

Estructuras de Datos

Grado en Ing. Informática, Ing. del Software e Ing. de Computadores
ETSI Informática
Universidad de Málaga

3. Tipos Abstractos de Datos

José E. Gallardo, Francisco Gutiérrez, Pablo López
Dpto. Lenguajes y Ciencias de la Computación
Universidad de Málaga

Índice

- Tipos Abstractos de Datos. Especificaciones algebraicas
- Stack
 - Signatura y axiomas, descripción con quickCheck
 - Implementación lineal de Stack. Módulos
 - Java: Interfaces e Implementaciones
 - Implementaciones de Stack en Java
- Queue
 - Especificación algebraica
 - Implementaciones en Haskell
 - Implementaciones en Java
- List
 - Interfaz e implementaciones de List en Java
- Set
 - Especificación algebraica de Set
 - Implementaciones de Set en Haskell
 - Interfaz e implementaciones de Set en Java
- Iteradores/Plegados sobre TADs
 - Iteradores en Java. Modelo y uso
 - Plegado para Set
 - Iteradores para Set

Tipo Abstracto de Datos (TAD)

Interfaz/Signatura y Axiomas

- Objetivos:
 - Introducir la idea de TAD
 - Describir los mecanismos que Haskell y Java proporcionan para definirlos
 - Describir una colección de TADs elementales
- **Abstracción:** mecanismo para comprender sistemas que involucran gran cantidad de detalles:
 - **destaca** los detalles relevantes,
 - **oculta** los irrelevantes.
- Un TAD es una abstracción:
 - destacamos las operaciones que podemos realizar con los datos,
 - ocultamos (los detalles de) su implementación.
- Un TAD se integra en el sistema de tipos del lenguaje como un tipo más
 - Mismos privilegios (asignación, paso de parámetros, etc.).
 - Es indistinguible de un tipo primitivo.

Tipo Abstracto de Datos (TAD)

Interfaz/Signatura y Axiomas (II)

- Un TAD se describe (**especifica**) mediante:
 - las operaciones y el tipo de cada una (**interfaz/signatura**),
 - algunas propiedades que interrelacionan las operaciones (**axiomas**).
- La signatura permite decidir qué “mezcla” de operaciones tiene sentido.
- Los axiomas permiten operar con los datos en forma abstracta.

signatura + axiomas = **especificación**

- Un programador que usa un TAD solo conoce su especificación, pero no conoce cómo se “manipula internamente”.
- Solamente puede manipular el TAD en forma abstracta a través de la especificación.
- Estas **barreras de abstracción** son esenciales si en un proyecto trabajan varios programadores: se puede cambiar la implementación sin afectar al trabajo del resto de programadores.

Tipo Abstracto de Datos (TAD)

Interfaz/Signatura y Axiomas (III)

- Un ejemplo de TAD estándar: **Double**.
- El programador no necesita saber cómo se representa internamente un dato **Double**, ni cómo se opera con ellos internamente.
- Puede manipular los valores a través de operaciones, como la suma (+), y algunas constantes: 3.1415
- El programador usuario de **Double** desea una implementación eficiente del tipo y de sus operaciones, pero no está interesado en escribirlas.
- El programador implementador del tipo debe facilitar información sobre la eficiencia (complejidad) de las operaciones, que dependerán de la implementación.

El TAD Stack (pila)

- Un **Stack** es una estructura contenedora que organiza los elementos con una política **LIFO** (**Last In First Out**)

[http://en.wikipedia.org/wiki/Stack_\(data_structure\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Stack_(data_structure))

- Operaciones básicas:

- **push**: coloca un nuevo elemento en la cima del Stack
- **pop**: elimina el elemento situado en la cima del Stack
- **top**: devuelve (sin eliminar) el elemento situado en la cima del Stack
- **isEmpty**: comprueba si el Stack no contiene elementos



Stack de libros

Interfaz/Signatura del TAD Stack

-- Interfaz en Haskell

Selector

`isEmpty :: Stack a -> Bool`

Constructor

`push :: a -> Stack a -> Stack a`

Selector

`top :: Stack a -> a`

Transformador

`pop :: Stack a -> Stack a`

Constructor

`empty :: Stack a`

Transformador: devuelve un dato transformado

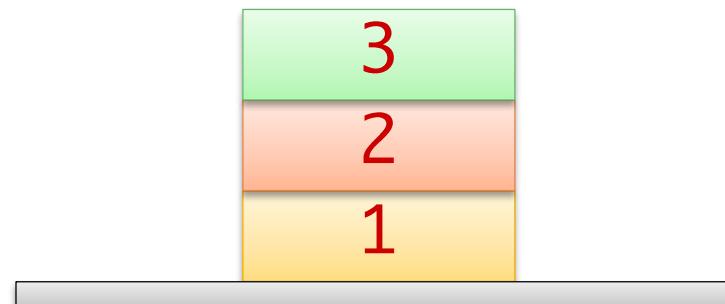
Constructor: construye un dato

Selector: obtiene información del dato

Un ejemplo de uso del TAD Stack

```
s1 :: Stack Int  
s1 = push 3 (push 2 (push 1 empty))
```

```
size :: Stack a -> Int  
size s  
| isEmpty s = 0  
| otherwise = 1 + size (pop s)
```



Descripción de axiomas con QuickCheck

```
import DataStructures.Stack.LinearStack
import Test.QuickCheck

-- top debe devolver el último elemento apilado
ax1 x s = top (push x s) == x

-- Hacer pop tras push no modifica el stack
ax2 x s = pop (push x s) == s

-- un stack vacío está vacío
ax3      = isEmpty empty

-- push devuelve un stack no vacío
ax4 x s = not (isEmpty (push x s))
```

No es necesario escribir
True ==> en las propiedades si no
hay precondition. En dicho caso, el
tipo es **Bool** en vez de **Property**

Main> quickCheck (ax2 :: Int -> Stack Int -> Bool)
+++ OK, passed 100 tests.

Representación de Stack como Tipo de Datos Recursivo

- Tipo recursivo: el tipo a definir puede aparecer como argumento de alguno de sus constructores de datos:

```
data Stack a = Empty | Node a (Stack a) deriving Show
```

El segundo argumento del constructor `Node` debe ser un Stack a

s1 :: Stack Int
s1 = Node 2 (Node 1 Empty)

constructores

Este dato también es un Stack

```
top :: Stack a -> a  
top Empty      = error "top for empty stack"  
top (Node x s) = x
```

patrones: `x :: a, s :: Stack a`

```
size :: Stack a -> Int  
size Empty      = 0  
size (Node x s) = 1 + size s
```



Módulos

- Un módulo Haskell es una colección de declaraciones relacionadas: funciones, tipos, clases, ...
- Dividir un programa en varios módulos tiene muchas ventajas:
 - Las funciones exportadas por el módulo pueden ser usadas por otro módulo (**bibliotecas**)
 - Los módulos facilitan la organización y el diseño de programas complejos
 - Diferentes programadores pueden trabajar simultáneamente sobre diferentes módulos

Módulos (II)

- En Haskell, cada módulo se implementa en un fichero distinto
- Los nombres de módulos son identificadores que comienzan por mayúsculas
- El nombre del fichero y del módulo deben coincidir (extensión .hs)
- El fichero del módulo debe comenzar con una **cabecera de módulo**:

```
module ModuleName ( Identifier1
                   , Identifier2
                   , ...
                   , Identifiern
                   ) where
```

```
import ... (justo detrás de la cabecera)
```

Definiciones de tipos, funciones, clases, instancias, ...

Ésta es la colección de funciones, tipos, constructores y clases que el módulo proporciona (**exporta**)

Esta es la **interfaz** para este módulo. Otros módulos que lo importen (**clientes**) podrán usar solo lo que aquí se proporciona

Todas las definiciones que no estén en la interfaz se consideran definiciones **privadas**

Módulos (III)

- Para usar un módulo, un cliente debe importarlo
- La cláusula **import** debe estar al comienzo del módulo cliente, justo delante de su primera definición

```
import ModuleName
```

Permite acceder a los recursos exportados por el módulo ModuleName

```
import ModuleName(Identifier1, Identifier2, ..., Identifiern)
```

Permite acceder a un subconjunto de los recursos exportados por el módulo

```
import qualified ModuleName(Identifier1 ..., Identifiern) as Prefix
```

Los identificadores exportados por el módulo pueden usarse precedidos por **Prefix** y un punto. Esto evita **conflictos** con elementos con el mismo identificador importados desde otros módulos

Módulos (y IV)

LinearStack.hs

```
module DataStructures.Stack.LinearStack (Stack, empty, ...)  
  where  
  
data Stack a = ...  
empty :: Stack a  
empty = ...  
...
```

LinearQueue.hs

```
module DataStructures.Queue.LinearQueue (Queue, empty, ...)  
  where  
  
data Queue a = ...  
empty :: Queue a  
empty = ...  
...
```

Prefijo para identificadores del módulo Stack

Client.hs

```
import qualified DataStructures.Stack.LinearStack as S  
import qualified DataStructures.Queue.LinearQueue as Q
```

```
s1 :: S.Stack Int  
s1 = S.empty
```

Se refiere a empty del módulo Stack

```
q1 :: Q.Queue Int  
q1 = Q.empty
```

Se refiere a empty del módulo Queue

Prefijo para identificadores del módulo Queue

Organización de módulos y paquetes

Haskell

DataStructures

Stack

 LinearStack.hs

Queue

 LinearQueue.hs

 TwoStacksQueue.hs

Set

 LinearSet.hs

 ListSet.hs

...

Éste sería el módulo:
DataStructures.Set.ListSet

Los identificadores **en rojo** son
nombres de carpetas, en mayúsculas
en Haskell o minúsculas en Java

Java

dataStructures

stack

 Stack.java

 LinkedListStack.java

 ArrayStack.java

 LinkedStack.java

queue

 Queue.java

 LinkedListQueue.java

 ArrayQueue.java

 LinkedQueue.java

set

 Set.java

 LinkedListSet.java

 LinkedSet.java

...

Implementación Lineal de Stack

DataStructures.Stack.LinearStack

```
module DataStructures.Stack.LinearStack (
```

```
    Stack  
    , empty  
    , isEmpty  
    , push  
    , pop  
    , top  
) where
```

La implementación del tipo Stack es **privada**.
Los constructores de datos no pueden ser usados por un cliente. Buena práctica ya que oculta detalles de implementación 😊

```
import Data.List(intercalate)
```

Estas son la únicas operaciones posibles para los clientes del módulo

```
data Stack a = Empty | Node a (Stack a)
```

```
empty :: Stack a  
empty = Empty
```

Los constructores de datos Empty y Node no se exportan, y por tanto son **privados**

```
isEmpty :: Stack a -> Bool  
isEmpty Empty = True  
isEmpty _ = False
```

```
push :: a -> Stack a -> Stack a  
push x s = Node x s
```

```
top :: Stack a -> a  
top Empty = error "top on empty stack"  
top (Node x s) = x
```

```
pop :: Stack a -> Stack a  
pop Empty = error "pop on empty stack"  
pop (Node x s) = s
```

Impl. DataStructures.Stack.LinearStack (II)

Instancia condicional: define igualdad de stacks si los elementos tienen una igualdad definida

```
instance (Eq a) => Eq (Stack a) where
    Empty == Empty = True
    Node x s == Node x' s' = x==x' && s==s'
    _ == _ = False
```

Determina cómo Haskell mostrará Stacks

```
instance (Show a) => Show (Stack a) where
    show s ="LinearStack(" ++ intercalate "," (stackToList s) ++ ")"
```

```
stackToList :: (Show a) => Stack a -> [String]
stackToList Empty = []
stackToList (Node x s) = show x : stackToList s
```

Efecto de show

Main> push 3 (push 2 (push 1 empty))
LinearStack(3,2,1)

Efecto de Eq

Main> push 3 (push 2 (push 1 empty)) == push 1 empty
False

Impl. DataStructures.Stack.LinearStack (y IV)

Eficiencia de la implementación:

Operación	Orden
push	O(1)
pop	O(1)
top	O(1)
isEmpty	O(1)
empty	O(1)

Eficiencia óptima



Un Ejemplo de Uso del módulo LinearStack

```
import DataStructures.Stack.LinearStack

s1 :: Stack Int
s1 = push 3 (push 2 (push 1 empty))

size :: Stack a -> Int
size s
| isEmpty s = 0
| otherwise = 1 + size (pop s)
```

No podemos usar los constructores de datos de Stack (Empty y Node) en el código del cliente, ya que éstos son **privados** en el módulo

Java: Interfaces e Implementaciones

- Separamos la interfaz de las implementaciones de las estructuras de datos
 - **Interfaz**: signaturas que describen las operaciones soportadas por la estructura
 - **Implementación**: código/clase correspondiente a una realización de la estructura. Normalmente, un interfaz permite diferentes implementaciones (con distintas eficiencias de las operaciones)
 - **Cliente**: un programa que usa la estructura de datos a través de su interfaz
- Ventajas:
 - Proporcionamos una interfaz **abstracta** para manipular la estructura. Los clientes no necesitan conocer los detalles de la implementación
 - Un cliente puede elegir la implementación más apropiada de la estructura de datos para resolver un problema concreto

Interfaz Stack en Java

Aunque el paquete `java.util` ya contiene una implementación de `Stack`, aquí consideraremos otra diferente basado en la siguiente interfaz:

```
package dataStructures.stack;  
  
public interface Stack<T> {  
    void push(T elem);  
    T top();  
    void pop();  
    boolean isEmpty();  
}
```

T denota el tipo base:
tipo de elementos en
la pila

Se trata de una
implementación **mutable**:
algunos métodos modifican
el objeto receptor

- La operación `empty` (que vimos en Haskell) se corresponde en Java con el constructor de la clase que implementa la interfaz

Implementaciones de Stack en Java

Estudiaremos dos implementaciones:

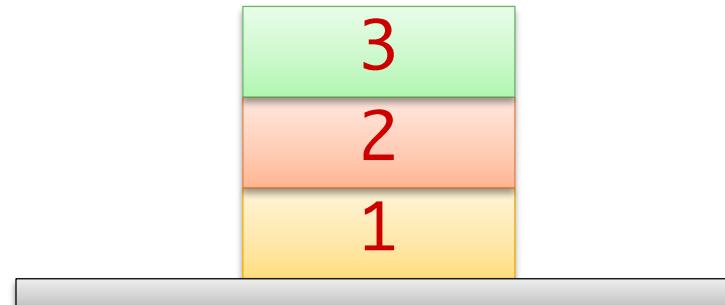
- Basada en arrays: `ArrayList`
- Basada en nodos enlazados: `LinkedList`

Un ejemplo de uso del TAD Stack

```
package dataStructures.stack;  
  
public class Example {  
    static public void main(String[] args) {  
        Stack<Integer> stack = new ArrayStack<>();  
        stack.push(1);  
        stack.push(2);  
        stack.push(3);  
        while (!stack.isEmpty()) {  
            System.out.println(stack.top());  
            stack.pop();  
        }  
    }  
}
```

Interfaz

Implementación



Excepciones en Stack

Las operaciones inválidas lanzarán esta excepción:

```
package dataStructures.stack;

public class EmptyStackException extends RuntimeException {

    public EmptyStackException() {
        super();
    }

    public EmptyStackException(String msg) {
        super(msg);
    }
}
```

Como RuntimeException,
pero varía el nombre de la
excepción

Implementación de Stack vía arrays (I)

dataStructures.stack.ArrayStack

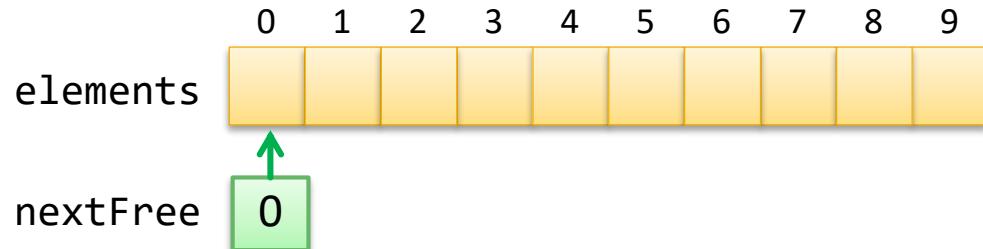
Utilizaremos un array para almacenar los elementos del Stack.

