Relación de ejercicios 2.1

1. Represente gráficamente las funciones:

a) $f(x) = x^3 + 2x^2$ b) $g(x) = \dfrac{3x^2}{1+x^3}$ c) $h(x) = \dfrac{x^3}{(2x-1)(2x+1)}$

d) $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ e) $\operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Solución

a) La representación gráfica de la función $f(x) = x^3 + 2x^2$ se muestra en la figura 2.1.

b) La representación gráfica de la función $g(x) = \dfrac{3x^2}{1+x^3}$ e muestra en la figura 2.2.

c) La representación gráfica de la función $h(x) = \dfrac{x^3}{(2x-1)(2x+1)}$ se muestra en la figura 2.3.

d) La representación gráfica de la función $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ se muestra en la figura 2.4.

e) La representación gráfica de la función $\operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ se muestra en la figura 2.4.

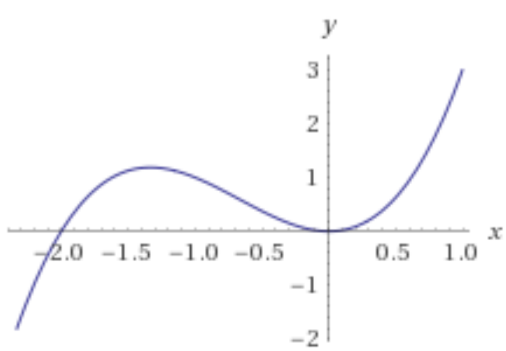


Figura 2.1: Representación gráfica de la función $f(x) = x^3 + 2x^2$
`https://www.wolframalpha.com/input/?i=x%5E3%2B2x%5E2`
@2019 Wolfram Alpha LLC. (access October 17, 2019).

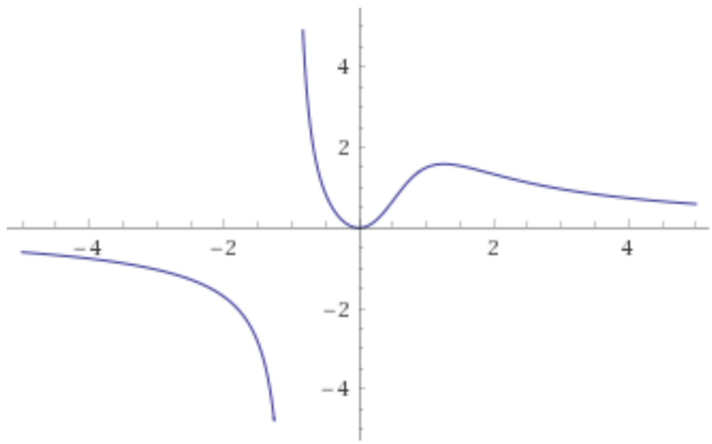


Figura 2.2: Representación gráfica de la función $g(x) = \dfrac{3x^2}{1+x^3}$
`https://www.wolframalpha.com/input/?i=3x%5E2%2F%281%2Bx%5E3%29+in+%5B-5%2C5%5D`
@2019 Wolfram Alpha LLC. (access October 17, 2019).

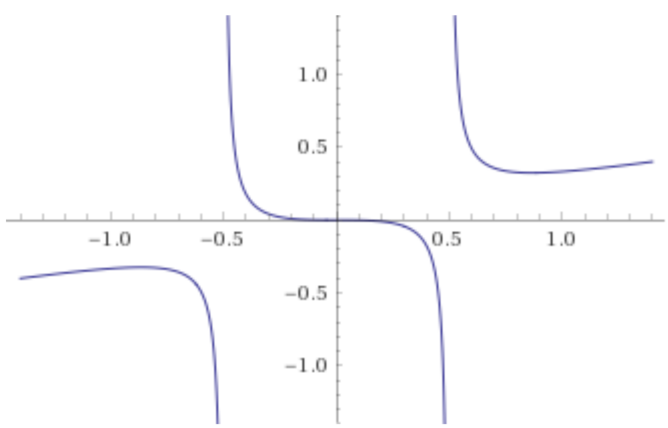


Figura 2.3: Representación gráfica de la función $h(x) = \dfrac{x^3}{(2x-1)(2x+1)}$
`https://www.wolframalpha.com/input/?i=x%5E3%2F%28%282x%2B1%29%282x-1%29%29+x+in+%5B-1.4%2C1.4%5D+y+in+%5B-1.4%2C1.4%5D`
@2019 Wolfram Alpha LLC. (access October 17, 2019).

