Gestión Inteligente de la Información

Equivalencias lógicas en las principales lógicas difusas.

Ana Martín Conejo

Ejercicio 1.- Determine si las siguientes fórmulas son válidas o no en el caso difuso para la lógica producto, la lógica de Gödel y la lógica de Lukasiewiez.

Una fórmula A es válida en lógica difusa si vale 1 para cualquier valor de A en el intervalo [0,1].

Doble negación: $\neg\neg \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$

- <u>Lógica producto</u>

  Definiciones:

  Negación: $\neg \Pi x = \begin{cases} 1, & si \quad x = 0 \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$

  Doble Negación: $\neg\neg \Pi x = \begin{cases} 1, & en\ otro\ caso \\ 0, & si\ x = 0 \end{cases}$

  Implicación: $x \rightarrow \Pi y = \begin{cases} 1, & si \quad x \leq y \\ \frac{y}{x} & en\ otro\ caso \end{cases}$

  Evaluamos:

  - Si A=0:

    $\neg\neg \Pi 0 = 0$

    $\neg\neg \Pi 0 \rightarrow \Pi 0 \ , \ 0 \rightarrow \Pi 0$ = 1

  - Si A>0:

    $\neg\neg \Pi A = 1$

    $\neg\neg \Pi A \rightarrow \Pi A \ , \ 1 \rightarrow \Pi A$ = A/1 = A

  Como A pueden ser valores menores que 1, existen valores en los que la implicación no vale 1, luego la fórmula no es válida en el modelo producto.

- Lógica de Gödel

Definiciones:

Negación: $\neg Gx = \begin{cases} 1, & si \quad x = 0 \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$

Doble Negación: $\neg\neg Gx = \begin{cases} 1, & en\ otro\ caso \\ 0, & si\ x = 0 \end{cases}$

Implicación: $x \to Gy = \begin{cases} 1, & si \quad x \leq y \\ y & en\ otro\ caso \end{cases}$

Evaluamos:

- Si A=0:

  $\neg\neg G0 = 0$

  $\neg\neg G0 \to G0$, $0 \to G0$ = 1

- Si A>0:

  $\neg\neg GA = 1$

  $\neg\neg G1 \to GA$, $1 \to GA$ = A

Cuando A>0 la implicación no siempre es 1 Luego la fórmula no es válida en el modelo de Gödel.

- Lógica de Lukasiewiez

Definiciones:

Negación: ¬x = 1 – x

Doble Negación: ¬¬x = 1 – (1 – x)

Implicación: x →L y = min {1 − x + y, 1}

Evaluamos:

¬¬A = 1 – (1 – A) = A

¬¬A → A = A → A = min {1, 1-A+A} = min {1,1} =1

La fórmula es válida en el modelo de Lukasiewiez.

Tercero excluido: $\mathbf{A} \vee \neg \mathbf{A}$

- Lógica producto

Definiciones:

Negación: $\neg_\Pi x = \begin{cases} 1, & si \quad x = 0 \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$

OR: x ∨Π y = x + y − x · y

Evaluamos:

Si A=0:

$\neg_\Pi 0 = 1$

A ∨Π $\neg_\Pi 0$ = 0 ∨Π 1 = 0+1-0*1 = 1

Si A>0:

$\neg_\Pi A = 0$

A ∨Π $\neg_\Pi A$ = A ∨Π 0 = A+0-A*0 = A

Para los valores intermedios no siempre vale 1, luego la fórmula no es válida para producto.

- Lógica de Gödel

Definiciones:

Negación: $\neg_G x = \begin{cases} 1, & si \quad x = 0 \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$

OR: x ∨G y = max{x, y}

Evaluamos:

Si A=0:

$\neg_G 0 = 1$

A ∨G$\neg_G 0$ = A ∨G1 = max { A,1} = 1

Si A>0:

$\neg_G A = 0$

A ∨G$\neg_G A$ = A ∨1 = max { A,0} = A

Para los valores intermedios no siempre vale 1, luego la fórmula no es válida para Gödel.

- Lógica de Lukasiewiez

Definiciones:

Negación: ¬x = 1 – x

OR: x ∨L y = min {x + y, 1}

Evaluamos:

A ∨L¬A = min {A + ¬A, 1} =

min{A+1-A,1} = min {1,1} = 1

La fórmula es válida en el modelo de Lukasiewiez.

