Relación de ejercicios 3.3

1. Calcule la siguiente integral utilizando el cambio de variable $x = t^2$

$$\int_0^{\pi^2/4} \operatorname{sen}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

de dos formas distintas:

a) Calculando directamente una primitiva y aplicando, sólo al final, la regla de Barrow.

b) Aplicando la Regla de Barrow cada vez que se aplique un método (por partes o sustitución).

Solución

a) Aplicamos el cambio de variable propuesto

$$\left.\begin{array}{l} x = t^2 \\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \end{array}\right\} \longrightarrow \int \operatorname{sen}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int 2t \operatorname{sen} t\,\mathrm{d}t$$

aplicamos el método de integración por partes

$$\left\{\begin{array}{lcl} u = 2t & \to & \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v = \operatorname{sen} t\,\mathrm{d}t & \to & v = -\cos t \end{array}\right\}$$

$$\int 2t \operatorname{sen} t\,\mathrm{d}t = -2t\cos t + \int 2\cos t\,\mathrm{d}t = 2\operatorname{sen} t - 2t\cos t$$

deshacemos el cambio de variable para obtener una primitiva

$$\int \operatorname{sen}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = 2\operatorname{sen}\sqrt{x} - 2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}$$

y aplicamos la Regla de Barrow:

$$\int_0^{\pi^2/4} \operatorname{sen}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \Big[2\operatorname{sen}\sqrt{x} - 2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\Big]_0^{\pi^2/4} = \boxed{2}$$

b) Primero aplicamos el cambio de variable propuesto

$$\left\{\ x = t^2 \ \to\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t\ \right\}$$

$$\int_0^{\pi^2/4} \operatorname{sen}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} 2t\operatorname{sen} t\,\mathrm{d}t$$

Después aplicamos el método de integración por partes

$$\left\{\begin{array}{lll} u = 2t & \to & \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v = \operatorname{sen} t\,\mathrm{d}t & \to & v = -\cos t \end{array}\right\}$$

$$\int_0^{\pi/2} 2t \operatorname{sen} t\,\mathrm{d}t = \Big[-2t\cos t\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 2\cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} 2\cos t\,\mathrm{d}t$$

Y, por último, calculamos la integral resultante que es inmediata y aplicamos la regla de Barrow

$$\int_0^{\pi/2} 2\cos t\,\mathrm{d}t = \Big[2\sin t\Big]_0^{\pi/2} = \boxed{2}$$

2. Calcule el área de las regiones acotadas delimitadas por las gráficas de las funciones $f(x) = x^4 - 9x^2 + 10$ y $g(x) = x^2 + 1$.

Solución

Para resolver estos ejercicios se recomienda apoyarse en la representación gráfica de las funciones (ver figura 3.1):

- Calculamos los puntos de corte de las gráficas de las funciones resolviendo la ecuación:

$$x^4 - 9x^2 + 10 = x^2 + 1 \quad\longrightarrow\quad x \in \{-3, -1, 1, 3\}$$

- Sabiendo que el área entre dos funciones f y g es

$$\text{Area} = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

aplicamos esta fórmula a nuestro caso:

$$\text{Area} = \int_{-3}^{3} |(x^4-9x^2+10)-(x^2+1)|dx = \int_{-3}^{3} |x^4-10x^2+9|dx =$$

- Aplicamos las aditividad de la integral y la definición de valor absoluto para expresar la integral anterior de la siguiente manera:

$$= \int_{-3}^{-1} -x^4+10x^2-9dx + \int_{-1}^{1} x^4-10x^2+9dx + \int_{1}^{3} -x^4+10x^2-9dx =$$

- Por último, calculamos la integrales anteriores aplicando la Regla de Barrow:

$$= \left[\frac{-x^5}{5} + \frac{10x^3}{3} - 9x\right]_{-3}^{-1} + \left[\frac{x^5}{5} - \frac{10x^3}{3} + 9x\right]_{-1}^{1} +$$
$$+ \left[\frac{-x^5}{5} + \frac{10x^3}{3} - 9x\right]_{1}^{3} = \frac{304}{15} + \frac{176}{15} + \frac{304}{15} = \boxed{\frac{784}{15} \approx 52'267}$$

