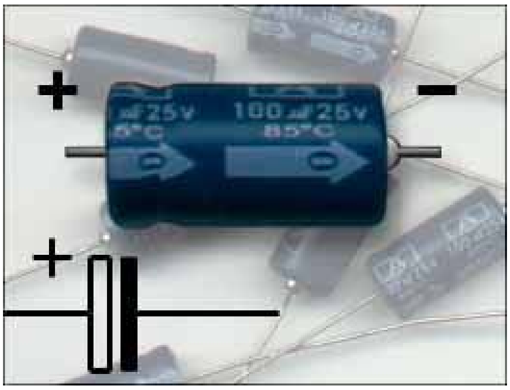
De Condensator, Z en AC/DC

[2020-2021, door Marius Versteegen]

Vooruitblik

De condensator

- Kan electrische lading, dus energie, opslaan: $Q = C \cdot V$.
- De eenheid van C, capaciteit, is de Farad (F). Het is een hele grote eenheid. Meestal wordt de capaciteit uitgedrukt in nano- of microfarad (nF of µF).
- Kan stroompieken opeten / voedingsspanning afvlakken – rol: afvlakcondensator
- Kan in combinatie met een weerstand een filter vormen.
  De kantelfrequentie van zo'n filter ligt op $f_0 = 1/(2\pi RC)$.
  - Bijvoorbeeld als Hoog-doorlaatfilter – mogelijke rol: koppelcondensator
  - Bijvoorbeeld als Laag-doorlaatfilter – mogelijke rol: ontstoring, anti-alias
- Laden en opladen gebeurt via een e-macht.
  De snelheid is afhankelijk van het product van capaciteit en weerstand (RC).



Om de condensator (Engels: capacitor) goed te kunnen behandelen, bespreken we eerst een paar basis fenomenen: electronen en gaten.

Electronen

De deeltjes waaruit een electrische stroom bestaat heten electronen. Dat zijn negatief geladen deeltjes, elk met een lading van $1.6 \cdot 10^{-19}$ Coulomb.

Positief en negatief geladen deeltjes

Negatief geladen deeltjes worden afgestoten door andere negatief geladen deeltjes en aangetrokken door positief geladen deeltjes.

Negatief geladen deeltjes worden ook aangetrokken hoge spanning en afgestoten door lage spanning.

Positief geladen deeltjes gedragen zich vergelijkbaar, maar dan tegengesteld.

Logische stroomrichting : gaten

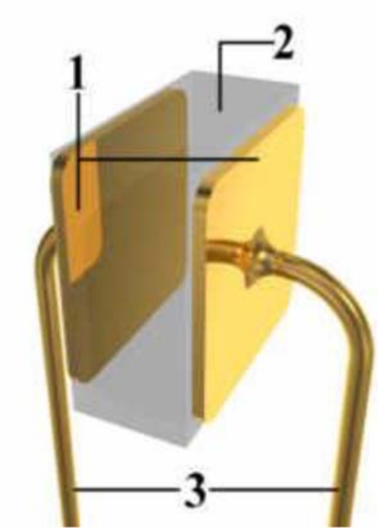
Als wij in de elektrotechniek over elektrische stromen praten, hebben we het altijd over "logische stromen", die van hoge spanning naar lage spanning stromen.

De electronen stromen de andere kant op. De logische stroom bestaat dus niet uit electronen, maar uit “gaten”: “lege” plekken waar een electron had kunnen zitten.

Je kunt het vergelijken met bubbels in een fles cola. Je praat over bubbels die naar boven borrelen, terwijl de bubbels feitelijk lege plekken zijn, en de cola er omheen naar beneden stroomt.

Negatief en positief

Een condensator is een elektrische component die een “verschil in elektrische lading” opslaat. Hij is opgebouwd uit twee geleiders met een relatief grote oppervlakte, die zich dicht bij elkaar bevinden en gescheiden zijn door een niet-geleidend materiaal of vacuüm (bron wiki).



Condensator, 1=parallelle platen, 2= niet geleidend materiaal (diëlektricum), 3= aansluitdraden

Een condensator kan er zeer verschillend uitzien:

(plaatje: van howequipmentworks.com)

De condensator die er bovenstaande uit ziet als een groot “tonnetje” heet een electrolytische condensator (afgekort: elco). Bij dat type mag het pootje met “+” symbool niet op een lagere spanning dan het pootje met “-“ symbool worden aangesloten. Andere typen condensators hebben die beperking niet.

Als je een spanning over de condensator aanbrengt, komt er in evenredigheid met die spanning een ladings**verschil** terecht over beide platen wel. Er geldt: lading = capaciteit * spanning, ofwel in het kort: Q = C * V.
Je kunt de formule natuurlijk ook herschrijven als:

$$C = Q / V$$

In die formule geldt:

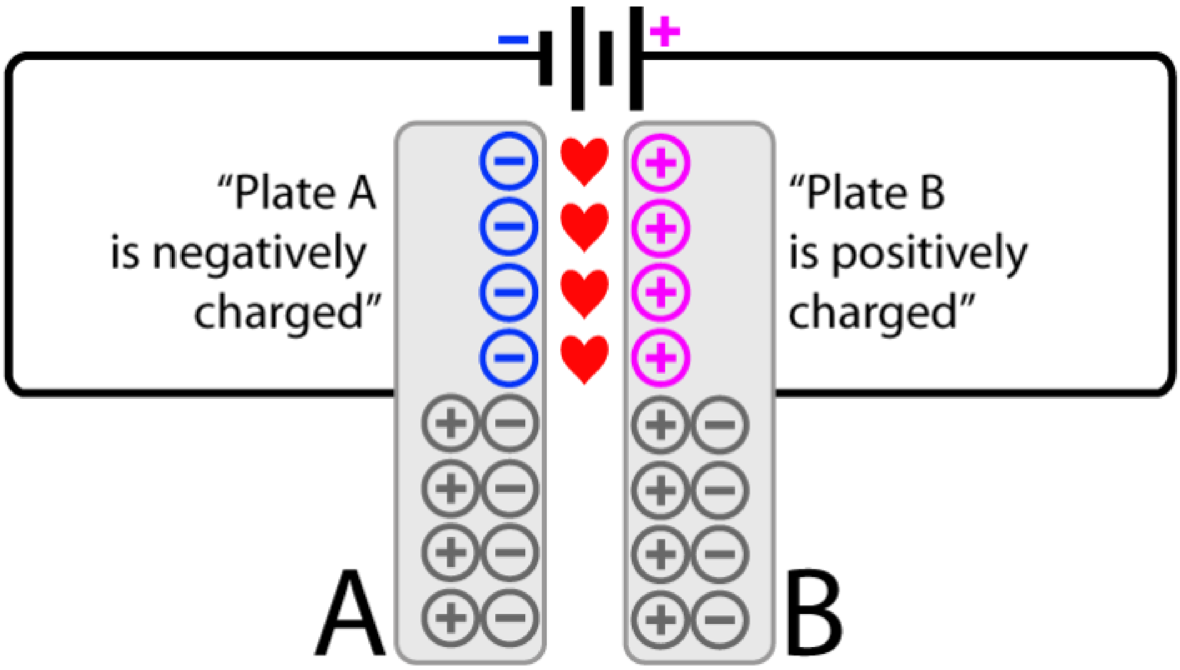
- Q = de lading op de capaciteit opgeslagen is, met als eenheid C, de Coloumb.
- V = het voltage, met als eenheid V, de Volt.
- C = de capaciteit, met als eenheid F, de Farad.
  Uit de formule volgt dat een Farad dus hetzelfde is als een Coulomb per Volt.

Aan de formule zie je dat de capaciteit dus de hoeveelheid ladingsverschil dat je kunt aanbrengen voordat de spanning een volt stijgt.

Voorbeeld: je hebt een condensator C1 met capaciteit C1 = 0.01F, en er staat een spanning V1 = 1V over (net zoals we de weerstand van weerstand R1 ook R1 noemen, noemen we de capaciteit van condensator C1 ook C1). Voor ladingsverschil Q1 die er op zit opgeslagen moet dan dus gelden:
Q1 = C1 * V1 = 0.01F * 1V = 0.01C (dus 0.01 Coulomb).

Wat gebeurt er in de condensator

In de onderstaande afbeelding zie je een condensator die is verbonden met een voedingsspanningsbron. De voedingsspanningsbron brengt een zeker spanningsverschil aan tussen de platen van de condensator.



Dat brengt een ladingsverschil teweeg, omdat positieve spanning electronen aantrekt, en negatieve spanning electronen afstoot (omdat electronen zelf ook negatief geladen zijn).

De positieve spanning van de rechter plaat trekt electronen naar zich toe in de linker plaat.
Doordat zich een niet-geleidende isolator tussen beide platen bevindt, kunnen die electronen in de linker plaat niet doorstromen naar de rechter plaat.
De negatieve spanning van de linker plaat stoot de electronen in de rechter plaat juist af.
Anders geformuleerd: het trekt gaten in de rechter plaat naar zich toe.

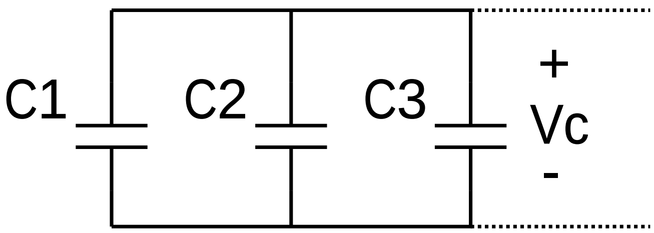
Je kunt de condensator dan gebruiken als een soort van "batterij": als je iets tussen zijn contacten aansluit, zoals een weerstand, dan stroomt de opgeslagen positieve lading van de rechter plaat door die weerstand naar de linker plaat, waar het cancelled met de daar opgeslagen negatieve lading.

Een veel voorkomende misvatting is dat je beide platen van de condensator apart kunt opladen, of dat het opladen van een condensator betekent dat je er netto lading in opslaat.
Dat is niet het geval. Wat in een condensator wordt opgeslagen is een ladings**verschil**.

De totale op de condensator aanwezige lading blijft altijd 0.
Tijdens het aanbrengen van het ladingsverschil stromen er bij de ene plaat evenveel electronen naar binnen als er bij de andere plaat uit stromen. Het is dan ook onmogelijk om een condensator op te laden terwijl een van beide kanten niet is aangesloten.

