**上机报告：数值积分计算π近似值**

上机题目描述：利用函数4/(1+x^2)以1,0为上下限的定积分的数值近似，近似求出π的值，并观察误差与步长的关系。

取步长为1e-7到1e-1，每次增大一个数量级，计算出数值积分值与真实值（考虑到64位double型的性能极限，取真实值为3.1415926535897）的差值并作图。

本报告中所有数据由C程序计算（代码已附在压缩包内）。

一、

1. 矩形法

1e-008,1.000033478249e-008

5e-008,5.0000060536348e-008

1e-007,1.0000018546563e-007

1e-007,1.0000018546563e-007

5e-007,5.0000004359063e-007

1e-006,9.999998673571e-007

1e-006,9.999998673571e-007

5e-006,4.9999958613434e-006

1e-005,9.9999834550779e-006

1e-005,9.9999834550779e-006

5e-005,4.9999583421556e-005

0.0001,9.9998333417339e-005

0.0001,9.9998333417339e-005

0.0005,0.00049995833341931

0.001,0.00099983333342202

0.001,0.00099983333342202

0.005,0.004995833333429

0.01,0.0099833333334272

0.01,0.0099833333334272

0.05,0.049583333364428

0.1,0.098333335317459

我们可以观察到，由于舍入误差的存在，真实误差比理论上截断误差的阶O(h^3)要高。只有在步长较大的情况下，误差才会达到O(h^2)的数量级。其余大部分情况下，误差与h的数量级呈现线性关系。

以及，这个函数的单调性决定，我们其实在算的是一个达布上和，故误差总是正的。

1. 梯形法

1e-007,7.327471962526e-013

5e-007,3.9968028886506e-015

1e-006,1.7763568394003e-014

1e-006,1.7763568394003e-014

5e-006,-4.1056047450638e-012

1e-005,-1.6567636151876e-011

1e-005,-1.6567636151876e-011

5e-005,-4.1655390248252e-010

0.0001,-1.666581539439e-009

0.0001,-1.666581539439e-009

0.0005,-4.1666573302734e-008

0.001,-1.6666657209896e-007

0.001,-1.6666657209896e-007

0.005,-4.1666665739903e-006

0.01,-1.6666666569076e-005

0.01,-1.6666666569076e-005

0.05,-0.00041666663557027

0.1,-0.0016666646825412

同样由于舍入误差的存在，真实误差比理论上截断误差的阶O(h^3)要高。只有在步长较大的情况下，误差才会达到O(h^3)的数量级。其余大部分情况下，误差的数量级与h的数量级呈现二次关系。

在步长小于1e-7时，可以看到，舍入误差变得非常大，误差开始随步长变小而逐步变大。

1. 辛普森法

1e-007,7.3496764230185e-013

5e-007,4.5297099404706e-014

1e-006,1.9495516312418e-013

1e-006,1.9495516312418e-013

5e-006,6.838973831691e-014

1e-005,7.149836278586e-014

1e-005,7.149836278586e-014

5e-005,1.0302869668521e-013

0.0001,8.8817841970013e-014

0.0001,8.8817841970013e-014

0.0005,9.1926466438963e-014

0.001,9.1482377229113e-014

0.001,9.1482377229113e-014

0.005,9.4591001698063e-014

0.01,9.2370555648813e-014

0.01,9.2370555648813e-014

0.05,-9.5949914680205e-012

0.1,-6.1991478617074e-010

同样，由于舍入误差，在步长较小的时候，误差无法达到理论上的截断误差O(h^5)，但在1e-2左右的步长时，误差在截断误差O(h^5)之内。即使步长取0.1，误差也可控制在1e-10的量级上。这说明Simpson法得到的积分值，无论是理论上的截断误差，还是实际上的误差，都小于其他两种方法得到的积分值。

以及，可以看到，在1e-7左右的量级下，由于舍入误差变大，误差随步长增大反而缩小。

我们可以稍微探究一下这时误差随步长变化的规律。

步长由1e-9到1e-6变化时，误差随步长变化的数据如下：

1e-009,-2.0003234624255e-009

5e-009,4.4186876380081e-013

1e-008,-3.379518886959e-013

1e-008,-3.379518886959e-013

5e-008,-2.0161650127193e-013

1e-007,7.3496764230185e-013

1e-007,7.3496764230185e-013

5e-007,4.5297099404706e-014

1e-006,1.9495516312418e-013

可以看到，步长处在1e-7或更小的数量级上时，随步长变小，由于double型浮点数的性能限制，舍入误差的增加会远远盖过截断误差的减小，反而导致误差被提高了几个数量级。

二、Romberg法

分析和叙述同上，这里只给出结果（代码实现见附件）

1e-007,9.2370555648813e-014

5e-007,9.2370555648813e-014

1e-006,9.2370555648813e-014

1e-006,9.2370555648813e-014

5e-006,9.2370555648813e-014

1e-005,9.2370555648813e-014

1e-005,9.2370555648813e-014

5e-005,9.2370555648813e-014

0.0001,9.2370555648813e-014

0.0001,9.2370555648813e-014

0.0005,9.2370555648813e-014

0.001,9.2370555648813e-014

0.001,9.2370555648813e-014

0.005,9.2370555648813e-014

0.01,9.2370555648813e-014

0.01,9.2370555648813e-014

0.05,9.2370555648813e-014

0.1,9.2370555648813e-014

可以看到，即使步长取0.1量级，误差也可控制在1e-14范围内，而且计算速度也非常快。

三、自适应法

1e-009,-5.8719340501057e-010

5e-009,-7.7640383011612e-010

1e-008,-3.7875018676914e-009

1e-008,-3.7875018676914e-009

5e-008,5.7634514938343e-009

1e-007,-1.4295749473092e-008

1e-007,-1.4295749473092e-008

5e-007,-1.9206458645726e-010

1e-006,-1.9206458645726e-010

1e-006,-1.9206458645726e-010

5e-006,-2.9033511075305e-006

1e-005,-1.2282618477855e-008

1e-005,-1.2282618477855e-008

5e-005,-1.7427981746643e-006

0.0001,-1.7427981746643e-006

0.0001,-1.7427981746643e-006

0.0005,-1.7427981746643e-006

0.001,-1.7427981746643e-006

0.001,-1.7427981746643e-006

0.005,-1.7427981746643e-006

0.01,-1.7427981746643e-006

0.01,-1.7427981746643e-006

0.05,-1.7427981746643e-006

0.1,-0.076128601302118

可以看到，自适应法虽然较快，但舍入误差在步长较小时也非常大，但在步长稍大时表现出色。

1300011443

杨博文

物理学院