Obsérvese en la figura 3.2 la necesidad de utilizar valores absolutos para calcular el área de la región pues hay parte donde $f(x) - g(x) > 0$ y otras donde $f(x) - g(x) < 0$:

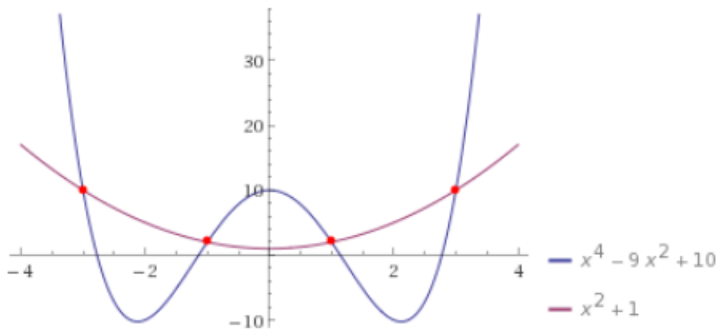

Figura 3.1: Representación gráfica de funciones
@2019 Wolfram Alpha LLC.

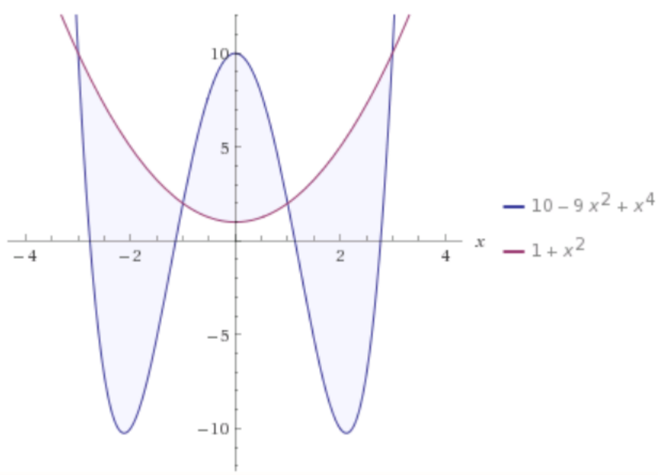

Figura 3.2: Área de la región entre dos funciones
@2019 Wolfram Alpha LLC.

3. Estudie la convergencia de las siguientes integrales impropias y, en su caso, calcular su valor:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y$ c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$

Solución

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0}\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0}\Big[2\sqrt{x}\Big]_t^1 = 2 - \lim_{t\to 0} 2\sqrt{t} = \boxed{2}$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{-1}{\mathrm{e}^y}\right]_0^t = 1 - \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^t} = \boxed{1}$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_{-1}^0 \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z + \int_0^1 \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \lim_{t\to 0}\int_{-1}^t \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z + \lim_{h\to 0}\int_h^1 \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z =$

$\displaystyle = \lim_{t\to 0}\Big[\ln|z|\Big]_{-1}^t + \lim_{t\to 0}\Big[\ln|z|\Big]_t^1 = \infty + \ldots \quad \to \quad \boxed{\text{DIVERGENTE}}$

4. Volumen de revolución por discos: El *volumen del sólido de revolución* que se genera cuando una región plana, determinada por el grafo de una función continua $f(x)$ y el eje OX, entre $x = a$ y $x = b$, gira alrededor del eje OX, se obtiene así:

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2\,\mathrm{d}x$$

Utilice este resultado para calcular:

a) el volumen de revolución que se genera al hacer girar, alrededor del eje OX la región del primer cuadrante determinada por la función $f(x) = \sqrt{x}$ entre los valores $x = 0$ y $x = 1$.

b) el volumen de revolución que se genera al hacer girar, alrededor del eje OX la región del primer cuadrante determinada por la función $f(x) = 2x - x^2$ y la recta $y = 0$.