Condensators parallel

Je kunt uit meerdere condensators een grotere condensator maken door ze parallel te schakelen.
Je kunt dat eenvoudig inzien door te beseffen dat je nu de condensator-platen aan mekaar vastmaakt.



In formule-vorm:
Aangezien de condensatoren allemaal tussen dezelfde twee knooppunten zijn aangesloten, moet de spanningsval over alle condensatoren gelijk zijn: Vc1 = Vc2 = Vc3 = … = Vc

Voor C1 geldt voor de lading die er is opgeslagen:
Q1 = C1 * Vc
Voor C2, C3, etc geldt iets soortgelijks:
Q2 = C2 * Vc, Q3 = C3 * Vc, etc..

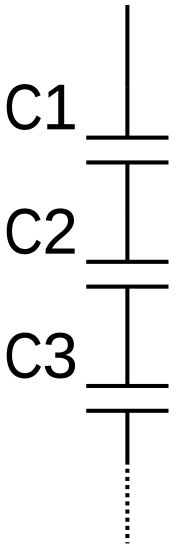
Voor de totale opgeslagen lading geldt dus:
Qtotaal = Q1 + Q2 + Q3 + … = C1 * Vc + C2 *Vc + C3 *Vc +… = (C1 + C2 + C3 +…) * Vc

Dus voor de totaal opgeslagen lading geldt: Qtotaal = Ctotaal * V.
De verzameling parallelgeschakelde condensatoren gedraagt zich dus als een condensator met een capaciteit die even groot is al de som van elk van de individuele capaciteiten:

Cparallel = C1 + C2 + ….

De formule voor condensators in parallel gedraagt zich dus vergelijkbaar met de formule voor weerstanden in serie.

Condensators in serie



Voor condensators in serie geldt:

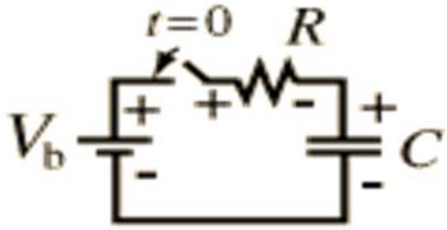
$$Cserie = \frac{1}{\frac{1}{C1} + \frac{1}{C2} + \cdots}$$

De formule voor condensators in serie gedraagt zich dus vergelijkbaar met de formule voor weerstanden in parallel.

De afleiding van bovenstaande formule is te vinden in een bijlag.

Een condensator opladen

Onderstaande schema kan gebruikt worden om een condensator op te laden.
Op tijdstip t=0 wordt via een weerstand een voedingsspanning op de condensator aangesloten, waardoor hij kan laden. Op t=0 bevindt zich nog geen lading op de condensator: Q=0.



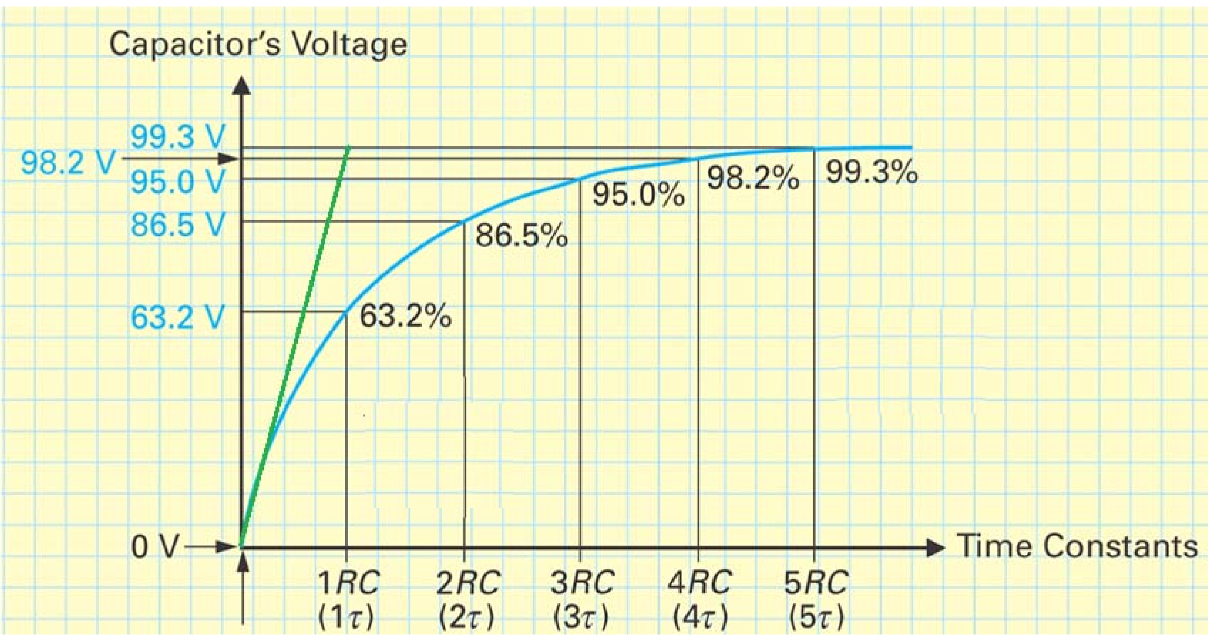
$$V_b = V_R + V_C$$

$$V_b = IR + \frac{Q}{C}$$

As charging progresses,

$$V_b = IR + \frac{Q}{C}$$

current decreases and charge increases.



Van zo'n laadcurve moet je zelf kunnen (zelfs zonder gebruik van onderstaande formule voor de laadcurve):

- Beredeneren op welke spanning hij begint.

- Berekenenen met welke spanningsstijging per seconde (de helling van de groene lijn) hij begint.
- Beredeneren waarom het laden aanvankelijk relatief snel gaat.
- Beredeneren waarom het laden uiteindelijk langzaam gaat.
- Beredeneren op welke spanning het laden gaat eindigen.

Formule voor de laadcurve

Voor de laadcurve kan een formule worden afgeleid (zie bijlage):

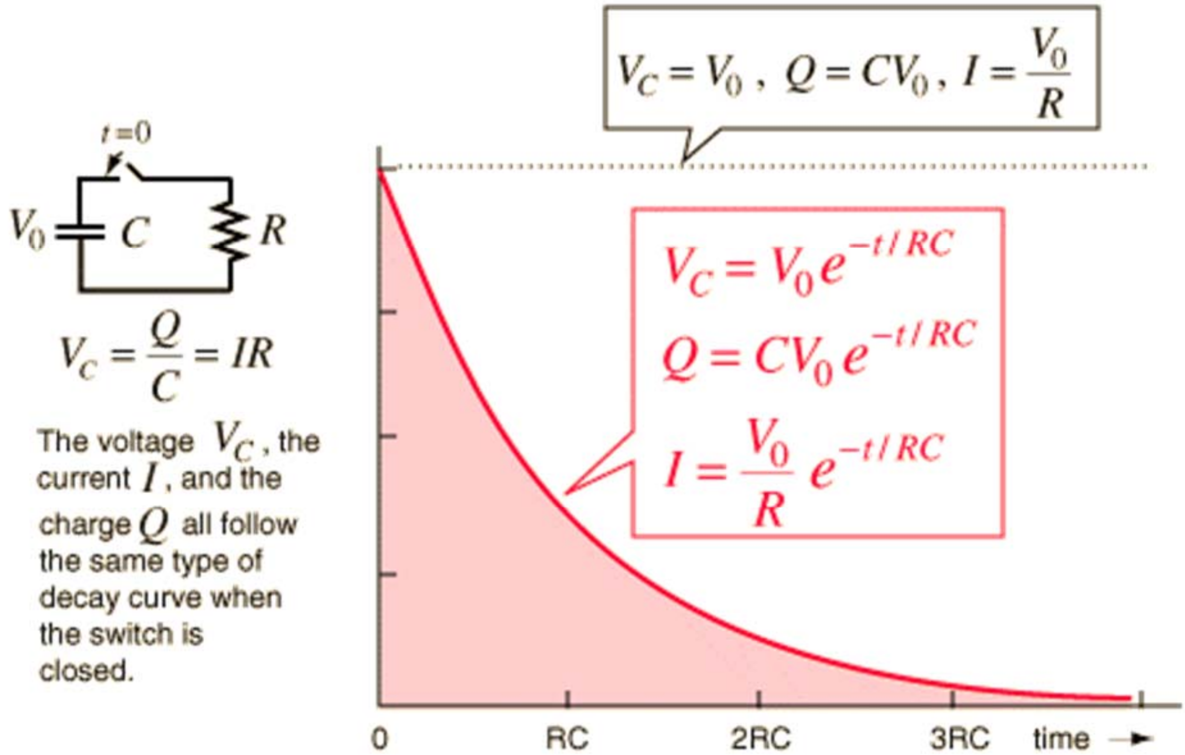
$$Vc = Vb\ (1\text{-}e^{-t/RC})$$

De laadcurve volgt een e-macht met tijdconstante τ (tau) = RC.
Na die tijd is 63% van het traject afgelegd.

Een condensator ontladen

Onderstaande schema kan gebruikt worden om een condensator te ontladen.
Vanaf tijdstip t=0 ontlaadt de condensator via een weerstand zichzelf. Op t=0 bevindt zich nog een lading op de condensator die zorgt voor een spanning die we V_0 noemen.

Voor zo'n ontlaadcurve moet je dezelfde beredeneringen kunnen maken als bij de oplaadcurve.



Formule voor de ontlaadcurve

Ook voor de laadcurve kan een formule worden afgeleid (zie bijlage):

$$Vc = V_0 \cdot e^{-t/RC}$$

Wederom betreft het een e-macht met tijdconstante τ (tau) = RC.
Wederom is na die tijd 63% van het traject afgelegd.

Altijd tau

Het belangrijkste om te onthouden van het oplaad- en ontlaad verhaal voor de praktijk is het volgende:

Zowel bij opladen en ontladen van een condensator via een weerstand geldt **op elk moment** (op elke spanning) dat **na** een **tijd** τ (tau) = RC een hoeveelheid van **63%** van het **nog resterende traject** is afgelegd. Je kunt het ook andersom formuleren: na een tijd τ is er nog maar **37%** van het resterende traject **te gaan**. Na een tijd van **2*tau** is er dus nog **37% * 37%** = 14% van het resterende traject **te gaan** (en dus 86% afgelegd). Na een tijd van 3*tau is er nog 37%*37%*37%=**5%** van het resterende traject **te gaan**.
Etc.

