Máquinas de Turing 4 – Multicinta

Titulación: Grado en Informática

Curso: 2023-2024

Trabajo: MT4 multicinta

Autores: Cárdenas Palacios, Lucía

Cazorla Rodríguez, Rubén

Cotrina Santos, Joaquín

Martín Conejo, Ana

Datos iniciales

En este ejercicio vamos a diseñar una máquina de Turing multicinta que decida el lenguaje

$$L = \{\#x_1\#x_2\# \ldots \#x_l \mid x_i \in \{0,1\}^* \ \forall i, x_i \neq x_j \ \forall i \neq j\}$$

La Máquina de Turing irá tomando como referencia una subcadena x_i y comprobará si es distinta al resto de subcadenas x_j situadas a su derecha (siendo $i < j$). Una vez terminan las comparaciones de x_i, empieza a comparar con x_{i+1}. Este proceso se repetirá hasta que todas hayan sido comparadas y se realiza usando 2 cintas:

1. Cinta inicial con todas las subcadenas.
2. Cinta secundaria donde guardaremos la subcadena a comparar en cada momento.

Estados

Para ello, definiremos un estado inicial q_{ini} y el resto de los estados con 1 subíndice, q_i.

i toma los siguientes valores:

- lee, cuando está preparado para leer un nuevo carácter.
- 0, cuando se lee un carácter 0 en la subcadena de la cinta 2.
- 1, cuando se lee un carácter 1 en la subcadena de la cinta 2.
- r, cuando se retrocede en la subcadena de la cinta 2.
- f, para retroceder en la cinta 1 y encontrar otra subcadena a copiar en la cinta 2.
- b, cuando se busca el final de la subcadena en la cinta 1.
- c, cuando se está copiando la subcadena a la cinta 2.
- #, cuando encuentra un # porque la subcadena de la cinta 2 ha terminado antes.

Ejemplo

Para marcar la cabecera en la cinta 1 se usará el estado actual, para la cinta 2 se subrayará.

El orden del recorrido de la cinta procede de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha.

$q_{ini}\#010\#01\#011$ 	$\#010\$q_r01\#011$ $\$010\underline{\#}$	$\#010\$q_001\#011$ $\$\underline{0}10\#$	$\#010\$01\#q_r011$ $\$01\underline{0}\#$
$\#q_c010\#01\#011$ $\underline{\$}$	$\#010\$q_r01\#011$ $\$01\underline{0}\#$	$\#010\$0q_{lee}1\#011$ $\$\underline{0}10\#$	$\#010\$01\#q_r011$ $\$0\underline{1}0\#$
$\#0q_c10\#01\#011$ $\$\underline{0}$	$\#010\$q_r01\#011$ $\$0\underline{1}0\#$	$\#010\$0q_11\#011$ $\$0\underline{1}0\#$	$\#010\$01\#q_r011$ $\$\underline{0}10\#$
$\#01q_c0\#01\#011$ $\$0\underline{1}$	$\#010\$q_r01\#011$ $\$\underline{0}10\#$	$\#010\$01q_{lee}\#011$ $\$0\underline{1}0\#$	$\#010\$01\#q_r011$ $\underline{\$}010\#$
$\#010q_c\#01\#011$ $\$01\underline{0}$	$\#010\$q_{lee}01\#011$ $\underline{\$}010\#$	$\#010\$01q_0\#011$ $\$01\underline{0}\#$	$\#010\$01\#q_{lee}011$ $\$\underline{0}10\#$