Solución

a) $\displaystyle V = \int_0^1 \pi\left(\sqrt{x}\right)^2\,\mathrm{d}x = \ldots = \boxed{\frac{\pi}{2}}$

b) $\displaystyle V = \int_0^2 \pi\left(2x - x^2\right)^2\,\mathrm{d}x = \ldots = \boxed{\frac{16\pi}{15}}$

5. Longitud de curvas: La *longitud de una curva parametrizada* diferenciable $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ tal que $x'(t)$ e $y'(t)$ son continuas en $[a, b]$, se calcula así:

$$\ell = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, \mathrm{d}t$$

y, en particular, la *longitud del grafo de una función* f definida en $[a, b]$ es:

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, \mathrm{d}x$$

Utilice este resultado anterior para hallar

a) la distancia recorrida por un móvil entre los instantes $t = 0$ y $t = 4$ si su posición viene determinada por las ecuaciones:

$$x(t) = \frac{t^2}{2} \quad , \quad y(t) = \frac{1}{3}(2t+1)^{3/2}$$

b) la longitud del grafo de la función $\cosh(x)$ definida en el intervalo $[-1, 1]$.

Solución

a) Sabiendo que

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{t^2}{2} && \longrightarrow \quad x'(t) = t \\ y(t) &= \frac{1}{3}(2t+1)^{3/2} && \longrightarrow \quad y'(t) = (2t+1)^{1/2} \end{aligned}$$

aplicamos la fórmula de la longitud de una curva parametrizada

$$\ell = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, \mathrm{d}t$$

para calcular la distancia d, recorrida por el móvil, de esta manera:

$$d = \int_0^4 \sqrt{t^2 + 2t + 1}\, \mathrm{d}t = \int_0^4 t + 1\, \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}t^2 + t\right]_0^4 = 12 - 0 = \boxed{12}$$

b) $\ell = \displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 x}\, \mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \cosh x\, \mathrm{d}x = \Big[\operatorname{senh} x\Big]_{-1}^1 = \boxed{2 \operatorname{senh} 1}$

6. Halle la integral doble sobre la región rectangular que se indica:

a) $\displaystyle\iint_R y^3 \cos^2 x\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \qquad$ donde $R = [0, \pi/2] \times [0, 2]$

b) $\displaystyle\iint_R y x^3 e^{x^2 y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \qquad$ donde $R = [0, 1] \times [-2, 0]$

Solución

a) Aplicamos el Teorema de Fubini:

$$\iint_R y^3 \cos^2 x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2}\int_0^2 y^3\cos^2 x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =$$

calculamos primero la integral respecto de y:

$$= \int_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{4}y^4\cos^2 x\right]_0^2 \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} 4\cos^2 x\,\mathrm{d}x =$$

y después calculamos la integral respecto de x:

$$= \int_0^{\pi/2} 2(1+\cos(2x))\,\mathrm{d}x = \Big[2x + \operatorname{sen}(2x)\Big]_0^{\pi/2} = \boxed{\pi}$$

Obsérvese que, como la región de integración es un rectángulo, entonces también podíamos haber aplicado el Teorema de Fubini, simplemente, intercambiando el orden de integración

$$\iint_R y^3\cos^2 x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2\int_0^{\pi/2} y^3\cos^2 x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

b) Aplicamos el Teorema de Fubini:

$$\iint_R yx^3 e^{x^2y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_{-2}^0 yx^3e^{x^2y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Primero calculamos la integral respecto de y:

$$\int_0^1\int_{-2}^0 yx^3e^{x^2y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{2}\left[e^{x^2y^2}\right]_{-2}^0 \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{2}\left(1-e^{4x^2}\right)\mathrm{d}x$$

y después calculamos la integral respecto de x:

$$\int_0^1 \frac{x}{2}\left(1-e^{4x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left[x^2 - \frac{1}{4}e^{4x^2}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{16}\left(5-e^4\right)}$$

Obsérvese que, como la región de integración es un rectángulo, entonces también podíamos haber aplicado el Teorema de Fubini, simplemente, intercambiando el orden de integración

$$\iint_R yx^3e^{x^2y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-2}^0\int_0^1 yx^3e^{x^2y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

pero el tipo de integrales que hay que calcular no son inmediatas.