Impedantie

Een weerstand in de algemene zin, die ook frequentie-afhankelijk kan zijn, noemen we Impedantie.
Het symbool voor impedantie is Z.

Impedantie van een weerstand

De impedantie van een weerstand Zr is gelijk aan zijn weerstandswaarde R.
Zr = R

Impedantie van een condensator

Een condensator gedraagt zich als een frequentie-afhankelijke weerstand (zie Bijlage over Impedanties).
Voor de impedantie van condensator C geldt: $Zc = \frac{1}{\omega\, C}$

Met ω de hoeksnelheid in radialen, wat een verkorte schrijfwijze is voor: 2 π f, met f als frequentie.
We kunnen het dus ook schrijven als:

$$\boldsymbol{Zc = \frac{1}{2\, \pi\, f\, C}}$$

Kortom, een **condensator** heeft een **lage weerstand** voor **hoge frequenties**.

Impedantie van een spoel

Vooruitlopend op wat een spoel is, poneren we hier ook meteen even zijn impedantie:

$$\boldsymbol{ZL = 2\, \pi\, f\, C}$$

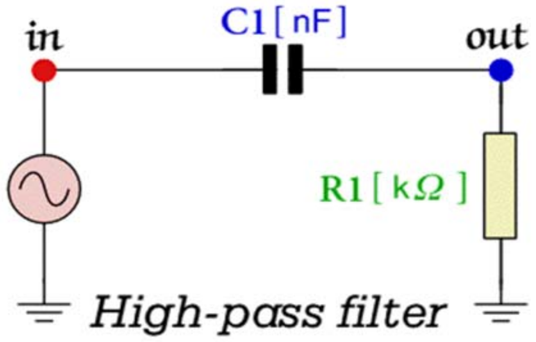
Kortom, een **spoel** heeft een **hoge weerstand** voor **hoge frequenties**.

De condensator (met weerstand) als filter

Zoals je bij het laad- en ontlaadgedrag gezien hebt, heeft een condensator tijd nodig om te op- of ontladen via een weerstand. Een tijd die van orde grootte gelijk is aan het product R*C.

Dat gegeven kun je gebruiken om er een hoog- of laag-doorlaat filter van te maken.

Hoog-doorlaatfilter



$f_0 = 1/(2\pi RC)$

In bovenstaande diagram hebben we een wisselspanningsbron aangesloten op een configuratie van een condensator en een weerstand die samen een "hoog-doorlaat filter" oplevert, laten we zeggen, met een sinusvormig signaal.

Als de tijd waarin de spanning varieert (de periodetijd van de sinus) veel korter is dan de tijd die de condensator nodig heeft om substantieel van lading te veranderen: de tijd RC, dan verandert de lading van de condensator niet veel. Volgens V = Q / C verandert de spanning over de condensator dus ook niet veel. Als de spanning over de condensator tijdens zo'n sinus-periode niet veel verandert, dan betekent dat dus dat de wisselspanningsvariatie op Vin grotendeels wordt doorgegeven aan Vout.

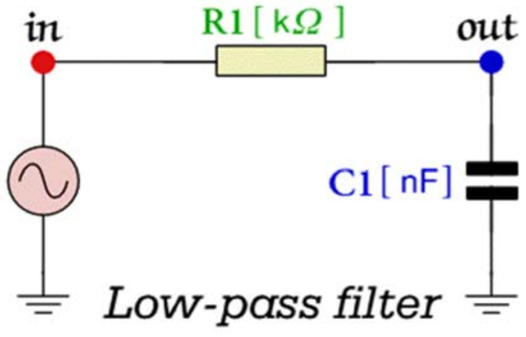
Het omslagpunt ligt bij een frequentie die we de "**kantelfrequentie**" noemen: f0 = 1/(2πRC).
Voor die frequentie is de "impedantie" (= soort weerstand met tijdsvertraging voor wisselspanningen) van de condensator **gelijk** aan die van de weerstand:

$$\frac{1}{2\,\pi\,f\,C} = R$$

Omgekeerd varieren laag-frequente signalen heel traag, waardoor de spanning over de condensator de tijd heeft om mee te varieren met het signaal. Voor lage frequenties komt er dus maar heel weinig van de ingangsspanningsvariatie op de uitgang terecht.

De meest lage frequentie is "gelijkspanning". Gelijkspanning wordt dan ook in zijn geheel niet "doorgelaten" door een condensator: Als je de gelijkspannings-niveaus in een circuit analyseert, kun je voor het gemak alle condensatoren wegdenken.

Laag-doorlaatfilter

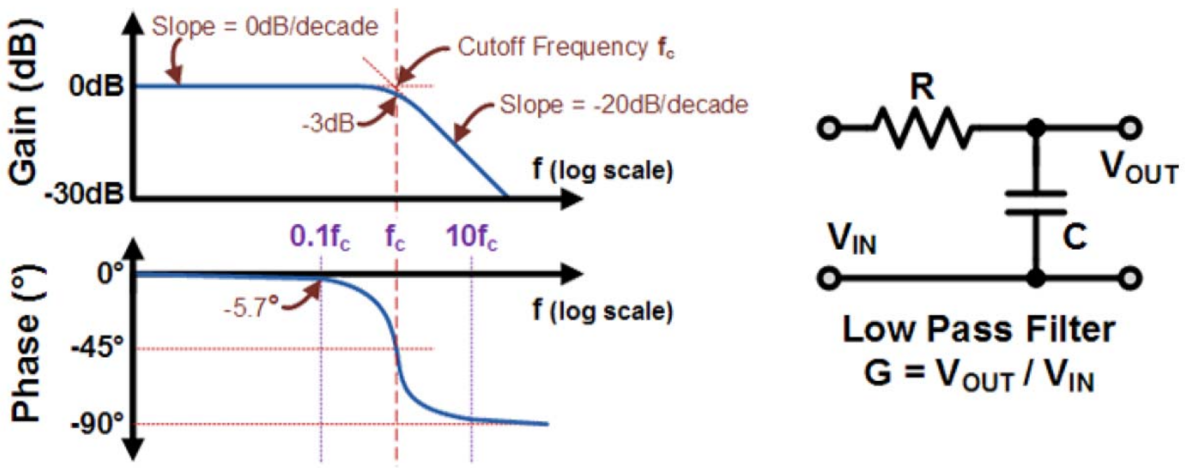


Met een iets andere configuratie kunnen we van een weerstand en een condensator het bovenstaande laag-doorlaat filter maken.

Wederom geldt dat de condensatorspanning snelle veranderingen van de ingangsspanning niet goed kan volgen, in tegenstelling tot laag frequente spanningen.
Aangezien nu de uitgangsspanning gelijk is aan de condensatorspanning, betekent dat dat dit circuit laag frequente veranderingen prima kan doorgeven, i.t.t. hoogfrequente veranderingen. We spreken daarom van een laag-doorlaat filter. Wederom ligt het omslagpunt bij een **kantelfrequentie** van : f0 = 1/(2πRC).

Bode diagram van een eerste orde laag-doorlaat filter

Onderstaand zie je een zogenaamd "Bodediagram" van de "overdracht" van ingangs-wisselspanning naar uitgangswisselspanning als functie van de frequentie.
De ingangswisselspanning is een sinusvormig signaal, net als de uitgangsspanning.
De Bodediagram bestaat uit een Gain-diagram en een Phase-diagram.



Gain Diagram

Het Gain diagram geeft de verhouding van de amplitude van de uitgangsspanning met de amplitude van de ingangsspanning weer, als functie van de frequentie.
Om te zorgen dat zowel kleine als grote grootheden in een grafiek weergegeven kunnen worden, is de frequentie langs een logaritmisch ingedeelde horizontale as weergegeven, en is de amplitude-versterking van Vout/Vin in decibels langs de verticale as weergegeven.

Langs de verticale as staat dus: 20 Log ($Vout_{amplitude}/Vin_{amplitude}$). Als "reminder" dat de 20 log() operatie is toegepast staat er "dB" (deciBell) bij.

