# Relación de ejercicios 4.1

1. Consideremos las siguientes sucesiones:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad , \quad b_n = \frac{n}{n+1} \quad , \quad c_n = \frac{2^n}{n} \quad , \quad d_n = \operatorname{sen}\frac{1}{n} \quad , \quad e_n = \frac{n!}{n^n}$$

   *a*) Calcule los primeros términos de las sucesiones y deduzca "intuitivamente" las características de las sucesiones (monotonía, acotación y convergencia).

   *b*) Estudie formalmente las propiedades de monotonía y acotación, determine la convergencia y, si es posible, calcule el límite.

**Solución**

*a*) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \quad \longrightarrow \quad \left\{-1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{-1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{-1}{5}, \dots\right\}$

- No monótona
- Acotada entre $-1$ y $1/2$
- Convergente a 0

$b_n = \dfrac{n}{n+1} \quad \longrightarrow \quad \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{5}{6}, \dots\right\}$

- Estrictamente creciente
- Acotada entre $1/2$ y 1
- Convergente a 1

$c_n = \dfrac{2^n}{n} \quad \longrightarrow \quad \left\{2, 2, \dfrac{8}{3}, 4, \dfrac{32}{5}, \dots\right\}$

- Creciente
- Acotada inferiormente por 2
- Divergente a $\infty$

$d_n = \operatorname{sen}\dfrac{1}{n} \quad \longrightarrow \quad \left\{\operatorname{sen}1, \operatorname{sen}\dfrac{1}{2}, \operatorname{sen}\dfrac{1}{3}, \operatorname{sen}\dfrac{1}{4}, \operatorname{sen}\dfrac{1}{5}, \dots\right\}$

- Estrcitamente decreciente
- Acotada entre 0 y $\operatorname{sen}1$
- Convergente a 0

$e_n = \dfrac{n!}{n^n} \quad \longrightarrow \quad \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{9}, \dfrac{3}{32}, \dfrac{24}{625}, \dots\right\}$

- Estrictamente decreciente
- Acotada entre 0 y 1
- Convergente a 0

*b*) ...

2. Utilice el siguiente resultado

> ”Las funciones polinómicas son infinitos en $+\infty$ y $-\infty$, y son equivalentes al monomio de mayor grado”

para calcular los siguientes límites:

a) $\lim \dfrac{n+3}{n^3+4}$ b) $\lim \dfrac{n+3n^3}{n^3+4}$ c) $\lim \dfrac{3-n^5}{n^3+4}$

**Solución**

*a*) $\lim \dfrac{n+3}{n^3+4} = \lim \dfrac{n}{n^3} = \lim \dfrac{1}{n^2} = 0$

*b*) $\lim \dfrac{n+3n^3}{n^3+4} = \lim \dfrac{3n^3}{n^3} = \lim 3 = 3$

*c*) $\lim \dfrac{3-n^5}{n^3+4} = \lim \dfrac{-n^5}{n^3} = \lim -n^2 = -\infty$

3. Utilice infinitésimos equivalentes para calcular los siguientes límites:

a) $\lim n^2\left(1-\cos\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ b) $\lim \dfrac{\tan\left(\frac{2n-1}{n^2+7}\right)}{\log\left(\frac{3n^3+2}{3n^3+n}\right)}$

**Solución**

*a*) $\lim n^2\left(1-\cos\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) \stackrel{*}{=} \lim n^2 \dfrac{1}{2n^4} = \lim \dfrac{1}{2n^2} = 0$

en (*) aplicamos $1-\cos\square \sim \square^2/2$ si $\square \to 0$

*b*) $\lim \dfrac{\tan\left(\frac{2n-1}{n^2+7}\right)}{\log\left(\frac{3n^3+2}{3n^3+n}\right)} \stackrel{*}{=} \lim \dfrac{\frac{2n-1}{n^2+7}}{\frac{3n^3+2}{3n^3+n}-1} = \lim \dfrac{\dfrac{2n-1}{n^2+7}}{\dfrac{2-n}{3n^3+n}} = \lim \dfrac{\frac{2n}{n^2}}{\frac{-n}{3n^3}} =$

