УДК 62-50:519.49

В.М. Григорьев

РАНГИ ОПЕРАТОРНЫХ МАТРИЦ

Актуальность темы. Понятие ранга является фундаментальным понятием теории матриц над любой алгебраической структурой.

Анализ последних исследований. Математическая теория линейных нестационарных многосвязных систем автоматического регулирования основывается либо на использовании методов пространства состояний [1], либо на применении линейной алгебры над некоммутативным кольцом линейных нестационарных дифференциальных операторов [2]. В обеих случаях широко используется понятие ранга матрицы.

Постановка задачи. Предложить конструктивную процедуру определения ранга операторной матрицы над некоммутативным кольцом линейных нестационарных дифференциальных операторов.

Обоснование полученных результатов. На пространстве сигналов X, состоящем из бесконечнодифференцируемых**,** за исключением конечного числа точек, функций, определим действие элементов множества R линейных нестационарных дифференциальных операторов вида

$$\forall r \in R \quad r = \sum_{i=0} q_i p^i , \tag{1}$$

где почти все $q_i \in Q(t)$ равны нулю, Q(t) - произвольное поле функций, замкнутое относительно дифференцирования p=d/dt. Целое число $n = \max_i(q_i \neq 0)$ называется степенью оператора из (1) и будет обозначаться как d(r). Причём полагают $d(0) = -\infty$.

Сложение в R осуществляется обычным образом путём суммирования коэффициентов при одинаковых степенях p. Для получения правила умножения в R определим линейный оператор (pq)x = p(qx), $q \in Q(t)$, $x \in X$. Дифференцируя произведение, имеем p(qx) = qpx + q’x = (qp + q’)x или

$$\forall q \in Q(t) \quad pq = qp + q'. \tag{2}$$

 ISSN 1562-9945

Используя формулу Лейбница и соотношение (2), получим

$$\forall\, q \in Q(t) \quad p^n q = \sum_{i=0}^{n} C_n^i\, q^{(n-i)} p^i\,, \qquad (3)$$

где C_n^i - число сочетаний из n по i. Применяя правило (3), произведение опрераторов из R можно записать в виде (1), т.е. множество R замкнуто относительно сложения и умножения и удовлетворяет аксиомам кольца.

Так как Q(t) **– поле, то** R является областью целостности: $\forall r_1, r_2 \in R$ из $r_1 r_2 = 0$ следует, что $r_1 = 0$ или $r_2 = 0$. Следовательно, степень d(.), обладает следующими свойствами: $\forall r_1, r_2 \in R$

$$d(r_1 + r_2) \le \max(d(r_1), d(r_2))\,, \qquad (4)$$

$$d(r_1 r_2) = d(r_1) + d(r_2).$$

В кольце R выполняется левый алгоритм деления:

$$\forall a, b \in R, b \ne 0\ \exists c, d \in R\ a = cb + d,\ d(d) < d(b) \qquad (5)$$

Деление производится подобно делению обычных многочленов – «уголком» - но, при вычислении промежуточных остатков, используется правило (3).

Пусть существуют $c_i, d_i \in R$ $i = 1, 2$, удовлетворяющие (5): $a = c_1 b + d_1$, $a = c_2\, b + d_2$. Вычитая из первого уравнения второе, получим
$(c_1 - c_2)b = d_1 - d_2$. Так как $d(d_i) < b$, $i = 1, 2$, то, согласно (4), последнее неравенство выполнимо лишь при $c_1 = c_2$ и $d_1 = d_2$. Следовательно результат деления определён единственным образом.

Аналогичным образом доказывается единственность результата правого алгоритма деления:

$$\forall a, b \in R, b \ne 0\ \exists c, d \in R\ a = bc + d,\ d(d) < d(b) \qquad (6)$$

Каждая матрица $C \in R^{n \times m}$ определяет линейное отображение из X^m в X^n: $\forall x \in X^m\ Cx \in X^n$.

Следующие действия над строками (столбцами) матрицы C из $R^{n \times m}$ называются элементарными строчными (столбцовым) опрерациями:

1. Перестановка строк (столбцов).
2. Умножение строки (столбца) слева (справа) на ненулевую функцию из Q(t).
3. Прибавление к i-й строке (столбцу) j-й строки (столбца), умноженной слева (справа) на любой элемент из R, $i \neq j$.