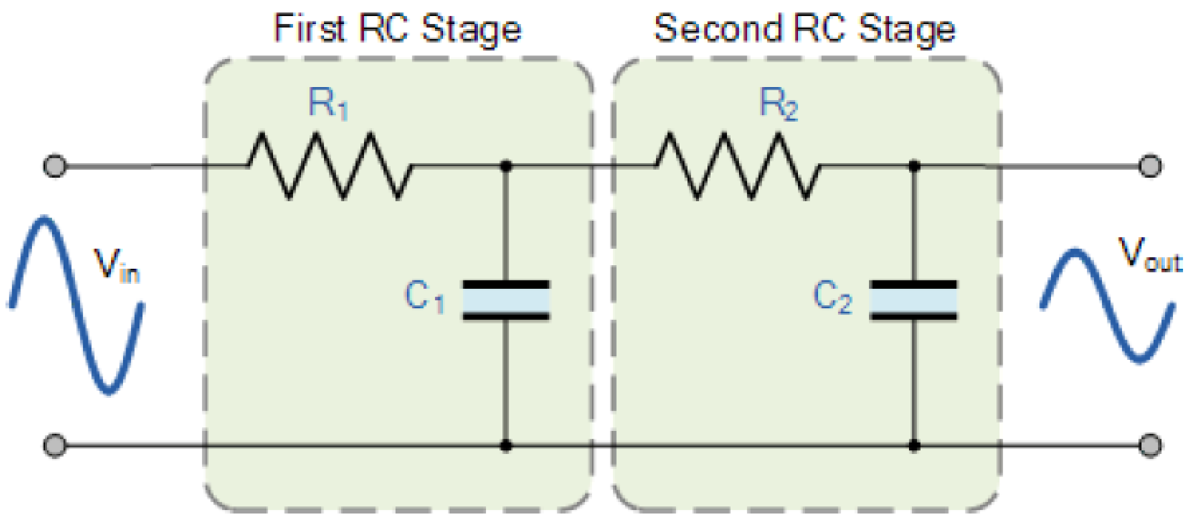
Fase-diagram

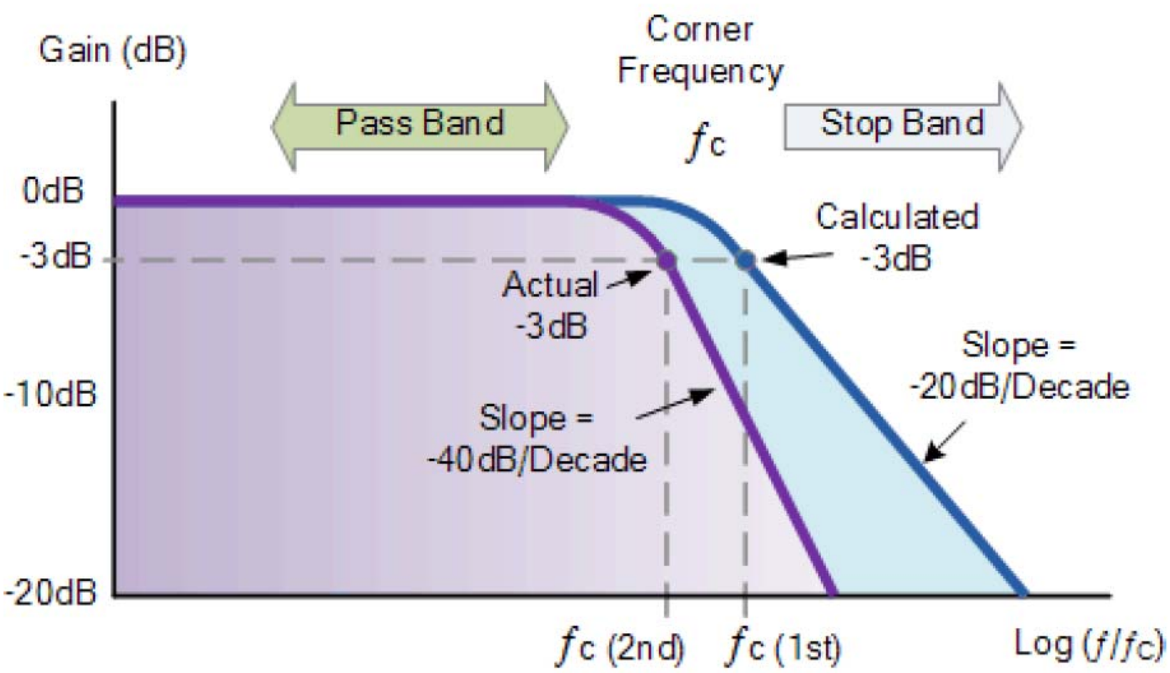
Het fase-diagram geeft weer dat de fase van de sinusvormige uitgangsspanning, afhankelijk van de frequentie, meer of minder naijlt op de fase van de sinusvormige ingangsspanning. Dat wil zeggen dat de nul-doorgangen van de uitgangsspanning vergeleken met de van de ingangsspanning wat achter lopen in de tijd. Bij lage frequenties loopt de fase van de uitgangsspanning nog weinig achter. Bij hoge frequenties kan de condensator spanning de ingangsspanning steeds moeilijker volgen, en gaat het achterlopen. Voor hoge frequenties kan de fasedraai daarom oplopen tot tegen de 90 graden (dus een kwart periode van een sinus).

Meer over fasedraai is terug te vinden in een bijlage.

Tweede orde laag-doorlaat filter

Je kunt ook hogere orde RC filters maken door er meerdere achter elkaar te zetten.





De paarse grafiek is de overdracht van het 2[de] orde filter.

Hogere orde filters filteren “scherper”: frequenties boven de kantelfrequentie worden nog beter onderdrukt. De bijbehorende fasedraai kan nu oplopen tot 180 graden (een halve periode).

Signalen zijn sinussen

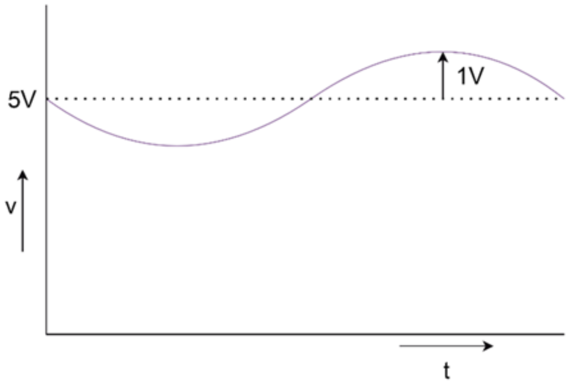
Bij het stuk over Fourrier heb je gezien dat elk signaal bestaat uit de som van een reeks sinussen, elk met hun eigen amplitude en frequentie.

AC en DC

In het algemeen werkt een electronische signaalverwerkende schakeling in een zeker “DC instelpunt”: Elk knooppunt is ingesteld op een bepaalde gelijkspanning en door elke tak loopt een zekere gelijkstroom (of geen stroom).

Superpositie

De signaalwaarden (spanningen en stromen) kunnen rond dat DC instelpunt varieren.
De onderstande grafiek toont bijvoorbeeld een voorbeeld van een spanning op een knooppunt. In dit geval is er een 5V gelijkspanningscomponent met daarop gesuperponeerd een “signaal” of wisselspanningscomponent die een amplitude heeft van 1V.



Als je een schakeling analyseert, doe je dat in twee stappen.

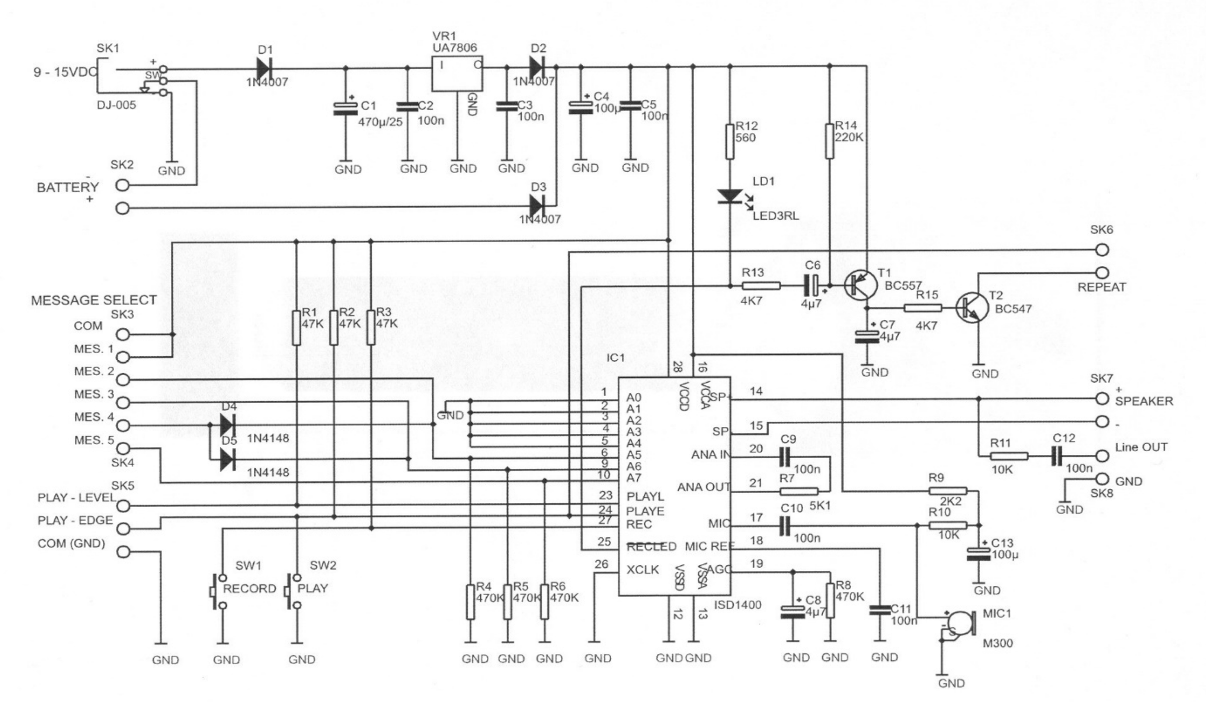
- Eerst bepaal je het “DC instelpunt”. Je weet dan rond welke gelijkspanningen en stromen het circuit is ingesteld, en daarmee of transistoren verzadigd zijn (Vce<VceSat), uit staan (vbe<0.8V), of in hun “normale werkingsgebied” staan ingesteld.
- Vervolgens bestudeer je gewapend met die kennis het “AC gedrag” rond dat instelpunt: hoe worden signalen / de wisselspanningscomponenten gefilterd of versterkt.

DC

DC heet ietwat misleidend “Direct Current”, maar het refereert aan gelijk**spanning**.
Een electrische signaal-verwerkende schakeling werkt in het algemeen bij een bepaalde DC-instelling (bij bepaalde gelijkspanningsniveaus).
Je kunt onderzoeken wat de DC-instellingen zijn door:

- **Condensators** “**weg** denken”
  (die hebben immers toch geen invloed op de gelijkspannings-niveaus, vanwege hun oneindig hoge impedantie voor f=0)
- **Spoelen** in gedachten vervangen door **kortsluit-draden**.
  (hun impedantie is immers gelijk aan 0 voor f=0)

Je kunt zo voor bijvoorbeeld het onderstaande circuit eenvoudig afleiden wat het DC-niveaus van elk knooppunt is in het onderstaande schema van een memo-recorder:



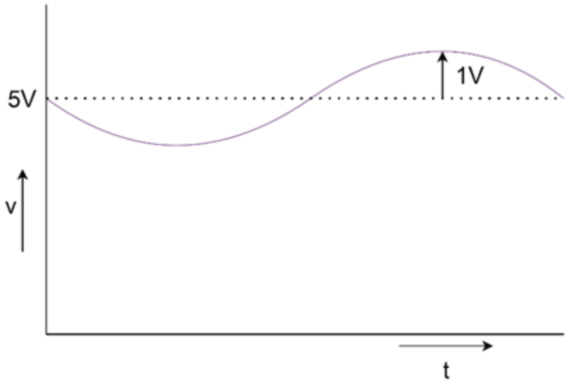
AC

AC heet ietwat misleidend “Alternating Current”, maar refereert naar wissel**spanning**. Je kunt het wisselspanningsgedrag van een schakeling eenvoudig bestuderen door:

- alle **gelijkspanningsbronnen** te vervangen door **draadverbindingen.**
- alle **gelijkstroombronnen weg** te denken.

