

# Breve introducción a las lógicas difusas y multivaluadas

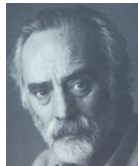
Manuel Ojeda Aciego

Departamento de Matemática Aplicada  
Universidad de Málaga

Gestión Inteligente de la Información

Prefiero caminar con una duda  
que con un mal axioma

*El Cromosoma*  
de Javier Krahe  
(1944–2015)

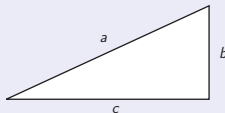


# Una historia preliminar

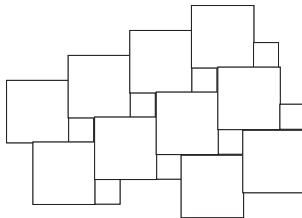
## El teorema de Pitágoras

### Teorema (de Pitágoras)

*Para todo triángulo rectángulo se tiene  $a^2 = b^2 + c^2$ , donde*



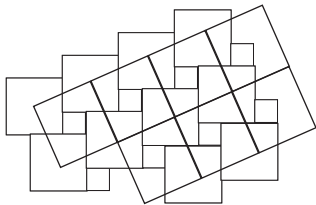
**Demostración:** Partamos de la siguiente teselación del plano usando dos cuadrados diferentes



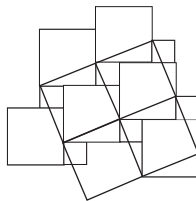
# Una historia preliminar

## El teorema de Pitágoras

Unamos los centros de los cuadrados grandes para construir una retícula de cuadrados aún más grandes.



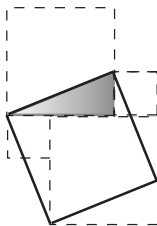
Ahora traslademos los cuadrados nuevos de modo que sus vértices coincidan con los de la retícula previa.



# Una historia preliminar

## El teorema de Pitágoras

Vemos cómo el cuadrado grande resulta dividido en trozos que permiten reconstruir los dos más pequeños.



Como queríamos demostrar.  
¿O no?

# Repasemos la historia

## Sobre la demostración del teorema de Pitágoras

Repasemos los fundamentos de la demostración.

- Hemos partido de una teselación del plano. ¿Cómo sabemos que existe?
- Es más, ¿cómo sabemos que existen los cuadrados?

Afortunadamente, Euclides ya proporcionó los ingredientes formales necesarios para la construcción de (una) geometría.

# Repasemos la historia

## Los postulados de Euclides

La geometría de Euclides está basada en los cinco postulados siguientes:

- 1 Dos puntos cualesquiera pueden ser unidos por un segmento.
- 2 Todo segmento se puede prolongar indefinidamente y formar una recta.
- 3 Es posible construir un círculo dados su centro y su radio.
- 4 Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
- 5 Si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.

# Sobre el quinto postulado de Euclides

- Durante mucho tiempo se intentó probar a partir de los otros postulados.
- Se propusieron enunciados equivalentes (y más “razonables”):
  - ▶ Dados tres puntos no alineados, es posible construir un círculo que pase por todos ellos
  - ▶ La suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a dos ángulos rectos.
  - ▶ Se puede construir un triángulo cuya área sea mayor que cualquier área dada.
  - ▶ Por un punto exterior a una recta es posible trazar una única paralela a dicha recta.
- Se observó, finalmente, que era un postulado independiente.
- Es más, es posible sustituirlo por otros, tales como
  - 1 Por un punto exterior a una recta no es posible trazar una única paralela a dicha recta.
  - 2 Por un punto exterior a una recta es posible trazar infinitas paralelas a dicha recta.y obtener una teoría de la geometría sin contradicciones.



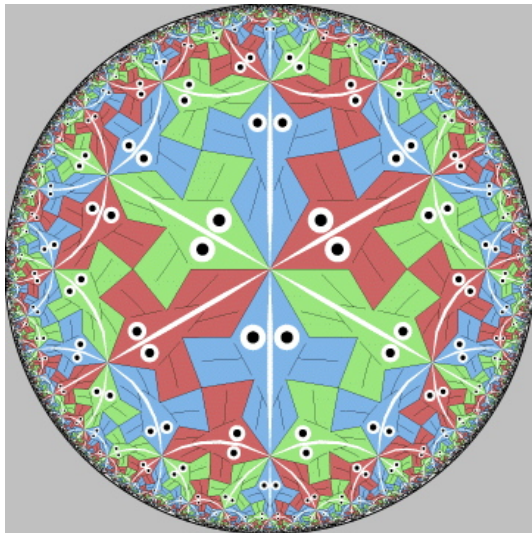
# Geometrías no euclídeas

## Consecuencias

- Existen distintas definiciones de geometría.
- Todas son igualmente válidas desde un punto de vista formal.
- ¡¡Incluso parece ser que el mundo real no se corresponde con la geometría euclídea, sino con alguna de sus parientes raras!!

