Relación de ejercicios 4.3

1. Halle los campos de convergencia de las series de potencias siguientes:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n!}$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-5)^n$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^2}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^2} x^n$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n!} (x-1)^n$ i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (\ln n)^2}{n} x^n$

Solución

a) $x \in \mathbb{R}$ b) $x = 0$ c) $x \in [-1, 1]$

d) $x \in \mathbb{R}$ e) $x = 5$ f) $x \in [-3, -1]$

g) $x = 0$ h) $x \in \mathbb{R}$ i) $x \in (-1, 1]$

2. Consideremos la función

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

a) Determine la serie de Taylor de $f(x)$ partiendo de la derivada de

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

b) ¿Para qué valores de x la serie de Taylor representa a $f(x)$?

Solución

a) La serie de Taylor de $f(x)$ es

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

b) La serie de Taylor representa a $f(x)$ para todo $x \in (-1, 1)$ que es el campo de convergencia de la serie de potencias.

3. Consideremos la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n+1}$$

   a) Determine el campo de convergencia de la serie de potencias.
   b) Probar que, en ese campo de convergencia, la serie de potencias coincide con el desarrollo en serie de la función

$$f(x) = \frac{\ln(3-x)}{2-x}$$

   c) Utilizar los apartados anteriores para sumar, si es posible, la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n(n+1)}$$

Solución

a) $[1, 3)$

b) ...

c) $2\ln(3/2) - 1$

4. Consideremos la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{5^n} x^n$

   a) Determine el campo de convergencia y sume la serie
   b) Utilice el resultado obtenido en el apartado anterior para calcular la suma de la serie numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$

Solución

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{5^n} x^n = \frac{5x}{(5-x)^2}$ en $(-5, 5)$

b) $9/4$

5. Utilice el desarrollo de Taylor de la función exponencial

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

para sumar, si es posible, las series numéricas

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n!}$ c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n!}$

Solución

a) Sustituimos en $x = 3$, que está en el intervalo de convergencia, ajustamos índices y sumandos para obtener el resultado

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!} = \frac{1}{3} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{3^n}{n!} = \frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^3 - \sum_{n=0}^{2} \frac{3^n}{n!}\right) = \boxed{\frac{2\mathrm{e}^3 - 17}{6} \approx 3{,}862}$$

b) $\dfrac{2}{\mathrm{e}} - 2$

c) $3\mathrm{e}$

6. Utilice el desarrollo de Taylor de la función logaritmo

$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad , \quad x \in (-1, 1]$$

para sumar, si es posible, las series numéricas

a) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n 2^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n+1}}{n\, 3^n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n}$

Solución

a) Sustituimos en $x = 1/2$, que está en el intervalo de convergencia, ajustamos índices y sumandos para obtener el resultado:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n2^n} = \log(3/2) - \sum_{n=1}^{2} \frac{(-1)^{n+1}}{n2^n} = \boxed{\log(3/2) - \frac{3}{8}}$$

b) $-2\ln(5/3)$

c) Diverge por la condición necesaria.

7. Consideremos la función $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$:

   a) Use la definición para determinar el polinomio de Taylor de $f(x)$, de orden 5 en el punto $x_0 = 0$

   b) Use las propiedades algebraicas del Polinomio de Taylor como forma alternativa para hallar el mismo polinomio del apartado anterior.

Solución

a) $T_{5,x^2 \operatorname{sen} x,0}(x) = x^3 - \dfrac{x^5}{3!}$

b)
$$\left.\begin{array}{rcl} T_{5,x^2,0}(x) & = & x^2 \\ T_{5,\operatorname{sen} x,0}(x) & = & x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} \end{array}\right\} \to T_{5,x^2 \operatorname{sen} x,0}(x) = x^3 - \frac{x^5}{3!}$$

8. Consideremos la expresión

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + e^{c_n}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad , \quad c_n \text{ entre } 0 \text{ y } x$$

   a) Aproxime el valor de e utilizando el polinomio de Tayor de orden 5 y determine una cota del error cometido.

   b) Calcule $\sqrt{e}$ con un error menor que 10^{-3}

   c) Proporcione el polinomio de Taylor de $f(x) = x^2 e^{-x}$ y una expresión de su resto, y utilícelo para hallar $f(\frac{1}{4})$ con un error menor que 10^{-4}

Solución

a) ...

b)
$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \to \quad \mathrm{e}^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n n!} + E_N$$

Tenemos dos formas de determinar el número de sumandos (N) que hay que considerar para que el error (E_N) sea menor que 10^{-3}:

- Aplicando la fórmula del error de Taylor:

$$E_N(x) = \left| \frac{\mathrm{e}^{c_N}}{(N+1)!}(x - x_0)^{N+1} \right|$$

para $x = 1/2$, $x_0 = 0$, con $0 < c_N < 1/2$

$$\left| \frac{\mathrm{e}^{c_N}}{2^{N+1}(N+1)!} \right| < \frac{2}{2^{N+1}(N+1)!} = \frac{1}{2^N (N+1)!} < \frac{1}{1000}$$

que se verifica si $N \geq 4$ y, por lo tanto, $\mathrm{e}^{1/2} \approx \displaystyle\sum_{n=0}^{4} \frac{1}{2^n n!} = \frac{211}{128}$

- Aplicando la fórmula del error asociada al criterio del cociente:

$$E_N = S - S_N = \left|\frac{a_{N+1}}{1-r}\right| \quad \text{con} \quad 0 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r < 1$$

para $a_n = \dfrac{1}{2^n n!}$

$$\left|\frac{a_{N+1}}{1-r}\right| = \left|\frac{\frac{1}{2^{N+1}(N+1)!}}{1 - \frac{1}{2(N+1)}}\right| = \frac{1}{2^N N!(2N+1)} < \frac{1}{1000}$$

que se verifica si $N \geq 4$ y, por lo tanto, $\mathrm{e}^{1/2} \approx \displaystyle\sum_{n=0}^{4} \frac{1}{2^n n!} = \frac{211}{128}$

c) A partir de

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + e^{c_n} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{con } c_n \text{ entre } 0 \text{ y } x$$

se deduce que

$$x^2 \mathrm{e}^{-x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+2}}{k!} + e^{c_n} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+3}}{(n+1)!} \quad \text{con } c_n \text{ entre } 0 \text{ y } -x$$

Por lo tanto

$$f(1/4) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{4^{k+2} k!} + \frac{(-1)^{n+1} e^{c_n}}{4^{n+3}(n+1)!} \quad \text{con } -\tfrac{1}{4} < c_n < 0$$

Ahora bien

$$\left|\frac{(-1)^{n+1} e^{c_n}}{4^{n+3}(n+1)!}\right| = \frac{e^{c_n}}{4^{n+3}(n+1)!} < \frac{1}{4^{n+3}(n+1)!} < \frac{1}{10000}$$

que se verifica si $n \geq 3$ y, por lo tanto, $f(1/4) \approx \displaystyle\sum_{k=0}^{3} (-1)^k \frac{1}{4^{k+2} k!} = \frac{299}{6144}$

9. Consideremos la expresión

$$\ln x = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^n}{n}(x-1)^n + \frac{(-1)^n}{c_n^{n+1}(n+1)}(x-1)^{n+1} \quad , \quad c_n \text{ entre } 1 \text{ y } x$$

a) Aproxime el valor de $\ln 2$ utilizando el polinomio de Tayor de orden 5 y determine una cota del error cometido.

b) Calcule $\ln \frac{6}{5}$ con un error menor que una centésima.

Solución

a) ...

b)

$$\ln \frac{6}{5} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\ 5^n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n\ 5^n} + E_N$$

Tenemos dos formas de determinar el número de sumandos (N) que hay que considerar para que el error (E_N) sea menor que 10^{-3}:

- Aplicando la fórmula del error de Taylor:

$$E_N(x) = \left| \frac{(-1)^N}{c_N^{N+1}(N+1)}(x-x_0)^{N+1} \right|$$

para $x = 6/5$, $x_0 = 1$, con $1 < c_N < 6/5$

$$\left| \frac{(-1)^N}{c_N^{N+1}(N+1)5^{N+1}} \right| < \frac{1}{(N+1)5^{N+1}} < \frac{1}{1000}$$

que se verifica si $N \geq 3$ y, por lo tanto, $\ln \frac{6}{5} \approx \sum_{n=1}^{3} \frac{(-1)^{n+1}}{n\ 5^n} = \frac{137}{750}$

- Aplicando la fórmula del error asociada al criterio de Leibnitz:

$$E_N = |S - S_N| = |a_{N+1}|$$

para $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\ 5^n}$

$$|a_{N+1}| = \left| \frac{(-1)^{N+2}}{(N+1)5^{N+1}} \right| = \frac{1}{(N+1)5^{N+1}} < \frac{1}{1000}$$

que se verifica si $N \geq 3$ y, por lo tanto, $\ln \frac{6}{5} \approx \sum_{n=1}^{3} \frac{(-1)^{n+1}}{n\ 5^n} = \frac{137}{750}$