Koppel-Capaciteiten, een voorbeeld

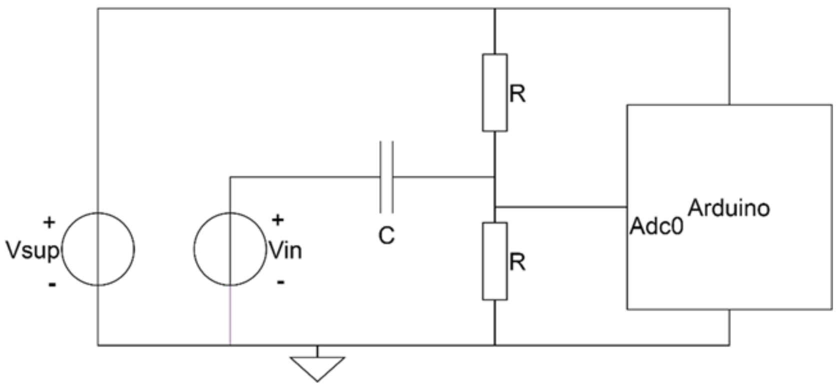
Stel je voor dat je een sensor hebt die een wisselspanningssignaal kan geven met een amplitude van 1V rond een gelijkspanning van 5V.



Stel je voor dat je de spanning van die sensor wilt meten met de ADC van je arduino.
De ADC van je arduino heeft echter een instuurvenster van 0 tot 5V.

Een manier om dat op te lossen zou het gebruik van een **weerstandsdeler** zijn, bijvoorbeeld bestaande uit twee gelijke weerstanden. Het nadeel daarvan is dat dan de amplitude van de wisselspanning die je kunt meten nog maar de helft is van wat hij was, waardoor de signaal-ruis-verhouding verslechterd.

Een mooiere oplossing daarvoor is:

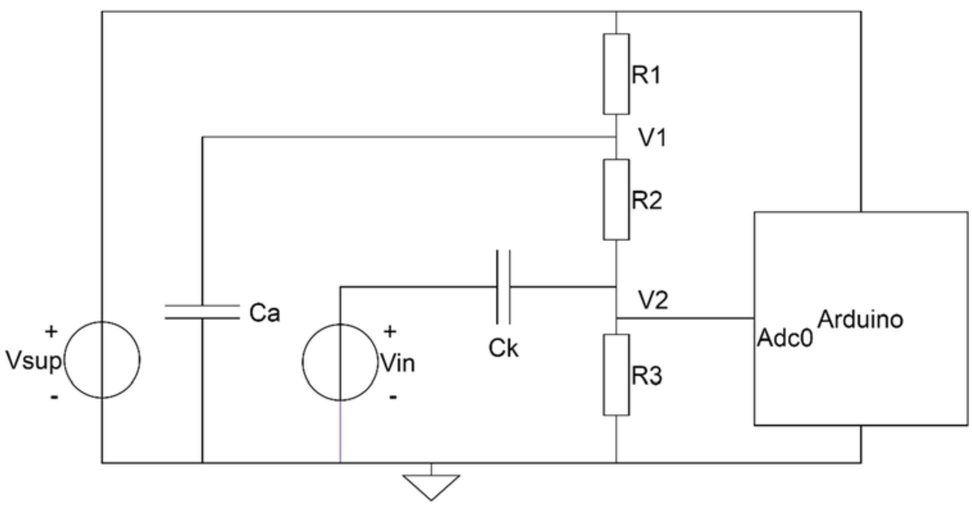


1. Creeer met behulp van een weerstandsdeler de gewenste DC spanning aan de ingang van de ADC van de arduino, laten we zeggen: 2,5V.
2. Koppel de wisselspanning van de sensor via een **koppel-capaciteit** naar de ingang van de ADC. Voor wisselspanning lijkt de capaciteit op een kortsluiting, waardoor vrijwel de **volledige 1V amplitude** van het sensor signaal nu te meten zal zijn op de ingang.
   Vrijwel, want de koppel-capaciteit vormt samen met de weerstandsdeler een Hoog-doorlaatfilter met een kantelfrequentie van $\frac{1}{2\,\pi\; Rparallel\; C}$.

Hoezo Rparallel?

Bij een AC-analyse mogen we de gelijkspanningsbronnen vervangen door draadververbindingen. Beide weerstanden staand dus parallel aan elkaar.

Deze oplossing heeft als nadeel dat storing op de voedingslijn nu ook op de Adc ingang terecht komt. Dat zou je bijvoorbeeld weer op de volgende manier kunnen voorkomen:



- De afvlakcondensator Ca zorgt hier voor een schoongefilterde spanning V1 boven de kantelfrequentie $\frac{1}{2\,\pi\; RparallelA\; Ca}$ van zijn laagdoorlaat-filter.
- Het DC instelpunt van V2 kan ligt nog steeds op de helft van Vsup mits R1+R2 gelijk is aan R3.

- De koppelcondensator Ck zorgt er nog steeds voor dat het signaal vrijwel met zijn volledige amplitude op Adc0 terecht komt, zolang de kantelfrequentie $\frac{1}{2\,\pi\ RparallelK\ Ck}$ van zijn hoog-doorlaatfilter maar (een eind) onder de signaalfrequentie ligt.

Wat zijn nu die RparallelA en RparallelK?
Dat hangt er vanaf voor welke frequentie je "benaderend kijkt".

Laten we zeggen dat we geinteresseerd zijn in de signaal-frequentie, en dat de kantel-frequenties van het laagdoorlaat-filter en het hoogdoorlaat-filter een eind lager zijn gekozen dan de signaal-frequentie. Voor de signaal-frequentie geldt dan dat we Ca en Ck kunnen benaderen als "kortsluiting" vergeleken de weerstanden: Zk << R3 en Za<<R1.

RparallelA is dus R1//R2 (// betekent: parallel aan).
RparallelK is dus R2//R3.

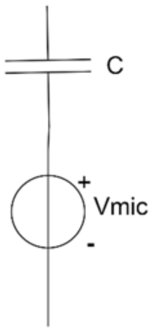
Parasitaire capaciteiten / pull up en pull down weerstanden

Elk knooppunt in een circuit heeft een heel kleine parasitaire capaciteit naar andere knooppunten, en ook naar bijvoorbeeld jou, als je in de buurt staat.

Niet aangesloten, hoogohmige ingangen kunnen daardoor storingen oppikken.
Om dat te voorkomen, worden pull-up en pull down weerstanden gebruikt.
In bovenstaande schema van de memo-recorder kun je er meerdere van terugvinden.

Electret-microfoons

Electret-microfoons gedragen zich als een serieschakeling van een wisselspanningsbron (met het microfoonsignaal) en een (koppel-) capaciteit. Electret-microfoons werken alleen goed als er een voldoende hoge gelijkspanning over wordt gezet. In bovenstaande schema van de memo-recorder vind je daar een voorbeeld van.



Wrap-up: Twee brillen om naar een condensator te kijken

Een samenvatting van het condensatorverhaal zou het volgende kunnen zijn. Er zijn twee soorten situaties waarbij je het gedrag van de condensator op een andere manier analyseert:

- Als er spanningen of stromen worden **geschakeld**, dan gebruik je het “**laadcurve-model**” van de condensator om te beschrijven wat er gebeurt.
  - Als er voldoende traag wordt geschakeld, kun je met een “DC-analyse” (alle condensatoren door open verbindingen vervangen) snel zien naar welke eindniveaus de knooppuntsspanningen gaan.
- Als er sprake is van (kleine) wisselspanningen(**AC signalen**) rond een gemiddelde DC-spanning, dan ben je normaal gesproken geinteresseerd in de “**impedantie**” van de condensator, omdat je daarmee een goed beeld krijgt van hoe de AC-signalen door het circuit stromen.
  - Bij die AC analyse mag je voor frequenties boven de kantelfrequentie de condensators als kortsluiting beschouwen.
  - Ook de voedingsspanningen mogen bij AC analyse als kortsluiting beschouwd worden.

Bijlages

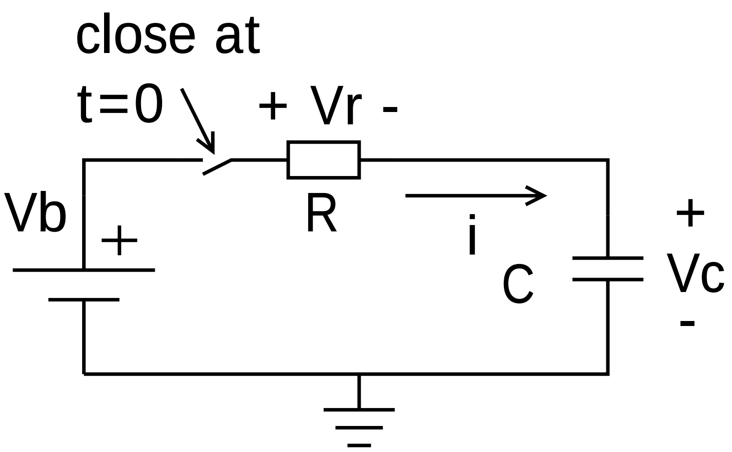
De afleidingen in de bijlages zijn **geen tentamenstof**. Je kunt ze gebruiken om een dieper begrip van de stof te verwerven.

Bijlage 1: De op-/ont- laadcurve van de condensator

Het onderstaande circuit kan gebruikt worden om een condensator C "om te laden" naar een nieuwe spanning, door op tijdstip t=0 de schakelaar te sluiten.

De veranderende condensatorspanning over de tijd wordt gegeven door de functie Vc(t).
De oorspronkelijke condensatorspanning op tijdstip t=0 (en ervoor) is dus Vc(0).

Na het sluiten van de schakelaar zal de condensator "omladen" naar spanning Vb.
Als Vb een hogere spanning heeft dan Vc(0), dan zal de condensator een stuk worden bijgeladen / opgeladen. Als Vb een lagere spanning heeft dan Vc(0), dan zal de condensator een stuk worden ontladen. Als Vb=0V gedraagt de spanningsbron zich niet anders dan een stuk draad. In dat geval zal de condensator geheel worden ontladen.



Het op- of ontladen van de condensator gebeurt met een stroom die verandert in de tijd : i(t).
Volgens de stroomwet van Kirchoff is die stroom overal even groot: i(t) == i_r(t) == i_c(t).

Afleiding van Vc(t)

We gaan nu afleiden hoe de condensator-spanning Vc(t) over de tijd omlaadt.

We weten dat voor de condensator op elk moment geldt: Q = C * Vc
(we schrijven hier even Vc, om het te onderscheiden van de andere spanningen in het circuit).
Als we verandering over de tijd meenemen, dan kunnen we dus schrijven:

[0] $$Q(t) = C \cdot Vc(t)$$

Als het linkerdeel van deze vergelijking voor alle t gelijk is aan het rechterdeel (en dat is zo, anders mag het = teken er niet tussen staan), dan moet dus ook gelden dat de afgeleide van het linker deel naar de tijd (de helling/mate van verandering in de tijd) gelijk moet zijn aan de afgeleide van het rechter deel naar de tijd.