Necesitamos:

- Crear el array con un tamaño inicial dado por defecto
 - Usaremos una constante
 - Mantener un índice a la siguiente posición libre en el array
 - Redimensionar el array si nos falta espacio
-
- Solución muy compacta: consume poca memoria 😊
 - Si el array se queda pequeño para albergar los datos, se debe expandir (método `Arrays.copyOf`)

Implementación de Stack vía arrays (II)

dataStructures.stack.ArrayStack



```
public class ArrayStack<T> implements Stack<T> {  
    protected T[] elements;  
    protected int nextFree;  
  
    private final int INITIAL_CAPACITY = 10;  
  
    public ArrayStack() {  
        elements = (T[]) new Object[INITIAL_CAPACITY];  
        nextFree = 0;  
    }  
  
    private void ensureCapacity() {  
        if (nextFree == elements.length)  
            elements = Arrays.copyOf(elements, 2*elements.length);  
    }
```

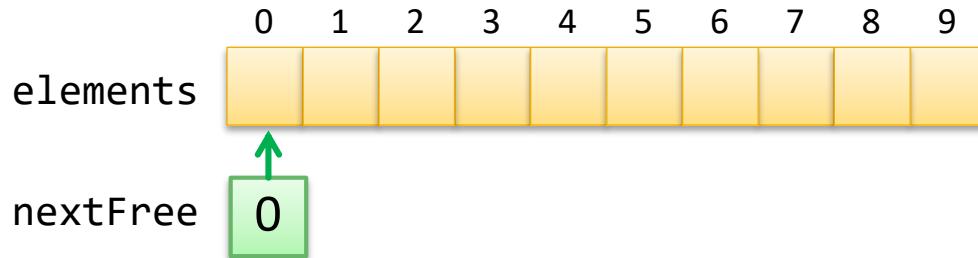
Un Stack puede almacenar inicialmente 10 elementos

Si no cabe el nuevo elemento, se dobla el tamaño del array

Implementación de Stack vía arrays (III)

dataStructures.stack.ArrayStack

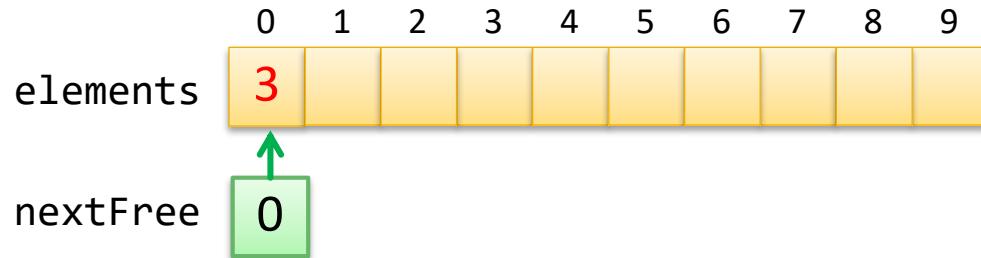
```
public void push(T elem) {  
    ensureCapacity();  
    elements[nextFree] = elem;  
    nextFree++;  
}
```



Implementación de Stack vía arrays (IV)

dataStructures.stack.ArrayStack

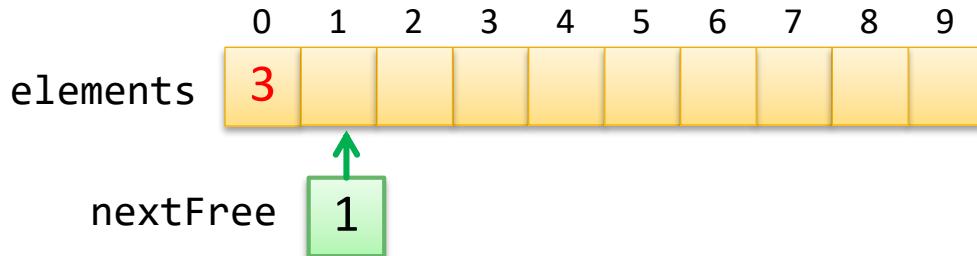
```
public void push(T elem) {  
    ensureCapacity();  
    elements[nextFree] = elem;  
    nextFree++;  
}
```



Implementación de Stack vía arrays (V)

dataStructures.stack.ArrayStack

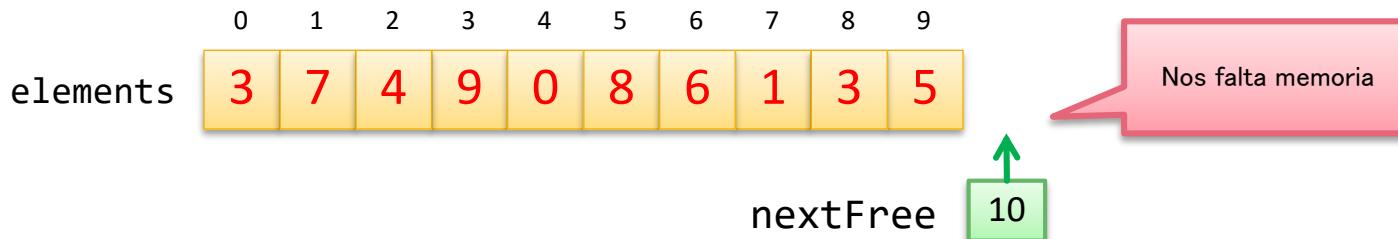
```
public void push(T elem) {  
    ensureCapacity();  
    elements[nextFree] = elem;  
    nextFree++;  
}
```



Implementación de Stack vía arrays (VI)

dataStructures.stack.ArrayStack

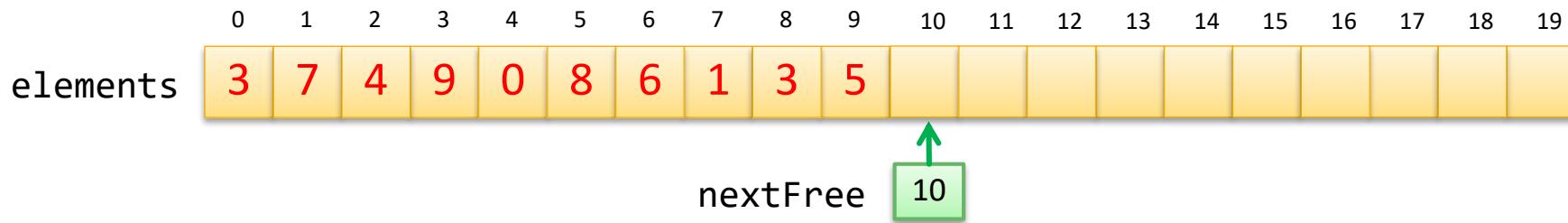
```
public void push(T elem) {  
    ensureCapacity();  
    elements[nextFree] = elem;  
    nextFree++;  
}
```



Implementación de Stack vía arrays (VII)

dataStructures.stack.ArrayStack

```
public void push(T elem) {  
    ensureCapacity();  
    elements[nextFree] = elem;  
    nextFree++;  
}
```

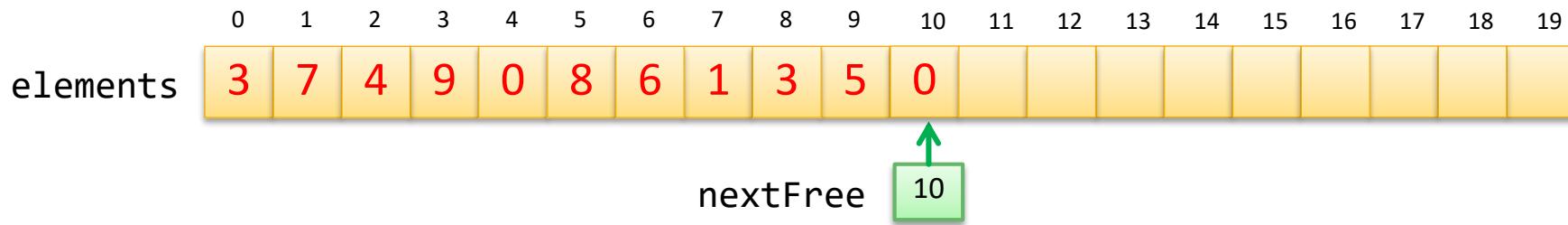


```
private void ensureCapacity() {  
    if (nextFree == elements.length)  
        elements = Arrays.copyOf(elements, 2*elements.length);  
}
```

Implementación de Stack vía arrays (VIII)

dataStructures.stack.ArrayStack

```
public void push(T elem) {  
    ensureCapacity();  
    elements[nextFree] = elem;  
    nextFree++;  
}
```

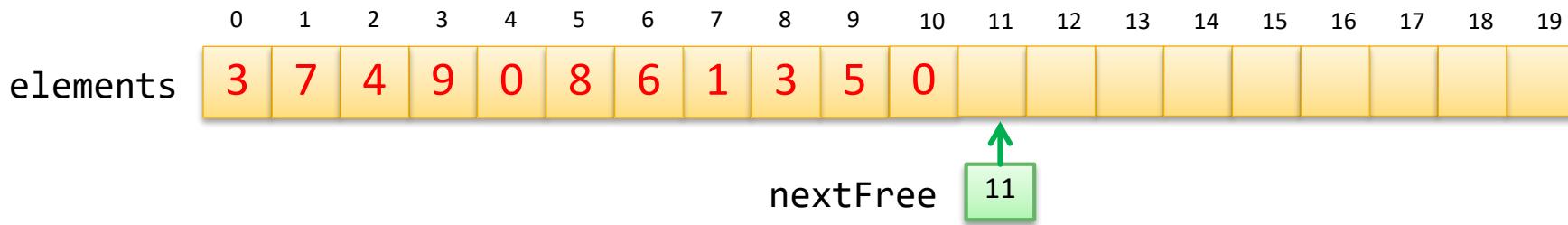


```
private void ensureCapacity() {  
    if (nextFree == elements.length)  
        elements = Arrays.copyOf(elements, 2*elements.length);  
}
```

Implementación de Stack vía arrays (IX)

dataStructures.stack.ArrayStack

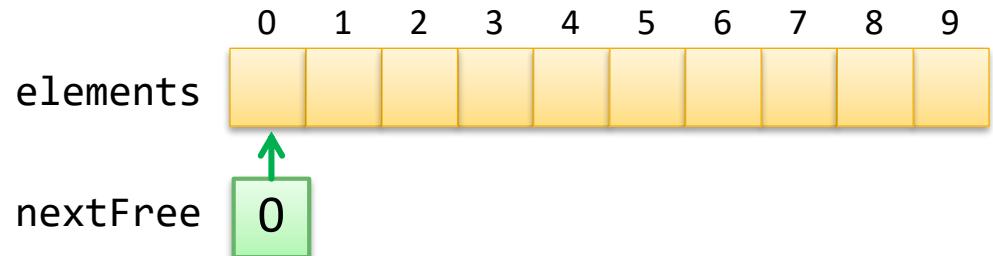
```
public void push(T elem) {  
    ensureCapacity();  
    elements[nextFree] = elem;  
    nextFree++;  
}
```



```
private void ensureCapacity() {  
    if (nextFree == elements.length)  
        elements = Arrays.copyOf(elements, 2*elements.length);  
}
```

Implementación de Stack vía arrays (X)

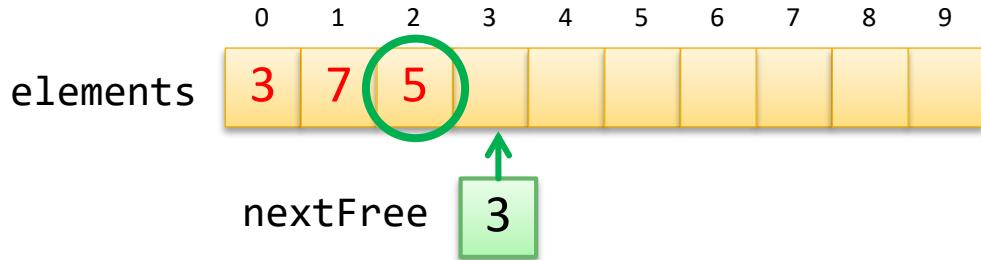
dataStructures.stack.ArrayStack



```
public boolean isEmpty( ) {  
    return nextFree == 0;  
}
```

Implementación de Stack vía arrays (XI)

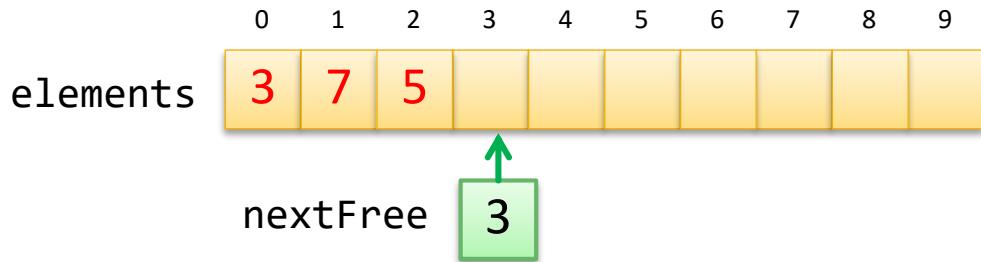
dataStructures.stack.ArrayStack



```
public T top() {  
    if(isEmpty())  
        throw new EmptyStackException("top on empty stack");  
    return elements[nextFree - 1];  
}
```

Implementación de Stack vía arrays (XII)

dataStructures.stack.ArrayStack

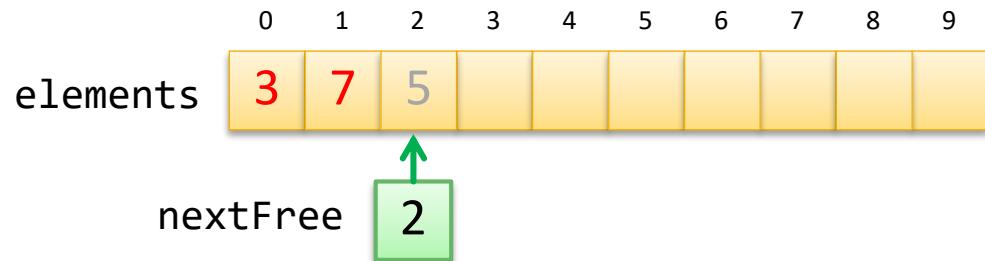


```
public void pop() {  
    if(isEmpty())  
        throw new EmptyStackException("pop on empty stack");  
    nextFree--;  
}
```

Implementación de Stack vía arrays (XIII)

dataStructures.stack.ArrayStack

El elemento extraído 5 será sobreescrito después si se introduce uno nuevo



```
public void pop() {  
    if(isEmpty())  
        throw new EmptyStackException("pop on empty stack");  
    nextFree --;  
}
```

Implementación de Stack vía arrays. Análisis (I)

dataStructures.stack.ArrayStack

```
int[] data = new int[10];
```



- Crear un array de n elementos toma $O(n)$ pasos en Java debido a la **inicialización** (otros lenguajes toman $O(1)$)
- Acceder a un elemento de un array toma $O(1)$ pasos

```
int n = data[2];
```
- Modificar un elemento de un array toma $O(1)$ pasos

```
data[2] = 8;
```
- El acceso a los elementos de un arrays es directo (**random access**) ☺

Implementación de Stack vía arrays. Análisis (II)

dataStructures.stack.ArrayStack

Eficiencia de la implementación:

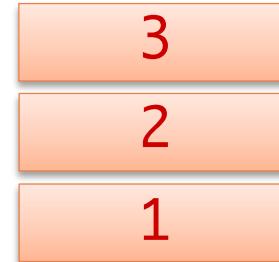
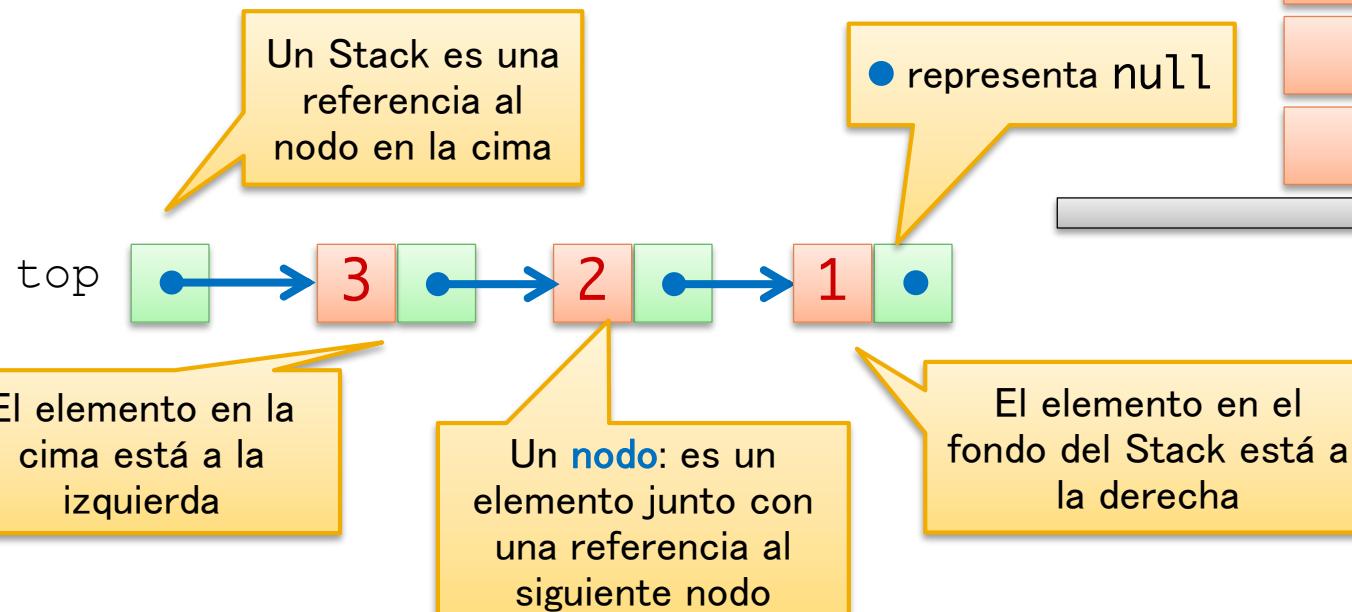
Operación	Orden
push	$O(1)$, $O(n)^*$
pop	$O(1)$
top	$O(1)$
isEmpty	$O(1)$
ArrayStack	$O(1)$

Constructor de la clase (genera un array de tamaño inicial **constante**)

- * Si es necesario redimensionar, la operación es $O(n)$, pero será $O(1)$ para las siguientes n llamadas a push

Stack con nodos enlazados

■ Un stack con tres elementos:

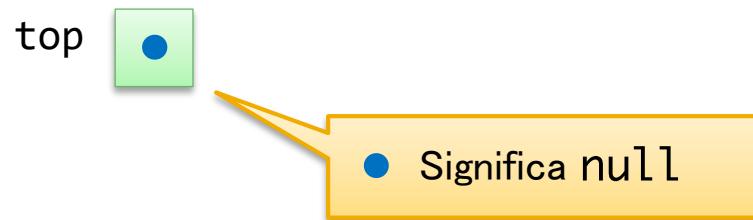


■ Un stack vacío:



Implementación de Stack vía nodos enlazados (I)

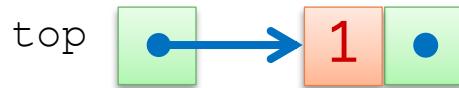
■ Un stack vacío:



```
Stack<Integer> s = new LinkedStack<>();
```

Impl. `dataStructures.stack.LinkedStack` vía nodos enlazados (II)

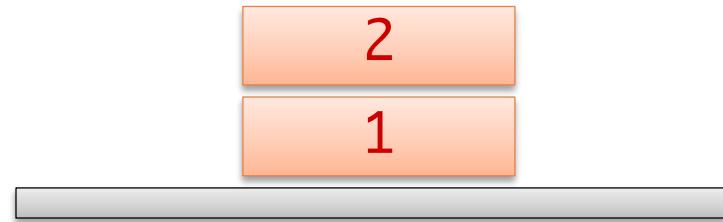
- Con un elemento:



```
Stack<Integer> s = new LinkedStack<>();  
s.push(1);
```

Impl. `dataStructures.stack.LinkedStack` vía nodos enlazados (III)

- Un stack con dos elementos:



```
Stack<Integer> s = new LinkedStack<>();
```

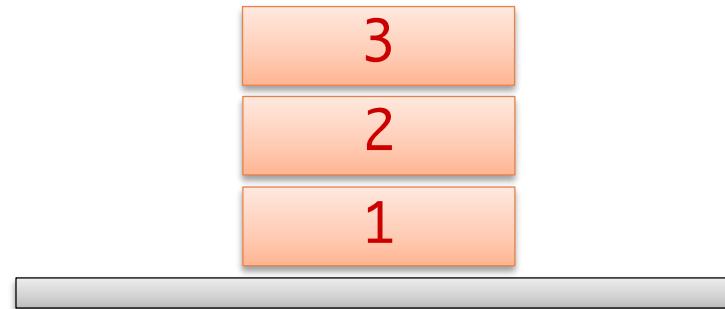
```
s.push(1);  
s.push(2);
```

Impl. `dataStructures.stack.LinkedStack` vía nodos enlazados (IV)