$\lim -6n = -\infty$

en (*) aplicamos $\operatorname{tg}\square \sim \square$ si $\square \to 0$, $\ln\square \sim \square - 1$ si $\square \to 1$

4. Indeterminación del tipo $[1^\infty]$. Utilice infinitésimos equivalentes para resolver los siguientes ejercicios:

   *a*) Calcule el límite $\lim \left(\dfrac{n+2}{n+4}\right)^{5-n}$

   *b*) Determine el valor de $a$ que verifica $\lim \left(\dfrac{an+1}{an-1}\right)^{n} = 9$

**Solución**

*a*) Utilizamos el infinitésimo $\ln x \sim x-1$ en $x=1$

$$\begin{aligned}
\lim \left(\frac{n+2}{n+4}\right)^{5-n} &= \lim \exp\left(\ln\left(\frac{n+2}{n+4}\right)^{5-n}\right) = \\
&= \lim \exp\left((5-n)\cdot \ln\left(\frac{n+2}{n+4}\right)\right) = \\
&= \lim \exp\left((5-n)\left(\frac{n+2}{n+4}-1\right)\right) = \\
&= \lim \exp\left(\frac{2n-10}{n+4}\right) = \mathrm{e}^2
\end{aligned}$$

*b*) Utilizamos el infinitésimo $\ln x \sim x-1$ en $x=1$

$$\begin{aligned}
\lim \left(\frac{an+1}{an-1}\right)^{n} &= \lim \exp\left(\ln\left(\frac{an+1}{an-1}\right)^{n}\right) = \\
&= \lim \exp\left(n\cdot \ln\left(\frac{an+1}{an-1}\right)\right) = \\
&= \lim \exp\left(n\left(\frac{an+1}{an-1}-1\right)\right) = \\
&= \lim \exp\left(\frac{2n}{an-1}\right) = \mathrm{e}^{2/a} \\
&= \mathrm{e}^{2/a} = 9 \quad \rightarrow \quad a = \frac{1}{\ln 3}
\end{aligned}$$

5. Infinitos equivalentes: $\ln p(n) \sim k \ln n$

   *a*) Calcule el límite $\lim \dfrac{\log(n^2+1)}{\log n}$.

   *b*) Demuestre que si $p(n)$ es un polinomio de grado $k$, entonces $\log p(n)$ y $k \log n$ son infinitos equivalentes.

   *c*) Utilice la equivalencia del apartado anterior para calcular el límite

$$\lim \frac{\log(n^5-7)}{5\log(3n-2)}$$

**Solución**

Vamos a utilizar la propiedad demostrada en los apuntes y en un ejercicio anterior: Si $p(n) = a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \ldots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0$ entonces $p(n) \sim a_k n^k$ en $\pm\infty$

*a*) Aplicamos que $n^2 + 1 \sim n^2$ en $\infty$

$$\lim \frac{\log(n^2+1)}{\log n} = \lim \frac{\log n^2}{\log n} = \lim \frac{2\log n}{\log n} = 2$$

*b*) Suponemos que $p(n) = a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \ldots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0$ con $a_k > 0$, de manera que $\lim p(n) = \infty$, y aplicamos que

$$\log p(n) \sim \log a_k n^k = \log a_k + \log n^k = \log a_k + k \log n$$

Primero comprobamos que son infinitos:

$$\begin{aligned} \lim \log p(n) &= \infty \\ \lim k \log(n) &= \infty \end{aligned}$$