$\#010\$01\#q_0011$ $\$\underline{0}10\#$	$\#010\$01\#011q_b\_$ $\$010\underline{\#}$	$\#010\#0q_c1\#011$ $\$010\$\underline{0}$	$\#010\#01\$q_r011$ $\$010\underline{\$}01\#$
$\#010\$01\#q_{lee}011$ $\$\underline{0}10\#$	$\#010\$01\#01q_f1$ $\$010\underline{\#}$	$\#010\#01q_c\#011$ $\$010\$0\underline{1}$	$\#010\#01\$q_{lee}011$ $\$010\$\underline{0}1\#$
$\#010\$01\#0q_111$ $\$0\underline{1}0\#$	Avanza a la izquierda hasta llegar al $ (la siguiente subcadena a copiar)	$\#010\#01\$q_r011$ $\$010\$01\underline{\#}$	$\#010\#01\$q_0011$ $\$010\$\underline{0}1\#$
$\#010\$01\#01q_{lee}1$ $\$0\underline{1}0\#$	$\#010q_f\$01\#011$ $\$010\underline{\#}$	$\#010\#01\$q_r011$ $\$010\$0\underline{1}\#$	$\#010\#01\$0q_{lee}11$ $\$010\$0\underline{1}\#$
$\#010\$01\#01q_01$ $\$01\underline{0}\#$	$\#010\#q_c01\#011$ $\$010\underline{\$}$	$\#010\#01\$q_r011$ $\$010\$\underline{0}1\#$	$\#010\#01\$0q_111$ $\$010\$0\underline{1}\#$

$\#010\#01\$01q_{\#}1$ $\$010\$01\underline{\#}$	$\#010\#01q_f\$011$ $\$010\$01\underline{\#}$	$\#010\#01\#011q_c\_$ $\$010\$01\$01\underline{1}$
$\#010\#01\$011q_b\_$ $\$010\$01\underline{\#}$	$\#010\#01\#q_c011$ $\$010\$01\underline{\$}$	$\#010\#01\#01q_{acc}1$ $\$010\$01\$01\underline{1}$
$\#010\#01\$01q_f1$ $\$010\$01\underline{\#}$	$\#010\#01\#0q_c11$ $\$010\$01\$\underline{0}$	
Avanza a la izquierda hasta llegar al $ (la siguiente subcadena a copiar)	$\#010\#01\#01q_c1$ $\$010\$01\$01\underline{1}$	

Transiciones

La máquina de Turing vendría dada por:

$Q = \{q_{ini},\ q_i,\ q_{acc}, q_{rej}\}, donde\, i \in \{0,1, lee,\ c,\ r,\ b,\ f, \#\}.$

$\Sigma = \{0,1, \#\}$

$\Gamma = \{\_, 0,1, \#,\ \$\}$

Transición inicial: al iniciar con el recorrido, la cinta debe encontrar en primer lugar un # (en otro caso, lo rechazaría), de forma que copiaría dicho # en la cinta 2 y saltaría al siguiente carácter, preparado para leer (q_{lee}).

$\delta(q_{ini}, \#) = (q_{lee}, \#,\ \#,\ R,\ R)$

Transiciones para leer (q_{lee})

Si el estado q_{lee} encuentra #, salta la cadena vacía y lee el siguiente carácter en la cinta 1.

$\delta(q_{lee}, \#) = (q_{lee}\#, \#, R,\ -)$

En caso de leer un valor 1 o 0 en la cinta 2, lo guarda (q_0 o q_1) y pasa al siguiente carácter.

$\delta(q_{lee}, 0) = (q_0, 0,\ 0, -,\ R)$

$\delta(q_{lee}, 1) = (q_1, 1,\ 1, -,\ R)$

El caso de tener el estado q_{lee} con blanco (_) se da en caso de tener una subcadena vacía (representada como ## o #_#). Si hemos controlado que es la única existente (si hay más se repite la subcadena), se saltaría al siguiente carácter.

$\delta(q_{lee}, \_) = (q_{lee}, \_,\ \_, R,\ R)$

Para llegar al estado q_{lee} debe de haber pasado por #, por lo que después no puede haber ningún $. Rechazaría la cadena.

$\delta(q_{lee}, \$) = \left(q_{rej}, \_,\ \_,\ L,\ L\right)$

Transiciones para copiar (q_c)

Cuando se está copiando la cadena, en caso de encontrar un valor 0 o 1, este se mantiene en la cinta 1, se copia en la segunda cinta y se avanza en ambas para seguir copiando.