- Un stack con tres elementos:



El elemento de la
cima es el de la
izquierda

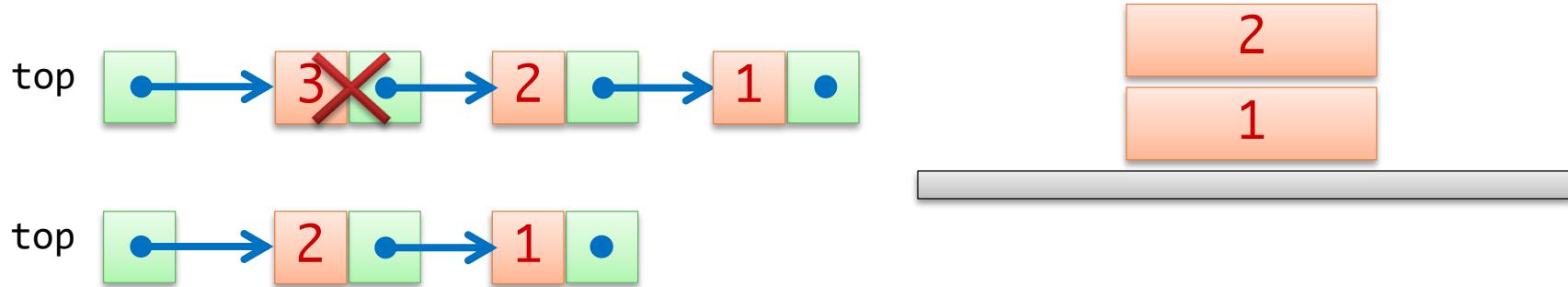


```
Stack<Integer> s = new LinkedStack<>();
```

```
s.push(1);  
s.push(2);  
s.push(3);
```

Impl. `dataStructures.stack.LinkedStack` vía nodos enlazados (V)

- Un stack con dos elementos:



```
Stack<Integer> s = new LinkedStack<>();
```

```
s.push(1);  
s.push(2);  
s.push(3);  
s.pop();
```

Impl. `dataStructures.stack.LinkedStack` vía nodos enlazados (VI)

■ Implementando un stack:

```
public class LinkedStack<T> implements Stack<T> {
```

```
    static private class Node<E> {  
        E elem;  
        Node<E> next;
```

```
        public Node(E x, Node<E> node) {  
            elem = x;  
            next = node;  
        }  
    }
```

```
    private Node<T> top;
```

```
    public LinkedStack() {  
        top = null;  
    }
```

```
    public boolean isEmpty() {  
        return top == null;  
    }
```

Un nodo:



Referencia al nodo situado en
la cima del stack

El stack está
vacío inicialmente



Impl. `dataStructures.stack.LinkedStack` vía nodos enlazados (VII)

- Apilando un elemento en el stack:

`push(3)`

```
public void push(T x) {  
    Node<T> node = new Node<>(x,top);  
    top = node;  
}
```

Sólo usamos `new` cuando
necesitamos añadir un nuevo nodo a
la estructura enlazada
`new` reserva memoria libre !

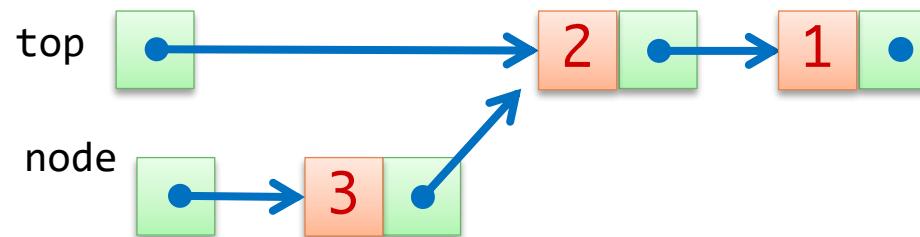


Impl. `dataStructures.stack.LinkedStack` vía nodos enlazados (VIII)

- Apilando un elemento en el stack:

`push(3)`

```
public void push(T x) {  
    Node<T> node = new Node<>(x,top);  
    top = node;  
}
```

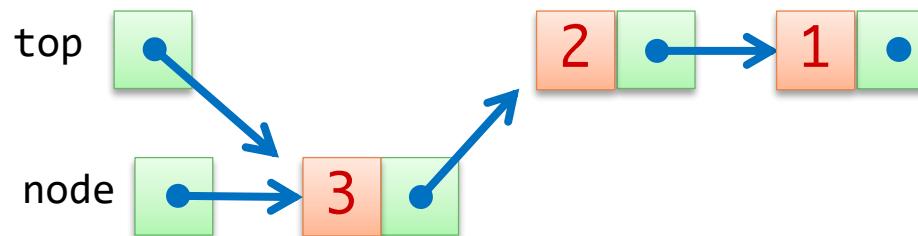


Impl. `dataStructures.stack.LinkedStack` vía nodos enlazados (IX)

- Apilando un elemento en el stack:

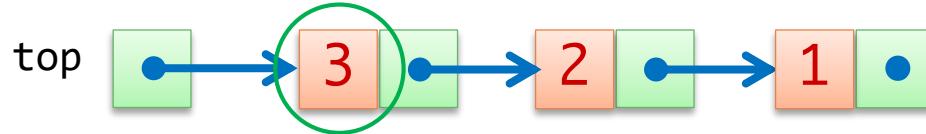
`push(3)`

```
public void push(T x) {  
    Node<T> node = new Node<>(x,top);  
    top = node;  
}
```



Impl. `dataStructures.stack.LinkedStack` vía nodos enlazados (X)

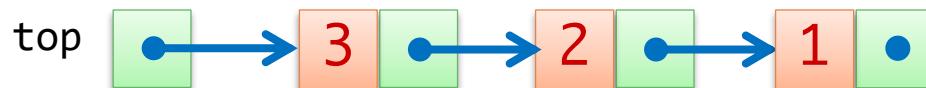
- Devolviendo la cima del stack:



```
public T top() {  
    if(isEmpty())  
        throw new EmptyStackException("top on empty stack");  
    return top.elem;  
}
```

Impl. `dataStructures.stack.LinkedStack` vía nodos enlazados (XI)

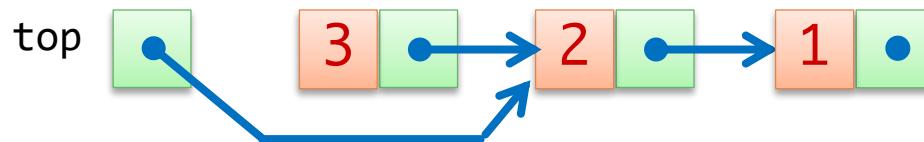
- Eliminando la cima del stack:



```
public void pop() {  
    if (isEmpty())  
        throw new EmptyStackException("pop on empty stack");  
    top = top.next;  
}
```

Impl. `dataStructures.stack.LinkedStack` vía nodos enlazados (XII)

Eliminando la cima de stack:



Dado que el nodo que almacenaba 3 queda ahora dereferenciado, el **recolector de basura** reclamará la memoria que usaba



```
public void pop() {  
    if (isEmpty())  
        throw new EmptyStackException("pop on empty stack");  
    top = top.next;  
}
```

Impl. `dataStructures.stack.LinkedStack` vía nodos enlazados (y XIII)

Eficiencia de la implementación:

Operación	Orden
push	O(1)
pop	O(1)
top	O(1)
isEmpty	O(1)
LinkedStack	O(1)

LinkedStack vs ArrayStack

- Test experimental
- Hemos medido el tiempo de ejecución para realizar 10 millones de operaciones aleatorias (push o pop) sobre un stack inicialmente vacío.
- Usando una CPU Intel i7 860:
 - ArrayStack fue alrededor de dos veces más rápido que LinkedStack ☺

Tipo Abstracto de Datos Queue

- Una **Queue** (cola) es un TAD que organiza los elementos de tal manera que el primer elemento introducido es el primero en salir (**FIFO**, First In First Out)

- Operaciones básicas:

- **enqueue**: coloca un nuevo elemento al final de la cola
- **dequeue**: extrae el elemento que se encuentra al principio de la cola
- **first**: devuelve el elemento que se encuentra al principio de la cola (sin extraerlo)
- **isEmpty**: comprueba si la cola está vacía

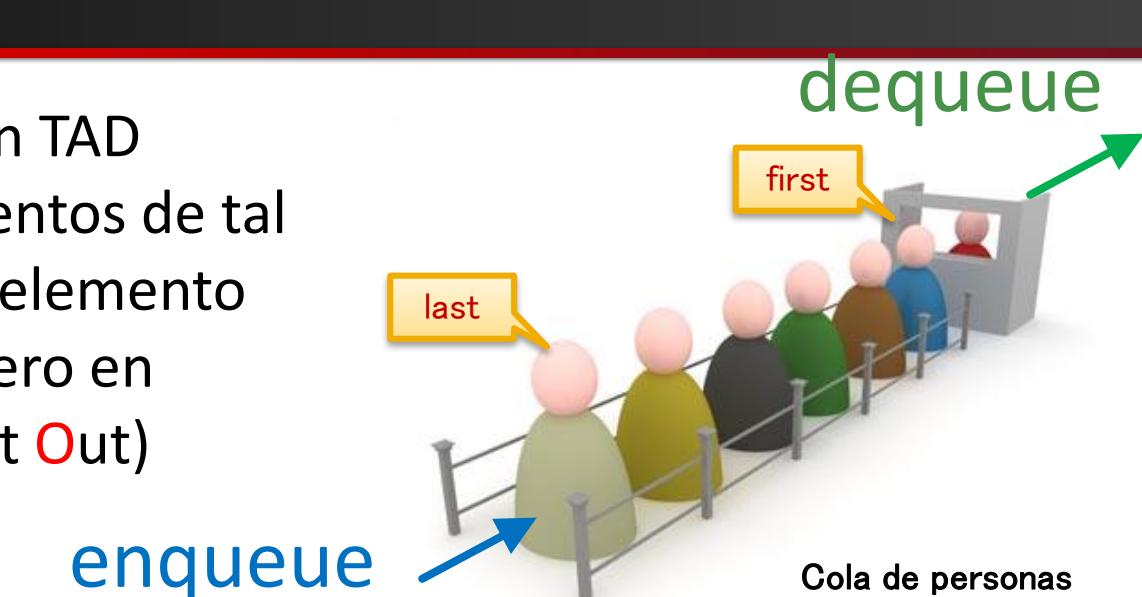
enqueue

dequeue

last

first

Cola de personas



Signatura del TAD Queue

-- Interfaz en Haskell

isEmpty :: Queue a -> Bool

enqueue :: a -> Queue a -> Queue a

dequeue :: Queue a -> Queue a

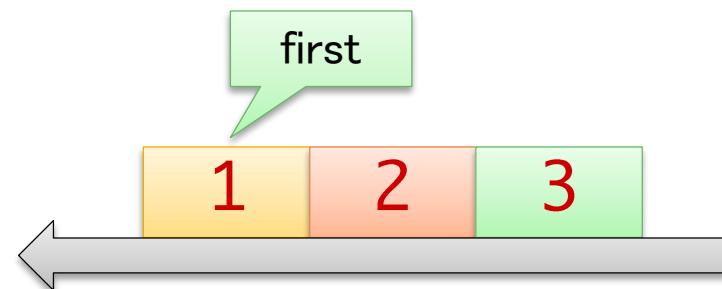
first :: Queue a -> a

empty :: Queue a

Un Ejemplo de Uso de Queue

```
s1 :: Queue Int  
s1 = enqueue 3 (enqueue 2 (enqueue 1 empty))
```

```
size :: Queue a -> Int  
size s  
| isEmpty s = 0  
| otherwise = 1 + size (dequeue s)
```



Especificación de Queue y pruebas con QuickCheck

```
module DataStructures.Queue.QueueAxioms
  (ax1,ax2,ax3,ax4,ax5,ax6,queueCheckAxioms) where

import DataStructures.Queue.LinearQueue    -- Implementation to use in tests
import Test.QuickCheck

ax1      =           isEmpty empty
ax2 x q =           not (isEmpty (enqueue x q))

ax3 x   =           first (enqueue x empty) == x
ax4 x q = not (isEmpty q) ==> first (enqueue x q) == first q

ax5 x   =           dequeue (enqueue x empty) == empty
ax6 x q = not (isEmpty q) ==> dequeue (enqueue x q) == enqueue x (dequeue q)

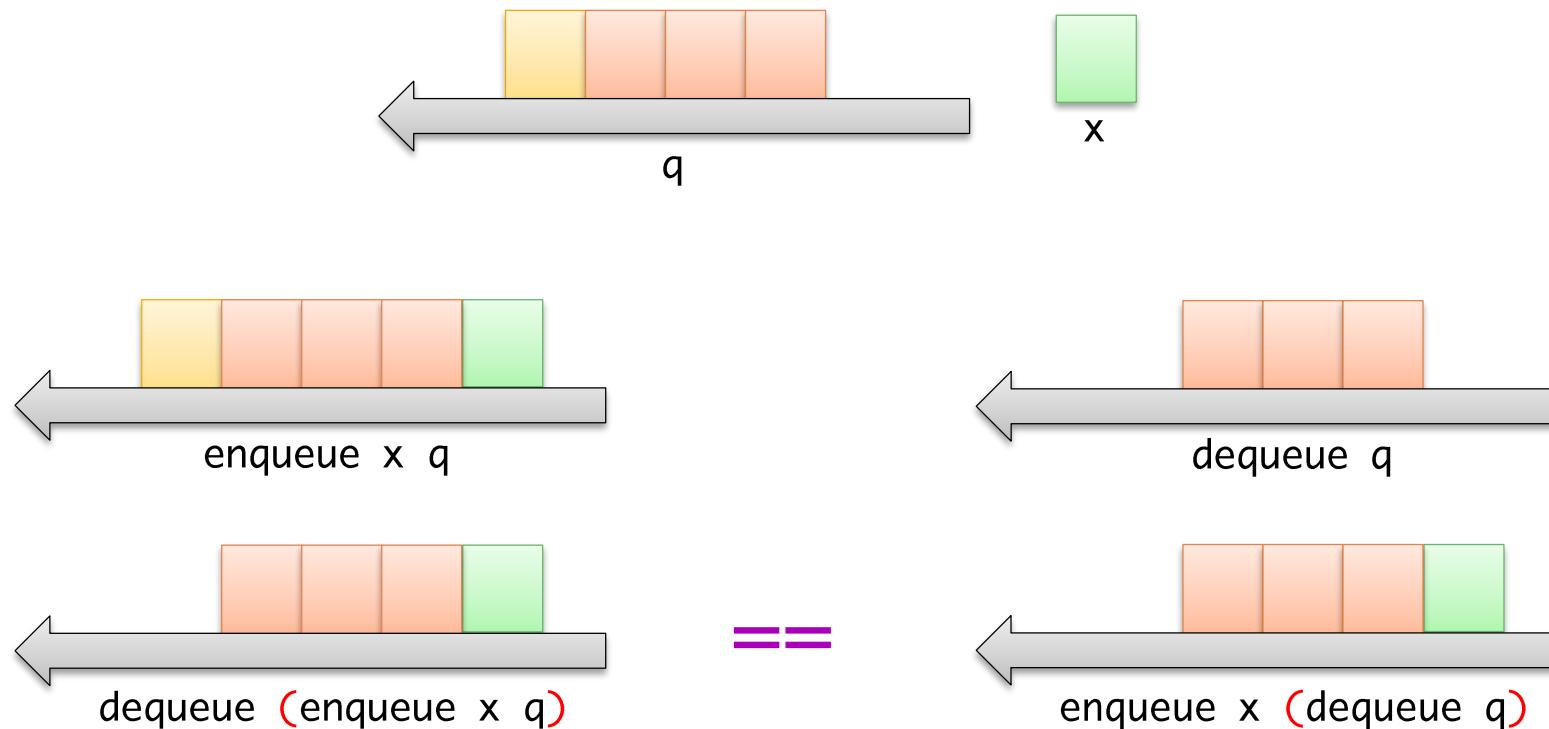
type Elem = Int    -- Tipo a usar en las pruebas

queueCheckAxioms = do
  quickCheck (ax1 :: Bool)
  quickCheck (ax2 :: Elem -> Queue Elem -> Bool)
  ...
  quickCheck (ax6 :: Elem -> Queue Elem -> Property)
```

Especificación de Queue y pruebas con QuickCheck (y II)

- Visualización del último axioma:

not (isEmpty q) ==>
dequeue (enqueue x q) == enqueue x (dequeue q)



Implementación lineal de Queue (I)

```
data Queue a = Empty | Node a (Queue a)
```

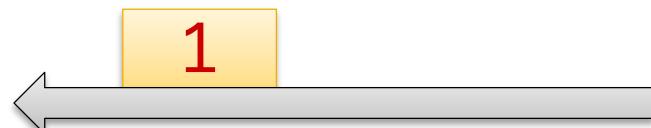
- Una cola de 0 elementos:

Empty



- Una cola de 1 elemento:

Node 1 Empty



- Una cola de 2 elementos:

Node 1 (Node 2 Empty)



- Una cola de 3 elementos:

Node 1 (Node 2 (Node 3 Empty))



Impl. DataStructures.Queue.LinearQueue (II)

```
module DataStructures.Queue.LinearQueue
  ( Queue
  , empty
  , isEmpty
  , enqueue
  , dequeue
  , first
  ) where
```

La implementación
del tipo de dato es
privada

```
import Data.List(intercalate)
```

```
data Queue a = Empty | Node a (Queue a)
```

```
empty :: Queue a
empty = Empty
```

```
isEmpty :: Queue a -> Bool
isEmpty Empty = True
isEmpty _      = False
```

Impl. DataStructures.Queue.LinearQueue (III)

```
data Queue a = Empty | Node a (Queue a)
```

```
enqueue :: a -> Queue a -> Queue a  
enqueue x Empty      = Node x Empty  
enqueue x (Node y q) = Node y (enqueue x q)
```

Operación O(n)



```
first :: Queue a -> a  
first Empty        = error "first on empty queue"  
first (Node x q)  = x
```

```
dequeue :: Queue a -> Queue a  
dequeue Empty      = error "dequeue on empty queue"  
dequeue (Node x q) = q
```

Impl. DataStructures.Queue.LinearQueue (y IV)

Eficiencia de la implementación:

Operación	Orden
enqueue	$O(n)$
dequeue	$O(1)$
first	$O(1)$
isEmpty	$O(1)$
empty	$O(1)$

Podría mejorarse con una implementación basada en dos pilas (ver material complementario)

Interfaz Queue en Java

Aunque Java ya dispone de una interfaz Queue en `java.util`, vamos a definir nuestra propia interfaz:

```
package dataStructures.queue;  
public interface Queue<T> {  
    void enqueue(T elem);  
    void dequeue();  
    T first();  
    boolean isEmpty();  
}
```

