Relación de ejercicios 3.2

1. Distinga si las siguientes expresiones son ecuaciones diferenciales y determine el tipo (ordinarias o en derivadas parciales) y el orden.

   a) $x^2 + 3y^2 = 5xy$
   b) $x^2 + 3y'' - 5(y')^3 = 0$
   c) $1 + y + y'' + y''' = 0$
   d) $xy - y' \operatorname{sen} x = 0$
   e) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \operatorname{sen} x = \mathrm{e}^x$
   f) $5\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3xyz$

Solución

a) No es E.D.
b) EDO orden 2
c) EDO orden 3
d) EDO orden 1
e) EDO orden 1
f) EDP

2. Consideremos la ecuación $y' + 2y = 0$. Se pide:

   a) Estudie la existencia y unicidad de soluciones.
   b) Compruebe que la función $y = Ce^{-2x}$ es una solución general.
   c) Determine la solución particular que pasa por el punto $(0, 3)$.

Solución

a) Expresamos y' en función de x e y

$$y' = -2y \quad \longrightarrow \quad f(x,y) = -2y \quad \longrightarrow \quad D_2 f(x,y) = -2$$

y concluimos la **existencia** de soluciones en $\mathbb{R}^2$ porque $f(x,y)$ es continua en $\mathbb{R}^2$, y la **unicidad** de soluciones en $\mathbb{R}^2$ porque $f(x,y)$ es diferenciable y $D_2 f(x,y)$ es continua en $\mathbb{R}^2$.

b) Si $y = Ce^{-2x}$ entonces $y' = -2Ce^{-2x}$ y se verifica que

$$y' + 2y = \left(-2Ce^{-2x}\right) + 2\left(Ce^{-2x}\right) = 0$$

c) Si pasa por $(0, 3)$ entonces $3 = C\mathrm{e}^0$ y por lo tanto $C = 3$

$$y = 3\mathrm{e}^{-2x}$$

3. Consideremos la ecuación diferencial $y' = y^2 - 4$. Se pide

   a) Estudie la existencia y unicidad de soluciones

   b) Resuelva la ecuación (variables separables) y obtener la solución general.

   c) Calcule la solución particular, si existe, que pasa por $(0, 0)$.

   d) Calcule la solución particular, si existe, que pasa por $(0, 2)$.

   e) Calcule la solución particular, si existe, que pasa por $(0, -2)$.

Solución

a) Expresamos y' en función de x e y

$$y' = y^2 - 4 \quad \longrightarrow \quad f(x, y) = y^2 - 4 \quad \longrightarrow \quad D_2 f(x, y) = 2y$$

y concluimos la **existencia** de soluciones en $\mathbb{R}^2$ porque $f(x, y)$ es continua en $\mathbb{R}^2$, y la **unicidad** de soluciones en $\mathbb{R}^2$ porque $f(x, y)$ es diferenciable y $D_2 f(x, y)$ es continua en $\mathbb{R}^2$.

b) Para resolver la ED, separamos las variable e integramos

$$y' = y^2 - 4 \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{y^2 - 4} y' = 1 \quad \longrightarrow \quad \int \frac{1}{y^2 - 4}\, \mathrm{d}y = \int \mathrm{d}x$$

para obtener la solución

$$\frac{1}{4} \ln \frac{|y - 2|}{|y + 2|} = x + K \quad \longrightarrow \quad y(x) = 2\, \frac{1 + C\mathrm{e}^{4x}}{1 - C\mathrm{e}^{4x}} \quad \text{con } C \in \mathbb{R}$$

(*) Obsérvese que al principio del procedimiento hemos dividido por la expresión $y^2 - 4$, y por lo tanto, tenemos que considerar las funciones $y = 2$ e $y = -2$ y comprobar si son soluciones de la ED que, en este caso, lo son.

c) Si pasa por $(0, 0)$ entonces $0 = 2\, \dfrac{1 + C}{1 - C}$ y por lo tanto $C = -1$

$$y = 2\, \frac{1 - \mathrm{e}^{4x}}{1 + \mathrm{e}^{4x}}$$

d) Si pasa por $(0, 2)$ entonces $2 = 2\, \dfrac{1 + C}{1 - C}$ y por lo tanto $C = 0$

$$y = 2$$

Esta solución ya era conocida de antes (*).

e) La solución particular que pasa por $(0, -2)$ no es posible obtenerla a partir de la solución general (división por cero). Se trata de una solución singular que ya era conocida de antes (*)

$$y = -2$$

4. Compruebe que la ecuación $xyy' - \ln x = 0$ es de variables separables y resuélvala. ¿Alguna solución pasa por el punto $(1, -2)$?