Met andere woorden, het volgende geldt ook:

[1] $$\frac{dQ(t)}{dt} = C\,\frac{dVc(t)}{dt}$$

De letter d betekent "een verandering".

Aan de linker kant zien we dus "een verandering in lading" per "verandering in tijd" (Coulomb per seconde). Dat komt dus overeen met een electrische stroom i(t) die de condensator omlaadt.

We kunnen bovenstaande dus herschrijven als:

[2] $$i(t) = C\,\frac{dVc(t)}{dt}$$

De stroom i(t) loopt ook door R. Volgens de wet van Ohm moet dus gelden:

[3] $$i(t) = \frac{Vr}{R} \;\text{<->}\; i(t) = \frac{Vb - Vc(t)}{R}$$

Als we i(t) uit vergelijking [3] invullen in vergelijking [2], krijgen we:

[3] $$\frac{Vb - Vc(t)}{R} = C\,\frac{dVc(t)}{dt} \;\text{<->}\; \frac{Vb}{R} - \frac{Vc(t)}{R} = C\,\frac{dVc(t)}{dt} \;\text{<->}$$
$$C\,\frac{dVc(t)}{dt} + \frac{Vc(t)}{R} - \frac{Vb}{R} = 0$$

De vraag is welke functie Vc(t) kan aannemen, zodanig dat bovenstaande vergelijking waar is voor alle t. Dat kan natuurlijk alleen als Vc(t) en zijn afgeleide dezelfde "vorm" hebben als functie van de tijd. De enige functie met die eigenschap is de e-macht.

Preciezer: de oplossing van een 1^e orde differentiaalvergelijking van Vc(t) heeft de vorm:

[4] $$Vc(t) = A\,e^{B\,t} + D$$

A, B en D zijn constanten. Om te weten wat Vc(t) precies is, moeten we dus bepalen wat die zijn.

Door van linker en rechter deel de afgeleide naar de tijd te nemen, vinden we dVc(t)/dt:

[5] $$\frac{dVc(t)}{dt} = A{\cdot}B\,e^{B\,t}$$

We hebben voor deze stap gebruikt:

- De afgeleide van een constante D naar de tijd is gelijk aan 0.
- De eigenschap van de e-macht dat de afgeleide van e^x naar x gelijk is aan e^x.

- De kettingregel voor afgeleides, die zegt dat de afgeleide van f(g(x)) naar x gelijk is aan de afgeleide van f(g) naar g maal de afgeleide van g(x) naar x.
  In het bovenstaande voorbeeld hebben we dus g(t) = B.t gebruikt, en f(g(t)) = $e^{g(t)}$.

Als we [4] en [5] substitueren in [3], vinden we:

[6] $$C{\cdot}A{\cdot}B\, e^{B\,t} + \frac{A\, e^{B\,t} + D}{R} - \frac{Vb}{R} = 0$$

We kunnen het tijdsafhankelijke deel en het constante deel apart schrijven:

[7] $$A{\cdot}e^{B\,t}(C{\cdot}B + \frac{1}{R}) + \frac{D}{R} - \frac{Vb}{R} = 0$$

Dus we zien dat een e-macht van t, vermenigvuldigd met een constante plus een constante gelijk moet zijn aan nul.
Dat kan natuurlijk alleen als zowel de constante waarmee je die e-macht vermenigvuldigt gelijk is aan nul, als de constante die je erbij optelt. Er moet dus gelden:

[8] $$C{\cdot}B + \frac{1}{R} = 0$$ en

[9] $$\frac{D}{R} - \frac{Vb}{R} = 0$$

Er van uitgaande dat onze weerstand niet oneindig groot of 0 is, volgt uit [8]:

[10] $$B = \frac{-1}{R\,C}$$ en uit [9]:

[11] $$D = Vb$$

Als we [10] en [11] invullen in [4], vinden we dus:

[12] $$Vc(t) = A\, e^{-\frac{t}{R\,C}} + Vb$$

Alleen A hebben we nog niet bepaald. Die kunnen we vinden door de beginwaarde te gebruiken. We veronderstellen dat de condensator op t=0 een bekende spanning Vc(0) heeft. Verder weten we dat iets (ook e) tot de macht 0 gelijk is aan 1. Gebruiken we dat in [12], dan vinden we:

[13] $Vc(0) = A + Vb$ <-> $A = Vc(0) - Vb$

Vullen we A in [12] in, dan vinden we de oplossing voor Vc(t) zonder onbekenden:

[14] $$Vc(t) = (Vc(0) - Vb)e^{-\frac{t}{R\,C}} + Vb$$

Deze formule wordt misschien wat inzichtelijker als we hem zo opschrijven:

[15] $$Vc(t) = Vb - \ (Vb - \ Vc(0))e^{-\frac{t}{R\,C}}$$

Als de tijd naar oneindig gaat, dus voor t->∞, gaat de e-macht naar 0. Dan blijft alleen de eerste term, Vb nog over. Hoe snel de e-macht naar 0 gaat, hangt af van de grootte van het product R·C. Naarmate dat product groter is, gaat de e-macht langzamer naar 0 bij het verstrijken van de tijd. Het RC-product wordt daarom ook wel de “tijdconstante” genoemd. Traditioneel worden tijdconstantes weergegeven met de griekse letter tau: τ = R·C.

Samengevat: de condensator-spanning verandert via een exponentiele curve met tijdconstante τ = R·C naar de aangebrachte spanning Vb.

Bovenstaande formule geldt in het algemeen voor het omladen van een condensator van een bepaalde spanning naar een nieuwe spanning

De formule voor de laadcurve uit een eerder hoofdstuk hoort bij het meer specifieke geval waarbij je begint met een volledig ontladen condensator. Je kunt hem vinden door in [15] Vc(0) = 0 in te vullen. De formule voor de ontlaadcurve uit een eerder hoofdstuk hoort bij het meer specifieke geval waarbij de aangebrachte spanning 0V is. Je kunt hem vinden door in [15] Vb = 0 in te vullen.

Spanningsverandering per seconde op t=0

Van formule [14] kunnen we links en rechts de afgeleide naar de tijd nemen.
We vinden dan (na weer toepassen van de kettingregel voor afgeleides):

[16] $$\frac{dVc(t)}{dt} = -\frac{1}{R\,C}(Vc(0) - \ Vb)e^{-\frac{t}{R\,C}}$$

Voor t=0 geldt dus (gebruik makend van dat iets tot de macht 0 gelijk is aan 1):

[17] $$\frac{dVc(0)}{dt} = -\frac{t1}{R\,C}(Vc(0) - \ Vb) \quad <->$$

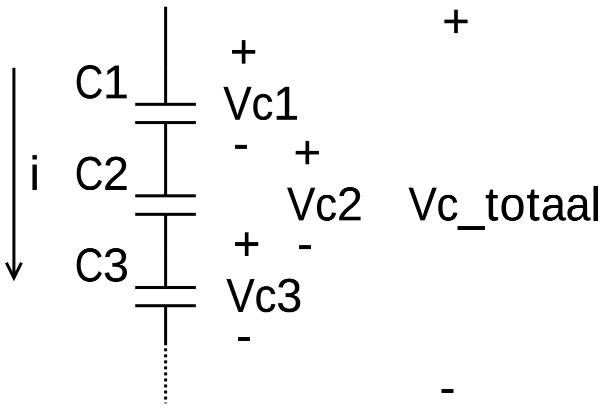
$$\frac{dVc(0)}{dt} = \frac{1}{R\,C}(Vb - Vc(0))$$

Zoals je wellicht had verwacht, is de snelheid waarmee het omladen start (de spanningsverandering per seconde van de condensatorspanning) evenredig met het verschil tussen de nieuw aangebrachte spanning en de beginspanning op de condensator, en omgekeerd evenredig met de RC-tijd (de tijdsconstante).

Bijlage 2: Condensators in serie

Een reeks condensators in serie gedraagt zich als een enkele, kleine condensator. In deze bijlage leiden we af hoe groot de resulterende “vervangings-capaciteit” is.

Als we condensatoren in serie schakelen, krijgen we het onderstaande schema:



Voor de stroom in een enkele condensator geldt:

[0] $$i(t) = C\frac{dVc(t)}{dt}$$

(zie de afleiding van formule [2] in de bijlage over de op-/ontlaadcurve van de condensator)

We kunnen die formule als volgt herschrijven:

[1] $$\frac{dVc(t)}{dt} = \frac{i(t)}{C}$$

Voor Vc_totaal(t) geldt volgens de spanningswet van Kirchoff:

[2] $$Vc_{totaal(t)} = Vc1(t) + Vc2(t) + ..$$

Nemen we aan linker en rechter kant van deze vergelijking de afgeleide naar de tijd, dan krijgen we:

[3] $$\frac{dVc_{totaal}}{dt} = \frac{dVc1(t)}{dt} + \frac{dVc2(t)}{dt} + ..$$

De termen aan de rechterkant van vergelijking [3] kunnen we herschrijven met vergelijking [1]:

deze vergelijking de afgeleide naar de tijd, dan krijgen we:

[4] $$\frac{dVc_{totaal}}{dt} = \frac{i(t)}{C1} + \frac{i(t)}{C2} + .. \iff$$

$$\frac{dVc_{totaal}}{dt} = i(t)(\frac{1}{C1} + \frac{1}{C2} + ..)$$

Voor de vervangingscapaciteit moet [1] ook gelden:

[5] $$\frac{dVc_{totaal}}{dt} = \frac{i(t)}{c_{totaal}}$$

Vullen we vergelijking [5] in vergelijking [4] in, dan zien we:

[6] $$\frac{i(t)}{c_{totaal}} = i(t)(\frac{1}{C1} + \frac{1}{C2} + ..)$$ **<->**

$$\frac{1}{c_{totaal}} = \frac{1}{C1} + \frac{1}{C2} + ..$$

We kunnen dit herschrijvendoor links en rechts 1 de inverse te nemen (1 gedeeld door zichzelf):

[6] $$Ctotaal = \frac{1}{\frac{1}{C1}+\frac{1}{C2}+\cdots}$$

Bijlage 3: Impedanties

In deze bijlage wordt zonder gebruik te maken van Laplace transformaties uitgelegd wat impedantie is.