# Geometrías no euclídeas

## Cuadrados hiperbólicos en un cuadro de Escher



# Hablemos de Lógica

- Originalmente, la lógica trataba de formalizar razonamientos en lenguaje natural.
- Porque el lenguaje natural es ambiguo, y posibilita la existencia de paradojas:  
*Uno de ellos, profeta suyo, dijo: "Los cretenses son siempre mentirosos, malas bestias, vientos perezosos." Este testimonio es verdadero.*

*(Tito 1, 12-13)*

# El comienzo de la Lógica Formal

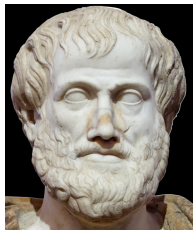
## Seguimos con la antigüedad

- Aristóteles desarrolló el primer sistema formal para “todos” y “algunos”
- Su Silogística puede describirse como un conjunto de reglas de inferencia para las proposiciones categóricas

- (A) Todo P es Q
- (E) Ningún P es Q
- (I) Algún P es Q
- (O) Algún P no es Q

# Por fin: la lógica multivaluada

Hitos importantes: Los futuros contingentes



Aristóteles  
( $\approx 384$  a. C. –  $\approx 322$  a. C.)



Guillermo de Ockham  
( $\approx 1285$  –  $\approx 1347$ )



Jan Łukasiewicz  
(21/12/1878 – 13/02/1956)

Mañana habrá una batalla naval (¿verdadero o falso?)

Lógica trivaluada de Łukasiewicz

# Por fin: la lógica multivaluada

Hitos importantes: Otras lógicas trivaluadas



Emil Post

(11/02/1897 – 21/04/1954)



Arend Heyting

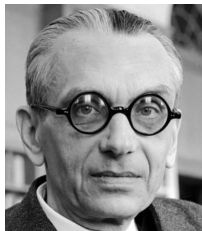
(09/05/1898 – 09/07/1980)

Lógicas multivaluadas con completitud funcional.

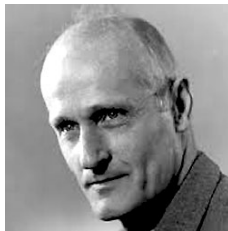
Lógica trivaluada para el intuicionismo.

# Por fin: la lógica multivaluada

Hitos importantes: Otras lógicas trivaluadas



Kurt Gödel  
(28/04/1906 – 14/01/1978)



Stephen Kleene  
(05/01/1909 – 25/01/1994)

Lógicas finito valuadas como aproximación de la lógica intuicionista.

Lógica trivaluada para la indefinición.

# Por fin: la lógica multivaluada

Hitos importantes: Otras lógicas trivaluadas



Lotfi Zadeh

(04/02/1921 – 06/09/2017)

Lógica difusa  
(sentido amplio).



Vilém Novák

(21/06/1951 – )

Lógica difusa de primer orden  
(sentido estricto).



Petr Hájek

(06/02/1940 – 26/12/2016)

Lógica de las t-normas.



# La lógica multivaluada

## Hitos importantes

*No se debe buscar la única lógica verdadera, sino la que mejor se adapte a nuestro problema.*

# Lógica difusa

## Aproximación intuitiva

- El término *lógica difusa* (o *borrosa*) tiene dos significados distintos: por una parte, en sentido estricto, es un sistema lógico formal que extiende y generaliza las lógicas clásicas multivaluadas; por otra parte, en sentido amplio, es casi sinónimo de la teoría de los conjuntos difusos.
- La definición de conjunto difuso extiende la de *función característica*, que define a los subconjuntos  $A$  de un universo  $\mathcal{U}$ , como una función  $\chi_A: \mathcal{U} \longrightarrow \{0, 1\}$ .
- Dado un universo  $\mathcal{U}$ , un conjunto difuso  $A$  es una función  $A: \mathcal{U} \longrightarrow [0, 1]$ .
- En lógica clásica, una interpretación es una función  $I: \Pi \longrightarrow \{0, 1\}$ , que nos dice qué átomos son verdaderos.
- En lógica difusa, las interpretaciones son conjuntos difusos  $I: \Pi \longrightarrow [0, 1]$ , y nos permiten formalizar predicados que tengan un carácter *gradual*.