Матрица называется верхней правой (нижней левой) ступенчатой (в дальнейшем, соответственно, ВПС и НЛС матрица), если выполняются следующие условия:

1) если i-я строка (i-й столбец) нулевая (нулевой), то (i+1)-я строка ((i+1)-й столбец) также нулевая (нулевой),

2) если первые ненулевые элементы i-й и (i+1)-й строк (i-го и (i+1)-го столбца) располагаются в столбцах (строках) с номерами k_i и k_{i+1}, соответственно, то $k_i < k_{i+1}$ ($k_i > k_{i+1}$).

Предложение 1. Каждая матрица над R с помощью элементарных строчных (столбцовых) опрераций может быть приведена к ВПС (НЛС) матрице.

Доказательство. Возьмём первый ненулевой столбец. Если он содержит более одного ненулевого элемента, то возьмём среди них любые два a_1 и b_1. Пусть они располагаются в i-й и j-й строках соответственно и $d(a_1) \leq d(b_1)$. Используя (5), разделим b_1 слева на a_1: $b_1 = ca_1 + q$, $c, q \in R$, $d(q) < d(a_1)$. Вычтем из j-й строки i-ю, умноженную слева на c. j-й элемент в этом столбце теперь будет иметь степень меньшую, чем степень i-го элемента в этом же столбце. Снова возьмём в этом столбце два элемента a_2 и b_2, $d(a_2) \leq d(b_2)$. Разделим b_2 слева на a_2 и применим 3-ю строчную операцию. Продолжая этот процесс, в итоге получим в столбце один ненулевой элемент. Переставим, если нужно, строку, содержащую этот элемент, с первой строкой. Вычеркнем первую строку и применим описаную процедуру к полученной подматрице. Действуя подобным образом, окончательно получим ВПС матрицу.

Приведение матрицы к НЛС форме проводится аналогично с использованием правого алгоритма деления (6) и элементарных столбцовых операций. ЧТД.

ISSN 1562-9945

Матрица, полученная путём последовательного применения элементарных строчных (столбцовых) операций над R к единичной матрице называется элементарной строчной (столбцовой) матрицей. Элементарные операции обратимы. Следовательно, обратимыми будут и элементарные матрицы. Последовательность элементарных строчных (столбцовых) операций над матрицей может быть выполнена путём её умножения слева (справа) на соответствующую элементарную строчную (столбцовую) матрицу. Таким образом из Предложения 1 имеем:

Следствие. Для $C \in R^{n \times m}$ существует такая обратимая на R матрица $U \in R^{n \times n}$ ($U \in R^{m \times m}$), что UC (CU) будет ВПС (НЛС) матрицей. Причём если n > m (n <m), то

$$UC = \begin{vmatrix} D \\ 0^{(n-m)xm} \end{vmatrix},\ (CU = |\ D\ 0^{nx(m-n)}|),\ D \in R^{m \times m}\ (D \in R^{n \times n}).$$

Введём множество R_*, состоящее из ненулевых элементов кольца R. R_* является множеством левых (правых) знаменателей, и операторы из R обладают левым (правым) кратным в R [3]: $\forall r \in R$, $\forall s \in R_*$, $\exists r_1 \in R$, $\exists s_1 \in R_*$, $\exists m \in R$

$$s_1 r = r_1 s = m \qquad (7)$$

$$(rs_1 = sr_1 = m). \qquad (8)$$

В самом деле. Применим Предложение 1:

$$U\begin{vmatrix} s \\ r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c \\ 0 \end{vmatrix},\ (|\ s\ r\ |\ U = |\ c\ 0|),\ c \in R,$$

обозначая

$$U = \begin{vmatrix} * & * \\ -r_1 & s_1 \end{vmatrix},\ (U = \begin{vmatrix} * & -r_1 \\ * & s_1 \end{vmatrix}),$$

имеем (7) и (8).

