# Relación de ejercicios 3.1

1. Las expresiones $\dfrac{1}{x}$ y $\dfrac{2}{2x}$ son iguales, sin embargo, si calculamos la integral (inmediata) de cada una de ellas, obtenemos los siguientes resultados:

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log|x| + C \qquad \text{y} \qquad \int \frac{2}{2x}\,\mathrm{d}x = \log|2x| + C$$

¿Son esos dos resultados realmente distintos?

**Solución**

Los resultados no son distintos pues

$$\log|2x| + C_1 = \log 2 + \log|x| + C_1 = \log|x| + C_2$$

donde $C_1$ y $C_2$ son constantes.

2. Calcule las siguientes integrales observando que son inmediatas:

a) $\displaystyle\int (4x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2}x - \pi)\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x^2}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \cos x \operatorname{sen}^3 x\,\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x^2\,\mathrm{d}x$

**Solución**

a) $x^4 - x^3 + \dfrac{1}{4}x^2 - \pi x + C$ b) $\dfrac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + C$

c) $\dfrac{1}{4}\sin^4 x + C$ d) $-\dfrac{1}{2}\cos(x^2) + C$

3. Calcule las integrales siguientes utilizando el método de integración por partes.

a) $\displaystyle\int e^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int x^5 \operatorname{sen} x^3\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\,\mathrm{d}x$

**Solución**

*a*) El ejercicio se resuelve aplicado dos veces el método de integración por partes obteniendo la misma primitiva del enunciado, que despejaremos para obtener el resultado final, de la siguiente manera:

- Aplicamos el métodos de integración por partes

$$\left\{\begin{array}{lcl} u = \mathrm{e}^{2x} & \longrightarrow & \mathrm{d}u = 2\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x & \longrightarrow & v = \operatorname{sen} x \end{array}\right\}$$

y obtenemos

$$\int e^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{sen}\,x - \int 2e^{2x}\,\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{d}x$$

- Aplicamos nuevamente el métodos de integración por partes

$$\left\{\begin{array}{lcl} u = 2\mathrm{e}^{2x} & \longrightarrow & \mathrm{d}u = 4\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{sen}\,x\,\mathrm{d}x & \longrightarrow & v = -\cos x \end{array}\right\}$$

y obtenemos

$$\int e^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{2x}(\mathrm{sen}\,x + 2\cos x) - 4\int e^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x$$

- Finalmente, la solución se obtiene despejando la primitiva de esa ecuación:

$$\int e^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\,\mathrm{e}^{2x}\,(\mathrm{sen}\,x + 2\cos x) + \mathrm{C}$$

*b*) En este ejercicio, la dificultad radica en elegir bien cada una de las funciones $u$ y $v$ antes de aplicar el método de integración por partes.

$$\left\{\begin{array}{lcl} u = x^3 & \longrightarrow & \mathrm{d}u = 3x^2\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = x^2\,\mathrm{sen}\,x^3\,\mathrm{d}x & \longrightarrow & v = -\frac{1}{3}\cos x^3 \end{array}\right\}$$

$$\begin{aligned} \int x^5\,\mathrm{sen}\,x^3\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{3}x^3\cos x^3 + \int x^2\cos x^3\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}(\mathrm{sen}\,x^3 - x^3\cos x^3) + \mathrm{C} \end{aligned}$$

*c*) Aplicamos el método de integración por partes:

$$\left\{\begin{array}{lcl} u = \mathrm{sen}\,x & \longrightarrow & \mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{sen}\,x\,\mathrm{d}x & \longrightarrow & v = -\cos x \end{array}\right\}$$

y obtenemos

$$\int \mathrm{sen}^2\,x\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{sen}\,x\cos x + \int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$$

Y ahora aplicamos la fórmula fundamental de la trigonometría (porque si volvemos a aplicar el método de integración por partes, no se llega a ninguna conclusión) y obtenemos la integral de partida

$$\int \mathrm{sen}^2\,x\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{sen}\,x\cos x + \int 1 - \mathrm{sen}^2\,x\,\mathrm{d}x$$

y, por lo tanto

$$\int \mathrm{sen}^2\,x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x - \mathrm{sen}\,x\cos x) + \mathrm{C}$$

