Cómo demostrar que algo no se puede demostrar.

Enunciado: Tras describir el sistema axiomático del lenguaje MIU (transparencia penúltima) se pide demostrar algunas fbfs en dicho sistema.
En algunos casos la demostración es muy directa y en otros no tanto (pero siempre razonablemente fácil). El problema surge cuando no nos sale la demostración y nos preguntamos ¿será porque se nos ha escapado algún detalle importante? ¿será que realmente no es teorema y por lo tanto no se puede demostrar? ¿Qué hacemos para probar que una fbf no es un teorema?
La respuesta es **demostrar que no se puede demostrar**. No hay que asustarse porque la técnica ya la hemos aplicado antes (por ejemplo para probar que una cierta cadena no es fbf) y es demostrar una propiedad común de todos los teoremas y comprobar que nuestra cadena no la cumple.
Para probar un teorema se construye su demostración formal dentro del sistema axiomático. Para probar que no se trata de un teorema hemos de salirnos del sistema, buscar una propiedad de los teoremas (y probarla por inducción), y comprobar que falla en nuestro caso.

EJERCICIO: ***Dar una demostración para la cadena MU o bien probar que no puede ser un teorema del sistema.***

Observamos las reglas e intentamos sacar una propiedad extra:

El sistema axiomático MIU

Consideramos el alfabeto $A = \{M, I, U\}$ y el lenguaje universal sobre A

- Axiomas: 'MI' es un axioma
- Reglas de inferencia
  - De Mx se deduce Mxx
  - De xI se deduce xIU
  - De $xUUy$ se deduce xy
  - De $xIIIy$ se deduce xUy

**Nos fijamos sobre el número de ‘I’s.
Partiendo del axioma ‘MI’ podemos llegar a ‘MII’ por la regla 1, y con esta misma a ‘MIIII ‘(multiplicando el número de ‘I’s por 2 siempre).
La única manera que tenemos de eliminar ‘I’s es mediante la regla 4, donde cuando tengamos 3 ‘I’s se reduce a xUy, luego hipotéticamente para eliminar todas las ‘I’ y quedarnos con un número 0 de estas tendríamos que poder tener un número múltiplo de 3 para ello.
Las únicas reglas que modifican el número de ‘I’s son la regla 1 y la 4. Teniendo esto en cuenta, la regla 1 añade ‘I’s, y la regla 4 las quita.
Partiendo de que de forma base tenemos 1 ‘I’ siempre, la primera instancia donde se va a poder usar la regla 4 va a ser cuando se haya usado la regla 1 dos veces, es decir, cuando el número de ‘I’ es 4, lo cual nos deja tras usarla en el número de ‘I’s base: 1.
Vemos entonces que nunca se va a dar que sea múltiplo de 3.
Luego MU no puede ser teorema,**