La operación `empty` se implementa con en el constructor en Java

Implementaciones del TAD Queue en Java

Presentaremos dos implementaciones:

1. Basada en nodos enlazados: LinkedQueue
2. Basada en array circular: ArrayQueue

Excepciones para Queue

Las operaciones inválidas lanzarán esta excepción:

```
package dataStructures.queue;

public class EmptyQueueException extends RuntimeException {

    public EmptyQueueException() {
        super();
    }

    public EmptyQueueException(String msg) {
        super(msg);
    }
}
```

Similar a RuntimeException,
pero varía el nombre de la
excepción

Implementación de Queue vía nodos enlazados (I)

- La Queue mantiene información:
 - del nodo que está a la cabeza
 - (mediante la variable referencia first)
 - y del último nodo introducido
 - (mediante la variable referencia last)
- Cada nodo se enlaza con el siguiente

Impl. `dataStructures.queue.LinkedQueue` vía nodos enlazados (II)

- Una queue vacía:

first

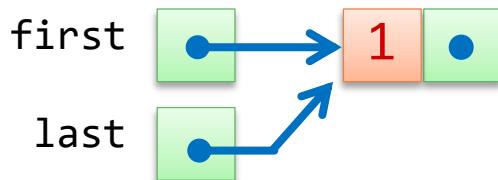



last


```
Queue<Integer> q = new LinkedQueue<>();
```

Impl. `dataStructures.queue.LinkedQueue` vía nodos enlazados (III)

- Una queue con un elemento:

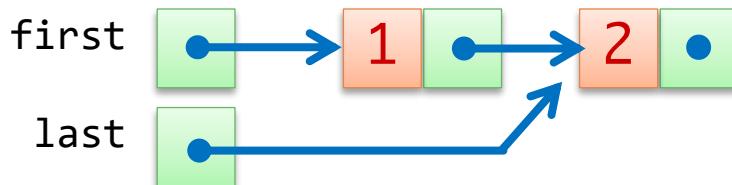


```
Queue<Integer> q = new LinkedQueue<>();
```

```
q.enqueue(1);
```

Impl. `dataStructures.queue.LinkedQueue` vía nodos enlazados (IV)

- Una queue con dos elementos:

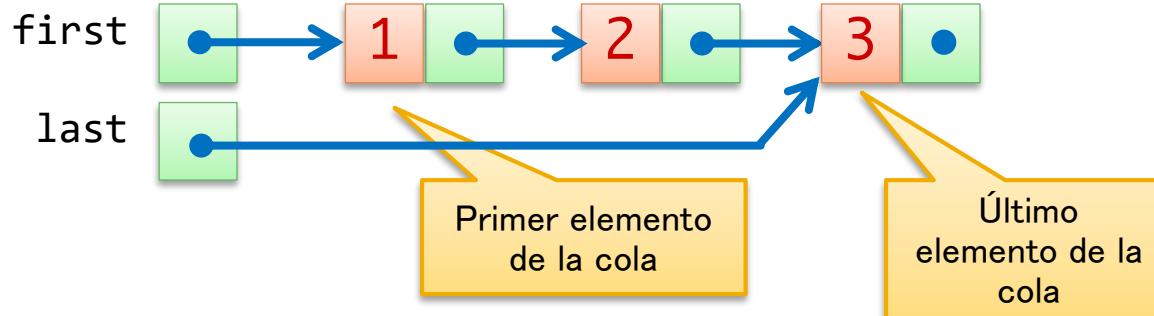


```
Queue<Integer> q = new LinkedQueue<>();
```

```
q.enqueue(1);  
q.enqueue(2);
```

Impl. `dataStructures.queue.LinkedQueue` vía nodos enlazados (V)

- Una queue con tres elementos:



```
Queue<Integer> q = new LinkedQueue<>();
```

```
q.enqueue(1);  
q.enqueue(2);  
q.enqueue(3);
```

Impl. `dataStructures.queue.LinkedQueue` vía nodos enlazados (VI)

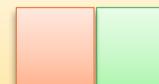
■ Implementando una queue:

```
public class LinkedQueue<T> implements Queue<T> {
```

```
    private static class Node<E> {
        private E elem;
        private Node<E> next;

        public Node(E x, Node<E> node) {
            elem = x;
            next = node;
        }
    }
```

Un nodo:

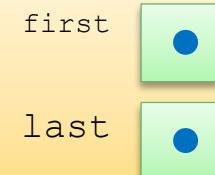


```
    private Node<T> first, last;
```

Enlaces al primer y
último nodo de la
queue

```
    public LinkedQueue() {
        first = null;
        last = null;
    }
```

La queue está
vacía inicialmente



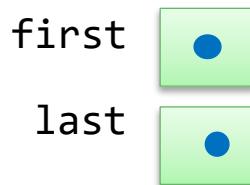
```
    public boolean isEmpty() {
        return first == null;
    }
```

Impl. `dataStructures.queue.LinkedQueue` vía nodos enlazados (VII)

- Insertando un elemento en una queue vacía:

```
public void enqueue(T x) {  
    Node<T> node = new Node<>(x,null);  
    if (first==null) { //queue was empty  
        first = node;  
        last = node;  
    } else {  
        last.next = node;  
        last = last.next;  
    }  
}
```

enqueue(1)

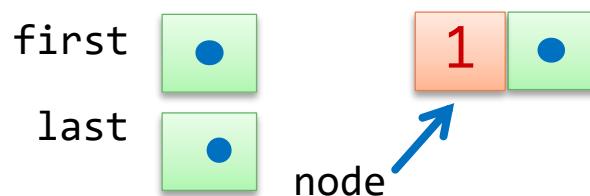


Impl. `dataStructures.queue.LinkedQueue` vía nodos enlazados (VII)

- Insertando un elemento en una queue vacía:

```
public void enqueue(T x) {  
    Node<T> node = new Node<>(x,null);  
    if (first==null) { //queue was empty  
        first = node;  
        last = node;  
    } else {  
        last.next = node;  
        last = last.next;  
    }  
}
```

enqueue(1)

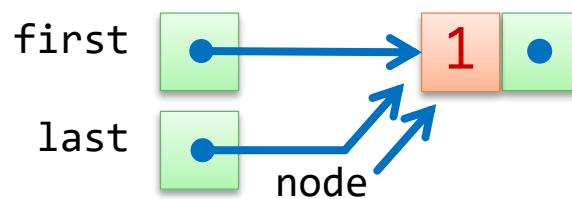


Impl. `dataStructures.queue.LinkedQueue` vía nodos enlazados (IX)

- Insertando un elemento en una queue vacía:

```
public void enqueue(T x) {  
    Node<T> node = new Node<>(x,null);  
    if (first==null) { //queue was empty  
        first = node;  
        last = node;  
    } else {  
        last.next = node;  
        last = last.next;  
    }  
}
```

enqueue(1)



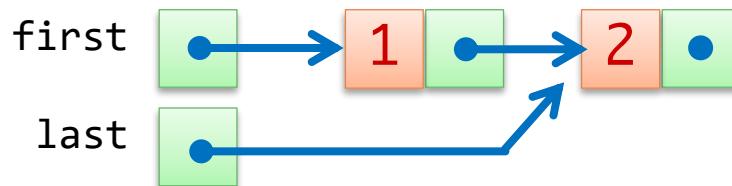
Impl. `dataStructures.queue.LinkedQueue` vía nodos enlazados (X)

- Insertando un elemento en una queue no vacía:

```
public void enqueue(T x) {  
    Node<T> node = new Node<>(x,null);  
    if (first==null) { //queue was empty  
        first = node;  
        last = node;  
    } else {  
        last.next = node;  
        last = last.next;  
    }  
}
```

enqueue(3)

Supongamos que partimos de la siguiente situación:



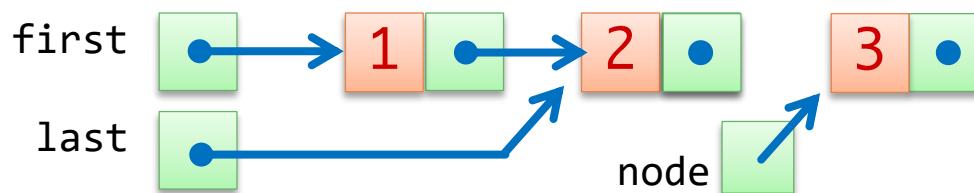
y ejecutamos `enqueue(3)`

Impl. `dataStructures.queue.LinkedQueue` vía nodos enlazados (XI)

- Insertando un elemento en una queue no vacía:

```
public void enqueue(T x) {  
    Node<T> node = new Node<>(x,null);  
    if(first==null) { //queue was empty  
        first = node;  
        last = node;  
    } else {  
        last.next = node;  
        last = last.next;  
    }  
}
```

enqueue(3)

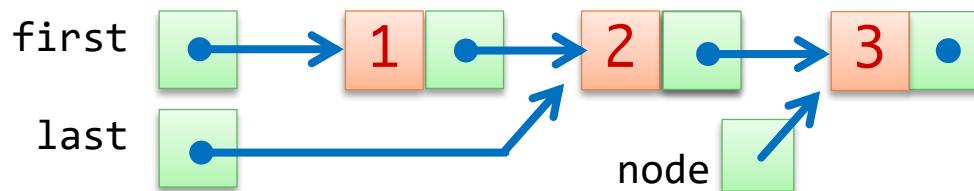


Impl. `dataStructures.queue.LinkedQueue` vía nodos enlazados (XII)

- Insertando un elemento en una queue no vacía:

```
public void enqueue(T x) {  
    Node<T> node = new Node<>(x,null);  
    if(first==null) { //queue was empty  
        first = node;  
        last = node;  
    } else {  
        last.next = node;  
        last = last.next;  
    }  
}
```

enqueue(3)

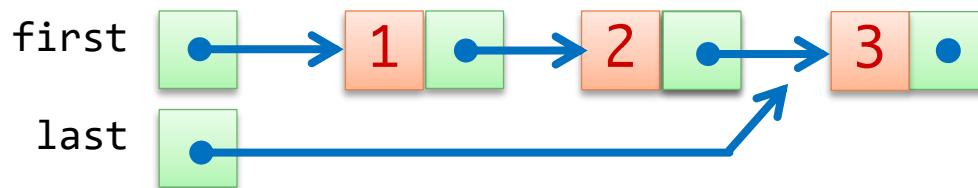


Impl. `dataStructures.queue.LinkedQueue` vía nodos enlazados (XIII)

- Insertando un elemento en una queue no vacía:

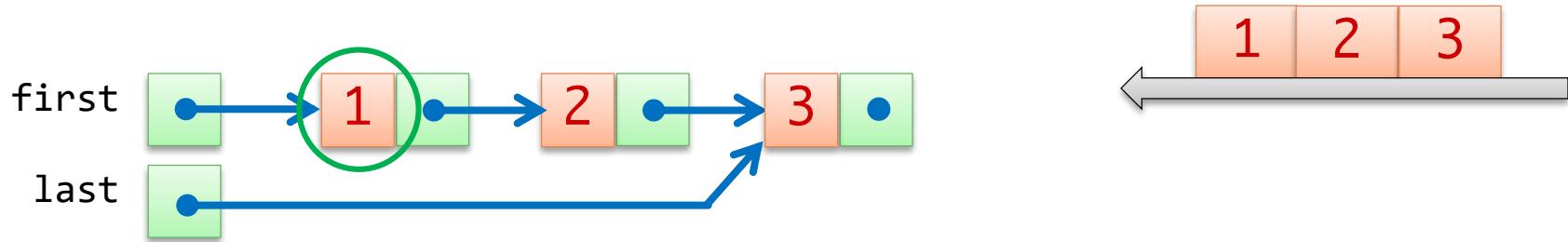
```
public void enqueue(T x) {  
    Node<T> node = new Node<>(x,null);  
    if(first==null) { //queue was empty  
        first = node;  
        last = node;  
    } else {  
        last.next = node;  
        last = last.next;  
    }  
}
```

enqueue(3)



Impl. `dataStructures.queue.LinkedQueue` vía nodos enlazados (XIV)

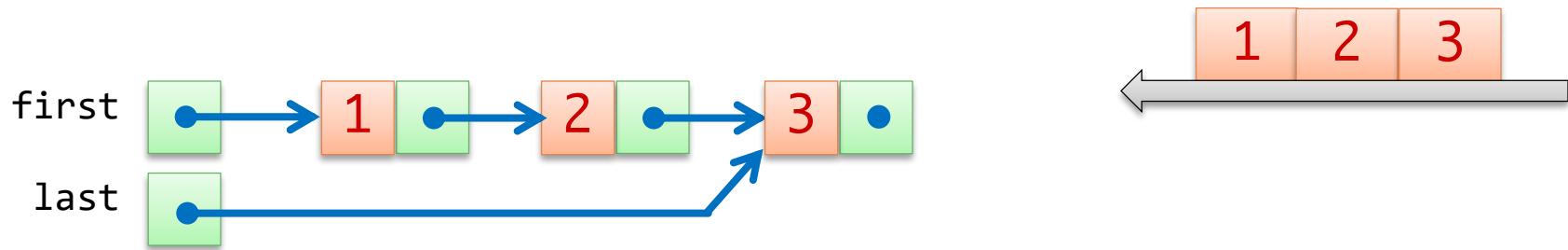
- Devolviendo el primer elemento de una queue:



```
public T first() {  
    if (isEmpty())  
        throw new EmptyQueueException("first on empty queue");  
    return first.elem;  
}
```

Impl. `dataStructures.queue.LinkedQueue` vía nodos enlazados (XV)

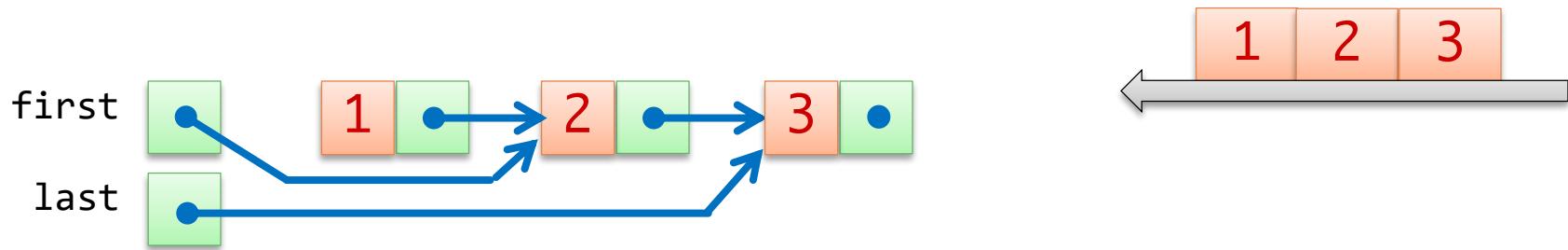
- Eliminando el primer elemento de una queue:



```
public void dequeue() {
    if(isEmpty())
        throw new EmptyQueueException("dequeue on empty queue");
    first = first.next;
    if (first==null) //queue became empty
        last = null;
}
```

Impl. `dataStructures.queue.LinkedQueue` vía nodos enlazados (XVI)

- Eliminando el primer elemento de una queue:



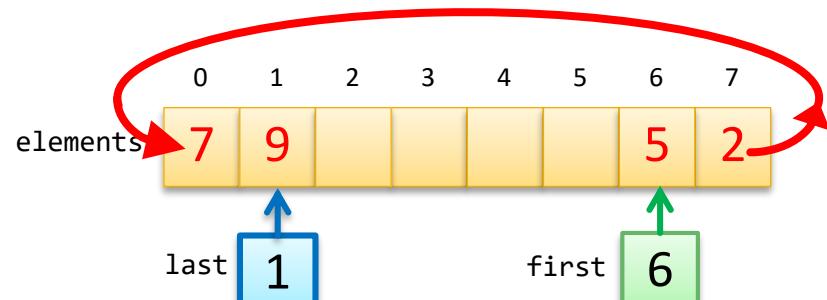
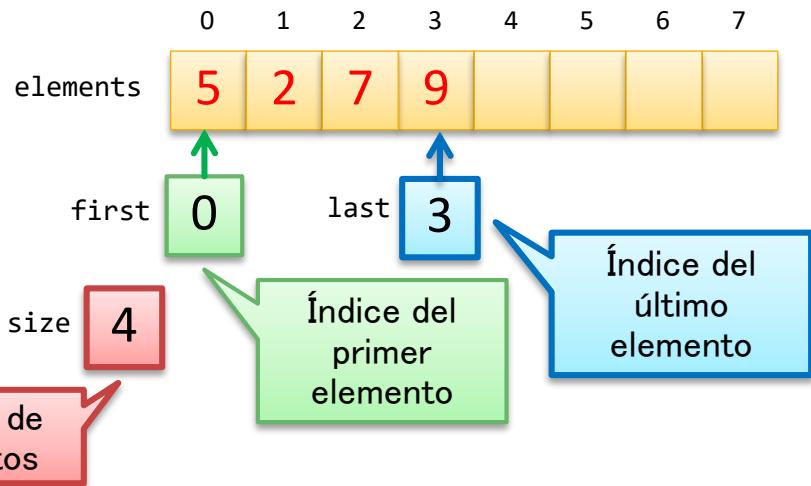
```
public void dequeue() {
    if(isEmpty())
        throw new EmptyQueueException("dequeue on empty queue");
    first = first.next;
    if (first==null) //queue became empty
        last = null;
}
```

Impl. `dataStructures.queue.LinkedQueue` vía nodos enlazados (y XVII)

Eficiencia de la implementación:

Operación	Orden
enqueue	$O(1)$
dequeue	$O(1)$
first	$O(1)$
isEmpty	$O(1)$
LinkedQueue	$O(1)$

Implementación de Queue vía un array circular (I)