4. Calcule las integrales

$$a)\ \int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x, \qquad b)\ \int (\ln x)^2 \, \mathrm{d}x$$

y deduzca a partir de ellas las integrales siguientes:

$$c)\ \int e^x \ \operatorname{tg} e^x \, \mathrm{d}x, \qquad d)\ \int \frac{(\ln(\operatorname{arctg} x))^2}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$$

**Solución**

*a*) Esta integral es inmediata

$$\int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \, \mathrm{d}x = -\ln(\cos x) + \mathrm{C}$$

y, a partir de ella, se deduce de manera inmediata el apartado (c)

$$\int e^x \ \operatorname{tg} e^x \, \mathrm{d}x = -\ln(\cos \mathrm{e}^x) + \mathrm{C}$$

*b*) Para calcular esta primitiva, aplicamos dos veces el método de integración por partes, de la siguiente manera:

- Primero lo aplicamos a la primitiva inicial $\int (\ln x)^2 \, \mathrm{d}x$

$$\left\{ \begin{array}{lll} u = (\ln x)^2 & \longrightarrow & \mathrm{d}u = \frac{2}{x} \ln x \, \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x & \longrightarrow & v = x \end{array} \right\}$$

$$\int (\ln x)^2 \, \mathrm{d}x = x\,(\ln x)^2 - 2 \int \ln x \, \mathrm{d}x$$

- y después, lo aplicamos a la primitiva $\int \ln x \, \mathrm{d}x$

$$\left\{ \begin{array}{lll} u = \ln x & \longrightarrow & \mathrm{d}u = \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x & \longrightarrow & v = x \end{array} \right\}$$

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = x \ \ln x - \int \mathrm{d}x = x \ \ln x - x$$

Por tanto, el resultado es

$$\int (\ln x)^2 \, \mathrm{d}x = x\,(\ln x)^2 + 2x(1 - \ln x) + \mathrm{C}$$

y, a partir de ella, se deduce de manera inmediata el apartado (d)

$$\begin{aligned} \int \frac{(\ln(\operatorname{arctg} x))^2}{1+x^2} \, \mathrm{d}x &= \operatorname{arctg} x \ (\ln(\operatorname{arctg} x))^2 + \\ &\quad +2 \operatorname{arctg} x \,(1 - \ln(\operatorname{arctg} x)) + \mathrm{C} \end{aligned}$$

5. Calcule las siguientes integrales racionales:

a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{3}{9x^2-6x+2}\,\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int \frac{3x-1}{9x^2-6x+2}\,\mathrm{d}x$

**Solución**

*a)* $\displaystyle\int \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int x-1+\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+1| + \mathrm{C}$

*b)* $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int 1-\frac{2x+1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int 1-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x =$

$$= x - 2\ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + \mathrm{C}$$

*c)* $\displaystyle\int \frac{3}{9x^2-6x+2}\mathrm{d}x = \int \frac{3}{(3x-1)^2+1}\mathrm{d}x = \mathrm{arctg}(3x-1) + \mathrm{C}$

*d)* $\displaystyle\int \frac{3x-1}{9x^2-6x+2}\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\ln(9x^2-6x+2) + \mathrm{C}$

6. Utilice la descomposición en fracciones simples para calcular la integral

$$\int \frac{x^2+6x+5}{x^3-x^2-x-2}\mathrm{d}x$$

**Solución**

$$\int \frac{x^2+6x+5}{x^3-x^2-x-2}\mathrm{d}x = \int \frac{3}{x-2} - \frac{2x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x = \ln\frac{|x-2|^3}{|x^2+x+1|} + \mathrm{C}$$

7. Las siguientes integrales son de tipo racional pero dos de ellas, se pueden calcular de manera inmediata o por sustitución directa. Identifique y calcule esas dos integrales.

a) $\displaystyle\int \frac{x}{4+x^4}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \frac{x^3}{4+x^4}\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{4+x^4}\,\mathrm{d}x$

**Solución**

*a)* Integral inmediata derivada de una arcotangente

$$\int \frac{x}{4+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{x}{1+(x^2/2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\,\mathrm{arctg}(x^2/2) + \mathrm{C}$$

*b*) Integral inmediata derivada de un logaritmo

$$\int \frac{x^3}{4+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{4+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln(4+x^4) + \mathrm{C}$$