No contradicción: $\neg(\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{A})$

- <u>Lógica producto</u>
  Definiciones:
  Negación: $\neg\Pi x = \begin{cases} 1, & si \quad x = 0 \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$
  AND: x ∧Π y = x · y
  Evaluamos:
  Si A=0:
  $\neg\Pi 0 = 1$
  0 ∧Π $\neg\Pi 0$ = 0 ∧Π1 = 0*1=0
  $\neg\Pi$(0 ∧Π $\neg\Pi 0$) = $\neg\Pi\ 0 = 1$
  Si A>0:
  $\neg\Pi A = 0$
  A ∧Π $\neg\Pi A$ = A ∧Π0 = A*0=0
  $\neg\Pi$(A∧Π $\neg\Pi A$) = $\neg\Pi\ 0 = 1$

  En este caso vemos que sí vale 1 en todo momento, luego la fórmula es válida en el modelo de producto.

- <u>Lógica de Gödel</u>
  Definiciones:
  Negación: $\neg G x = \begin{cases} 1, & si \quad x = 0 \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$
  AND: x ∧G y = min {x, y}
  Evaluamos:
  Si A=0:
  $\neg \mathrm{G}0 = 1$
  0 ∧$G\neg G0$ = 0 ∧$G1$ = min {0, 1} = 0
  $\neg G$(0 ∧$\neg G0$) $=$ $\neg G$(0 ∧$G1$) $= \neg G(0) =$1
  Si A>0:
  $\neg \mathrm{G}A = 0$
  A ∧$G\neg GA$ = A ∧$G0$ = min {A, 0} = 0
  $\neg G$(A ∧$\neg G0$) $=$ $\neg G$(A ∧$G0$) $= \neg G(0) =$1

  En este caso vemos que sí vale 1 también en todo momento, luego la fórmula es válida en el modelo de Gödel.

- Lógica de Lukasiewiez:

  Definición:

  Negación: ¬x = 1 – x

  AND: x ∧L y = max {0, x + y − 1}

  Evaluamos:

  ¬A = 1-A

  A∧¬A = max { 0 , A + 1-A -1 } = max { 0,0} = 0

  ¬(A∧¬A) = 1 – 0 = 1

  La fórmula es válida en el modelo de Lukasiewiez.

Ejercicio 2.- Determine si las siguientes **equivalencias se cumplen o no** en el caso difuso para la lógica producto, la lógica de Gödel y la lógica de Lukasiewiez.

Usaremos las definiciones vistas antes.

De Morgan: **(i)** $\neg(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}) \equiv \neg\boldsymbol{A} \vee \neg\boldsymbol{B}$ **(ii)** $\neg(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}) \equiv \neg\boldsymbol{A} \wedge \neg\boldsymbol{B}$

- Lógica producto

  (i)

  1) $\neg(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B})$ **=** ¬Π(A ∧Π B) = ¬Π(A*B)

  2) $\neg\boldsymbol{A} \vee \neg\boldsymbol{B}$ **=** (¬ΠA)∨Π(¬ΠB) = ¬ΠA + ¬ΠB - ¬ΠA*¬ΠB

A	B	¬Π(A*B)	¬ΠA + ¬ΠB - ¬ΠA*¬ΠB
0	0	1	1
0	0.5	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0
0.5	0.5	0	0
0.5	0	1	1
0.2	0.8	0	0

  Son equivalentes por producto.

  (ii)

  1) $\neg(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B})$ **=** ¬Π(A∨ΠB) = ¬Π(A+B-A*B)

  2) $\neg\boldsymbol{A} \wedge \neg\boldsymbol{B}$ **=** ¬Π(A)* ¬Π(B)

A	B	¬Π(A+B-A*B)	¬ΠA + ¬ΠB - ¬ΠA*¬ΠB
0	0	1	1
0	0.5	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0
0.5	0.5	0	0
0.5	0	1	1
0.2	0.8	0	0

  Son equivalentes por producto.

- <u>Lógica de Gödel</u>

(i)

1)$\neg(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B})$ = $\neg G(\ min\ \{A, B\}\ )$

2)$\neg\boldsymbol{A} \vee \neg\boldsymbol{B}$ = max{ $\neg GA, \neg GB\}$

A	B	$\neg\boldsymbol{G}(\ \boldsymbol{min}\ \{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\})$	max{ $\neg\boldsymbol{GA}, \neg\boldsymbol{GB}\}$
0	0	1	1
0	0.5	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0
0.5	0.5	0	0
0.5	0	1	1
0.2	0.8	0	0

Son equivalentes por Gödel.

(ii)

1) $\neg(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B})$ = $\neg G$(max$\{A, B\}$)
2) $\neg\boldsymbol{A} \wedge \neg\boldsymbol{B}$ = min {¬Π(A), ¬Π(B)}

A	B	$\neg\boldsymbol{G}$(**max** $\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\}$)	$\boldsymbol{min}$ {**¬Π(A), ¬Π(B)**}
0	0	1	1
0	0.5	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0
0.5	0.5	0	0
0.5	0	0	0
0.2	0.8	0	0

Son equivalentes por Gödel.