7. En cada caso, dibuje la región sobre la que se integra, intercambie el orden de integración y evalúe la integral

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 (x-y)^3 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_1^4 \int_1^{\sqrt{x}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

Solución

a) Primero dibujamos la región sobre la que se integra (figura 3.3), a partir de los límites de integración de las variables:

$$0 \le x \le 1 \qquad \text{y} \qquad x \le y \le 1$$

y después intercambiamos el orden de integración a partir de las curvas que delimitan la región sobre la que se integra:

$$0 \le y \le 1 \qquad \text{y} \qquad 0 \le x \le y$$

De esta manera, podemos evaluar la integral de dos maneras distintas en función del orden de integración de las variables:

$$\int_0^1 \int_x^1 (x-y)^3 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^y (x-y)^3 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Obsérvese que la diferencia no es un simple intercambio en el orden de integración, como ocurría en el ejercicio anterior cuando las regiones eran rectangulares.

Para obtener el resultado utilizaremos el orden que sea más favorable para la integración. En este caso, las integrales son de tipo polinómico (inmediatas) en cualquiera de las variables, por lo que no importa el orden de integración, así que utilizaremos el primero de ellos, integrando primero respecto de la variable y:

$$\int_0^1 \int_x^1 (x-y)^3 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\frac{-1}{4}(x-y)^4\right]_x^1 \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{-1}{4}(x-1)^4\,dx$$

y después, integrando respecto de la variable x:

$$\int_0^1 \frac{-1}{4}(x-1)^4\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-1}{20}(x-1)^5\right]_0^1 = \boxed{-\frac{1}{20}}$$

b) Procedemos de la misma manera que en el apartado anterior:

$$\int_1^4 \int_1^{\sqrt{x}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \int_{y^2}^4 (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \ldots = \boxed{\frac{1934}{105}}$$

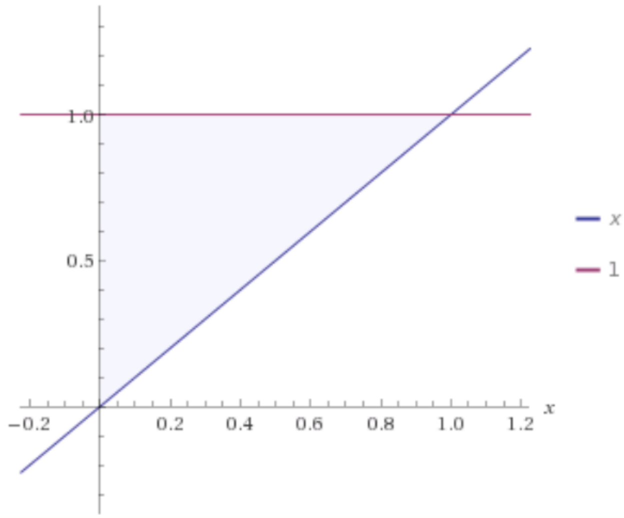

Figura 3.3: Región de integración: $0 \leq x \leq 1$, $x \leq y \leq 1$
@2019 Wolfram Alpha LLC.

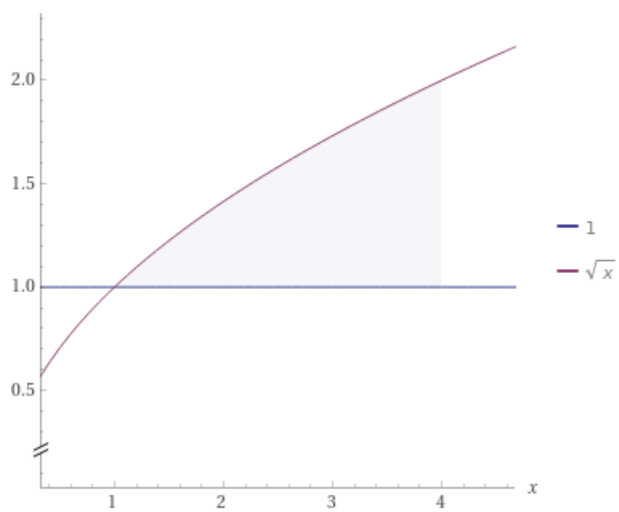

Figura 3.4: Región de integración: $1 \leq x \leq 4$, $1 \leq y \leq \sqrt{x}$
@2020 Wolfram Alpha LLC.