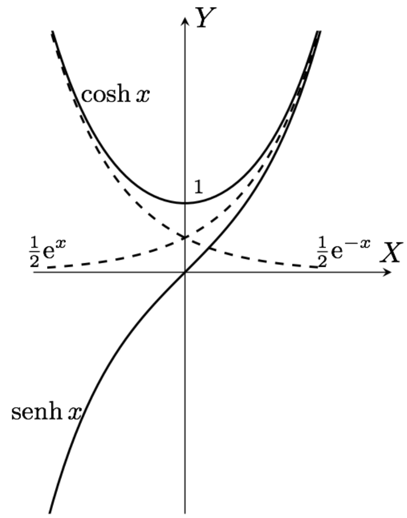


Figura 2.4: Representación gráfica de $\operatorname{senh} x$ y de $\cosh x$

2. Parametrización de curvas:

   a) Defina una parametrización del segmento que va del punto $P = (-2, -1)$ al punto $Q = (3, 0)$.

   b) Utilice el resultado obtenido en el apartado anterior para determinar la ecuación general de la recta que pasa por P y Q.

   c) Determine una parametrización del grafo de la función $f(x) = \ln x$

   d) Defina un par de parametrizaciones del grafo de $f(x) = \sqrt{x}$, con $x \in [0, 4]$, a partir de la propia función $(y = f(x))$ y la de su inversa $(x = g(y))$.

Solución

a) $f_1(t) = (1-t)(-2,-1) + t(3,0) = (-2+5t, -1+t), t \in [0,1]$

b) $$\left.\begin{array}{l} x = -2+5t \\ y = -1+t \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad x - 5y - 3 = 0$$

c) $f(t) = (t, \ln t),\ t > 0$

d) $$\left\{\begin{array}{lcll} f_1(t) & = & (t, \sqrt{t}), & t \in [0,4] \\ f_2(t) & = & (t^2, t), & t \in [0,2] \end{array}\right.$$

3. Consideramos la curva definida por la función vectorial

$$f(t) = (t^2 - t, t^3 - 3t) \qquad t \in \mathbb{R}$$

a) Dibuje la curva a mano.

b) Determine la ecuación general de la recta tangente y de la recta normal (perpendicular) a la curva en el punto $(0,0)$.

c) Determine la ecuación general de las rectas tangentes a la curva en el punto $(2,2)$. Justifique la existencia de dos rectas tangentes distintas en un mismo punto.

d) Determine todos los puntos de tangencia horizontal y vertical de la curva.

e) Pruebe que la curva es regular (regular en todos sus puntos).

Solución

a) La representación gráfica de las funciones $x(t)$ e $y(t)$ en coordenadas cartesianas se muestra en la figura 2.5, y la representación de la curva C se muestra en la figura 2.6.

b) $f(t) = (t^2 - t, t^3 - 3t) \quad \longrightarrow \quad f'(t) = (2t - 1, 3t^2 - 3)$
$f(t) = (0,0) \quad \longrightarrow \quad t = 0$

- Recta tangente en $t = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = (0,0) \\ f'(0) = (-1,-3) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 - t \\ y = 0 - 3t \end{array}\right\} \rightarrow 3x - y = 0$$

- La recta normal en $t = 0$ es $x + 3y = 0$

c) $f(t) = (2,2) \quad \longrightarrow \quad t = -1, 2$

- Si $t = -1$ entonces la recta tangente es $y - 2 = 0$
- Si $t = 2$ entonces la recta tangente es $3x - y - 4 = 0$

Hay dos rectas porque la curva ”pasa”dos veces por el punto $(2,2)$.

d) Puntos de tangencia horizontal: $y'(t) = 0$

$$3t^2 - 3 = 0 \quad \longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{lll} t = -1 & \longrightarrow & (2,2) \\ t = 1 & \longrightarrow & (0,-2) \end{array}\right.$$

Punto de tangencia vertical: $x'(t) = 0$

$$2t - 1 = 0 \quad \longrightarrow \quad t = \frac{1}{2} \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{-1}{4}, \frac{-11}{8}\right)$$

e) $f(t)$ es regular porque $f'(t) \neq (0,0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, es decir, que el sistema de ecuaciones $2t-1 = 0, 3t^2-3 = 0$ no tiene soluciones.

