Ej. 1: Sea el campo $f(x,y) = 9y^2 - 4x^2 - 24x - 36y - 40$ [redacted]

a) Determine una parametrización de la curva de nivel $f(x,y) = -4$

b) ¿Qué lugar geométrico representa?

c) Represéntelo gráficamente y diga sus características principales.

d) Obtenga la ecuación del plano tangente al grafo de $f(x,y)$ en el punto $(0,-1)$.

- Primero vamos a ordenar nuestra ecuación teniendo en cuenta $f(x,y) = -4$:

$$9y^2 - 4x^2 - 24x - 36y - 40 = -4$$

$$\underbrace{9y^2 - 36y} - (\underbrace{4x^2 + 24x}) - 40 = -4$$

completamos cuadrados (compleción de cuadrados):

$9y^2 - 36y \quad a^2$; $3y \quad a$; $3y \quad a$; $-3ay - 3ay = -36y$; $a = 6$

$4x^2 \quad 24x \quad a^2$; $2x \quad a$; $2x \quad a$; $2xa + 2xa = 24x$; $a = 6$

$$9y^2 - 36y + 36 - 36 - (4x^2 + 24 + 36 - 36) - 40 = -4$$

$$(3y-6)^2 - \cancel{36} - (2x+6)^2 + \cancel{36} = 36 \quad \rightarrow \text{dividimos la ecuación entre 36.}$$

$$\frac{(3y-6)^2}{36} - \frac{(2x+6)^2}{36} = 1 \quad \rightarrow \text{sacamos factor común}$$

$$\frac{9(y-2)^2}{36} - \frac{4(x+3)^2}{36} = 1 \quad \rightarrow \text{operamos un poco}$$

$$\frac{(y-2)^2}{(2)^2} - \frac{(x+3)^2}{(3)^2} = 1$$

(b) Podemos observar que es una hipérbola, luego el lugar geométrico que representa es una hipérbola.

Como hemos identificado que es una hipérbola podemos parametrizarla sabiendo que tendremos dos parametrizaciones, una para cada parte:

(a)
$$\begin{cases} x(t) = -3 + 3\operatorname{senh} t \\ y(t) = 2 + 2\cosh t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = -3 + 3\operatorname{senh} t \\ y(t) = 2 - 2\cosh t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Las ecuaciones de las asíntotas no son correctas utilicé dislexicamente la ecuación de las asíntotas de una hipérbola centrada en (0,0) y no es el caso.

Ahora vamos a representar gráficamente nuestra hipérbola, para ello sacamos todas sus características principales antes.

Nuestra ecuación:

$$\frac{(y-2)^2}{2^2} - \frac{(x+3)^2}{3^2} = 1$$

Ecuación de la hipérbola

$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} = 1$$

Sacamos entonces $x_0 = -3$, $y_0 = 2$, el cual será el centro de la hipérbola $(-3,2)$, $a = 3$, $b = 2$.

Con a y b y sabiendo que nuestra hipérbola va a ser del tipo ✳ ya que la parte de la x está en negativo $\left(-\frac{(x+3)^2}{3^2}\right)$, sacamos c con pitágoras:

$a^2 + b^2 = c^2 \rightarrow c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{13}$

Sabiendo c y el centro calculamos los focos F_1 y F_2:

$F_1 = (x_0 , y_0 - c) = (-3, 2-\sqrt{13})$

$F_2 = (x_0 , y_0 + c) = (-3, 2+\sqrt{13})$

Sus vértices serán: $v_1 = (x_0 , y_0 - b) = (-3,0)$ $\quad v_2 = (x_0, y_0 + b) = (-3,4)$

Por teoría sabemos que sus asíntotas tendrán la forma:

$bx - ay = 0 \rightarrow 2x - 3y = 0$

$bx + ay = 0 \rightarrow 2x + 3y = 0$

En conclusión para dibujarla:

Datos:

$a = 3 \quad b = 2 \quad c = \sqrt{13}$

$F_1 = (-3, 2-\sqrt{13})$

$F_2 = (-3, 2+\sqrt{13})$

$v_1 = (-3,0)$

$v_2 = (-3,4)$

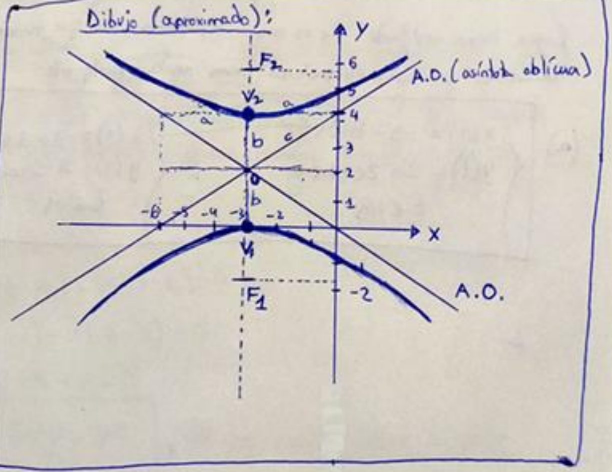
centro $= (-3,2) = O$ (lo llamamos O)

Asíntotas:

$2x - 3y = 0$

$2x + 3y = 0$

Dibujo (aproximado):



Por último, vamos a sacar la ecuación del plano tangente al grafo de $f(x,y)$ en el punto $(0,-1)$

Usaremos $f(x,y) = 9y^2 - 4x^2 - 24x - 36y - 40$

donde $f(x,y)$ será nuestra z, ya que queremos buscar un plano tangente

$z = 9y^2 - 4x^2 - 24x - 36y - 40$

Sustituimos el punto $(0,-1)$ para sacar cuanto vale z

$z = 9(-1)^2 - 4\cdot 0^2 - 24\cdot 0 - 36(-1) - 40$

$z = 9 + 36 - 40 = 5$

Tenemos pues el punto $(0,-1,5)$

Sabemos que el gradiente de la función $f(x,y,z)$ en el punto $(0,-1,5)$ será un vector normal. Luego formamos $f(x,y,z)$, sacamos el gradiente y lo vemos en el punto $(0,-1,5)$

$f(x,y,z) = 9y^2 - 4x^2 - 24x - 36y - 40 - z$

$\nabla f(x,y,z) = \left(D_1 f(x,y,z), D_2 f(x,y,z), D_3 f(x,y,z)\right)$

$$\left.\begin{array}{l} D_1 f(x,y,z) = \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = -8x - 24 \\ D_2 f(x,y,z) = \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = 18y - 36 \\ D_3 f(x,y,z) = \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \nabla f(x,y,z) = (-8x-24, 18y-36, -1) \\ \nabla f(0,-1,5) = (-24, -54, -1) \end{array}$$

Como $(-24,-54,-1)$ es el vector normal, $(54,-24,-1)$ será el vector tangente.

Sabiendo el punto y el vector tangente podemos construir nuestro plano:

$v_{tg} = (54,-24,-1) = (v_1, v_2, v_3)$

$P = (0,-1,5) = (x_0, y_0, z_0)$

$v_1(x-x_0) + v_2(y-y_0) + v_3(z-z_0) = 0$

$-24(x-0) - 54(y+1) - 1(z-5) = 0$

$-24x - 54y - 54 + 5 - z = 0$

$\boxed{z = -24x - 54y - 49}$, que es nuestro plano tangente

Ej 2. Sea $\gamma(t) = \left(\frac{1}{t-1}, \frac{t^2+1}{t-1}\right)$ con $t \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

a) Demuestre que $y(t)$ tiene una asíntota oblicua. Diga cuál es su ecuación y en qué valor de t se obtiene.

- Primero identificamos los valores de t en los que no se puede dar $y(t)$:

$t = 1$, $t = 0$, $t = \infty$, $t = -\infty$ (hemos visto ambos el intervalo y donde se anula la función para tener en cuenta los t.)