**Ejemplos:** ser alto, ser rubio, etc.

# Lógica difusa

## Lógicas basadas en normas triangulares

- Respecto de los conectivos ¿existen tablas de verdad en lógica difusa?
- En este caso tendríamos *funciones* de verdad. Por ejemplo,
  - ▶ la negación debería ser una función  $n: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  tal que  $n(0) = 1$  y  $n(1) = 0$ ;
  - ▶ la conjunción debería ser una función  $c: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  que generalice la conjunción clásica, es decir, que  $c(0, 0) = 0$ ,  $c(0, 1) = 0$ ,  $c(1, 0) = 0$  y  $c(1, 1) = 1$
  - ▶ ¿Hay que exigir alguna condición más?

# Lógicas basadas en normas triangulares

t-norma, implicación residuada, propiedad de adjunción

## Definición

Una *t-norma* es una operación binaria sobre  $[0, 1]$  asociativa, conmutativa, no decreciente y con elemento neutro 1.

Dada una t-norma continua  $\wedge$ , existe una forma estándar de definir su implicación residuada

## Definición (Implicación residuada)

$$u \rightarrow v = \sup\{z \mid u \wedge z \leq v\}$$

Esta implicación está relacionada con  $t$  mediante el siguiente

## Teorema (Propiedad de adjunción)

*Cada t-norma continua tiene una única implicación residuada, y se cumple*

$$(u \wedge v) \leq w \text{ si y solo si } u \leq (v \rightarrow w),$$

# Lógicas basadas en normas triangulares

## La propiedad de adjunción y el Modus Ponens

- Recordemos el **Modus Ponens**, la (única) regla de inferencia primitiva de la lógica clásica proposicional: si sabemos que  $A$  implica  $B$  y que se cumple  $A$ , entonces se infiere  $B$ .  
Formalmente escribimos

$$(A \rightarrow B) \wedge A \quad \vdash \quad B$$

- Por otra parte, de la propiedad de adjunción obtenemos que

$$(v \rightarrow w) \wedge v \quad \leq \quad w$$

lo cual representa una versión difusa de la regla de *modus ponens*.

# Lógicas basadas en normas triangulares

## Otras conectivas

- Toda t-norma determina la función de verdad de una conjunción.
- Su residuo determina la función de verdad de una implicación.
- El lenguaje se puede dotar de una negación (llamada *negación residuada*) haciendo

$$\neg u = u \rightarrow 0$$

aunque también se suele utilizar la negación estándar  $\neg u = 1 - u$

- Por lo tanto, una sola t-norma permite definir toda la semántica de una lógica difusa.

### Definición

Dada una t-norma continua  $\wedge$ , su **t-álgebra** es la tupla  $\langle [0, 1], \wedge, \rightarrow, \text{mín}, \text{máx}, 0, 1 \rangle$ , donde  $\rightarrow$  es la implicación residuada de  $\wedge$  y  $\text{mín}, \text{máx}$  son el mínimo y el máximo del orden habitual de los números reales.

# Lógicas basadas en normas triangulares

Principales sistemas: Łukasiewicz

- Definición de las conectivas

$$x \wedge_L y = \max\{0, x + y - 1\}$$

$$x \rightarrow_L y = \min\{1 - x + y, 1\}$$

$$\neg x = 1 - x$$

$$x \vee_L y = \min\{x + y, 1\}$$

- Todas las funciones de verdad anteriores son continuas.
- La negación residuada coincide con la negación estándar.

# Lógicas basadas en normas triangulares

## Principales sistemas: Gödel

- Definición de las conectivas

$$x \wedge_G y = \min\{x, y\}$$

$$x \rightarrow_G y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ y & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\neg_G x = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- La negación residuada de Gödel se conoce como negación drástica.
- Tomando la negación estándar y las leyes de De Morgan se obtiene

$$x \vee_G y = \max\{x, y\}$$



# Lógicas basadas en normas triangulares

## Principales sistemas: producto

- Definición de las conectivas

$$x \wedge_{\Pi} y = x \cdot y$$

$$x \rightarrow_{\Pi} y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ \frac{y}{x} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\neg_{\Pi} x = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Tomando la negación estándar, se obtiene

$$x \vee_{\Pi} y = x + y - x \cdot y$$

# Lógicas basadas en normas triangulares

## Sintaxis y Semántica

### Definiciones

- El alfabeto de la lógica difusa sobre una norma triangular consta de símbolos proposicionales  $p, q, r, \dots$ , y las conectivas binarias  $*$  (conjunción),  $\rightarrow$  (implicación),  $\wedge$  (conjunción débil),  $\vee$  (disyunción débil), la conectiva monaria  $\neg$  (negación), y las constantes  $\top$  (verdad) y  $\perp$  (falsedad).
- Una *interpretación* de variables es una aplicación  $e: Prop \rightarrow [0, 1]$ , que se extiende recursivamente al conjunto de todas las fórmulas bien formadas.
- Una *tautología* es una fbf que vale 1 bajo cualquier interpretación.
- Una interpretación  $I$  se dice que es un *modelo* de un conjunto  $\Gamma$  de fórmulas si  $I(\varphi) = 1$  para toda  $\varphi \in \Gamma$ . Se dice que  $\varphi$  es una *consecuencia semántica* de  $\Gamma$ , y escribimos  $\Gamma \models \varphi$  si todo modelo de  $\Gamma$  es un modelo de  $\varphi$ .