Después comprobamos que son equivalentes

$$\lim \frac{\log p(n)}{k\log(n)} = \lim \frac{\log a_k + k\log n}{k\log(n)} = \lim \frac{\log a_k}{k\log(n)} + \frac{k\log n}{k\log(n)} =$$

$$= \lim \frac{\log a_k}{k\log(n)} + \lim \frac{k\log n}{k\log(n)} = 0 + 1 = 1$$

*c*) Aplicamos que $\ln p(n) \sim k \ln n$ en $\infty$

$$\lim \frac{\log(n^5-7)}{5\log(3n-2)} = \lim \frac{5\log n}{5\log n} = 1$$

6. Determine si las siguientes parejas de expresiones son (infinitos o infinitésimos) equivalentes:

   a) $\log\left[\dfrac{2n^2+5n-3}{(n+1)^2}\right] \sim \dfrac{2n^2+5n-3}{(n+1)^2} - 1$

   b) $e^{1/n^2}+1 \sim \dfrac{1}{n^2}$

   c) $\operatorname{tg}\left[\dfrac{n-1}{n+3}+1\right] \sim \dfrac{n-1}{n+3} - 1$

   d) $\operatorname{sen}(2\pi n) \sim 2\pi n$

**Solución**

*a*) NO, porque $\ln\Box \sim \Box - 1$ si $\Box \to 1$ pero $\lim \dfrac{2n^2+5n-3}{(n+1)^2} \neq 1$

*b*) NO, porque $e^{1/n^2}+1$ no es infinitésimo. No confundir con la equivalencia $e^{\Box} - 1 \sim \Box$ si $\Box \to 0$

*c*) NO, porque $\operatorname{tg}\Box \sim \Box$ si $\Box \to 0$ pero $\lim \dfrac{n-1}{n+3} + 1 \neq 0$

*d*) NO, porque $\operatorname{sen}\Box \sim \Box$ si $\Box \to 0$ pero $\lim 2\pi n \neq 0$

7. La exponencial es un infinito de orden mayor que cualquier polinomio.

   *a*) Calcule el límite $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$

   *b*) Demuestre por inducción sobre $m \in \mathbb{N}$ que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^m}{e^x} = 0$

   *c*) Deduzca que, si $p(x)$ un polinomio, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0, \qquad \lim \frac{p(n)}{e^n} = 0$$

**Solución**

*a*) Aplicando dos veces la Regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = \left[\frac{2}{\infty}\right] = 0$$

*b*) Para $m = 0$ se verifica trivialmente que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^m}{e^x} = 0$

Si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^m}{e^x} = 0$ es cierto para $m = k-1$ entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{e^x} = \lim_{x\to\infty} k\frac{x^{k-1}}{e^x} = k \lim_{x\to\infty} \frac{x^{k-1}}{e^x} = k \cdot 0 = 0$$

*c*) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{p(x)}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_k x^k}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} a_k \dfrac{x^k}{e^x} = 0$

y, aplicando la caracterización secuencial,

si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{p(x)}{e^x} = 0$ entonces $\lim \dfrac{p(n)}{e^n} = 0$

8. Orden de infinitos

   *a*) Demuestre el siguiente orden de infinitos

   $$\ln x \ll x^n \ll a^x \quad \text{en} \quad x \to +\infty$$

   para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, y para todo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$.

   *b*) Compare los infinitos $f(x) = 1/x$ y $g(x) = -\ln x$ en $x \to 0^+$

**Solución**

*a*) $\ln x \ll x^n$ en $x \to \infty$ pues $\lim \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$ (aplicando la regla de L'Hôpital), y $x^n \ll a^x$ en $x \to \infty$ pues $\lim \dfrac{x^n}{a^x} = 0$ (de manera similar a como se ha demostrado en el ejercicio anterior).

*b*) $-\ln x \ll \dfrac{1}{x}$ en $x \to 0^+$ pues $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-\ln x}{1/x} = 0$ (aplicando la regla de L'Hôpital).

9. La fórmula de Stirling establece la siguiente equivalencia de infinitos:

   $$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

   Esta fórmula resulta de utilidad en aquellos límites donde aparece la expresión factorial y que no permite establecer una correspondencia con funciones.