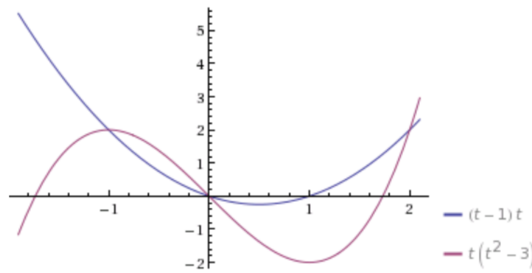


Figura 2.5: Representación gráfica de las funciones $x(t) = t^2 - t$ e $y(t) = t^3 - 3t$
@2019 Wolfram Alpha LLC.

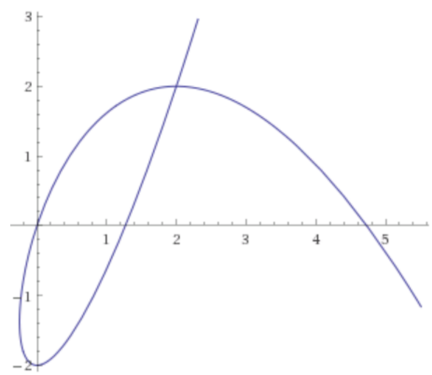


Figura 2.6: Representación gráfica de la parametrización $\gamma(t) = (t^2 - t, t^3 - 3t)$
@2019 Wolfram Alpha LLC.

4. Consideramos la curva definida por la siguiente parametrización:

$$x(t) = \frac{3t}{1+t^3} \qquad y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3} \qquad t \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

   a) Determine los puntos de tangencia horizontal y vertical.

   b) Compruebe que $y = -x - 1$ es una asíntota de la curva.

   c) Dibuje la curva utilizando software matemático para comprobar los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

Solución

a) Los puntos de tangencia horizontal verifican que $y'(t) = 0$

$$y'(t) = \frac{6t - 3t^4}{(1+t^3)^2} = 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} t = 0 & \longrightarrow \quad (0,0) \\ t = \sqrt[3]{2} & \longrightarrow \quad (\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}) \end{cases}$$

Los puntos de tangencia vertical verifican que $x'(t) = 0$

$$x'(t) = \frac{3 - 6t^3}{(1+t^3)^2} = 0 \quad \longrightarrow \quad t = \sqrt[3]{1/2} \quad \longrightarrow \quad (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$$

b) Asíntota oblicua de ecuación $y = mx + n$ en $t = -1$:

$$\lim_{t\to -1} x(t) = \pm\infty \quad , \quad \lim_{t\to -1} y(t) = \pm\infty$$

$$m = \lim_{t\to -1} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to -1} t = -1$$

$$n = \lim_{t\to -1} y(t) - m\, x(t) = \lim_{t\to -1} \frac{3t^2 + 3t}{1+t^3} = -1$$

c) La representación gráfica de las funciones $x(t)$ e $y(t)$ en coordenadas cartesianas se muestra en la figura 2.7, y la representación de la curva parametrizada se muestra en la figura 2.8.

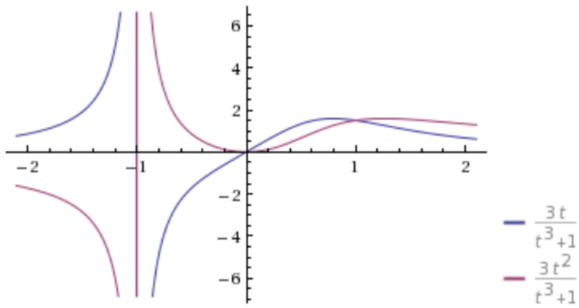


Figura 2.7: Representación gráfica de las funciones $x(t) = \frac{3t}{1+t^3}$ e $y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3}$
@2019 Wolfram Alpha LLC.

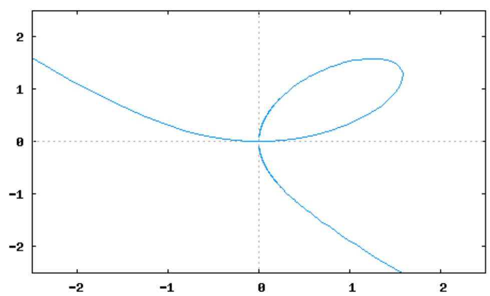


Figura 2.8: Representación gráfica de la parametrización $\gamma(t) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right)$
@2019 Wolfram Alpha LLC.