$\delta(q_c, 0) = (q_c, 0,\ 0, R,\ R)$

$\delta(q_c, 1) = (q_c, 1,\ 1, R,\ R)$

El alcanzar un # mientras se está copiando quiere decir que hemos llegado al final de la subcadena, por lo que copiamos ese # en la cinta 2 y lo cambiamos por un $ en la cinta 1. Se avanza en ambas cintas, y cambiamos al estado q_r para retroceder en la cinta 2.

$\delta(q_c, \#) = (q_r, \$,\ \#, R,\ R)$

En caso de estar copiando y encontrar un blanco, querría decir que no quedan más subcadenas con las que comparar, por lo tanto, se aceptaría la cadena.

$\delta(q_c, \_) = (q_{acc}, \_, \_, L, -)$

Transiciones para retroceder en la cinta 2 (q_r)

Si encuentra un valor 0 o 1, deberá seguir avanzando hacia la izquierda en la cinta 2, manteniendo dichos valores.

$\delta(q_r, 0) = (q_r, 0,\ 0, -,\ L)$

$\delta(q_r, 1) = (q_r, 1,\ 1, -,\ L)$

Si la cabeza de la cinta 2 encuentra un $, quiere decir que ha llegado al principio de la subcadena, por lo que puede empezar a leer.

$\delta(q_r, \$) = (q_{lee}, \#,\ \$,\ -,\ R)$

Si encuentra un #, quiere decir que ha llegado al final de la subcadena que usa para comparar, por lo que debe terminar de leer la subcadena de la cinta 1.

$\delta(q_r, \#) = (q_b, \#,\ \#,\ R,\ -)$

Transiciones buscar el final de la subcadena en la cinta 1 (q_b)

Si se encuentra con un valor 0 o 1, los salta y avanza hacia la derecha. Si lo que encuentra es un #, ha terminado la subcadena, por lo que pasa al estado q_r para retroceder en la cinta 2. Sólo se detiene en caso de encontrar un blanco, de forma que cambiaría de estado e iría un paso a la izquierda.

$\delta(q_b, 0) = (q_b, 0,\ 0, R, -)$

$\delta(q_b, 1) = (q_b, 1,\ 1, R, -)$

$\delta(q_b, \#) = (q_r, \#,\ \#,\ R,\ -)$

$\delta(q_b, \_) = (q_f, \_, \_, L, -)$

Transiciones para retroceder en la cinta 1 y copiar otra subcadena (q_f)

Siempre avanzará hacia la izquierda hasta encontrarse con el primer $. En este último caso, cambiaría al estado q_c para copiar y pondría un $ en el # antes de la subcadena nueva.

$\delta(q_f, 0) = (q_f, 0,\ 0, L,\ -)$

$\delta(q_f, 1) = (q_f, 1,\ 1, L,\ -)$

$\delta(q_f, \#) = (q_f, \#,\ \#,\ L,\ -)$

$\delta(q_f, \$) = (q_c, \#,\ \$,\ R,\ R)$

Transiciones del # ($q_{\#}$)

Estas transiciones ocurren en caso de que la subcadena de la cinta 1 tenga más elementos que la de la cinta 2. De forma que, si compara un # con 1 o 0, quiere decir que son distintas, y se cambia al estado q_b para avanzar hasta el final de la subcadena en la cinta 1.

$$\delta(q_{\#}, 0) = (q_b, 0,\ 0, R,\ -)$$

$$\delta(q_{\#}, 1) = (q_b, 1,\ 1, R,\ -)$$

Si lo que encuentra es otro # o un blanco, quiere decir que son iguales, por lo que la cadena se rechazaría.

$$\delta(q_{\#}, \#) = \left(q_{rej}, \_,\ \_, R, R\right)$$

$$\delta(q_{\#}, \_) = \left(q_{rej}, \_, \_, L, L\right)$$

Transiciones de 0 y 1 (q_0 y q_1)

Estas transiciones son las que comparan las subcadenas, y deciden si rechazan, aceptan o continúan comparando.