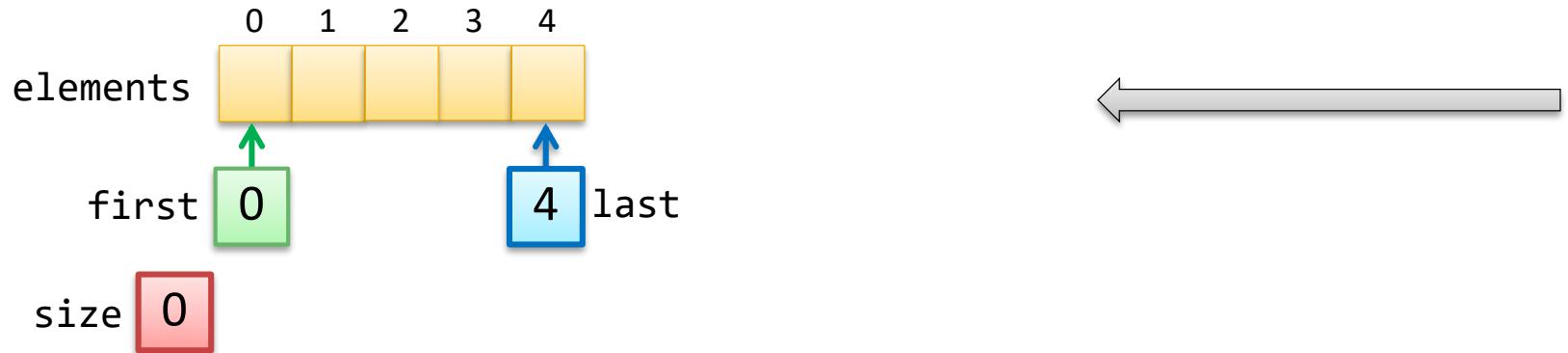


size 4

El array es utilizado de forma circular

Impl. `dataStructures.queue.ArrayQueue` vía un array circular (II)

- Una queue vacía:



```
Queue<Integer> q = new ArrayQueue<>();
```

Impl. `dataStructures.queue.ArrayQueue` vía un array circular (III)

- Una queue con un elemento:



```
Queue<Integer> q = new ArrayQueue<>();  
q.enqueue(5);
```

enqueue incrementa (de forma circular) last y coloca el nuevo elemento en la casilla indexada por el nuevo valor de last

Impl. `dataStructures.queue.ArrayQueue` vía un array circular (IV)

- Una queue con dos elementos:



```
Queue<Integer> q = new ArrayQueue<>();  
q.enqueue(5);  
q.enqueue(2);
```

Impl. `dataStructures.queue.ArrayQueue` vía un array circular (V)

- Una queue con tres elementos:



```
Queue<Integer> q = new ArrayQueue<>();  
q.enqueue(5);  
q.enqueue(2);  
q.enqueue(7);
```

Impl. `dataStructures.queue.ArrayQueue` vía un array circular (VI)

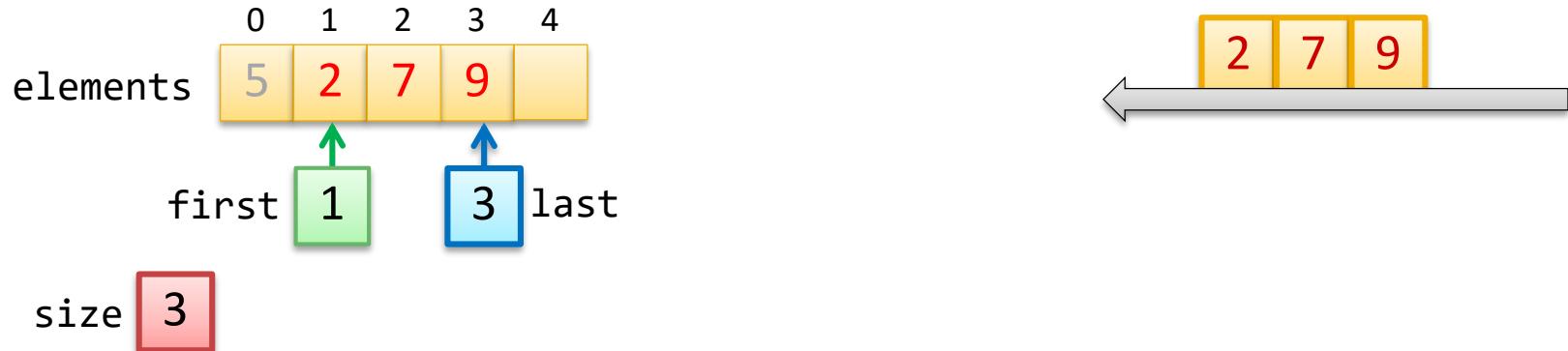
- Una queue con cuatro elementos:



```
Queue<Integer> q = new ArrayQueue<>();  
q.enqueue(5);  
q.enqueue(2);  
q.enqueue(7);  
q.enqueue(9);
```

Impl. `dataStructures.queue.ArrayQueue` vía un array circular (VII)

- Una queue con tres elementos:

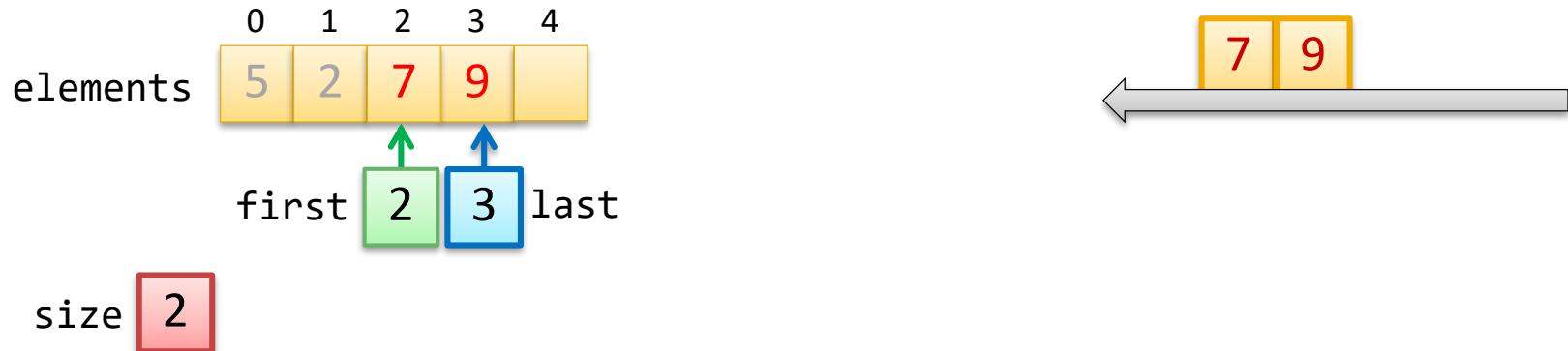


```
Queue<Integer> q = new ArrayQueue<>();  
q.enqueue(5);  
q.enqueue(2);  
q.enqueue(7);  
q.enqueue(9);  
q.dequeue();
```

dequeue incrementa (de forma circular) first

Impl. `dataStructures.queue.ArrayQueue` vía un array circular (VIII)

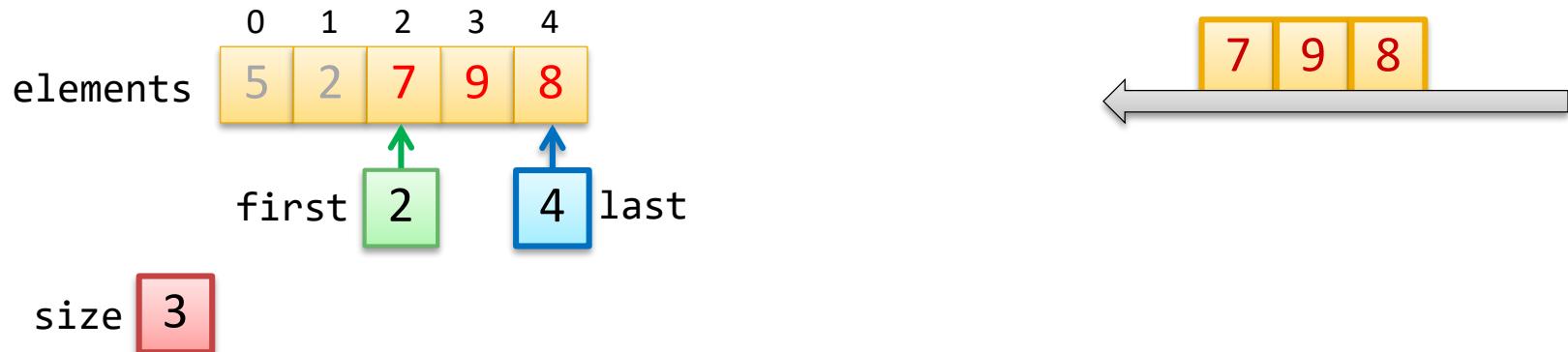
- Una queue con dos elementos:



```
Queue<Integer> q = new ArrayQueue<>();
q.enqueue(5);
q.enqueue(2);
q.enqueue(7);
q.enqueue(9);
q.dequeue();
q.dequeue();
```

Impl. `dataStructures.queue.ArrayQueue` vía un array circular (IX)

- Una queue con tres elementos:



```
Queue<Integer> q = new ArrayQueue<>();
q.enqueue(5);
q.enqueue(2);
q.enqueue(7);
q.enqueue(9);
q.dequeue();
q.dequeue();
q.enqueue(8);
```

Impl. `dataStructures.queue.ArrayQueue` vía un array circular (X)

- Una queue con cuatro elementos:



```
Queue<Integer> q = new ArrayQueue<>();  
q.enqueue(5);  
q.enqueue(2);  
q.enqueue(7);  
q.enqueue(9);  
q.dequeue();  
q.dequeue();  
q.enqueue(8);  
q.enqueue(6);
```

Impl. dataStructures.queue.ArrayQueue vía un array circular (XI)

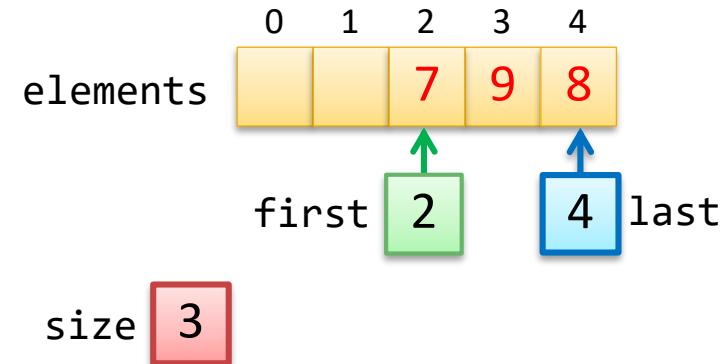
```
package dataStructures.queue;  
public class ArrayQueue<T> implements Queue<T> {  
    protected T[] elements;  
    protected int first, last, size;  
  
    private final int INITIAL_CAPACITY = 10;  
  
    public ArrayQueue() {  
        elements = (T[]) new Object[INITIAL_CAPACITY];  
        size = 0;  
        first = 0;  
        last = elements.length - 1;  
    }  
  
    private int advance(int i) {  
        return (i+1) % elements.length;  
    }  
  
    private void ensureCapacity() {  
        if (size == elements.length) {  
            T[] extension = (T[]) new Object[2 * elements.length];  
            for (int i=0; i<size; i++) {  
                extension[i] = elements[first];  
                first = advance(first);  
            }  
            elements = extension;  
            first = 0;  
            last = size - 1;  
        }  
    }  
}
```

Implementa el incremento circular:
advance(elements.length-1) => 0

Si se llena el array, creamos otro de
capacidad el doble y lo copiamos

Impl. `dataStructures.queue.ArrayQueue` vía un array circular (XII)

```
public boolean isEmpty() {  
    return size == 0;  
}  
  
public void enqueue(T x) {  
    ensureCapacity();  
    last = advance(last);  
    elements[last] = x;  
    size++;  
}  
  
public T first() {  
    if (isEmpty())  
        throw new EmptyQueueException("first on empty queue");  
    return elements[first];  
}  
  
public void dequeue() {  
    if (isEmpty())  
        throw new EmptyQueueException("dequeue on empty queue");  
    first = advance(first);  
    size--;  
}
```



Impl. `dataStructures.queue.ArrayQueue` vía un array circular (y XIII)

Eficiencia de la implementación:

Operación	Orden
enqueue	$O(n)$, $O(1)$
dequeue	$O(1)$
first	$O(1)$
isEmpty	$O(1)$
ArrayQueue	$O(1)$

$O(n)$ cuando se expande el array, y $O(1)$ en el resto de los casos



Constructor de la clase (genera un array de tamaño inicial **constante**)

Queue con nodos enlazados vs. con arrays

- Prueba experimental
- Hemos realizado 10 millones de operaciones aleatorias (enqueue o dequeue) sobre una cola inicialmente vacía.
- Usando una CPU Intel i7 860:
 - La Queue sobre arrays fue 1.6 más rápida que la que usa nodos enlazados ☺

Listas

[http://en.wikipedia.org/wiki/List_\(computing\)](http://en.wikipedia.org/wiki/List_(computing))

- Una lista es una colección homogénea de valores
- Cada valor tiene asociada una posición (**index**), usualmente un número natural (0 para el primer elemento, 1 para el segundo, etc.)
- Un mismo valor puede aparecer varias veces en distintas posiciones
- En Haskell las listas están predefinidas. Ver la documentación del módulo **Data.List** en



<http://haskell.org/ghc/docs/latest/html/libraries/base-4.12.0.0/Data-List.html>

Las listas en Haskell

- De forma algebraica sería muy sencillo definirlas:

```
data List a = Nil | Cons a (List a)
```

```
lista :: List Int
```

```
lista = Cons 1 (Cons 2 (Cons 1 Nil))
```

Listas en Java

```
package dataStructures.list;

public interface List<T> {
    boolean isEmpty();
    int size();
    T get(int i);
    void set(int i, T elem);
    void insert(int i, T elem);
    void remove(int i);
}
```

Excepciones para List

Las operaciones inválidas lanzarán esta excepción:

```
package dataStructures.list;

public class ListException implements RuntimeException {

    public ListException() {
        super();
    }

    public ListException(String msg) {
        super(msg);
    }
}
```

Similar a RuntimeException,
pero varía el nombre de la
excepción

Implementaciones del TAD List en Java

Estudiaremos dos implementaciones:

1. Basada en arrays: ArrayList
2. Basada en nodos enlazados: LinkedList

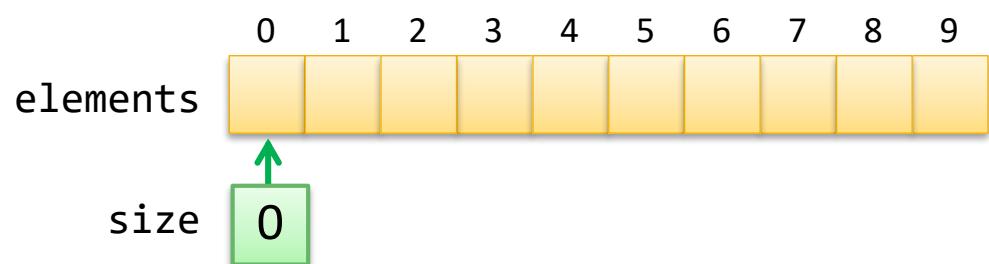
Implementación de List vía arrays (I)

- Puede ser implementada manteniendo sus elementos en un array

```
package dataStructures.list;
```

```
public class ArrayList<T> implements List<T> {  
    protected T[] elements;  
    protected int size;  
  
    private final int INITIAL_CAPACITY = 10;  
  
    public ArrayList() {  
        elements = (T[]) new Object[INITIAL_CAPACITY];  
        size = 0;  
    }  
  
    public int size() {  
        return size;  
    }
```

```
    public boolean isEmpty() {  
        return size == 0;  
    }
```



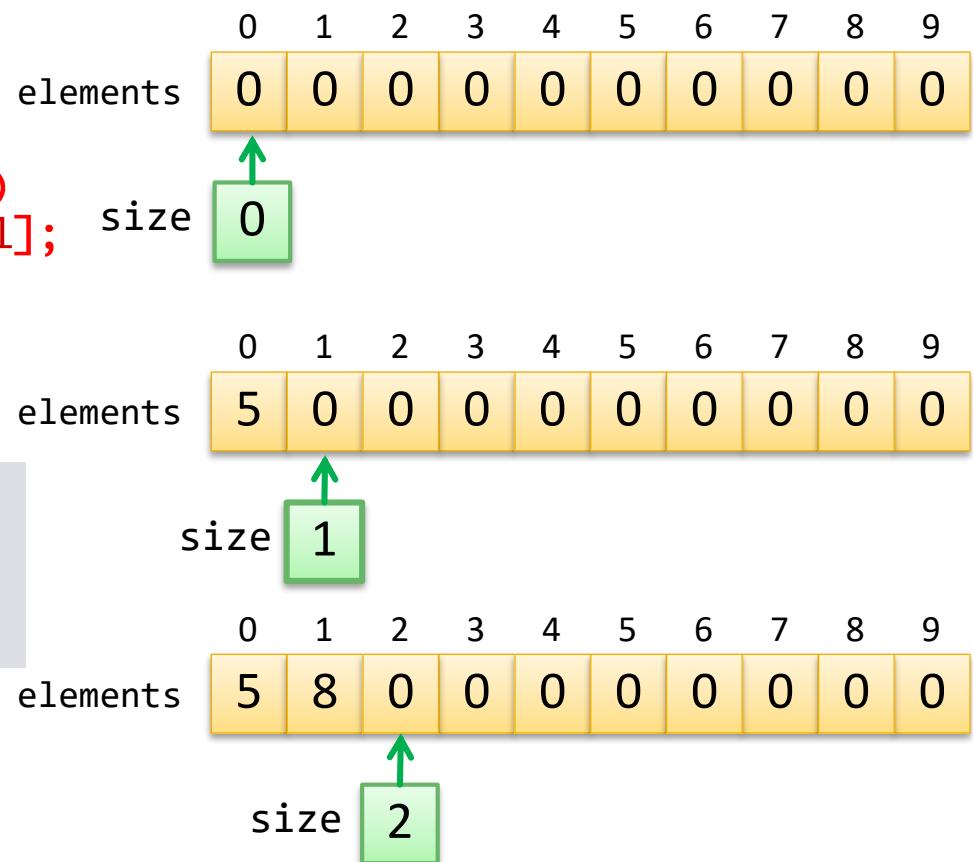
dataStructures.list.ArrayList vía arrays (II)

```
private void validateIndex(int i) {  
    if (i < 0 || i >= size())  
        throw new ListException("Invalid position " + i);  
}
```

Test $0 \leq i < \text{size}$

```
public void insert(int i, T elem) {  
    ensureCapacity();  
    if (i != size()) {  
        validateIndex(i);  
        for (int pos=size; pos>i; pos--)  
            elements[pos] = elements[pos-1];  
    }  
    elements[i] = elem;  
    size++;  
}
```