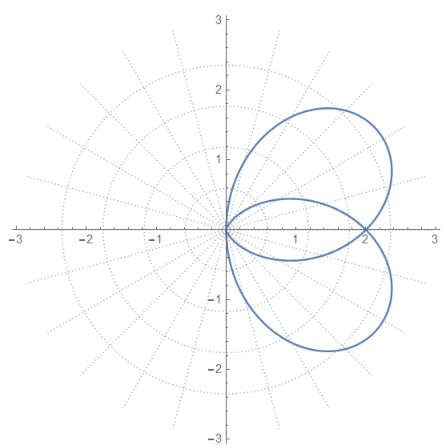
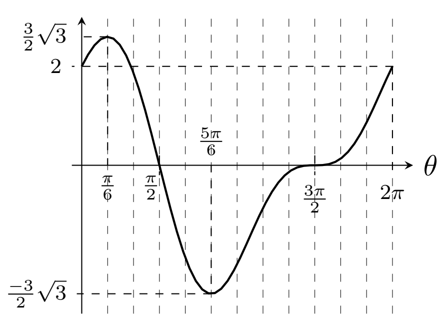
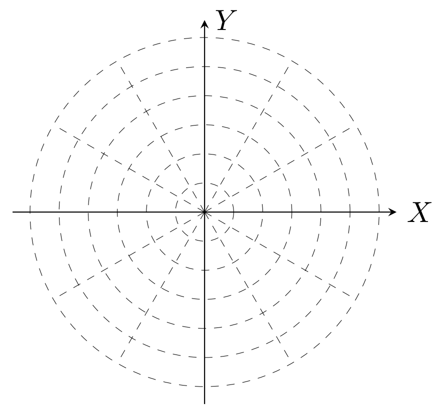


Figura 2.9: Representación gráfica de la curva polar $r = 2\cos\theta + \operatorname{sen} 2\theta$
@2019 Wolfram Alpha LLC.

5. La gráfica de la función $f(\theta) = 2\cos\theta + \operatorname{sen} 2\theta$ es la que se muestra abajo. A partir de esa gráfica, dibuje la curva polar $r = f(\theta)$.





Solución

La representación gráfica de la curva polar $r = 2\cos\theta + \operatorname{sen} 2\theta$ se muestra en la figura 2.9.

6. Utilice el grafo de la función $f(x) = 2 + \operatorname{sen}(4x)$ para dibujar la curva polar $r = 2 + \operatorname{sen}(4\theta)$, con $\theta \in [0, 2\pi]$, y determine la ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto de coordenadas cartesianas $(0, 2)$.

Solución

La representación gráfica de las función $r(\theta) = 2 + \operatorname{sen}(4\theta)$ en coordenadas cartesianas se muestra en la figura 2.10, y la representación de la curva polar $r = 2 + \operatorname{sen}(4\theta)$ se muestra en la figura 2.11.

$$r = 2 + \operatorname{sen}(4\theta) \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} x(\theta) = (2 + \operatorname{sen}(4\theta))\cos\theta \\ y(\theta) = (2 + \operatorname{sen}(4\theta))\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

La ecuación de la recta tangente a la curva en $\theta = \pi/2$ es $y = -2x + 2$

$$\begin{array}{llll} x(\pi/2) = 0 & , \quad x'(\pi/2) = -2 & \longrightarrow & x = 0 - 2t \\ y(\pi/2) = 2 & , \quad y'(\pi/2) = 4 & \longrightarrow & y = 2 + 4t \end{array}$$

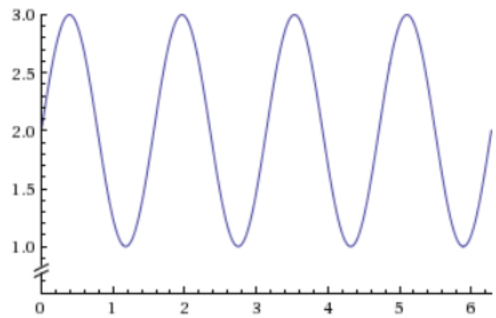


Figura 2.10: Representación gráfica de la función $r(\theta) = 2 + \operatorname{sen}(4\theta)$
@2019 Wolfram Alpha LLC.