   *a*) Utilice la fórmula de Stirling para demostrar el siguiente orden de infinitos:

   $$a^n \ll n! \ll n^n \qquad \text{para todo } a > 0$$

   *b*) Calcule $\lim \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

**Solución**

*a*) $a^n \ll n!$ porque $\lim \dfrac{a^n}{n!} = 0$

$$\lim \frac{a^n}{n!} = \lim \frac{a^n}{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}} = \lim \frac{\left(\frac{a\,\mathrm{e}}{n}\right)^n}{\sqrt{2\pi n}} \stackrel{*}{=} \left[\frac{0}{\infty}\right] = 0$$

$$(*) \quad \lim \left(\frac{a\,\mathrm{e}}{n}\right)^n = \lim \mathrm{e}^{n\ln\left(\frac{a\,\mathrm{e}}{n}\right)} = \left[\mathrm{e}^{-\infty}\right] = 0$$

$n! \ll n^n$ porque $\lim \dfrac{n!}{n^n} = 0$

$$\lim \frac{n!}{n^n} = \lim \frac{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}}{n^n} = \lim \frac{\sqrt{2\pi n}}{\mathrm{e}^n} \overset{**}{=} 0$$

$$(**) \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi x}}{\mathrm{e}^x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\pi}{\mathrm{e}^x\sqrt{2\pi x}} = \left[\frac{\pi}{\infty}\right] = 0$$

*b*) $\lim \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim \dfrac{n}{\sqrt[n]{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}} = \lim \dfrac{\mathrm{e}}{\sqrt[2n]{2\pi n}} = \dfrac{\mathrm{e}}{1} = \boxed{\mathrm{e}}$

$$\lim \sqrt[2n]{2\pi n} = \lim \mathrm{e}^{\frac{\ln(2\pi n)}{2n}} \overset{***}{=} \mathrm{e}^0 = 1$$

$$(***) \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2\pi x)}{2x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x} = 0$$

10. Identifique y justifique si existe algún valor de la variable donde estas igualdades sean verdaderas.

a) $\operatorname{sen}(x) = O(x-\pi)$ b) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + O(x^3)$

c) $x\operatorname{sen}(x^2) = o(x^3)$ d) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$

**Solución**

*a*) En $x = \pi$, tanto $\operatorname{sen}(x)$ como $x - \pi$ son infinitésimos y, además, son del mismo orden porque

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x-\pi} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\pi} \frac{\cos(x)}{1} = -1 \in \mathbb{R} - \{0\}$$

*b*) La igualdad es equivalente a $e^x - 1 - x - x^2/2 = O(x^3)$ y en $x = 0$, tanto $e^x - 1 - x - x^2/2$ como $x^3$ son infinitésimos y, además, son del mismo orden porque

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - x^2/2}{x^3} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{3x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{6x} \overset{L'H}{=}$$
$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{6} = 1/6 \in \mathbb{R} - \{0\}$$

*c*) En $x = 0$, tanto $x\operatorname{sen}(x^2)$ como $x^3$ son infinitésimos y, además, son del mismo orden porque

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen}(x^2)}{x^3} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2) + 2x^2\cos(x^2)}{3x^2} \overset{L'H}{=}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{6x\cos(x^2) - 4x^3 \operatorname{sen}(x^2)}{6x} \overset{L'H}{=}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(6-8x^4)\cos(x^2) - 24x^2 \operatorname{sen}(x^2)}{6} = 1 \in \mathbb{R} - \{0\}$$

en contra del enunciado (que es falso) que dice que $x \operatorname{sen}(x^2)$ es de orden mayor que $x^3$ pues, en tal caso, el límite anterior debía haber sido 0.

*d*) La igualdad es equivalente a $e^x - 1 - x - x^2/2 = o(x^2)$ y en $x = 0$, tanto $e^x - 1 - x - x^2/2$ como $x^2$ son infinitésimos y, además, $e^x - 1 - x - x^2/2$ es de orden mayor que $x^2$ (como dice el enunciado) porque

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - x^2/2}{x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{2x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2} = 0$$