alpha} Y$. Отсюда следует обратимость делителя C_l.

Для правого случая доказательство аналогично.

Необходимость. Пусть A_l и B_l взаимно посты слева. Воспользовавшись следствием из [3], имеем

$$|A_l\ B_l| U = |D\ 0^{n\times m}| \quad (8)$$

где U, $U^{-1} \in R^{(n+m)\times(n+m)}$. Умножим (8) справа на U^{-1}. С учётом обозначений $U^{-1} = \begin{vmatrix} A_l^{\alpha} & B_l^{\alpha} \\ * & * \end{vmatrix}$ получим $A_l = D A_l^{\alpha}$, $B_l = D B_l^{\alpha}$. По определению $D^{-1} \in R^{n\times n}$. Обозначая $U = \begin{vmatrix} Z_1 & * \\ Y_1 & * \end{vmatrix}$ из (8) получим $A_l Z_1 + B_l Y_1 = D$. Умножая справа последнее соотношение на D^{-1}, приходим к равенству (7).

Правый аналог предложения доказывается подобным образом путём приведения матрицы $\begin{vmatrix} A_r \\ B_r \end{vmatrix}$ к ВПС-матрице $\begin{vmatrix} D \\ 0^{nxm} \end{vmatrix}$.

Укажем способ нахождения наибольших общих делителей.

Предложение 2. Рассмотрим матрицу $E = |A_l\ B_l|$ ($E = \begin{vmatrix} A_r \\ B_r \end{vmatrix}$). Используя следствие из [3], имеем

$$EU = |\ C_l\ 0^{n\times m}\ | \quad (UE = \begin{vmatrix} C_r \\ 0^{nxm} \end{vmatrix}), \quad (9)$$

где $U, U^{-1} \in R^{(n+m)\times(n+m)}$, $C_l \in R^{n\times n}$ ($C_r \in R^{m\times m}$). Тогда матрица C_l (C_r) в (9) является ЛНОД (ПНОД) матриц A_l и B_l (A_r и B_r).

Доказательство. Обозначим

$$U^{-1} = \begin{vmatrix} A_l^\alpha & B_l^\alpha \\ W & V \end{vmatrix} \qquad \left(U^{-1} = \begin{vmatrix} A_r^\alpha & W \\ B_r^\alpha & V \end{vmatrix}\right) \qquad (10)$$

$$U = \begin{vmatrix} Z & -B_r^\beta \\ Y & A_r^\beta \end{vmatrix} \qquad \left(U = \begin{vmatrix} Z & Y \\ -B_l^\beta & A_l^\beta \end{vmatrix}\right) \qquad (11)$$

Используя (9), имеем $A_lZ + B_lY = C_l$ ($ZA_r + YB_r = C_r$). Умножая (9) справа (слева) на U^{-1}, получим

$$A_l = C_l A_l^\alpha,\ B_l = C_l B_l^\alpha \qquad (12)$$

$$(A_r = A_r^\alpha C_r,\ B_r = B_r^\alpha C_r)$$

Так как, $U^{-1}U = I_{n+m}$ ($UU^{-1} = I_{n+m}$), то $A_l^\alpha Z + B_l^\alpha Y = I_n$ ($Z A_r^\alpha + Y B_r^\alpha = I_m$). Согласно предложению 1, это означает, что A_l^α и B_l^α (A_r^α и B_r^α) взаимно просты слева (справа). Из (12) следует, что C_l (C_r)– ЛНОД (ПНОД) матриц A_l и B_l (A_r и B_r). Ч.Т.Д.

Теорема 2**. Системы (1) и (5) эквивалентны тогда и только тогда, когда матрицы** A_l **и** B_l **взаимно просты слева и выполнено соотношение**

$$A_lB_r = B_lA_r\ . \qquad (13)$$

Необходимость. Пусть $C_l \in R^{n\times n}$- ЛНОД матриц A_l **и** B_l. Тогда $A_l = C_l A_l^\alpha$, $B_l = C_l B_l^\alpha$, где A_l^α **и** B_l^α– взаимно просты слева. Так как rk A_l = n, то из леммы в [3] имеем rk C_l =n. Обозначим $x_1 = A_lx$. Тогда в (1) $C_lx_1 = B_lu$ или $C_l(x_1 - {}^{C}B_lu) = 0^n$. Определяя $y = x_1 - {}^{C}B_lu$, получим следующее представление для системы (1)

$$A_l^\alpha x = B_l^\alpha u,\ C_ly = 0^n. \qquad (14)$$

Следовательно, левому общему делителю соответствует подсистема без входа. Возьмём в X^m произвольный ненулевой элемент z. Вычислим в (5) $x = B_rz$, $u = A_rz$. По определению 1 функции x и u должны удовлетворять уравнению (1). Подставляя x и u в (14), получаем

$$y = Mz, \qquad (15)$$

где

$$M = B_l^\alpha A_r - A_l^\alpha B_r. \qquad (16)$$

При $M \neq 0^{n \times m}$ z должен удовлетворять уравнению (15), где y, согласно (14), есть решение уравнения $C_l y = 0^n$, что противоречит произвольности z. Следовательно $M = 0^{n \times m}$. Тогда $y = 0^n$, т.е. уравнение $C_l y = 0^n$ имеет в X лишь тривиальное решение.