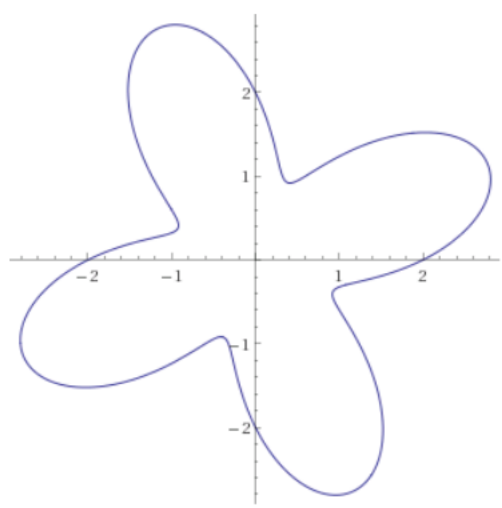


Figura 2.11: Representación gráfica de la curva polar $r = 2 + \operatorname{sen}(4\theta)$
@2019 Wolfram Alpha LLC.

7. Consideremos la curva polar $r = 2 - \sec\theta$, con $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$.

   a) Halle el punto donde la curva sea tangente a una circunferencia centrada en el origen.

   b) Determine la recta o rectas tangentes a la curva en el punto de coordenadas cartesianas $(0, 0)$.

   c) Compruebe que $x = -1$ es una asíntota de la curva polar.

   d) Utilice software matemático para representar la curva, comprobar los resultados obtenidos en los apartados anteriores y determinar si existen puntos de tangencia horizontal y vertical.

Solución

$$\begin{array}{l} r(\theta) = 2 - \sec\theta \\ \theta \in (-\pi/2, \pi/2) \end{array} \quad \to \quad \begin{cases} x(\theta) = (2 - \sec\theta)\cos\theta = 2\cos(\theta) - 1 \\ y(\theta) = (2 - \sec\theta)\operatorname{sen}\theta = 2\sin(\theta) - \tan(\theta) \end{cases}$$

a) $r(\theta) = 2 - \sec\theta \quad \to \quad r'(\theta) = \dfrac{-\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta} = 0 \quad \to \quad \theta = 0$
En el punto $(x(0), y(0)) = (1, 0)$ la curva es tangente a la circunferencia centrada en el origen y de radio $r(0) = 1$

b) $r(\theta) = 0 \quad \to \quad \theta = \pm\dfrac{\pi}{3}$
Si $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ entonces la recta tangente a la curva es $y = \sqrt{3}x$
Si $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$ entonces la recta tangente a la curva es $y = -\sqrt{3}x$

c) Asíntota vertical de ecuación $x = -1$ en $t = \pm\frac{\pi}{2}$ porque

$$\lim_{\theta\to\pm\pi/2} x(\theta) = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{\theta\to\pm\pi/2} y(\theta) = \pm\infty$$

d) La representación gráfica de las función $r(\theta) = 2 - \sec\theta$ en coordenadas cartesianas se muestra en la figura 2.12, y la representación de la curva polar $r = 2 - \sec\theta$ se muestra en la figura 2.13.

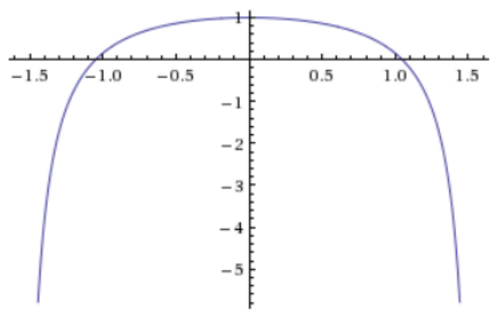


Figura 2.12: Representación gráfica de la función $r(\theta) = 2 - \sec\theta$
@2019 Wolfram Alpha LLC.