*c*) Integral racional (no se pide resolver en el enunciado)

$$\int \frac{x^2}{4+x^4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x/4}{x^2-2x+2} - \frac{x/4}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{8}\ln\frac{|x^2-2x+2|}{|x^2+2x+2|} + \frac{1}{4}\operatorname{arctg}(x+1) + \frac{1}{4}\operatorname{arctg}(x-1) + \mathrm{C}$$

8. Utilice el cambio de variable $t = e^x$ para calcular las integrales

a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{1-\mathrm{e}^x}$ b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{1-\mathrm{e}^{2x}}$

**Solución**

*a*) Aplicamos el cambio de variable sugerido

$$\left.\begin{array}{rcl} t & = & \mathrm{e}^x \\ \mathrm{d}t & = & \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \end{array}\right\} \longrightarrow \int \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{1-\mathrm{e}^x} = \int \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t$$

resolvemos la integral inmediata resultante y deshacemos el cambio

$$\int \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = -\ln|1-t| = -\ln|1-\mathrm{e}^x| + \mathrm{C}$$

*b*) Aplicamos el cambio de variable sugerido

$$\left.\begin{array}{rcl} t & = & \mathrm{e}^x \\ \mathrm{d}t & = & \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \end{array}\right\} \longrightarrow \int \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{1-\mathrm{e}^{2x}} = \int \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

resolvemos la integral racional resultante (descomposición en fracciones simples e integración) y deshacemos el cambio

$$\int \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1/2}{1+t} + \frac{1/2}{1-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\frac{|1+t|}{|1-t|} = \frac{1}{2}\ln\frac{|1+\mathrm{e}^x|}{|1-\mathrm{e}^x|} + \mathrm{C}$$

9. Consideramos la integral $\displaystyle\int \cos^5 x\,\mathrm{d}x$:

*a*) Calcúlela utilizando la forma compleja de las funciones trigonométricas.

*b*) Calcúlela utilizando el cambio de variable $\operatorname{sen} x = t$.

**Solución**

*a)* $$\int \cos^5 x \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{16}\cos(5x) + \frac{5}{16}\cos(3x) + \frac{5}{8}\cos x \,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{80}\operatorname{sen}(5x) + \frac{5}{48}\operatorname{sen}(3x) + \frac{5}{8}\operatorname{sen} x + \mathrm{C}$$

*b)* $$\int \cos^5 x \,\mathrm{d}x = \int \cos^4 x \cos x \,\mathrm{d}x = \int (1-\operatorname{sen}^2 x)^2 \cos x \,\mathrm{d}x =$$

$$\{\operatorname{sen} x = t \quad \longrightarrow \quad \cos x \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t\}$$

$$= \int (1-t^2)^2 \,\mathrm{d}t = t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 = \operatorname{sen} x - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + \mathrm{C}$$

10. Calcule las siguientes integrales teniendo en cuenta que son funciones racionales en seno y coseno.

a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$

**Solución**

*a)* Integral trigonométrica con $\mathrm{R}(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -\mathrm{R}(\operatorname{sen} x, \cos x)$

$$\left\{ \operatorname{sen} x = t \ , \ \cos^2 x = 1-t^2 \ , \ \cos x \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \right\}$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \,\mathrm{d}x = \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \cos x \,\mathrm{d}x = \int t^2(1-t^2)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int t^2 - t^4 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 = \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x - \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + \mathrm{C}$$

*b)* Integral trigonométrica general (caso 4)

$$\left\{ \operatorname{tg}(x/2) = t \ , \ \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t \ , \ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \right\}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t = t = \operatorname{tg}(x/2) + \mathrm{C} =$$

11. Calcule la integral $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ utilizando en primer lugar el cambio de variable $x = \operatorname{sen}^2 t$

**Solución**

Aplicamos el cambio de variable

$$\left\{ x = \operatorname{sen}^2 t \ , \ \mathrm{d}x = 2\operatorname{sen} t \cos t \,\mathrm{d}t \right\}$$

$$\int \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos t}{1-\operatorname{sen} t}\,2\operatorname{sen} t\cos t\,\mathrm{d}t = \int \frac{2\operatorname{sen} t\cos^2 t}{1-\operatorname{sen} t}\,\mathrm{d}t =$$

Ahora multiplicamos y dividimos por la expresión $1+\operatorname{sen} t$

$$= \int \frac{2\operatorname{sen} t\cos^2 t}{1-\operatorname{sen} t}\cdot\frac{1+\operatorname{sen} t}{1+\operatorname{sen} t}\,\mathrm{d}t = 2\int \operatorname{sen} t+\operatorname{sen}^2 t\,\mathrm{d}t =$$