# Lógicas basadas en normas triangulares

## Axiomática de $BL$ : la lógica de las t-normas continuas

$$\text{BL1 } (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$\text{BL4 } (A * (A \rightarrow B)) \rightarrow (B * (B \rightarrow A))$$

$$\text{BL5a } (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A * B) \rightarrow C)$$

$$\text{BL5b } ((A * B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$$

$$\text{BL6 } ((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (((B \rightarrow A) \rightarrow C) \rightarrow C)$$

$$\text{BL7 } \perp \rightarrow A$$

**Regla de inferencia** Modus Ponens: De  $A \rightarrow B$  y  $A$  se deduce  $B$ .

### Teorema

*El sistema axiomático es completo para la lógica proposicional difusa de las t-normas continuas.*

# Lógicas basadas en normas triangulares

Principales sistemas: Łukasiewicz, Gödel, producto

**Łukasiewicz** Su sistema axiomático es  $BL$  más el axioma

$$\neg\neg A \rightarrow A$$

**Gödel** Su sistema axiomático es  $BL$  más el axioma

$$A \rightarrow (A * A)$$

**Producto** Su sistema axiomático es  $BL$  más los axiomas

$$\neg\neg C \rightarrow ((A * C) \rightarrow (B * C)) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$(A * (A \rightarrow \neg A)) \rightarrow \perp$$

# Lógicas basadas en normas triangulares

¿Por qué son los sistemas principales?

## Definición

Una  $t$ -norma se dice *arquimediana* si para todo  $x, y \in [0, 1]$  existe un  $n$  tal que  $x * \dots^n * x \leq y$ .

## Teorema (de representación)

*Toda  $t$ -norma arquimediana es “combinación” (técnicamente, suma ordinal) de las tres  $t$ -normas anteriores.*

# ¿Para qué sirven estas lógicas tan raras?

Se han encontrado aplicaciones de las lógicas multivaluadas en áreas muy diversas:

- 1 Lingüística
- 2 Filosofía
- 3 Diseño de *hardware*
- 4 Lógica
- 5 Inteligencia Artificial
- 6 Matemáticas

## Explicación de paradojas

**Sorites** Un grano de arena no es un montón.

Añadir un grano no hace un montón.

Luego, no importa cuántos granos añadamos, nunca tendremos un montón.

**Falakros** Si un hombre no es calvo, y le quitamos un pelo, sigue sin ser calvo.

Luego, podemos quitar tantos pelos como queramos y no lo dejaremos calvo.

## Lenguajes con un predicado de “verdad”

# Aplicaciones al Diseño de Hardware

- La lógica clásica proposicional se usa como herramienta para el análisis y síntesis de algunos tipos de circuitos eléctricos contruidos a partir de *puertas lógicas* con dos estados estables.
- Una generalización directa permite el uso de lógica  $n$ -valuada para diseñar y verificar circuitos con  $n$  estados.



# Aplicaciones en Lógica

- ❶ Para comprender mejor otras lógicas:
  - ▶ Los sistemas de Gödel se introdujeron para intentar aproximarse a la lógica intuicionista
  - ▶ La lógica trivaluada de Łukasiewicz pretendía capturar la noción modal de *posibilidad*
- ❷ Modelización de predicados parciales en los que hay “huecos de verdad”, en el supuesto de que los huecos respeten las funciones de verdad

# Aplicaciones a la Inteligencia Artificial

- ❶ Razonamiento bajo incertidumbre y con nociones imprecisas.  
En general mediante la lógica difusa.
- ❷ En gestión de bases de datos y sistemas basados en conocimiento, cuando se sepa que la información puede ser imprecisa.
- ❸ Automatización de las técnicas de prospección de datos. Estas técnicas suelen estar ligadas a conjuntos difusos o multivaluados.  
En este contexto también interesa disponer de métodos de razonamiento automático para estas lógicas.

# Aplicaciones en Matemáticas

- 1 Teoría matemática de los conjuntos difusos, y el análisis matemático del razonamiento aproximado.
- 2 Distintos enfoques para probar la consistencia de la teoría de conjuntos.
- 3 Como herramienta técnica para la demostración de resultados de independencia de axiomas.