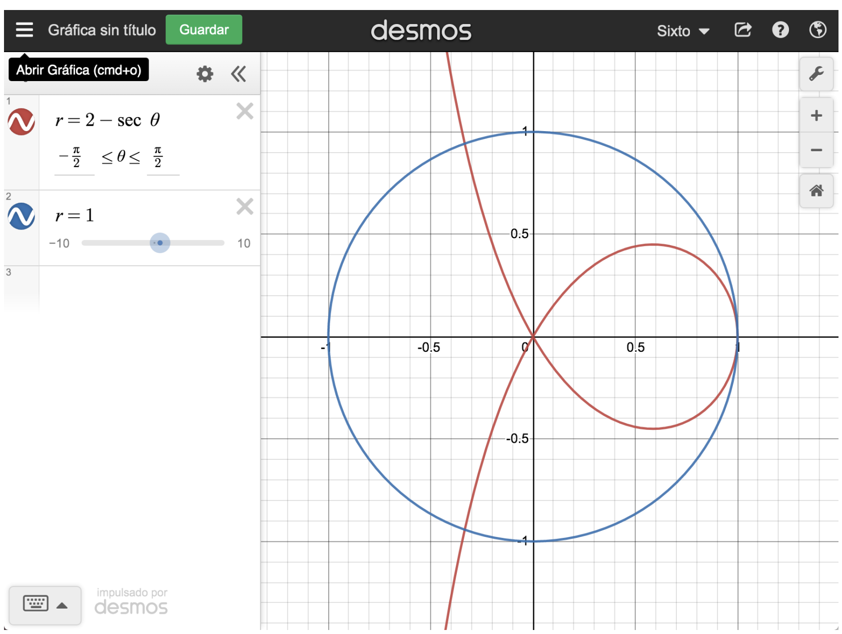


Figura 2.13: Representación gráfica de la curva polar $r = 2 - \sec\theta$
Copyright @ 2021 Desmos, Inc.

8. Identifique los siguientes lugares geométricos, determine sus características principales, obtenga una parametrización y dibujelas.

a) $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$	b) $x^2 + y^2 - 6x + 10 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 6x + 9 = 0$	d) $x^2 - 4x - 4y^2 = 0$
e) $x^2 + 2x + 4y^2 - 3 = 0$	f) $y^2 - 4x + 2y + 5 = 0$

Solución

a) $(x-3)^2+y^2 = 4$ es una CIRCUNFERENCIA de radio 2 con centro en $(3,0)$, y una parametrización es $x(t) = 3+2\cos t$, $y(t) = 2\sin t$, con $t \in [0,2\pi]$.

b) $(x-3)^2 + y^2 = -1$ es una cónica degenerada que no representa ningún punto del plano.

c) $(x-3)^2 + y^2 = 0$ es una cónica degenerada que sólo representa al punto $(3,0)$.

d) $\frac{(x-2)^2}{4} - y^2 = 1$ es una HIPÉRBOLA con ejes $x = 2$, $y = 0$, centro en $(2,0)$, asíntotas $x - 2y - 2 = 0$, $x + 2y - 2 = 0$, vértices $(4,0)$, $(0,0)$, focos en $(2+\sqrt{5},0)$ y $(2-\sqrt{5},0)$, y una parametrización es $x(t) = 2 \pm 2\cosh t$, $y(t) = \sinh t$, con $t \in \mathbb{R}$.

e) $\frac{(x+1)^2}{4} + y^2 = 1$ es una ELIPSE con centro en $(-1,0)$, ejes $x = -1$, $y = 0$, vértices $(1,0)$, $(-3,0)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$, focos en $(-1-\sqrt{3},0)$ y $(-1+\sqrt{3},0)$, y una parametrización es $x(t) = -1+2\cos t$, $y(t) = \sin t$, con $t \in [0,2\pi]$.

f) $(y+1)^2 = 4(x-1)$ es una PARÁBOLA con vértice $(1,-1)$, ejes $x = 1$, $y = -1$, abertura hacía la dirección $(1,0)$, foco en $(2,-1)$, directriz $x = 0$, siendo $x(t) = 1 + 4t^2$, $y(t) = -1 + 4t$, con $t \in \mathbb{R}$, una parametrización.

9. Determine una parametrización de la elipse centrada en el punto $(3,0)$, sabiendo que pasa por por el origen de coordenadas, y que el punto $(3,4)$ es uno de sus focos.

Solución

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} x(t) = 3 + 3\cos t \\ y(t) = 5\,\mathrm{sen}\, t \end{cases} \qquad t \in [0,2\pi]$$

10. Probar que el lugar geométrico dado por $|z| + |z+2| = 4$ con $z \in \mathbb{C}$, es la curva:

$$3x^2 + 6x + 4y^2 - 9 = 0$$

siendo x e y la parte real e imaginaria de z respectivamente. Enumerar sus principales características y dar una parametrización de dicho lugar geométrico.

Solución

$$\left.\begin{array}{l} |z| + |z+2| = 4 \\ z = x + y\mathrm{i} \end{array}\right\} \longrightarrow \quad 3x^2 + 6x + 4y^2 - 9 = 0 \quad \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \quad \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \quad \longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x(t) = -1 + 2\cos t \\ y(t) = \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, t \end{array}\right. \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Elipse con centro en el punto $(-1, 0)$, semiejes 2 y $\sqrt{3}$, focos en los puntos $(-2, 0)$ y $(0, 0)$, y vértices en los puntos $(1, 0)$, $(-3, 0)$, $(-1, \sqrt{3})$ y $(-1, -\sqrt{3})$.