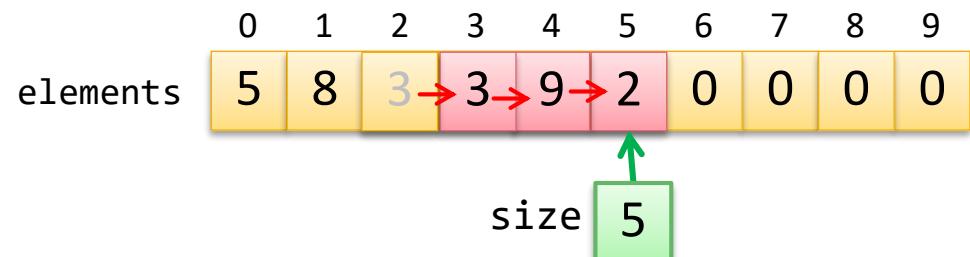
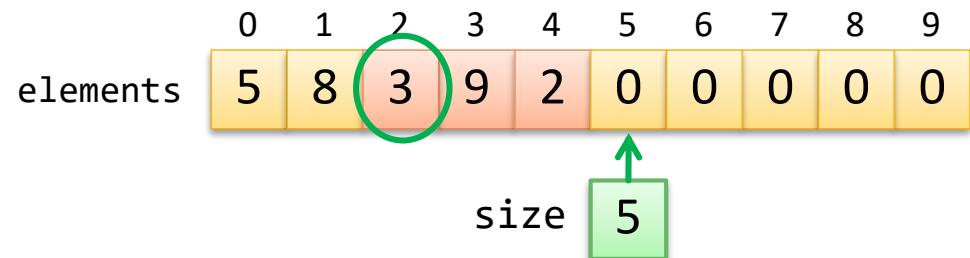
```
List<Integer> xs = new ArrayList<>();  
  
xs.insert(0,5);  
xs.insert(1,8);
```



dataStructures.list.ArrayList vía arrays (III)

```
public void insert(int i, T elem) {  
    ensureCapacity();  
    if (i != size()) {  
        validateIndex(i);  
        for (int pos=size; pos>i; pos--)  
            elements[pos] = elements[pos-1];  
    }  
    elements[i] = elem;  
    size++;  
}
```

Se hace sitio: Mueve una posición a la derecha todos los elementos tras el punto de inserción

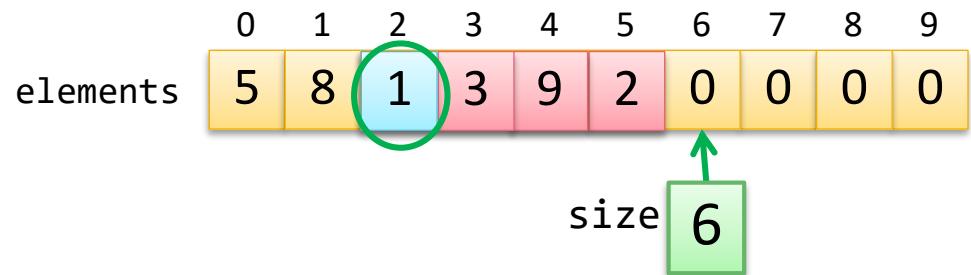


```
List<Integer> xs =  
    new ArrayList<>();  
  
xs.insert(0,5);  
xs.insert(1,8);  
xs.insert(2,3);  
xs.insert(3,9);  
xs.insert(4,2);  
xs.insert(2,1);
```

dataStructures.list.ArrayList vía arrays (IV)

```
public void insert(int i, T elem) {  
    ensureCapacity();  
    if (i != size()) {  
        validateIndex(i);  
        for (int pos=size; pos>i; pos--)  
            elements[pos] = elements[pos-1];  
    }  
    elements[i] = elem;  
    size++;  
}
```

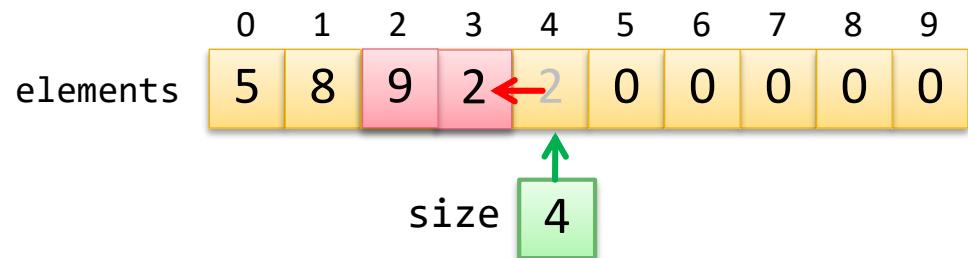
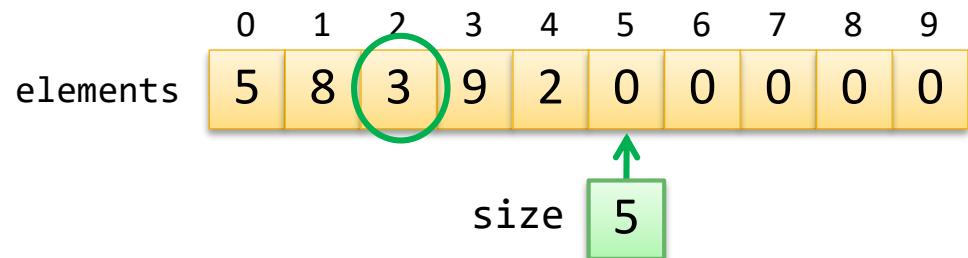
```
List<Integer> xs =  
    new ArrayList<>();  
  
xs.insert(0,5);  
xs.insert(1,8);  
xs.insert(2,3);  
xs.insert(3,9);  
xs.insert(4,2);  
xs.insert(2,1);
```



dataStructures.list.ArrayList vía arrays (V)

```
public void remove(int i) {  
    validateIndex(i);  
    for (int pos = i; pos < size - 1; pos++)  
        elements[pos] = elements[pos + 1];  
    size--;  
}
```

Mueve una posición a la izquierda todos los elementos tras el punto de eliminación



```
List<Integer> xs =  
    new ArrayList<>();  
  
xs.insert(0,5);  
xs.insert(1,8);  
xs.insert(2,3);  
xs.insert(3,9);  
xs.insert(4,2);  
xs.remove(2);
```

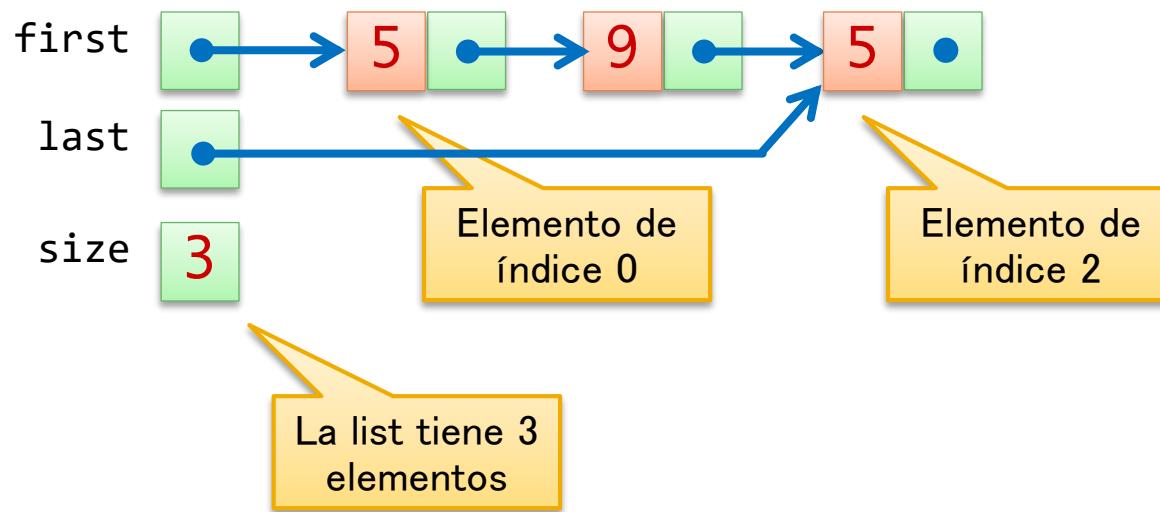
dataStructures.list.ArrayList vía arrays (y VI)

Eficiencia de la implementación:

Operación	Orden
get	O(1)
set	O(1)
insert	O(n)
remove	O(n)
isEmpty	O(1)
size	O(1)
ArrayList	O(1)

Impl. de List con nodos enlazados (I)

■ Una List con 3 elementos:



```
List<Integer> xs = new LinkedList<>();
```

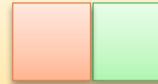
```
xs.insert(0,5);
xs.insert(1,9);
xs.insert(2,5);
```

Impl. dataStructures.list.linkedList vía nodos enlazados (II)

```
package dataStructures.list;  
public class LinkedList<T> implements List<T> {
```

```
private static class Node<E> {  
    private E elem;  
    private Node<E> next;  
    public Node(E x, Node<E> node) {  
        elem = x;  
        next = node;  
    }  
}
```

Un nodo:



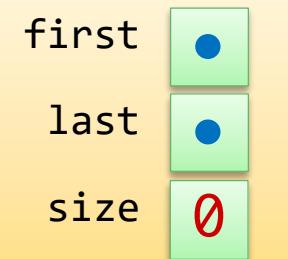
```
private Node<T> first, last;  
private int size;  
public LinkedList() {  
    first = null;  
    last = null;  
    size = 0;  
}
```

Enlaces al primer y último nodo de la lista

Número de elementos de la lista

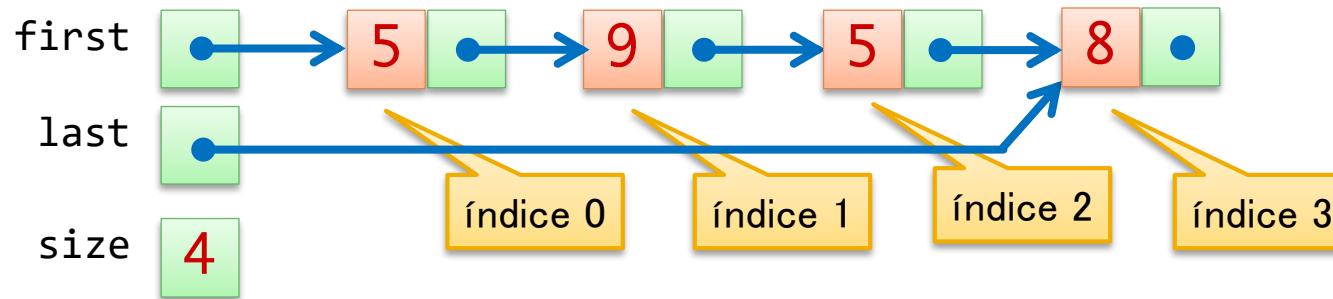
```
public int size() {  
    return size;  
}  
  
public boolean isEmpty() {  
    return size == 0;  
}
```

Una lista está inicialmente vacía



Impl. dataStructures.list.linkedList vía nodos enlazados (III)

- Localizando un elemento por su índice:

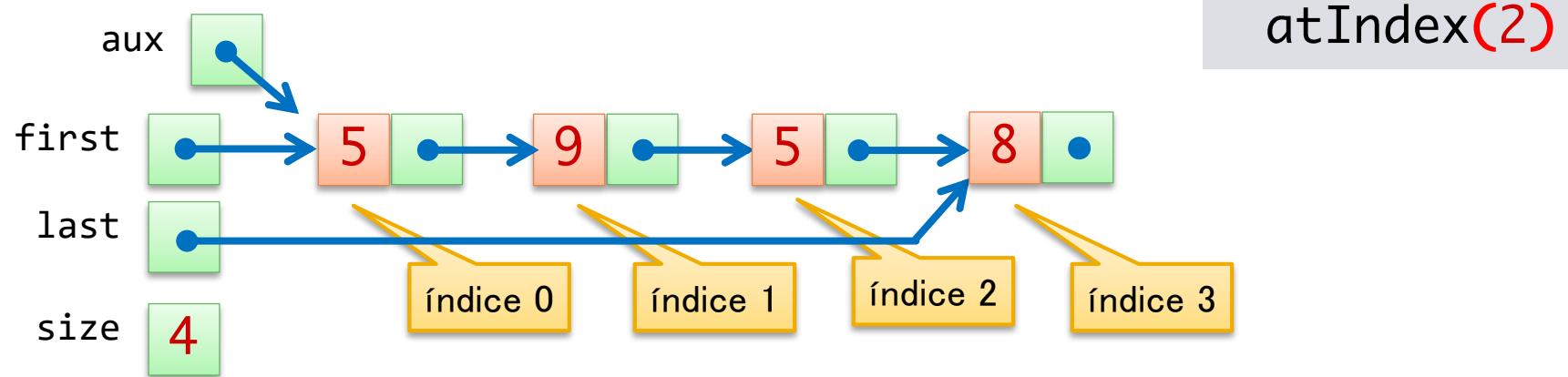


```
private Node<T> atIndex(int i) {  
    Node<T> aux = first;  
    for (int pos = 0; pos < i; pos++)  
        aux = aux.next;  
    return aux;  
}
```

Devuelve una referencia
al nodo i

Impl. dataStructures.list.linkedList vía nodos enlazados (IV)

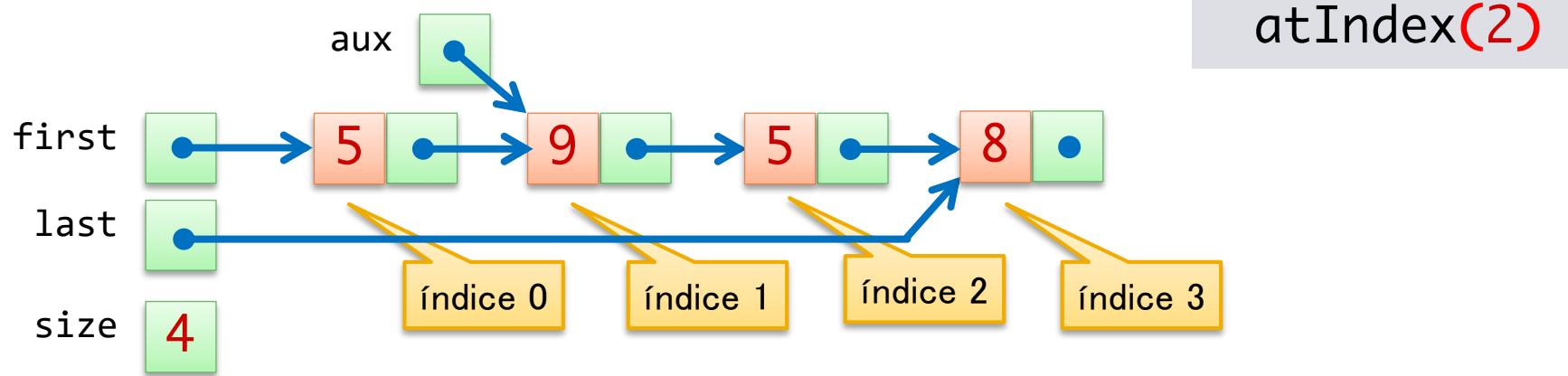
- Localizando un elemento por su índice:



```
private Node<T> atIndex(int i) {  
    Node<T> aux = first;  
    for (int pos = 0; pos < i; pos++)  
        aux = aux.next;  
    return aux;  
}
```

Impl. dataStructures.list.linkedList vía nodos enlazados (V)

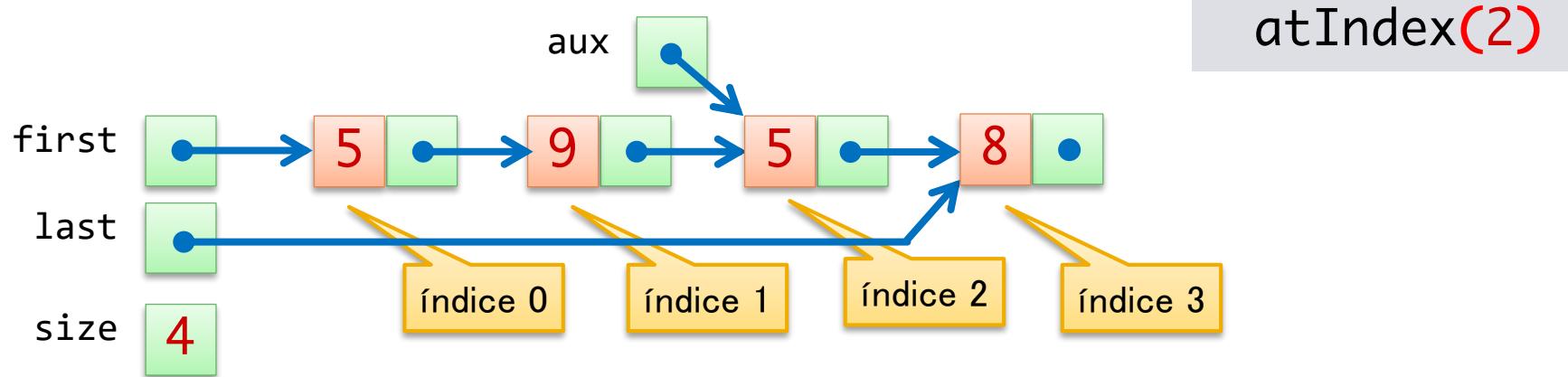
- Localizando un elemento por su índice:



```
private Node<T> atIndex(int i) {  
    Node<T> aux = first;  
    for (int pos = 0; pos < i; pos++)  
        aux = aux.next;    pos = 0  
    return aux;  
}
```

Impl. dataStructures.list.linkedList vía nodos enlazados (VI)

- Localizando un elemento por su índice:



```
private Node<T> atIndex(int i) {  
    Node<T> aux = first;  
    for (int pos = 0; pos < i; pos++)  
        aux = aux.next;    pos = 1  
    return aux;  
}
```

Impl. dataStructures.list.linkedList vía nodos enlazados (VII)

Devuelve el elemento de índice i

```
public T get(int i) {  
    validateIndex(i);  
    return atIndex(i).elem;  
}
```

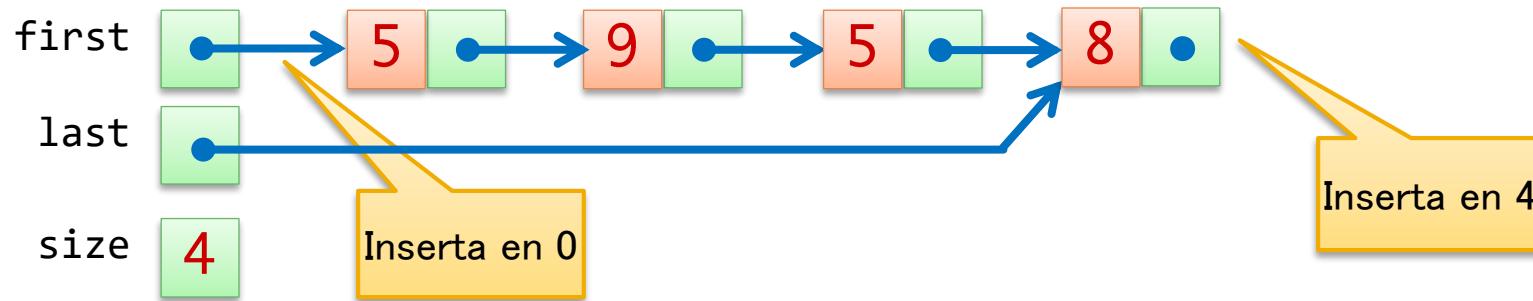
Modifica el elemento de índice i

```
public void set(int i, T elem) {  
    validateIndex(i);  
    atIndex(i).elem = elem;  
}
```

referencia al Nodo situado en la posición i

Impl. dataStructures.list.linkedList vía nodos enlazados (VIII)