8. Dibuje la región que se indica y proporcione los límites de integración que determinan la región, primero (1) en coordenadas cartesianas y después, (2) en coordenadas polares.

   a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

   b) Región del primer cuadrante encerrada por las curvas $y = x^2$ e $y = 3x$.

   c) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1\ ,\ (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$

   d) Región del primer y segundo cuadrante comprendida entre la gráfica de la función $y = |x|$ y la circunferencia centrada en el origen y de radio 1.

   e) Región delimitada superiormente por la curva $x^2+y^2 = 4$, e inferiormente por la recta $y = \sqrt{2}$.

   f) Triángulo de vértices $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, 0)$ y $(\sqrt{3}, 1)$.

   g) Región comprendida entre $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 2$ con $x \geq 0$.

Solución

	Cartesianas (x)	Cartesianas (y)	Polares
a)	$-1 \leq x \leq 1$	$-1 \leq y \leq 1$	$0 \leq \theta \leq 2\pi$
	$-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$	$-\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$	$0 \leq r \leq 1$

	Cartesianas (x)	Cartesianas (y)	Polares
b)	$0 \leq x \leq 3$	$0 \leq y \leq 9$	$0 \leq \theta \leq \operatorname{arc\,tg} 3$
	$x^2 \leq y \leq 3x$	$\frac{y}{3} \leq x \leq \sqrt{y}$	$0 \leq r \leq \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}$

	Cartesianas (x)	Cartesianas (y)
c)	$\frac{1}{2} \leq x \leq 1$	$-1 \leq y \leq -\sqrt{3}/2$
	$-\sqrt{2x - x^2} \leq y \leq -\sqrt{1 - x^2}$	$1 - \sqrt{1 - y^2} \leq x \leq 1 + \sqrt{1 - y^2}$
	$\frac{1}{2} \leq x \leq 1$	$-\sqrt{3}/2 \leq y \leq \sqrt{3}/2$
	$\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}$	$\sqrt{1 - y^2} \leq x \leq 1 + \sqrt{1 - y^2}$
	$1 \leq x \leq 2$	$\sqrt{3}/2 \leq y \leq 1$
	$-\sqrt{2x - x^2} \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}$	$1 - \sqrt{1 - y^2} \leq x \leq 1 + \sqrt{1 - y^2}$

Polares
$-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$
$1 \leq r \leq 2\cos\theta$

d)

Cartesianas (x)	Cartesianas (y)	Polares
$-\sqrt{2}/2 \leq x \leq 0$	$0 \leq y \leq \sqrt{2}/2$	$\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$
$-x \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$	$-y \leq x \leq y$	$0 \leq r \leq 1$
$0 \leq x \leq \sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2 \leq y \leq 1$	
$x \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$	$-\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$	

e)

Cartesianas (x)	Cartesianas (y)	Polares
$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$	$\sqrt{2} \leq y \leq 2$	$\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$
$\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$	$-\sqrt{4-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2}$	$\sqrt{2}/\operatorname{sen}\theta \leq r \leq 2$

f)

Cartesianas (x)	Cartesianas (y)	Polares
$0 \leq x \leq \sqrt{3}$	$0 \leq y \leq 1$	$0 \leq \theta \leq \pi/6$
$0 \leq y \leq x/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}y \leq x \leq \sqrt{3}$	$0 \leq r \leq \frac{\sqrt{3}}{\cos\theta}$

g)