Обозначим ВПКФ матрицы C_l как C. Если $\exists$ i: $d(c_{i,i})>0$, i=1, 2…n, то уравнение $Cy = 0^n$ имеет нетривиальные решения, которые, согласно лемме, совпадают с решениями уравнения $C_l y = 0^n$. Отсюда $c_{i,i} = 1$ и $C = I_n$. Следовательно A_l и B_l взаимно просты слева и $A_l = A_l^{\alpha}$ и $B_l = B_l^{\alpha}$. Из (16) имеем равенство (13).

Достаточность. Приведём матрицу $| A_l \;\; B_l|$ к ВПС-матрице. Так как A_l и B_l взаимно просты слева, то согласно предложению 2, $\exists U \in R^{(n+m) \times (n+m)}$: $| A_l \;\; B_l| U = | I_n \;\; 0^{nxm}|$, $U^{-1} \in R^{(n+m) \times (n+m)}$. Из (13), с учётом обозначений (10) и (11), имеем, что

$$B_r = B_r^{\beta} T \text{ и } A_r = A_r^{\beta} T \qquad (17)$$

для некоторой матрицы $T \in R^{m \times m}$. Так как rk A_r = m, то из лемы в [3] следует, что rk A_r^{β} = rk T = m.

Определим функцию как любое из решений уравнения

$$Tz = -Wx + Vu, \qquad (18)$$

где x и u удовлетворяют систему (1). Запишем (1) совместно с (18):

$$\begin{vmatrix} 0^{nxm} & A_l \\ T & W \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z \\ x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_l \\ V \end{vmatrix} u$$

(19)

Умножим это соотношение слева на U. Так как $UU^{-1} = I_{n+m}$, то из (10), (11) и (14) имеем

$$\begin{vmatrix} -B_r & I_n \\ A_r & 0^{mxn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z \\ x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0^{nxm} \\ I_m \end{vmatrix} u$$

(20)

или $x = B_r z$, $A_r z = u$, т.е. имеет место пункт 1 определения 1.

Запишем систему (5) в виде (20). Умножим (20) слева на U^{-1}. Используя (10), (11) и (17), получаем соотношение (19). Отсюда $A_l x = B_l u$, где, согласно (20), $x = B_r z$. Таким образом, справедлив пункт 2 определения 1. Ч.Т.Д.

Выводы.

1) Пусть A_l и B_l взаимно посты слева. Тогда общая форма матриц в системах вида (5), эквивалентных системе (1), имеет вид (17).

2) Любая система (5) имеет эквивалентное представление в форме (1).

3) Система (1) имеет эквивалентную ей систему(5) тогда и только тогда, когда A_l и B_l взаимно посты слева.

4) Если A_r и B_r взаимно посты справа, то все системы $x = B_rTz$, $A_rTz = u$, $T\in R^{m\times m}$, rk T =m эквивалентны по x и u.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ylinen. An algebraic theory for analysis and syntesis of time-varying linear differentials systems // Acta Politechnica Scandinavica: Math. and Comput. Ser. N 32. Helsinki, 1980. 62 p.
2. Григорьев В.М. Формальные передаточные функции для линейных нестационарных систем // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных трудов. - Выпуск 5 (28). - Дніпропетровськ, 2004. - С. 3–9.
3. Григорьев В.М. Ранги операторных матриц. // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных трудов. - Выпуск 5 (28). - Дніпропетровськ, 2004. - С. 15–19.
4. Лузин Н.Н. К изучению матричной теории дифференциальных уравнений // Автоматика и телемеханика. 1940. № 5. С. 4 – 66.

УДК 62-50:519.49

Григорьев В.М. Совместность и эквивалентность линейных нестационарных систем управления // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных трудов. - Выпуск 2 (10). - Дніпропетровськ, 2003. - С. 104–112.

Получены необходимые и достаточные условия совместности и эквивалентности линейных нестационарных систем управления, выраженные в терминах рангов и взаимной простоты матриц над некоммутативным кольцом линейных нестационарных дифференциальных операторов

Библ. 4.

УДК 62-50:519.49

Григор'єв В.М. Сумістність та эквівалентність лінійних нестаціонарних систем керування // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. - Випуск 2 (10). - Дніпропетровськ, 2003. - С. 104–112.

Здобуті необходні та достатні умови сумістності та эквівалентності лінійних нестаціонарних систем керування, выражені в термінах рангів и взаємної простоти матриць над некоммутативним кільцем лінійних нестаціонарних діфференціальних операторів

Бібл. 4.

УДК 62-50:519.49

Grigor'yev V. M. Compatibility and equivalence of linear non-stationary control systems // System technologies. N 2(10). – Dnepropoetrovsk. 2003. - P .

The necessary and sufficient conditions compatibility and equivalence of linear non-stationary control systems expressed in the terms of ranks and mutual simplicity of matrixes above non-commutative ring of the linear non-stationary differential operators are received