Solución

Para resolver la ED procedemos así:

- Separamos las variables:

$$xyy' - \ln x = 0 \quad \longrightarrow \quad yy' = \frac{1}{x} \ln x$$

- Integramos para obtener la solución general en forma implícita:

$$yy' = \frac{1}{x} \ln x \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$$

- Si despejamos "y" podemos también obtener la solución general en forma explícita:

$$\frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} \ln^2 x + C \quad \longrightarrow \quad y = \pm\sqrt{\ln^2 x + C}$$

- Por lo tanto, la solución general de la ED es

$$y^2 = \ln^2 x + C \quad \text{o bien} \quad y = \pm\sqrt{\ln^2 x + C} \quad \textit{con} \quad C \in \mathbb{R}$$

Para determinar una solución que pase por $(1, -2)$ procedemos así:

- Si pasa por $(1, -2)$ entonces $-2 = \pm\sqrt{\ln^2 1 + C}$ y por lo tanto $C = 4$, elegiendo el signo negativo de la raíz:

$$y = -\sqrt{\ln^2 x + 4}$$

5. Compruebe que la ecuación $(2x-3y)+(2y-3x)y'=0$ es exacta y resuélvala. ¿Alguna solución pasa por el punto $(1,-2)$?

Solución

Consideramos $P(x,y)=2x-3y$ y $Q(x,y)=2y-3x$ y comprobamos que es una ecuación diferencial exacta pues verifica el Lema de Poincaré:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-3=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Para resolver la ED Exacta procedemos así:

- Para determinar la solución, utilizamos la definición de E. D. exacta, es decir, existe un campo $U(x,y)$ que verifica:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P(x,y) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial U}{\partial y}=Q(x,y)$$

- Utilizando una de las condiciones (por ejemplo, la primera) obtenemos:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=2x-3y \quad \longrightarrow \quad U(x,y)=\int(2x-3y)\,dx=x^2-3xy+C(y)$$

- Para determinar $C(y)$ utilizamos la otra condición:

$$\frac{\partial U}{\partial y}=2y-3x \quad \longrightarrow \quad -3x+C'(y)=2y-3x$$

- Despejamos $C'(y)$ e integramos:

$$C'(y)=2y \quad \longrightarrow \quad C(y)=y^2+K$$

- Por último, determinamos la expresión del campo que proporciona la solución de la E.D. cuando lo igualamos a una constante:

$$U(x,y)=x^2-3xy+y^2+K \quad \longrightarrow \quad x^2-3xy+y^2=C$$

- Por lo tanto, la solución general de la ED es

$$x^2-3xy+y^2=C \quad \text{o bien} \quad y(x)=\frac{3x\pm\sqrt{5x^2+4C}}{2} \quad \text{con} \quad C\in\mathbb{R}$$

Para determinar una solución que pase por $(1,-2)$ procedemos así:

- Si pasa por $(1,-2)$ entonces $-2=\dfrac{3\pm\sqrt{5+4C}}{2}$ y por lo tanto $C=11$, elegiendo el signo negativo de la raíz:

$$y=\frac{3x-\sqrt{5x^2+44}}{2}$$

6. Resuelva la ecuación diferencial lineal $y' + \dfrac{y}{x} = 3x + 4$ y compruebe la solución. ¿Alguna solución pasa por el punto $(2, 6)$?

Solución

Para resolver la ED procedemos así:

- Determinamos la solución general de la ED homogénea asociada:

$$y'_h + \frac{y_h}{x} = 0 \quad \longrightarrow \quad y_h = C\frac{1}{x}$$

- Determinamos una solución particular de la ED lineal mediante la Conjetura de Lagrange:

$$y_p = C(x)\frac{1}{x} \quad \longrightarrow \quad y'_p = C'(x)\frac{1}{x} - C(x)\frac{1}{x^2}$$

  Sustituimos la solución particular y_p (dependiente de $C(x)$) en la ecuación diferencial para determinar $C'(x)$:

$$C'(x)\frac{1}{x} - C(x)\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}C(x)\frac{1}{x} = 3x + 4 \quad \longrightarrow \quad C'(x)\frac{1}{x} = 3x + 4$$

  Integramos $C'(x)$ para obtener $C(x)$:

$$C'(x) = 3x^2 + 4x \quad \longrightarrow \quad C(x) = \int 3x^2 + 4x\,dx = x^3 + 2x^2 + K$$

  Y obtenemos una solución particular

$$y_p = C(x)\frac{1}{x} \quad \longrightarrow \quad y_p = x^2 + 2x$$

- Por último, para obtener la solución general de la ED, o bien aplicamos el principio de superposición ($y = y_p + Cy_h$)

$$y = y_p + Cy_h \quad \longrightarrow \quad y = x^2 + 2x + C\frac{1}{x}$$

  o bien, sustituimos $C(x)$ en la expresión de y_p

$$y = C(x)\frac{1}{x} \quad \longrightarrow \quad y = (x^3 + 2x^2 + K)\frac{1}{x} = x^2 + 2x + \frac{K}{x}$$

  En cualquiera de los casos la solución es

$$y(x) = x^2 + 2x + \frac{C}{x} \quad \text{con} \quad C \in \mathbb{R}$$

Para determinar una solución que pase por $(2, 6)$ procedemos así:

- Si pasa por $(2, 6)$ entonces $6 = 4 + 4 + \dfrac{C}{2}$ y por lo tanto $C = -4$

$$y = x^2 + 2x - \frac{4}{x}$$

7. Resuelva la ecuación $y' = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$ utilizando el cambio de variable $y = x \cdot u$ y compruebe la solución.