Calculamos la primitiva de la potencia del seno (números complejos)

$$= 2\int \operatorname{sen} t+\frac{1-\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = t-2\cos t-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t) = t-(2+\operatorname{sen} t)\cos t =$$

Deshacemos el cambio de variable: $t = \operatorname{arcsen}\sqrt{x}$

$$= \operatorname{arcsen}\sqrt{x}-(2+\sqrt{x})\sqrt{1-x}+\mathrm{C}$$

12. Resuelva las siguientes integrales irracionales.

a) $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{5-4x-x^2}}$ b) $\displaystyle\int (x-3)\sqrt{x^2-6x}\,\mathrm{d}x$

**Solución**

*a*) $$\int \frac{x}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{\sqrt{9-(x+2)^2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$\{\ x+2 = 3\operatorname{sen} t\ ,\ \mathrm{d}x = 3\cos t\,\mathrm{d}t\ \}$$

$$= \int \frac{-2+3\operatorname{sen} t}{\sqrt{9-9\operatorname{sen}^2 t}}\,3\cos t\,\mathrm{d}t = \int -2+3\operatorname{sen} t\,\mathrm{d}t = -2t-3\cos t =$$

$$\left\{\ t = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x+2}{3}\right)\ \right\}$$

$$= -2\operatorname{arcsen}\left(\frac{x+2}{3}\right)-3\cos\operatorname{arcsen}\left(\frac{x+2}{3}\right) =$$

$$= -2\operatorname{arcsen}\left(\frac{x+2}{3}\right)-3\sqrt{1-\left(\tfrac{x+2}{3}\right)^2} =$$

$$= -2\operatorname{arcsen}\left(\frac{x+2}{3}\right)-\sqrt{5-4x-x^2}+\mathrm{C}$$

*b*) $$\int (x-3)\sqrt{x^2-6x}\,\mathrm{d}x = \int (x-3)\sqrt{(x-3)^2-9}\,\mathrm{d}x =$$

$$\{\ x-3 = 3\cosh t\ ,\ \mathrm{d}x = 3\operatorname{senh} t\,\mathrm{d}t\ \}$$

$$= \int 27\cosh t\operatorname{senh}^2 t\,\mathrm{d}t = 9\operatorname{senh}^3 t =$$

$$\left\{\ t = \operatorname{argcosh}\left(\frac{x-3}{3}\right)\ \right\}$$

$$= 9 \operatorname{senh}^3 \operatorname{argcosh}\left(\tfrac{x-3}{3}\right) =$$

$$= 9\left(\sqrt{\left(\tfrac{x-3}{3}\right)^2 - 1}\right)^3 =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2 - 6x}\right)^3 + \mathrm{C}$$

Esta primitiva también podía haberse considerado inmediata o haber sido calculada con el cambio de variable $t = x^2 - 6x$.

13. Calcule las siguientes integrales prestando especial atención al indicador de la variable ($\mathrm{d}x$ o $\mathrm{d}y$) de integración.

a) $\displaystyle\int x\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int 2xy^2\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int \frac{x}{y^2+x^4}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int x\,\mathrm{d}y$ e) $\displaystyle\int 2xy^2\,\mathrm{d}y$ f) $\displaystyle\int \frac{x}{y^2+x^4}\,\mathrm{d}y$

**Solución**

*a)* $\displaystyle\int x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + \mathrm{C}$

*b)* $\displaystyle\int 2xy^2\,\mathrm{d}x = x^2y^2 + \mathrm{C}$

*c)* $\displaystyle\int \frac{x}{y^2+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2y}\int \frac{\frac{2x}{y}}{1+\left(\frac{x^2}{y}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2y}\operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{y}\right) + \mathrm{C}$

*d)* $\displaystyle\int x\,\mathrm{d}y = xy + \mathrm{C}$

*e)* $\displaystyle\int 2xy^2\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3}xy^3 + \mathrm{C}$

*f)* $\displaystyle\int \frac{x}{y^2+x^4}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{x}\int \frac{\frac{1}{x^2}}{\left(\frac{y}{x^2}\right)^2+1}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x^2}\right) + \mathrm{C}$