$t=1$: no se puede dar y no está en el intervalo

$t=0$, $t=\infty$, $t=-\infty$: no está en el intervalo

Vemos el límite en $x(t)$ e $y(t)$ en el caso $t = 1$ primero:

$x(t) = \frac{1}{t-1}$ $\qquad$ $y(t) = \frac{t^2+1}{t-1}$

$\lim_{t\to 1} \frac{1}{t-1} = \frac{1}{0} \to$ indeterminado $\xrightarrow{\text{evaluamos los límites laterales}}$
$\begin{cases} \lim_{t\to 1^+} \frac{1}{t-1} = \underline{\underline{\infty}} & \text{entonces (si } \lim_{t\to 1^+}(t-1) = 0) \\ \lim_{t\to 1^-} \frac{1}{t-1} = \underline{\underline{-\infty}} \end{cases}$

$\lim_{t\to 1} (x(t)) = \pm\infty \to$ posible asíntota oblicua

$\lim_{t\to 1} \frac{t^2+1}{t-1} = \frac{2}{0} \to$ indeterminado $\xrightarrow{\text{evaluamos los límites laterales}}$
$\begin{cases} \lim_{t\to 1^+} \frac{t^2+1}{t-1} = \infty \\ \lim_{t\to 1^-} \frac{t^2+1}{t-1} = -\infty \end{cases}$

$\lim_{t\to 1} (y(t)) = \pm\infty$

luego como $\lim_{t\to 1} x(t)$ y $\lim_{t\to 1} y(t) = \pm\infty$ podemos tener una asíntota oblicua de la forma $y = mx + n$. Para saber si la tenemos calculamos m y n

$\boxed{m}$: $\lim_{t\to 1} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to 1} \frac{\frac{t^2+1}{t-1}}{\frac{1}{t-1}} = \lim_{t\to 1} t^2+1 = \underline{\underline{2}}$ $\qquad m = 2$

$\boxed{n}$: $\lim_{t\to 1} (y(t) - m\,x(t)) = \lim_{t\to 1} \left(\frac{t^2+1}{t-1} - \frac{2}{t-1}\right) = \lim_{t\to 1} \left(\frac{t^2-1}{t-1}\right) = \lim_{t\to 1} (t+1) = 2$

$\underline{\underline{n=2}}$

Como tenemos m y n podemos confirmar que <u>hay asíntota oblicua</u>, y su ecuación será $\boxed{y = 2x + 2}$

(b) ¿Tendrá $Y(t)$ otra asíntota? En caso afirmativo, hállela.

Sabemos que en $t = 1$ hay una asíntota oblicua, luego si hubiera otra asíntota sería o en $t=0$ ó $t=\infty$ ó $t=-\infty$.

$\boxed{\text{Caso } t=0}$

vemos los $\lim_{t\to 0} x(t)$ y $\lim_{t\to 0} y(t)$:

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t-1} = -1 \qquad \lim_{t\to 0} \frac{t^2+1}{t-1} = -1$$

luego No hay asíntotas en $t=0$

$\boxed{\text{Caso } t=\infty}$ vemos los $\lim_{t\to\infty} x(t)$ y $\lim_{t\to\infty} y(t)$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t-1} = 0 \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{t^2+1}{t-1} = \infty$$

Como $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ y $\lim_{t\to\infty} y(t) = \infty$ podemos afirmar que existe una asíntota vertical en $x=0$ con $t=\infty$

$\boxed{\text{caso } t=-\infty}$ vemos los $\lim_{t\to-\infty} x(t)$ y $\lim_{t\to-\infty} y(t)$

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{1}{t-1} = 0 \qquad \lim_{t\to-\infty} \frac{t^2+1}{t+1} = -\infty$$

luego no hay asíntota en $t=-\infty$

c) Obtenga, si existen los puntos de tangencia vertical de $Y(t)$.

Buscamos los puntos en los que la recta tangente es vertical $(x = cte) \Leftrightarrow x'(t)=0$

luego: $x'(t) = -\frac{t' + (-1)'}{(t-1)^2} = -\frac{1}{(t-1)^2}$

$-\frac{1}{(t-1)^2} = 0$ No tiene solución ya que no se puede dar $-\frac{1}{0}$

luego No existen puntos de tangencia vertical de $Y(t)$

ya que no existe instante t en el que lo haya, luego no hay.