Si se ha leído un 0 o 1 y se encuentra el mismo valor en la cinta 1, seguirá comparando, ya que, por el momento, las subcadenas son iguales.

$$\delta(q_0, 0) = (q_{lee}, 0,\ 0, R,\ R)$$

$$\delta(q_1, 1) = (q_{lee}, 1,\ 1, R,\ R)$$

Si se ha leído un valor 0 o 1 pero en la cinta 1 se encuentra el valor contrario, las subcadenas son distintas, por lo que avanzamos con el estado q_b hasta el final de la subcadena.

$$\delta(q_0, 1) = (q_b, 1,\ 1, R,\ R)$$

$$\delta(q_1, 0) = (q_b, 0,\ 0, R,\ R)$$

Si en vez de encontrar 1 o 0 en la cinta 1 encontramos un #, quiere decir que la subcadena es más pequeña que la de la cinta 2, por lo que avanzamos 1 en la cinta 1 y retrocedemos con q_r en la cinta 2.

$$\delta(q_0, \#) = (q_r, \#,\ \#,\ R,\ -)$$

$$\delta(q_1, \#) = (q_r, \#,\ \#,\ R,\ -)$$

En caso de encontrar un valor blanco, se ha llegado al final de la cinta 1 y todas las subcadenas son distintas, por lo que se debe buscar una nueva subcadena a copiar en la cinta 1.

$$\delta(q_0, \_) = \left(q_f, \_,\ \_, L,\ R\right)$$

$$\delta(q_1, \_) = \left(q_f, \_,\ \_, L,\ R\right)$$

Cualquier otro caso no contemplado lleva a $\left(q_{rej}, \_, \_, R, R\right)$.

Casos especiales

En caso de tener subcadenas vacías, se deberán contar para saber si hay 0, 1 o más:

- En caso de haber 0, se procedería a la ejecución normal de la MT.
- En caso de haber 1, se procedería a la ejecución normal de la MT, pero la cadena vacía (con representación ## o #_#) no se consideraría, por lo que pasaría a la siguiente subcadena.
- En caso de haber más de 1, se considera repetición de subcadena, por lo que se rechazaría (q_{rej}).

Esto implica que tengamos una ramificación en nuestro problema.

Al inicio se podría recorrer la cadena entera una sola vez para contar el número de cadenas vacías. En caso de tener 2 o más, la cadena sería automáticamente descartada, puesto que existen repeticiones. En caso contrario, entraría en el funcionamiento normal de la MT y, si encuentra una cadena vacía (que sería la única), simplemente la salta y sigue mirando el resto de subcadenas.

Complejidad

Complejidad espacial

Si tomamos N como:

$$N = \sum_{i=1}^{l} |x_i|$$

En el peor de los casos, la cinta 1 se recorre entera, por lo que sería espacio N.

En el peor de los casos, la cinta 2 debe copiar todas las subcadenas de la cinta 1, lo que sería N.

Por lo tanto, la complejidad espacial sería 2N. Dado que 2 es un número constante, se podría definir la complejidad espacial como O(N)

Complejidad temporal

Veamos la complejidad temporal.

Siendo w_i = $|x_i|$

La complejidad temporal para la cinta 1 sería: n + (n – $|x_1|$) + (n - $|x_1|$ - $|x_2|$) + … + $|x_l|$

Para la cinta 2 sería:

$|x_i| * 2$ Ida y vuelta al comparar x_i con una subcadena.

$|x_l|$ Cuando se copia la última subcadena, solo se hace el recorrido una vez, ya que, al ver que no quedan cadenas con las que comparar, no retrocede.

n Cada vez que se copia una subcadena, se recorre entera una vez. Como se deben copiar todas las subcadenas, se añade n a la complejidad.

($|x_1| * 2$) * (l - 1) + ($|x_2| * 2$) * (l - 2) + … + $|x_l|$ + n

La complejidad temporal total sería la suma de ambas.