Relación de ejercicios 1.1 (Lecciones 1.1, 1.2 y 1.3)

1. Consideremos la definición de las funciones hiperbólicas:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

   a) Compruebe que $\cosh(0) = 1$ y que $\operatorname{senh}(0) = 0$

   b) Demuestre que $\frac{d}{dx}\cosh(x) = \operatorname{senh}(x)$, y que $\frac{d}{dx}\operatorname{senh}(x) = \cosh(x)$

   c) Demuestre que $\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solución

a) $\cosh(0) = \dfrac{e^0 + e^{-0}}{2} = \dfrac{1+1}{2} = 1$

$\sinh(0) = \dfrac{e^0 - e^{-0}}{2} = \dfrac{1-1}{2} = 0$

b) $\dfrac{d}{dx}\cosh(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh}(x)$

$\dfrac{d}{dx}\operatorname{senh}(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$

c) $\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$

$= \dfrac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} - \dfrac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$

2. Determine las soluciones de las siguientes ecuaciones:

   a) $(x-2)(x+2) = 5$ b) $(x^3 - 2)\mathrm{e}^{x^2-1} = 0$

   c) $(2x^2 + 3x - 5)\ln(x^2 - 3) = 0$ d) $3 - 2x = \sqrt{2x+3}$

Solución

a) $x = 3, x = -3$

b) $x = \sqrt[3]{2}$

c) $x = -5/2, x = 2, x = -2$

d) $x = 1/2$

3. Determine las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 3x^2-3y &= 0 \\ 3y^2-3x &= 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 4-x^2=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2y+xy^2=0 \\ x^2-y^2=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 6x-2\lambda x &= 0 \\ 3y^2-2\lambda y &= 0 \\ x^2+y^2 &= 9 \end{cases}$ e) $\begin{cases} -\frac{1}{4}ye^{-\frac{xy}{4}}-2\lambda x &= 0 \\ -\frac{1}{4}xe^{-\frac{xy}{4}}-2\lambda y &= 0 \\ x^2+y^2 &= 1 \end{cases}$

Solución

a) $(x,y)\in\{(0,0),(1,1)\}$

b) Sin soluciones

c) $(x,y)\in\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=-x\}$

d) $(x,y,\lambda)\in\{(-3,0,3),(0,-3,-9/2),(0,3,9/2),$
$((3,0,3),\sqrt{5},2,3),(-\sqrt{5},2,3)\}$

e) $(x,y,\lambda)\in\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{8}\exp(-1/8)\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{8}\exp(1/8)\right),\right.$
$\left.\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{8}\exp(1/8)\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{8}\exp(-1/8)\right)\right\}$

4. Desarrolle y simplifique las siguientes expresiones

a) $\left(4x-\frac{1}{2}\right)^4$ b) $(x+y)^2-(x-y)^2$ c) $(x+y)^8-(x-y)^8$

Solución

a) $256x^4-128x^3+24x^2-2x+\frac{1}{16}$

b) $4xy$

c) $16x^7y+112x^5y^3+112x^3y^5+16xy^7$

5. Ayudándose de la fórmula del binomio de Newton calcule:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^5}{(n+1)^6-n^6}$$

Solución

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^5}{(n+1)^6-n^6}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^5+5n^4+\cdots+1}{n^6+6n^5+\cdots+1-n^6}=$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^5+5n^4+\cdots+1}{6n^5+\cdots+1}=\frac{1}{6}$$

6. Transforme los polinomios usando la técnica de completar cuadrados:

   a) $9x^2 - 6x + 2$ b) $5x^2 + 7x + 2$ c) $3x^2 + 1$

Solución

a) $9x^2 - 6x + 2 = (3x-1)^2 + 1 = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 1$

b) $5x^2 + 7x + 2 = \left(\sqrt{5}x + \frac{7}{2\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{9}{20} = 5\left(x + \frac{7}{10}\right)^2 - \frac{9}{20}$

c) $3x^2 + 1 = \left(\sqrt{3}x\right)^2 + 1$