Impedantie

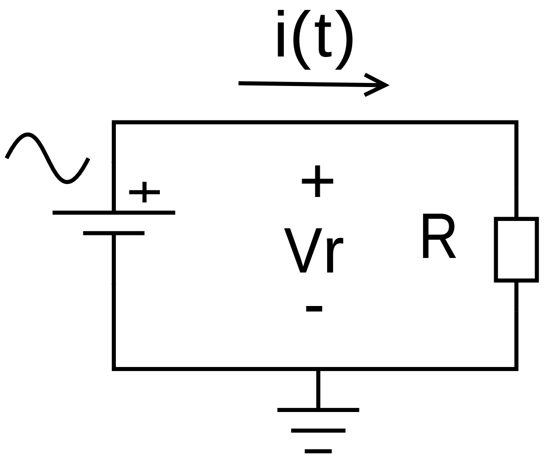
De impedantie van een component is zijn stroom-naar spannings-overdracht. De impedantie (altijd aangeduid met de letter Z) beschrijft twee facetten van die overdracht:

- De verhouding tussen de amplitude van spanning en stroom, ook wel de "modulus van de impedantie" genaamd: |Z| = |v|/|i|
- De fasedraai (de hoeveelheid naijlen/vertraging) tussen de stroom en de spanning, ook wel "het argument van de impedantie" genoemd.
  argZ(f) = fasedraai tussen i(t) en v(t).

NB:|v| en |i| representeren respectievelijk de amplitude van de sinusvormige spanning over de component en de bijbehorende amplitude van de sinusvormige stroom door de component. Voorbeeld: een sinusvormige spanning met een amplitude van 1 Volt swingt heen en weer tussen de -1V en de +1V. Meer over de amplitude en andere eigenschappen van sinusvormige signalen zijn te vinden in een andere bijlage.

Impedantie van een weerstand

Met onderstaande circuit kunnen we de impedantie van een weerstand bepalen.



Met behulp van een wisselspanningsbron zetten we een sinusvormige spanning op de weerstand:

[0] $$Vr_{(t)} = |Vr|\sin(2\pi f t)$$

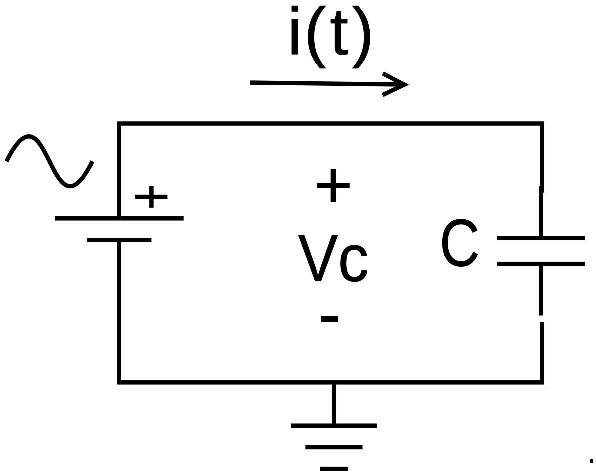
Voor een weerstand geldt de wet van Ohm. Voor elk tijdstip geldt: v(t) = i(t) * R.
Verder zit er geen tijdsvertraging (fasedraai) in.
Dus bij sinusvormige i(t) moet gelden: |v(t)| = |i(t)| * R.
De modulus van de impedantie (impdedanties schrijven we als Z) van een weerstand kenmerkt zich dus door:

[1] $$|Zr| = \frac{|vr(t)|}{|ir(t)|} = R$$

Verder neemt de spanning over de weerstand op precies hetzelfde moment toe als de stroom erdoor (de weerstand werkt instantaan, zonder vertraging, ongeacht de frequentie van het signaal), dus geldt voor het argument van de impedantie van een weerstand:

[2] $$argZ(f) = 0\,rad$$ (rad = de eenheid radialen).

Impedantie van een condensator



We gebruiken nu weer dezelfde ingangsspanning v(t) als in vergelijking [0].
Alleen dit keer sluiten we hem aan op een condensator.:

[3] $$Vc_{(t)} = |Vc|\sin(2\pi ft)$$

In een andere bijlage hebben we al gezien dat voor de condensator geldt:

[4] $$ic(t) = C\,\frac{dVc(t)}{dt}$$

We vullen vergelijkikng [3] in [4] in, en maken gebruik van:

- d sin(t)/dt = cos(t)
- de kettingregel voor afgeleiden: df(g(t)) / dt = (df(g) / dg) * dg(t)/dt
  (zie meer detail in een voorgaande bijlage)

Het resultaat is dan:

[5] $$ic(t) = 2\pi fC|Vc|\cos(2\pi ft)$$

Voor de amplitude van deze stroom geldt dus:

[6] $$|ic(t)| = 2\pi fC|Vc|$$

De modulus van de impedantie van de capaciteit vinden we door |vc| en |ic| op elkaar te delen:

[7] $$|Zc| = \frac{|Vc|}{|ic|} = \frac{|Vc|}{2\pi fC|Vc|}$$ <->

$$|Zc| = \frac{|Vc|}{|ic|} = \frac{1}{2\pi fC}$$

Het argument van de impedantie wordt duidelijk als we [5] herschrijven, gebruik makende van de volgende wiskundige wetmatigheid: $\cos(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ (je kunt dat inzien door in gedachten in de bijlage over sinusvormige signalen tegen de wijzers van de klok in langs de eenheidscircel te lopen. Je zult zien dat de x-positie (de cosinus) qua grootte gelijk is aan de y-positie van het punt dat $\frac{\pi}{2}$ radialen (=90 graden) eerder langs de eenheidscircel loopt).

[5] is dus te herschrijven als:

[8] $$ic(t) = 2\pi fC|Vc|\sin(2\pi ft - \frac{\pi}{2})$$

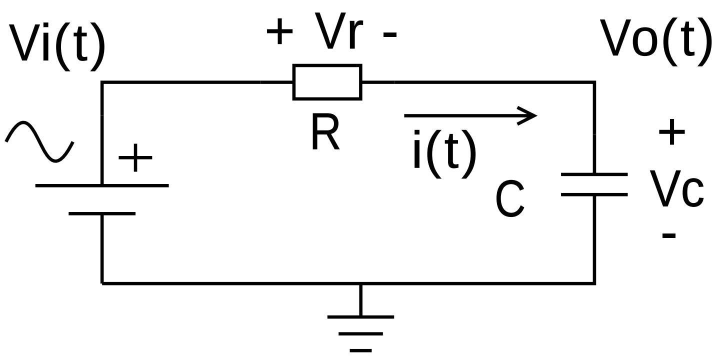
Vergelijken we dat met de spanning (zie vergelijking [3], dan zien we dus dat de stroom $\frac{\pi}{2}$ radialen naijlt op de spanning, of anders gezegd, dat de spanning $\frac{\pi}{2}$ radialen voorijlt op de stroom. De fase van de spanning t.o.v. de stroom noemen we het “argument van de impedantie”. Voor de condensator geldt dus:

[9] $$argZ(f) = \frac{\pi}{2}\ rad$$

Bijlage 4: Laagdoorlaat filter

In deze bijlage wordt op een vereenvoudigde manier afgeleid wat de overdracht is van een laag-doorlaat filter en welk kantelpunt er bij hoort. Een meer gedailleerde afleiding (waar meer wiskunde voor nodig is) volgt mogelijk nog in een andere bijlage.

In onderstaand schema is een laagdoorlaat filter afgebeeld:



Overdracht

Als we het hebben op het effect van een stroom in een 2-poort component op de spanning over diezelfde tweepoort, dan spreken we van een “impedantie”.

Als we het hebben over het effect van een spanning of stroom op een spanning of stroom elders in het circuit, dan spreken we van een “overdracht”.

In bovenstaande laagdoorlaat-filter zou je bijvoorbeeld kunnen spreken van een overdracht H van ingangs-spanning naar uitgangsspanning. Net als bij de impedantie kan H worden beschreven met een modulus en een argument.

Voor de modulus geldt in dit voorbeeld:

[0] $$|H| = \frac{|Vo|}{|Vi|}$$

Het kantelpunt

In de bijlage over impedanties zagen we dat de modulus van de impedantie van een capaciteit (dat is een soort van weerstand voor sinusvormige signalen) voldoet aan de volgende formule:

[1] $$|Zc| = \frac{1}{2\pi f C}$$

|Zc| definieert een soort van frequentie-afhankelijke weerstand (daarnaast veroorzaakt Zc ook een fasedraai, maar die laten we nu even buiten beschouwing).
Deze weerstand vormt een weerstandsdeler met weerstand R.
Analoog als bij een weerstandsdeler kunnen we dus de amplitude-overdracht |H| van het bovenstaande schema uitrekenen:

[2] $$|H| = \frac{|Vo|}{|Vi|} = \frac{|Zc|}{|Zc|+R}$$

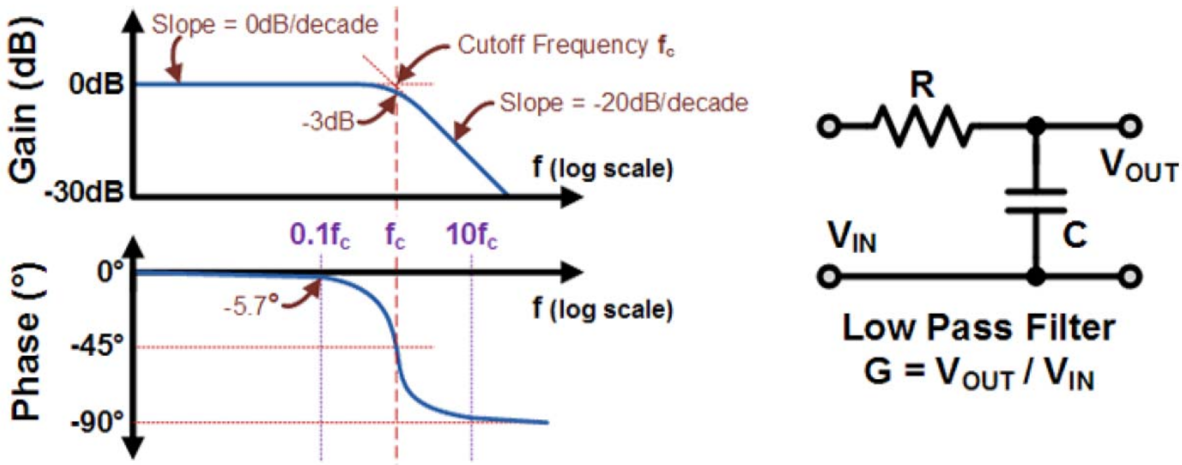
Invullen van [1] levert:

[3] $$|H| = \frac{1}{1+2\pi fRC}$$

Je ziet aan deze formule de volgende dingen:

- Voor lage frequenties is de overdracht 1: de invloed van de capaciteit is amper merkbaar.
- Voor hoge frequenties is de 1 in de noemer verwaarloosbaar t.o.v. de andere term, en kun je de situatie benaderen als: $|H| = \frac{1}{2\pi fRC}$.
  Met andere woorden: de overdracht wordt evenredig kleiner met de frequentie.
- De frequentie waarbij beide termen in de noemer even groot zijn (dus het overgangspunt tussen de 2 voorgaande situaties), is de frequentie waarvoor geldt:
  $1 = 2\pi fRC$ <-> $f = \frac{1}{2\pi RC}$

Traditioneel worden gain in dB (in dit geval is dat |H| in dB) en de fase (in dit geval argH) in de volgende twee diagrammen weergegeven:



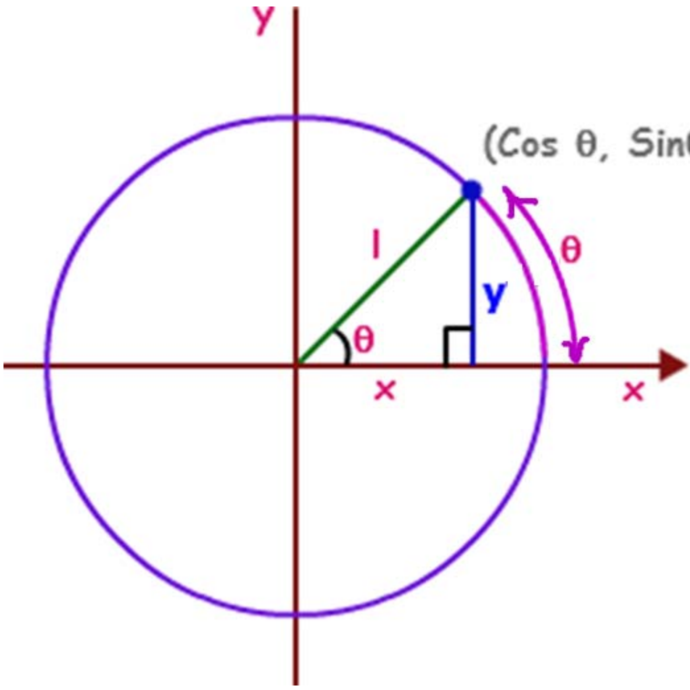
Weergeven van een versterking in dB (decibel) doe je door er de 20 Log() op toe te passen.
In de bovenstaande Gain (dB) grafiek staat dus 20 Log(|H|) uitgezet langs de y-as.
Langs de x-as staat de frequentie f uitgezet langs een logaritmische schaal.

In bovenstaande grafiek zie je ook de fasedraai van de overdracht, argH(f) getekend.
Omdat het voor lage frequenties net is of de condensator er niet is, is de invloed van zijn fasedraai ook minimaal, en is er weinig fasedraai. Voor hoge frequenties is de invloed van de condensator dominant aanwezig, en zorgt hij voor een fasedraai die richting de 90 graden gaat.
Ga maar na: voor hoge frequenties wordt |vout| heel klein t.o.v. |vin|. Dat betekent dat de spanning vr(t) vrijwel gelijk wordt aan vin(t). Volgens de wet van ohm wordt de stroom door de weerstand (en de condensator in) dus vrijwel gelijk aan i(t) = vin(t)/R. Voor de condensator geldt weer $argZ(f) = \frac{\pi}{2}\ rad.$ De condensatorspanning vout(t) moet dus $\frac{\pi}{2}$ radialen (=90 graden) naijlen op i(t) en daarmee op vin(t).

Bijlage 5: Sinusvormige signalen

Deze bijlage legt uit wat sinusvormige signalen zijn.

Beschouw onderstaande eenheids-circel (een circel met radius 1):



$$y = \sin(\theta)$$

$$s = \cos(\theta)$$

Voor elk punt op de eenheidscirkel geldt:

- Je kunt een lijn tekenen vanaf de oorsprong tot dat punt.
- Er is een hoek tussen die lijn en de positieve x-as.
- Het punt heeft een x en een y-waarde.

De sinusfunctie is de functie die voor alle punten op de eenheidscircel de hoek relateert aan de y-positie.

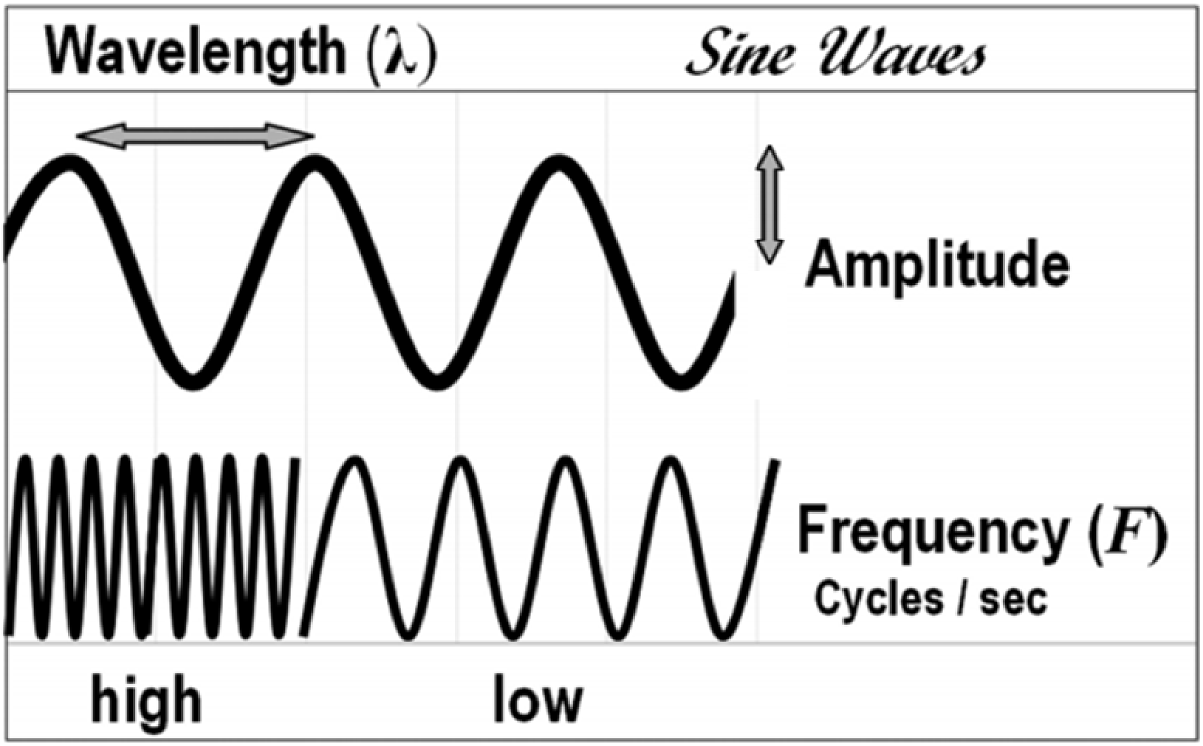
(Evenzo is de cosinusfunctie de functie die voor alle punten op de eenheidscircel de hoek relateert aan de x-positie)

De hoek (hierboven aangegeven door de Griekse letter theta) kan worden uitgedrukt in radialen. Ze is gelijk aan de lengte van het traject dat je langs de eenheidscirkel moet afleggen, (beginnend vanaf de kruising van de eenheidscirkel met de positieve x-as) om uit te komen bij het punt op de eenheidscirkel dat overeenkomt met die hoek.

De totale afstand die je aflegt wanneer je de eenheidcircel volledig rond volgt, is 2π. (π is een Griekse letter, genaamd “Pi”, en het vertegenwoordigt een constante waarde van ongeveer 3,14)

Dus sin (θ) is de y-positie van het punt op de eenheidscirkel waar je aankomt nadat je een afstand van θ radialen hebt afgelegd.

Eigenschappen van sinusvormige signalen



$s(t) = A \sin(2 \pi f t + \phi)$

- A = Amplitude
- f = frequency [Hz]
- T = period time [s]
- t = time [s]
- ϕ = phase shift [rad]
- f = 1 / T

De sinusgolf is een belangrijk type signaal, omdat elk (ander) fysiek signaal bestaat uit een combinatie van sinusgolven.

Ter illustratie, stel dat bovenstaande signaal s(t) dat de luchtdrukvariatie - en dus een geluidsgolf - beschrijft.

Vermenigvuldigingen worden niet expliciet getoond (A wordt vermenigvuldigd met sin, 2 wordt vermenigvuldigd met π, die wordt vermenigvuldigd met f, enz.)

De vermenigvuldiger A vooraan bepaalt hoe groot het signaal is. In het geval van een geluidsgolf: de luidheid van het geluid.

Frequentie f is het aantal perioden dat de sinusgolf per seconde maakt. In het geval van een geluidsgolf is het de toonhoogte van het geluid (een hoge toon heeft een hoge frequentie).

Frequentie f is de inverse van periode-tijd T (de duur van een enkele periode).

Voor een volledig traject rond de eenheidscirkel weten we dat het argument van de sinusfunctie zou moeten toenemen met 2 π. Dus in de bovenstaande formule representeert f·t (hetgeen gelijk is aan t / T) een zekere fractie van de totale periode. Op het moment waarop t = T zal het signaal een volledige periode hebben gemaakt sinds t = 0.

De faseverschuiving ϕ (Griekse letter "Phi") toont de "positie op de eenheidscirkel" op het tijdstip t = 0. Het staat dus een signaal toe om op een ander punt op de eenheidscirkel te beginnen dan op de kruising van de positieve x-as met de eenheidscircel.

Hoeken in graden

Uit het voorgaande volgt dat radialen een hele natuurlijke manier zijn om aan te geven hoe groot een hoek is. Het relateert namelijk direct aan de afgelegde lengte langs de circelboog.

Sommigen geven er de voorkeur aan om hoeken uit te drukken in graden. In dat geval komt een complete circelboog overeen met 360 graden.

Bij je rekenmachine moet je daarom duidelijk aangeven of je graden of radialen gebruikt als je een sinus uitrekent.