- <u>Lógica de Lukasiewiez</u>

(i)

1)$\neg(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B})$ = $1 - (max\{0, A + B - 1\})$

Si A+B>=1:

$1 - (max\{0, A + B - 1\})$= 2-(A+B)

Si A+B<1:

$1 - (max\{0, A + B - 1\})$= 1

Esto se puede representar como:

min { 1 , 2-(A+B) }

2)$\neg\boldsymbol{A} \vee \neg\boldsymbol{B}$ = min{1-A+1-B,1} = min{1,2-(A+B)}

Son equivalentes por Lukasiewiez.

(ii)

1)$\neg(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B})$ **=** 1-(min{A+B,1})

Si A+B<1:

1-(min{A+B,1}) = 1-A+B

Si A+B>=1:

1-(min{A+B,1}) = 1-1= 0

Luego:

1-(min{A+B,1}) = max { 0,1-(A+B)}

3) $\neg\boldsymbol{A} \wedge \neg\boldsymbol{B}$ **=** max {0, (1-A)+(1-B)-1 } = max { 0,1-(A+B)}

Son equivalentes por Lukasiewiez.

Importación: $\boldsymbol{A} \to (\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}) \equiv (\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}) \to \boldsymbol{C}$

- <u>Lógica producto</u>

1) $\boldsymbol{A} \to (\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C})$

$$\mathrm{B} \to \mathrm{C} = \begin{cases} 1, & si \quad B <= C \\ \frac{C}{B}, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$\mathrm{A} \to (\mathrm{B} \to \mathrm{C}) = \begin{cases} 1, & si \quad A <= B \to C \\ \frac{\mathrm{B} \to \mathrm{C}}{A}, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

2) $(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}) \to \boldsymbol{C}$

$A \wedge B = A \cdot B$

$$(A \wedge B) \to C = \begin{cases} 1, & si \quad A \cdot B <= C \\ \frac{\mathrm{C}}{A \cdot B}, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

No son equivalentes por producto.

- <u>Lógica de Gödel</u>

1) $\boldsymbol{A} \to (\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C})$

$$\mathrm{B} \to \mathrm{C} = \begin{cases} 1, & si \quad B <= C \\ C, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$\mathrm{A} \to (\mathrm{B} \to \mathrm{C}) = \begin{cases} 1, & si \quad A <= B \to C \\ B \to C, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

2)$(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}) \to \boldsymbol{C}$

$A \wedge B = min\{A, B\}$

$$(A \wedge B) \to C = \begin{cases} 1, & si \quad min\{A \wedge B\} <= C \\ C, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Si A<=B→C, entonces en ambos lados la salida es 1

Si A>B→C, entonces se toma B→C o C, pero como B→C y C son equivalentes en los

casos relevantes, la igualdad se mantiene.
Son equivalentes por Gödel.

- <u>Lógica de Lukasiewiez</u>

  1) $\boldsymbol{A} \to (\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C})$

  $B{\to}C = min\ \{1\text{-}B{+}C{,}1\}$

  $A \to (B \to C) = min\ \{\ 1\text{-}A{+}\ min\ \{1\text{-}B{+}C{,}1\}\ {,}1\}$

  $= min\ \{\ \ min\ \{\ 1{,}1\text{-}A{+}1\text{-}B{+}C\}\ {,}\ 1\ \}$

  $= min\ \{\ 2\text{-}A\text{-}B{+}C\ {,}\ 1\ \}$

  2) $(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}) \to \boldsymbol{C}$

  $A \wedge B =$ max {0, A+B-1 }

  $(A \wedge B) \to C$ = min { 1- max {0, A+B-1 } + C ,1 }

Intercambio: $\boldsymbol{A} \to (\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}) \equiv \boldsymbol{B} \to (\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{C})$

- <u>Lógica producto</u>

  1) $\boldsymbol{A} \to (\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C})$

  $$\mathrm{B} \to \mathrm{C} = \begin{cases} 1, & si \quad B <= C \\ \frac{C}{B}, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

  $$\mathrm{A} \to (\mathrm{B} \to \mathrm{C}) = \begin{cases} 1, & si \quad A <= B \ \to C \\ \frac{\mathrm{B} \to \mathrm{C}}{A}, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

  2) $\boldsymbol{B} \to (\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{C})$

  $$\mathrm{A} \to \mathrm{C} = \begin{cases} 1, & si \quad B <= A \\ \frac{C}{A}, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

  $$\mathrm{B} \to (\mathrm{A} \to \mathrm{C}) = \begin{cases} 1, & si \quad B <= A \ \to C \\ \frac{\mathrm{A} \to \mathrm{C}}{B}, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

  Probando con datos de todos los posibles casos nos da que es equivalente.