Solución

Para resolver la ED procedemos así:

- Aplicamos el cambio de variable:

$$y = x \cdot u \quad \longrightarrow \quad y' = u + xu'$$

- Sustituir las variables y separarlas:

$$u + xu' = \frac{x^2 u}{x^2 - x^2 u^2} = \frac{u}{1 - u^2} \quad \longrightarrow \quad \frac{1 - u^2}{u^3} u' = \frac{1}{x}$$

- Integrar (variables separadas):

$$\left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u} \right) u' = \frac{1}{x} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2u^2} + \ln |u| = - \ln |x| + C$$

- Deshacer el cambio de variable, aplicando $u = \dfrac{y}{x}$:

$$\frac{1}{2u^2} + \ln |u| = - \ln |x| + C \quad \longrightarrow \quad \frac{x^2}{2y^2} + \ln |y| = C$$

Por lo tanto, la solución general de la ED es

$$\frac{x^2}{2y^2} + \ln |y| = C \quad \text{con} \quad C \in \mathbb{R}$$

8. Resuelva la ecuación $yy' - 2y^2 = e^x$ utilizando el cambio de variable $u = y^2$.

Solución

Para resolver la ED procedemos así:

- Aplicamos el cambio de variable:

$$u = y^2 \quad \longrightarrow \quad u' = 2yy'$$

- Al sustituir las variables obtenemos una E.D. Lineal

$$\frac{1}{2}u' - 2u = \mathrm{e}^x \quad \longrightarrow \quad u' - 4u = 2\mathrm{e}^x$$

Resolvemos la ED Lineal:

  - $u_h' - 4u_h = 0 \quad \longrightarrow \quad u_h = C\mathrm{e}^{4x}$
  - $u_p = C(x)\mathrm{e}^{4x} \quad \longrightarrow \quad u_p' = C'(x)\mathrm{e}^{4x} + 4\,C(x)\mathrm{e}^{4x}$
  - $C'(x)\mathrm{e}^{4x} + 4C(x)\mathrm{e}^{4x} - 4\,C(x)\mathrm{e}^{4x} = 2\mathrm{e}^x \quad \longrightarrow \quad C'(x)\mathrm{e}^{4x} = 2\mathrm{e}^x$
  - $C'(x) = 2\mathrm{e}^{-3x} \quad \longrightarrow \quad C(x) = \int 2\mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-3x} + K$

La solución de la ED Lineal es

$$u_p = -\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{e}^{4x} \quad \longrightarrow \quad u = -\frac{2}{3}\mathrm{e}^x + K\mathrm{e}^{4x}$$

- Deshacemos el cambio de variable, aplicando $u = y^2$:

$$u = -\frac{2}{3}\mathrm{e}^x + K\mathrm{e}^{4x} \quad \longrightarrow \quad y^2 = -\frac{2}{3}\mathrm{e}^x + K\mathrm{e}^{4x}$$

La solución es

$$y^2 = -\frac{2}{3}\mathrm{e}^x + C\mathrm{e}^{4x} \quad \text{o bien} \quad y(x) = \pm\sqrt{-\frac{2}{3}\mathrm{e}^x + C\mathrm{e}^{4x}} \quad \text{con} \quad C \in \mathbb{R}$$

9. Entre los modelos estudiados en el tema, determine qué tipo de ecuación diferencial es cada una de las siguientes:

a) $(2+x)y' = 3y$

b) $y' = \dfrac{3x+2y}{x}$

c) $2\cos(2x-y) - y'\cos(2x-y) = 0$

d) $y' = -2 - y + y^2$

e) $(x-1)y' + y = x^2 - 1$

f) $y' = \dfrac{y+x-3}{y-x-1}$

g) $y' + 2xy = 2x$

h) $e^x y y' = e^{-y} + e^{-2x-y}$

i) $y' + 2y = \operatorname{sen} x$

j) $y^2 e^{xy^2} + 2xyy' e^{xy^2} = 0$

Solución

a) Variables separables

b) ED Lineal

c) ED Exacta

d) Variable separables

e) ED Lineal

f) ED Exacta

g) ED Lineal

h) Variable separables

i) ED Lineal

j) ED Exacta