Cartesianas (x)	Cartesianas (y)	Polares
$0 \leq x \leq 1$	$-\sqrt{2} \leq y \leq -1$	$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
$-\sqrt{2-x^2} \leq y \leq -\sqrt{1-x^2}$	$0 \leq x \leq \sqrt{2-y^2}$	$1 \leq r \leq \sqrt{2}$
$0 \leq x \leq 1$	$-1 \leq y \leq 1$	
$\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{2-x^2}$	$\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{2-y^2}$	
$1 \leq x \leq \sqrt{2}$	$1 \leq y \leq \sqrt{2}$	
$-\sqrt{2-x^2} \leq y \leq \sqrt{2-x^2}$	$0 \leq x \leq \sqrt{2-y^2}$	

9. Calcule el volumen del sólido comprendido entre el grafo del campo escalar $f(x,y) = 1/\sqrt{-y}$ en D y el plano XY, siendo D la región plana encerrada entre la parábola $y = x^2 - 2x - 3$ y el eje OX.

Solución

$$\int_{-1}^{3}\int_{x^2-2x-3}^{0} \frac{1}{\sqrt{-y}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{3} 2\sqrt{3+2x-x^2}\,\mathrm{d}x = \boxed{4\pi}$$

10. Calcule el volumen del sólido comprendido entre el grafo del campo escalar $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ y el plano XY.

Solución

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 - x^2 - y^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \boxed{\pi/2}$$

11. Determine el área de la región comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = 1 + \cos(x)$ y el eje OX en el intervalo $[-\pi, \pi]$, de dos formas distintas:

   a) Como aplicación del cálculo integral de funciones reales (Bachillerato).

   b) Como aplicación de las integrales dobles al cálculo de volúmenes y de áreas de regiones planas.

Solución

a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} 1 + \cos x\,\mathrm{d}x = \boxed{2\pi}$

b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{1+\cos x} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} 1 + \cos x\,\mathrm{d}x = \boxed{2\pi}$

12. Utilice el cambio de variable a coordenadas polares para hallar el área de la región D que es interior a la cardioide de ecuación $\rho = 3(1+\cos\theta)$ y, a la vez, exterior a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 9$.

Solución

$$\mathrm{Area}(D) = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_3^{3(1+\cos\theta)} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \boxed{\frac{9}{4}(8+\pi)}$$

13. Consideramos la región R delimitada por las rectas $y = x+1$, $y = x-3$, $y = 4-x$, $y = 3-x$. Utilizar el teorema de cambio de variable para expresar la integral respecto de las variables u y v tales que $y = x + u$, $y = v - x$ y calcularla

$$\iint_R (y-2x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Solución

Cambio de variable:

$$\left.\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}(v-u) \\ y &= \tfrac{1}{2}(u+v) \end{aligned}\right\} \quad \to \quad \begin{aligned} \boldsymbol{T}(u,v) &= \left(\tfrac{1}{2}(v-u), \tfrac{1}{2}(u+v)\right) \\ |\det(J\boldsymbol{T}(u,v)| &= \begin{vmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Límites de integración:

- Si R está entre las rectas $y = x+1$, $y = x-3$ entonces

$$y = x + u \quad \longrightarrow \quad -3 \leq u \leq 1$$

- Si R está entre las rectas $y = 4-x$, $y = 3-x$, entonces

$$y = v - x \quad \longrightarrow \quad 3 \leq v \leq 4$$

Aplicamos el cambio de variable

$$\iint_R (y-2x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_3^4 \int_{-3}^1 \left(\frac{3}{2}u - \frac{1}{2}v\right) \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \boxed{-\frac{13}{2}}$$

14. Si f es un campo escalar continuo con parciales continuas en un dominio D, entonces el área de la superficie de su grafo sobre el dominio D es

$$\iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Halle el área de la superficie del grafo del campo $f(x,y) = xy$ sobre el círculo de centro $(0,0)$ y radio 1.

Solución

Aplicamos la fórmula del área de la superficie

$$\iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_D \sqrt{1+y^2+x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

y resolvemos la integral aplicando un cambio a polares

$$\iint\limits_D \sqrt{1+y^2+x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1+r^2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \ldots = \boxed{\frac{2\pi}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)}$$