- <u>Lógica de Gödel</u>

  1) $\boldsymbol{A} \to (\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C})$

  $$\mathrm{B} \to \mathrm{C} = \begin{cases} 1, & si \quad B <= C \\ C, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

  $$\mathrm{A} \to (\mathrm{B} \to \mathrm{C}) = \begin{cases} 1, & si \quad A <= B \ \to C \\ B \ \to C\ , & en\ otro\ caso \end{cases}$$

  2) $\boldsymbol{B} \to (\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{C})$

  $$\mathrm{A} \to \mathrm{C} = \begin{cases} 1, & si \quad A <= C \\ C, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

B→ (A →C) = $\begin{cases} 1, & si \quad B <= A \to C \\ A \to C\ , & en\ otro\ caso \end{cases}$

Probando con datos de todos los posibles casos nos da que es equivalente.

- Lógica de Lukasiewiez

1)$\boldsymbol{A \to (B \to C)}$

$B \to C$ = min { 1-B+C , 1 }
$A \to (B \to C)$ = min{ 1-A+ min { 1-B+C , 1 } ,1 }

2)$\boldsymbol{B \to (A \to C)}$

$A \to C$ = min { 1-A+C , 1 }
$A \to (A \to C)$ = min{ 1-B+ min { 1-A+C , 1 } ,1 }

Probando con datos de todos los posibles casos nos da que es equivalente también.

Contraposición: $\boldsymbol{A \to B \equiv \neg B \to \neg A}$

- Lógica producto

1) $A \to B = \begin{cases} 1, & si \quad A <= B \\ \frac{B}{A}, & en\ otro\ caso \end{cases}$

2) $\neg B \to \neg A$ = $\begin{cases} 1, & si \quad \neg A <= \neg B \\ \frac{\neg B}{\neg A}, & en\ otro\ caso \end{cases}$

$\neg B$= $\begin{cases} 1, & si \quad B = 0 \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$

$\neg A$= $\begin{cases} 1, & si \quad A = 0 \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$

A	B	(1)	(2)
0	0	1	1
1	1	1	1
0	**0.6**	**1**	**0**

No son equivalentes por producto.

- Lógica de Gödel

$$A \to B = \begin{cases} 1, & si \quad A <= B \\ B, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$\neg B \to \neg A = \begin{cases} 1, & si \quad \neg A <= \neg B \\ \neg A, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$\neg B = \begin{cases} 1, & si \quad B = 0 \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$\neg A = \begin{cases} 1, & si \quad A = 0 \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

A	B	(1)	(2)
0	0	1	1
1	1	1	1
0	0.6	1	1
0.6	0	0	0
0.6	**0.2**	**0.2**	**0**

No son equivalentes por Gödel.

- Lógica de Lukasiewiez

$A \to B =$ min {1-A+B, 1}

$\neg B \to \neg A$ = min {1-(1-A) +(1-B), 1} = min {1-A+B , 1 }

Son equivalentes por Lukasiewiez como podemos ver.

Cuántica: $\boldsymbol{A \to B \equiv \neg A \vee (A \wedge B)}$

- Lógica producto

1) $A \to B = \begin{cases} 1, & si \quad A <= B \\ \frac{B}{A}, & en\ otro\ caso \end{cases}$

2) $\neg A \vee (A \wedge B) = \neg A + (A \cdot B) - \neg A \cdot (A \cdot B)$

A	B	(1)	(2)
0	**0**	1	1
1	**1**	**1**	**1**
0	**1**	1	1
1	**0**	0	0
0.6	**0.4**	0.66	0.66

Son equivalentes por producto.

- <u>Lógica de Gödel</u>

1) $A \rightarrow B = \begin{cases} 1, & si \quad A <= B \\ \text{B}, & en\ otro\ caso \end{cases}$

2) $\neg A \vee (A \wedge B) = max\{\neg A\ , min\{A,B\}\}$

A	B	(1)	(2)
0	**0**	1	1
1	**1**	**1**	**1**
0	**1**	1	1
1	**0**	0	0
0.6	**0.4**	0.4	0.4

Son equivalentes por Gödel.

- <u>Lógica de Lukasiewiez</u>

1) $A \rightarrow B =$ min { 1-A+B, 1 }

2) $\neg A \vee (A \wedge B) = min\{(1\text{-}A) + max\{0, A+B\text{-}1\}, 1\}$

A	B	(1)	(2)
0	**0**	1	1
1	**1**	**1**	**1**
0	**1**	1	1
1	**0**	0	0
0.6	**0.4**	0.8	0.4

No son equivalentes en la lógica de Lukasiewiez.