Рассмотрим пары (**s, r**) из $R_* \times R$. Будем считать, что (s_1, r_1) эквивалентно (s_2, r_2), если в R_* существуют такие элементы u_1 и u_2, что $u_1 r_1 = u_2 r_2$ и $u_1 s_1 = u_2 s_2$. Это соотношение симметрично, рефлексивно и транзитивно. Обозначая совокупность пар, эквивалентных паре (s, r) в виде левой дроби $s^{-1}r$. Определим $s_1^{-1}r_1 + s_2^{-1}r_2 = (\bar{s}_1 s_2)^{-1} (\bar{s}_2 r_1 + \bar{s}_1 r_2)$ и $s_1^{-1}r_1 \cdot s_2^{-1}r_2 = (\bar{\bar{s}}_2 s_1)^{-1} (\bar{r}_1 r_2)$, где, согласно (7), найдутся такие $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$, $\bar{\bar{s}}_2 \in R_*$, $\bar{r}_1 \in R$, что $\bar{s}_1 s_2$

ISSN 1562-9945

$= \bar{s}_2 s_1$ и $\bar{\bar{s}}_2 r_1 = \bar{r}_1 s_2$. Сумма и произведение определены однозначно и совокупность левых дробей (частных) удовлетворяет оределению тела, которое обозначим как R_q. R является подкольцом тела R_q.

Аналогичным образом, на основании соотношения (8) строится правое тело частных, состоящее из дробей rs^{-1}, $r \in R$, $s \in R_*$.

Вектор-строки (вектор-столбцы) $u_1, u_2 \dots u_n$ $(u_1, u_2 \dots u_m)$ размерностью m (n) с элементами из тела R_q называются линейно независимыми слева (справа) над R_q, если для любых $k_1, k_2 \dots k_n \in R_q$ $(k_1, k_2 \dots k_m \in R_q)$ из равенства $k_1u_1 + k_2u_2 + \dots + k_nu_n = 0^{1 \times m}$ $(k_1u_1 + k_2u_2 + \dots + k_nu_n = 0^n)$ следует, что $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$ $(k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0)$.

Рангом по строкам (столбцам) матрицы $K \in R_q^{n \times m}$ называется максимальное число её строк (столбцов) линейно независимых слева (справа) над R_q. В случае матриц над телами оба эти ранга совпадают [3] и в дальнейшем будут обозначаться как rk K. Очевидно, что $\mathrm{rk}\, K \le \min(n, m)$. Ранг матрицы над кольцом R вводится аналогично, путём рассмотрения её элементов над телом R_q.

Лемма. Пусть матрица $U \in R^{n \times n}$ обратима над R_q, тогда $\forall C \in R^{n \times m}$ $\mathrm{rk}\, UC = \mathrm{rk}\, C$ $(\mathrm{rk}\, CU = \mathrm{rk}\, C)$.

Доказательство. В [4] доказано, что $\forall C_1 \in R_q^{k \times n}$, $\forall C_2 \in R_q^{n \times m}$ $\mathrm{rk}\, C_1C_2 \le \min(\mathrm{rk}\, C_1, \mathrm{rk}\, C_2)$. Тогда $\mathrm{rk}\, C = \mathrm{rk}\, U^{-1}UC \le \mathrm{rk}\, UC \le \mathrm{rk}\, C$ $(\mathrm{rk}\, C = \mathrm{rk}\, C\, UU^{-1} \le \mathrm{rk}\, CU \le \mathrm{rk}\, C)$. ЧТД.

Предложение 2. Ранг матрицы над кольцом R равен числу ненулевых строк (столбцов), оставшихся после её приведения к ВПС- (НЛС-) матрице.

Доказательство. Согласно предложению 1 любая матрица над R с помощью элементарных строчных (столбцовых операций приводится к ВПС- (НЛС-) матрице. В силу Следствия Предложения 1, выполнение элементарных операций над строками (столбцами) матрицы равносильно её умножению слева (справа) на обратимую над R, а, следовательно и над R_q матрицу. Такие действия, согласно Лемме, не изменят ранга

 ISSN 1562-9945

матрицы. Отмечая, что ненулевые строки (столбцы) ВПС- (НЛС-) матрицы над любвм телом линейно независимы, завершаем доказательство. ЧТД.

Выводы. Таким образом для вычисления ранга матрицы необходимо, используя алгоритм деления опраторов, привести её с помощью элементарных операций к определённому в работе виду.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев Ю.Н. Алгебраические методы пространства состояний в теории управления линейными объектами. Обзор зарубежной литературы // Автоматика и телемеханика. 1977. № 3. С. 5-50.
2. Ylinen. An algebraic theory for analysis and syntesis of time-varying linear differentials systems // Acta Politechnica Scandinavica: Math. and Comput. Ser. N 32. Helsinki, 1980. 62 p.
3. Кон П. Свободные кольца и их связи. М.: Мир, 1974. 424 с.
4. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1970. 400 с. в

Получено 17.08.03