- `void insert(int i, T elem);`

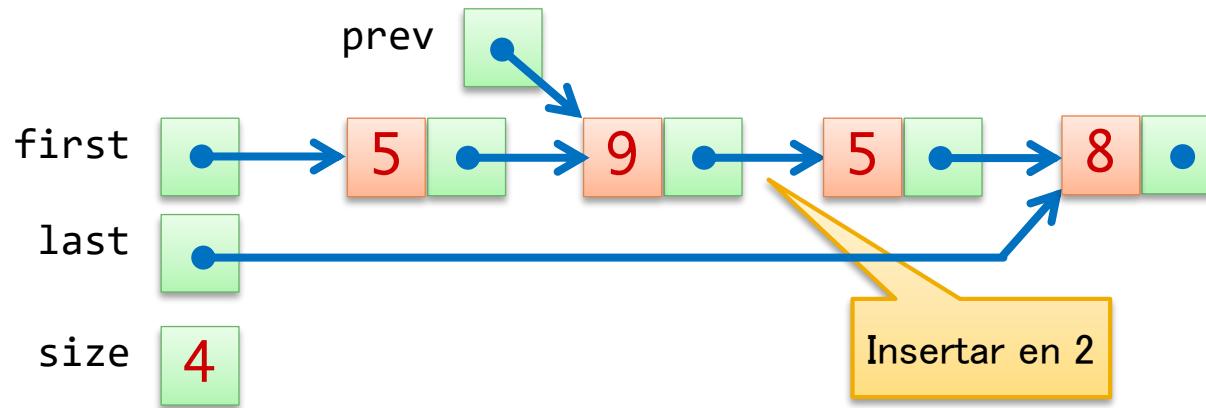


- Insertar en la posición `0` es similar al push de Stack
- Insertar en la posición `size` es similar al encolar en Queue
- En otro caso:
 - Localizar la posición del nodo anterior (de índice `i-1`) (`prev`)
 - Crear un nuevo nodo y enlazarlo con `prev.next`
 - Hacer que el enlace `prev.next` enlace al nuevo nodo
- Incrementar `size`

Impl. dataStructures.list.linkedList vía nodos enlazados (IX)

- `void insert(int i, T elem);`

`insert(2,0)`

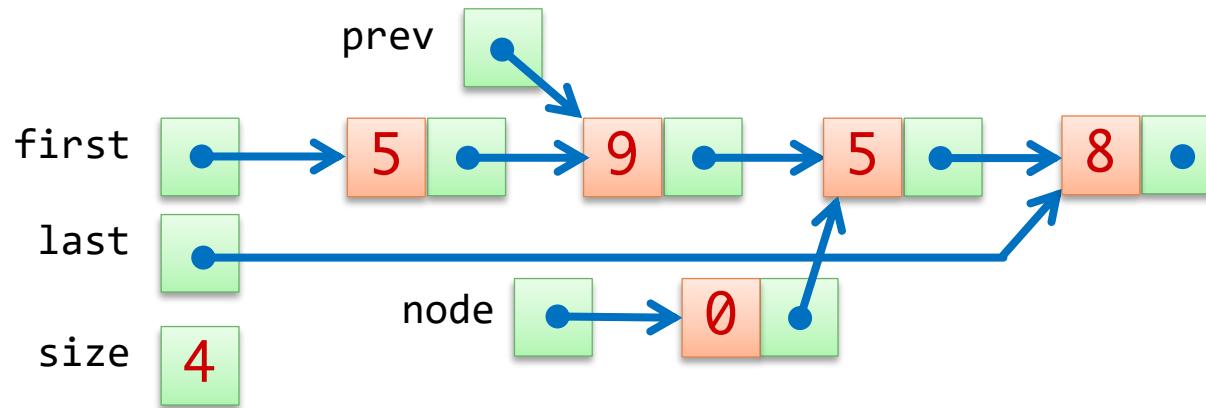


- Insertar en la posición 0 es similar al push de Stack
- Insertar en la posición size es similar al encolar en Queue
- En otro caso:
 - Localizar la posición del nodo anterior (de índice $i-1$) (prev)
 - Crear un nuevo nodo y enlazarlo con $\text{prev}.\text{next}$
 - Hacer que el enlace $\text{prev}.\text{next}$ enlace al nuevo nodo
- Incrementar size

Impl. `dataStructures.list.linkedList` vía nodos enlazados (X)

- `void insert(int i, T elem);`

`insert(2,0)`

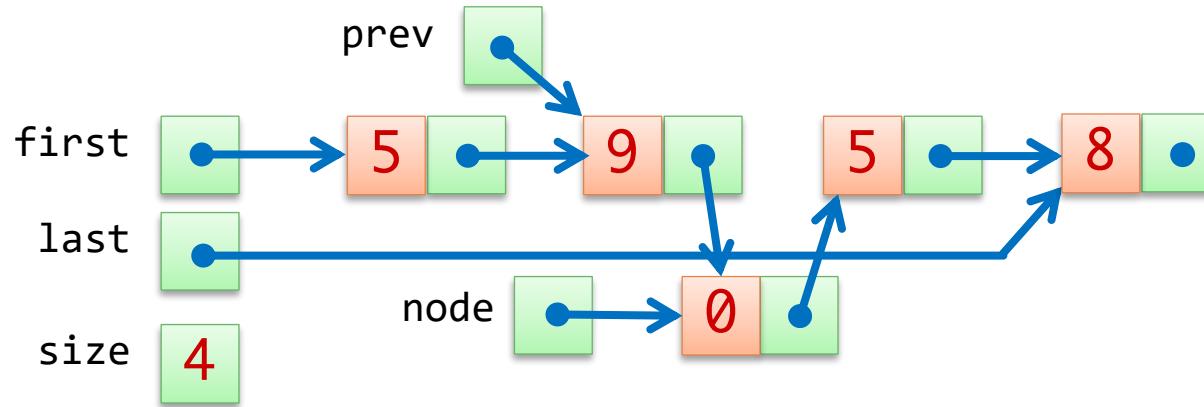


- Insertar en la posición `0` es similar al `push` de `Stack`
- Insertar en la posición `size` es similar al `encolar` en `Queue`
- En otro caso:
 - Localizar la posición del nodo anterior (de índice `i-1`) (`prev`)
 - Crear un nuevo nodo y enlazarlo con `prev.next`
 - Hacer que el enlace `prev.next` enlace al nuevo nodo
- Incrementar `size`

Impl. `dataStructures.list.linkedList` vía nodos enlazados (XI)

- `void insert(int i, T elem);`

`insert(2,0)`

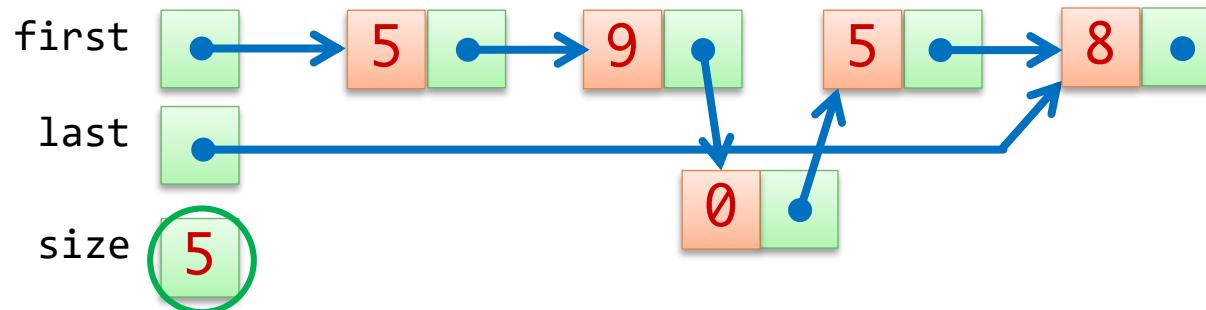


- Insertar en la posición `0` es similar al `push` de `Stack`
- Insertar en la posición `size` es similar al `encolar` en `Queue`
- En otro caso:
 - Localizar la posición del nodo anterior (de índice `i-1`) (`prev`)
 - Crear un nuevo nodo y enlazarlo con `prev.next`
 - Hacer que el enlace `prev.next` enlace al nuevo nodo
- Incrementar `size`

Impl. dataStructures.list.linkedList vía nodos enlazados (XII)

- `void insert(int i, T elem);`

`insert(2,0)`



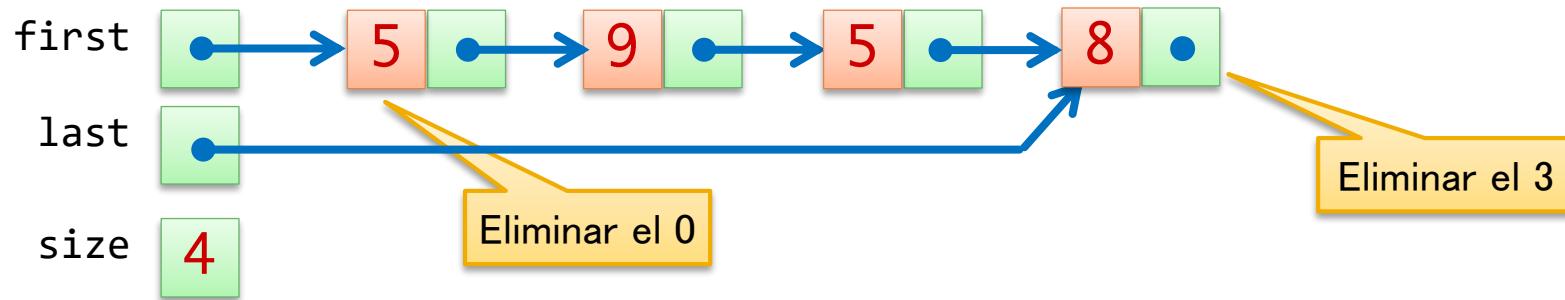
- Insertar en la posición `0` es similar al `push` de `Stack`
- Insertar en la posición `size` es similar al `encolar` en `Queue`
- En otro caso:
 - Localizar la posición del nodo anterior (de índice `i-1`) (`prev`)
 - Crear un nuevo nodo y enlazarlo con `prev.next`
 - Hacer que el enlace `prev.next` enlace al nuevo nodo
- **Incrementar size**

Impl. `dataStructures.list.linkedList` vía nodos enlazados (XIII)

```
public void insert(int i, T elem) {
    if (i == size) { // insertion after last element
        Node<T> node = new Node<>(elem, null);
        if (size == 0) // was list empty?
            first = node;
        else
            last.next = node;
        last = node;
    } else if (i == 0) { // insertion at head, and list was not empty
        first = new Node<>(elem, first);
    } else { // internal insertion
        validateIndex(i);
        Node<T> prev = atIndex(i-1);
        prev.next = new Node<>(elem, prev.next);
    }
    size++;
}
```

Impl. `dataStructures.list.linkedList` vía nodos enlazados (XIV)

- `void remove(int i);`

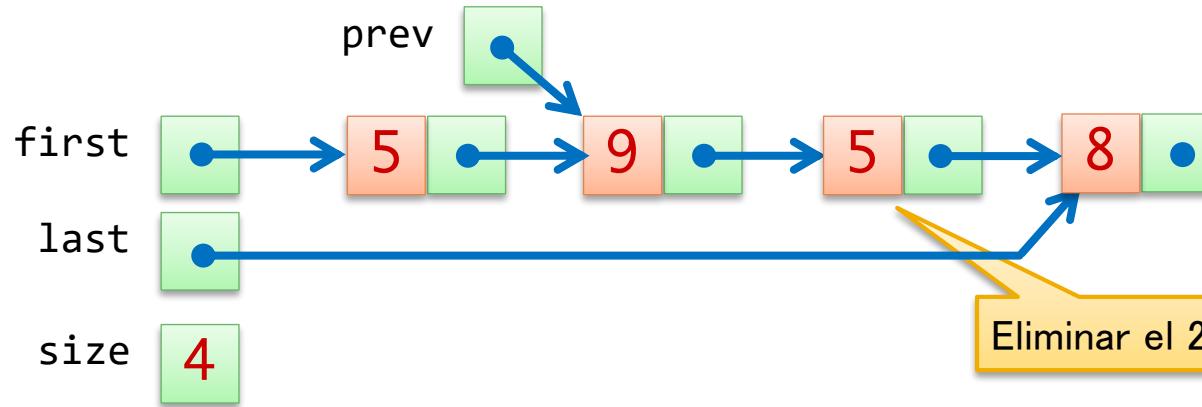


- Eliminar la posición **0** es similar a pop de Stack
- En otro caso:
 - Localizar el nodo previo (de índice **i - 1**) (`prev`)
 - Hacer que el enlace `prev.next` enlace a `prev.next.next`
- Decrementar `size`
- Si el nodo eliminado es el último, `last` debe ser actualizado

Impl. `dataStructures.list.linkedList` vía nodos enlazados (XVI)

- `void remove(int i);`

remove(2)

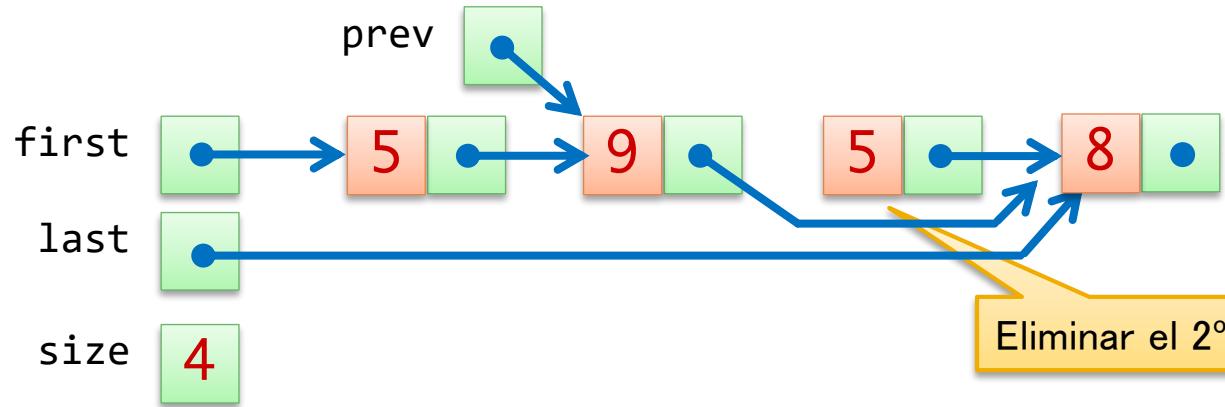


- Eliminar la posición 0 es similar a pop de Stack
- En otro caso:
 - Localizar el nodo previo (de índice $i-1$) (prev)
 - Hacer que el enlace `prev.next` enlace a `prev.next.next`
- Decrementar size
- Si el nodo eliminado es el último, `last` debe ser actualizado

Impl. dataStructures.list.linkedList vía nodos enlazados (XVII)

- `void remove(int i);`

remove(2)

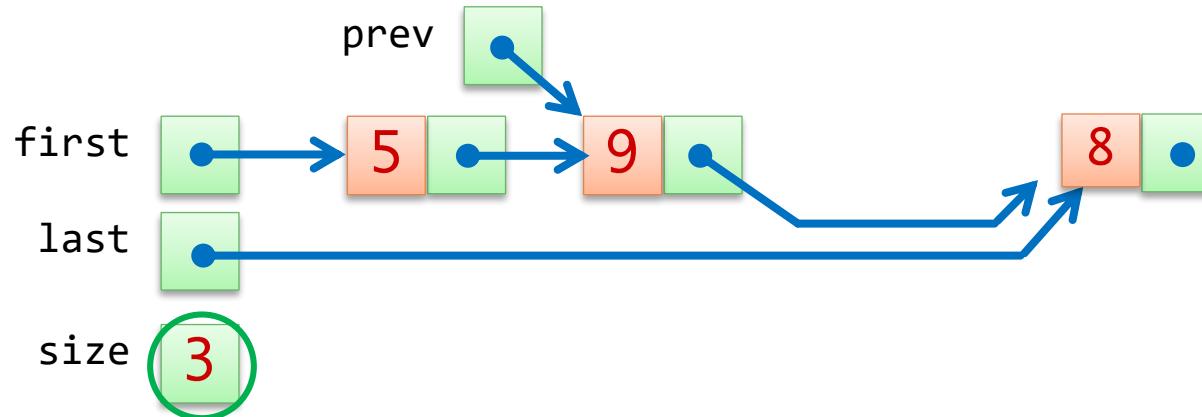


- Eliminar la posición 0 es similar a pop de Stack
- En otro caso:
 - Localizar el nodo previo (de índice $i - 1$) (prev)
 - Hacer que el enlace `prev.next` enlace a `prev.next.next`
- Decrementar size
- Si el nodo eliminado es el último, `last` debe ser actualizado

Impl. dataStructures.list.linkedList vía nodos enlazados (XVIII)

- `void remove(int i);`

remove(2)



- Eliminar la posición 0 es similar a pop de Stack
- En otro caso:
 - Localizar el nodo previo (de índice $i-1$) (prev)
 - Hacer que el enlace `prev.next` enlace a `prev.next.next`
- **Decrementar size**
- Si el nodo eliminado es el último, `last` debe ser actualizado

Impl. `dataStructures.list.linkedList` vía nodos enlazados (XIX)

```
public void remove(int i) {  
    validateIndex(i);  
    if (i == 0) { // removing first element  
        first = first.next;  
        if (first == null) // was also the last element?  
            last = null;  
    } else {  
        Node<T> prev = atIndex(i-1);  
        prev.next = prev.next.next;  
        if (i == size-1) // was last element?  
            last = prev;  
    }  
    size--;  
}
```

Impl. `dataStructures.list.linkedList` vía nodos enlazados (y XVIII)

Eficiencia de la implementación:

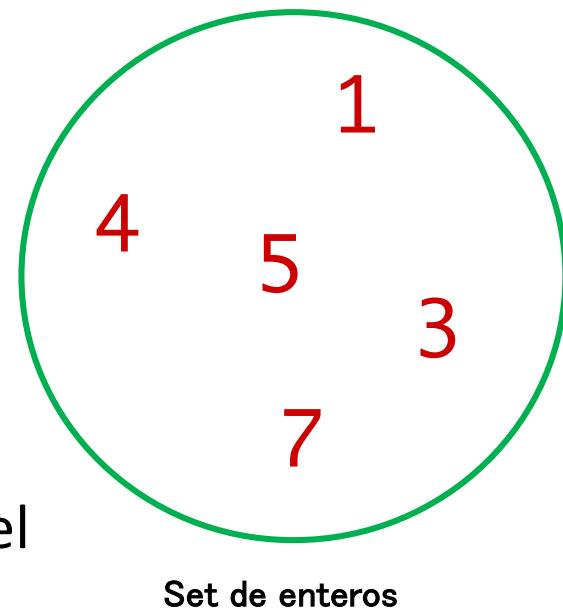
Operación	Orden
get	$O(n)$
set	$O(n)$
insert	$O(n)$
remove	$O(n)$
isEmpty	$O(1)$
size	$O(1)$
LinkedList	$O(1)$

Linked List vs List con Arrays

- Test experimental
- Medimos el tiempo de ejecución al realizar 10000 operaciones aleatorias (insert, remove o get) en una lista inicialmente vacía.
- Usando un procesador Intel i7 860:
 - Las listas con arrays fueron más del doble de rápidas 😊

Tipo Abstracto de Datos Set

- Un **Set** (conjunto) es un TAD que organiza sus elementos sin que éstos tengan un índice asociado y sin elementos repetidos
- Se corresponden con **conjuntos finitos** en matemáticas
- Operaciones básicas:
 - **isElem**: comprueba si un elemento está en el conjunto
 - **insert**: introduce un nuevo elemento en el conjunto. No hace nada si ya está
 - **delete**: elimina un elemento dado del conjunto. No hace nada si no está
 - **isEmpty**: comprueba si el conjunto es vacío



Signatura del TAD Set

-- Interfaz en Haskell

empty :: Set a

isEmpty :: Set a -> Bool

insert :: Eq a => a -> Set a -> Set a

delete :: Eq a => a -> Set a -> Set a

isElem :: Eq a => a -> Set a -> Bool

Puede ser (Ord a) si la implementación mantiene los elementos ordenados

Un ejemplo de uso de Set

```
s1 :: Set Int
s1 = insert 1 (insert 2 (insert 1 empty))
```

```
Main> s1
SortedLinearSet(1,2)

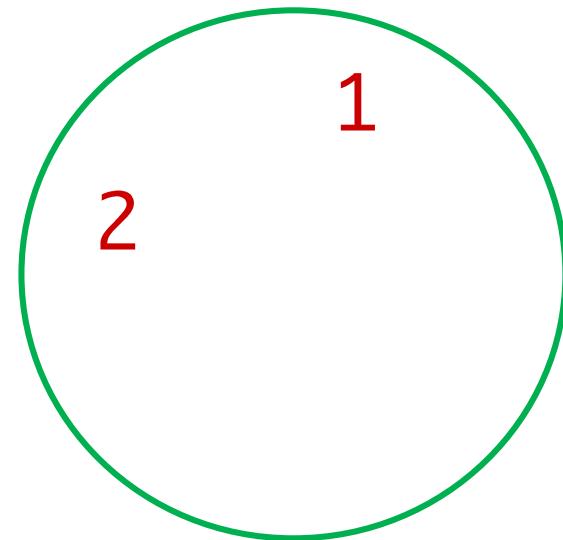
Main> isElem 3 s1
False

Main> isElem 7 s1
False

Main> delete 1 s1
SortedLinearSet(2)

Main> delete 1 (delete 1 s1)
SortedLinearSet(2)

Main> insert 10 s1
SortedLinearSet(1,2,10)
```



Especificación Algebraica de Set usando QuickCheck

- Cualquier implementación de Set debe verificar los siguientes axiomas:

```
module DataStructures.Set.SetAxioms
  (ax1,ax2,ax3,ax4,ax5,ax6,ax7,ax8,ax9,ax10, setAxioms) where

ax1      = isEmpty empty
ax2 x s = not (isEmpty (insert x s))

ax3 x    = not (isElem x empty)
ax4 x y s = isElem x (insert y s) == (x==y) || isElem x s

ax5 x    = delete x empty == empty
ax6 x y s = x==y ==>
            delete x (insert y s) == delete x s
ax7 x y s = x/=y ==>
            delete x (insert y s) == insert y (delete x s)
```

Implementaciones de Set en Haskell

- Algunas implementaciones posibles:
 - Lineal:
 - Mantiene los elementos del conjunto **sin repeticiones**
(véase `DataStructures.Set.LinearSet`)
 - Lineal y ordenada: `DataStructures.Set.SortedLinearSet`
 - Mantiene los elementos del conjunto **sin repeticiones** y **ordenados**
 - El orden puede mejorar la eficiencia promedio de las operaciones 😊, aunque no la del peor caso 😞
 - Por delegación sobre listas : `ListSet`
(véase `DataStructures.Set.ListSet`)
- En temas posteriores se verán otras implementaciones mucho más eficientes

Impl. DataStructures.Set.SortedLinearSet (I)

```
module DataStructures.Set.SortedLinearSet
  ( Set
  , empty
  , isEmpty
  , size
  , insert
  , isElem
  , delete
  , fold
  , union
  , intersection
  , difference
  ) where
```

La implementación del tipo
Set queda oculta

Estas son las únicas operaciones
disponibles para los clientes

```
import Data.List(intercalate)
```

```
import Test.QuickCheck
```

```
data Set a = Empty | Node a (Set a)
```

```
empty :: Set a
empty = Empty
```

Impl. DataStructures.Set.SortedLinearSet (II)

...

insert :: (Ord a) => a -> Set a -> Set a
insert x Empty = Node x Empty
insert x (Node y s)
| x < y = Node x (Node y s)
| x == y = Node y s -- elimina repeticiones
| otherwise = Node y (insert x s)

...

Los elementos se almacenan en orden y sin repeticiones

La siguiente secuencia de operaciones:

insert 7 (insert 3 (insert 1 (insert 3 empty)))

Da lugar a la siguiente representación:

Node 1 (Node 3 (Node 7 Empty))

Impl. DataStructures.Set.SortedLinearSet (y III)

Eficiencia de la implementación:

Operación	Orden
isElem	$O(n)$
insert	$O(n)$
delete	$O(n)$
isEmpty	$O(1)$
empty	$O(1)$

Interfaz Set en Java

Aunque Java ya dispone de una interfaz Set en `java.util`, definimos nuestra propia interfaz:

```
package dataStructures.set;

public interface Set<T> extends Iterable<T> {

    boolean isElem(T el);

    void insert(T el);

    void delete(T el);

    boolean isEmpty();

    int size();
}
```



Cualquier implementación de Set tiene que proporcionar un método iterator

La operación `empty` se implementa en el constructor de la clase en Java

Implementaciones del TAD Set en Java

Algunas implementaciones posibles:

- Basada en nodos enlazados **sin repeticiones**:
(LinkedSet)
- Basada en nodos enlazados **sin repeticiones** y con los elementos **en orden**:
(véase SortedLinkedSet)
- Por delegación sobre listas de Java (`java.util.LinkedList`):
(LinkedListSet)
- Usando un array **sin repeticiones**:
(ArraySet)
- Usando un array **sin repeticiones** y con los elementos **en orden**:
(SortedArrayList)

Implementación de Set vía nodos enlazados ordenados (I)

- Un Set mantiene información
 - del nodo que está a la cabeza
 - (mediante la variable referencia first)
- Cada nodo se enlaza con el siguiente
- No hay **repeticiones**
- Los elementos en los nodos están **ordenados**



```
Set<Integer> s = new SortedLinkedList<>();  
  
s.insert(8);  
s.insert(5);  
s.insert(6);  
s.insert(8);  
s.insert(9);
```

Impl. `dataStructures.set.SortedLinkedSet` vía nodos enlazados ordenados (II)

```
package dataStructures.set;

public class SortedLinkedList<T extends Comparable<? super T>> implements Set<T> {
    static private class Node<E> {
        E elem;
        Node<E> next;
        Node(E x, Node<E> node) {
            elem = x;
            next = node;
        }
    }

    private Node<T> first; // we keep linked list sorted by "elem"
    private int size;

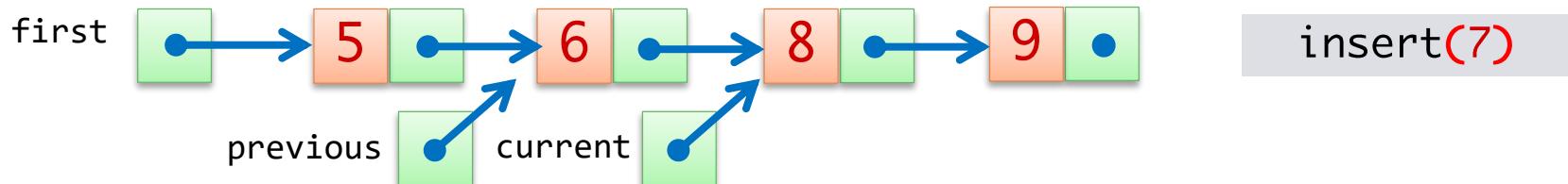
    public boolean isEmpty() {
        return size == 0;
    }

    public int size() {
        return size;
    }

    ...
}
```

Los elementos del Set deben definir una relación de orden (compareTo)

Impl. `dataStructures.set.SortedLinkedList` vía nodos enlazados ordenados (III)



```
public void insert(T item) {
    Node<T> previous = null;
    Node<T> current = first;

    while (current != null && current.elem.compareTo(item) < 0) {
        previous = current;
        current = current.next;
    }

    boolean found = (current != null) && current.elem.equals(item);
    if (!found) {
        if (previous == null) // Insert in first position
            first = new Node<T>(item, first);
        else // Insert after previous
            previous.next = new Node<T>(item, current);
        size++;
    }
}
```

El orden de las condiciones
en `&&` es importante:
evaluación en cortocircuito

Impl. `dataStructures.set.SortedLinkedList` vía nodos enlazados ordenados (y IV)

Eficiencia de la implementación:

Operación	Orden
<code>isElem</code>	$O(n)$
<code>insert</code>	$O(n)$
<code>delete</code>	$O(n)$
<code>isEmpty</code>	$O(1)$
<code>SortedLinkedList</code>	$O(1)$

Iteradores vs Plegados

- Un **iterador** es un patrón de diseño que abstracta el proceso de recorrer los elementos de una colección.
 - Los elementos de la colección pueden:
 - Formar parte de una estructura de datos, o
 - Ser computados por el iterador conforme se necesiten.
 - Ejemplos
 - Un iterador que recorra todos los elementos de una lista
 - Un iterador que recorra los números del intervalo [5..9]

Iteradores vs Plegados (II)

- Un iterador es útil para ciertos tipos abstractos de datos:
 - Set
 - List
 - Tree
 - etc.
- Haskell
 - Es necesario definir una función de **plegado** (`fold`) para la estructura (similar a la función `foldr` de listas)
 - La **evaluación perezosa** permite acceder a los elementos **bajo demanda**.
- Java. Se deben crear dos objetos (pertenecientes a dos clases diferentes)
 - Un objeto que implemente la interfaz `Iterable<T>` que creará un **iterador**.
 - Este iterador debe implementar la interfaz `Iterator<T>`, proporcionando los métodos `next` y `hasNext`, que permiten acceder secuencialmente a los elementos.

Un Plegado para DataStructures.Set.SortedLinearSet en Haskell

```
module DataStructures.Set.SortedLinearSet
( Set
, empty
, ...
, fold
) where
```

Este plegado permite a un cliente iterar sobre todos los elementos del conjunto

```
data Set a = Empty | Node a (Set a)

fold :: (a -> b -> b) -> b -> Set a -> b
fold f z s = fun s
where
  fun Empty      = z
  fun (Node x s) = x `f` (fun s)
```

Un plegado para

DataStructures.Set.SortedLinearSet en Haskell (II)

```
fold :: (a -> b -> b) -> b -> Set a -> b  
fold f z s = fun s  
where  
  fun Empty      = z  
  fun (Node x s) = x `f` (fun s)
```

Sea la representación de un conjunto S la siguiente:

Node 1 (Node 3 (Node 7 Empty))

add x y = x + y

fold add 0 s => 1 `add` (3 `add` (7 `add` 0)) => ... => 11

```
*Main> fold (+) 0 s  
11  
*Main> fold (*) 1 s  
21  
*Main> fold (:) [] s  
[1,3,7]
```

Iterar y sumar elementos

Iterar y multiplicar elementos

Iterar y almacenar en una lista los elementos

Iteradores en Java

- Un iterador que permite recorrer los elementos de una colección de objetos de tipo T es un objeto que implementa la interfaz :

```
public interface Iterator<T> {  
    boolean hasNext();  
    T next();  
    default void remove() {  
        throw new UnsupportedOperationException();  
    }  
}
```

Esta operación falla por defecto
y no la implementaremos

- Una clase que proporcione un iterador debe implementar la interfaz:

```
public interface Iterable<T> {  
    Iterator<T> iterator();  
}
```

- Los bucles `foreach` pueden usarse con objetos de cualquier clase que implementen la interfaz `Iterable<T>`

Implementación de Iterable

```
public class MyClass implements Iterable<Type> {
```

```
...
```

Este es el tipo concreto de los elementos devueltos al iterar

```
public Iterator<Type> iterator() {  
    return new MyClassIterator();  
}
```

Método que crea un iterador
(MyClassIterator implementa Iterator)

```
private class MyClassIterator implements Iterator<Type> {
```

```
...  
public boolean hasNext() {  
    ...  
}
```

Clase anidada que implementa el iterador para recorrer los elementos de MyClass

```
public Type next() {  
    ...  
}
```

La clase anidada puede acceder a los atributos de MyClass 😊

```
}
```

Implementación de un Iterador para dataStructures.set.SortedLinkedList

```
package dataStructures.set;

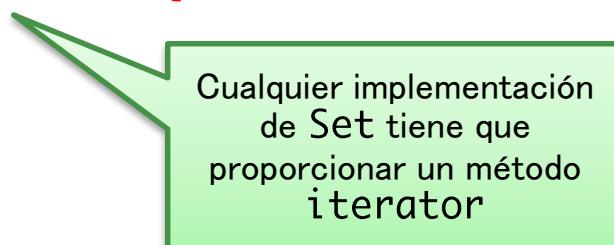
public interface Set<T> extends Iterable<T> {
    boolean isElem(T el);
    ...
}

public class SortedLinkedList<T extends Comparable<? super T>> implements Set<T> {

    static private class Node<E> {
        E elem;
        Node<E> next;

        Node(E x, Node<E> node) {
            elem = x;
            next = node;
        }
    }

    private Node<T> first;
    ...
}
```



Cualquier implementación de Set tiene que proporcionar un método iterator

Implementación de un Iterador para dataStructures.set.SortedLinkedList (y II)

```
// Este código va dentro de la clase SortedLinkedList<T>

public Iterator<T> iterator() {
    return new LinkedSetIterator();
}

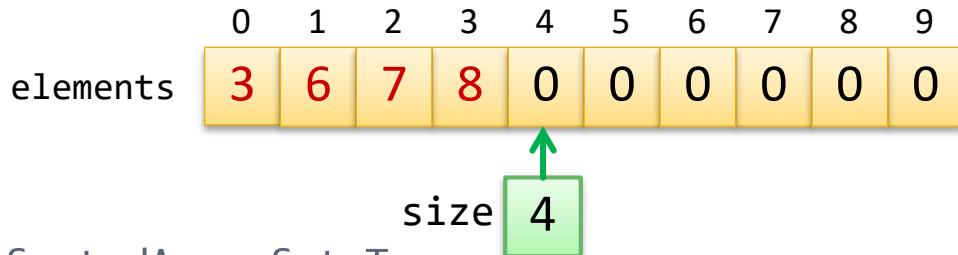
private class LinkedSetIterator implements Iterator<T> {
    Node<T> current; // Esta variable recuerda el nodo a visitar

    public LinkedSetIterator(){
        current = first; // Comenzamos visitando el primer nodo
    }

    public boolean hasNext() {
        return current != null; // Hemos visitado ya todos los nodos?
    }

    public T next() {
        if (!hasNext())
            throw new NoSuchElementException();
        T x = current.elem; // Visitamos el nodo que toca
        current = current.next; // Y avanzamos al siguiente
        return x;
    }
}
```

Implementación de un Iterador para dataStructures.set.SortedArraySet



```
// Este código va dentro de la clase SortedArraySet<T>
public Iterator<T> iterator() {
    return new ArraySetIterator();
}

private class ArraySetIterator implements Iterator<T> {
    int current; // Esta variable recuerda el elemento a visitar

    public ArraySetIterator(){
        current = 0; // Comenzamos visitando el primer elemento
    }

    public boolean hasNext(){
        return current != size; // Hemos visitado ya todos los elementos?
    }

    public T next(){
        if (!hasNext())
            throw new NoSuchElementException();
        T x = elements[current]; // Visitamos el elemento que toca
        current++;
        return x;
    }
}
```

Iterando sobre un Iterable

- Usando un iterador explícito (iterator, hasNext y next):

```
MyClass collection = new MyClass(...);  
Iterator<Type> it = collection.iterator();  
while (it.hasNext())  
    System.out.println(it.next());
```

- Usando un bucle foreach:

```
MyClass collection = new MyClass(...);  
for (Type x : collection)  
    System.out.println(x);
```

Iterando sobre un dataStructures.Set

- Usando un iterador explícito (iterator, hasNext y next):

```
Set<Integer> s = new SortedLinkedSet<>();
s.insert(7);
s.insert(3);
...
```

```
Iterator<Integer> it = s.iterator();
while (it.hasNext())
    System.out.println(it.next());
```

- Usando un bucle foreach:

```
Set<Integer> s = new SortedArraySet<>();
s.insert(7);
s.insert(3);
...
for (Integer x : s)
    System.out.println(x);
```

Material Complementario

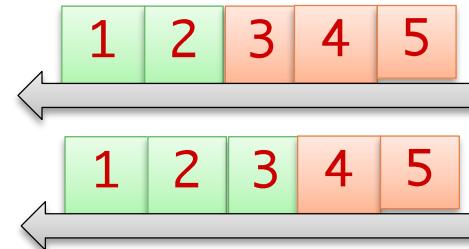
Para profundizar

Implementación de Queue vía dos listas (I)

data Queue $a = Q [a] [a]$

Los elementos de la cola $Q \ xs \ ys$ son los de la lista $xs++reverse \ ys$

- Ejemplos:
 - $Q [1,2] [5,4,3]$ corresponde a
 - $Q [1,2,3] [5,4]$ es la misma
- La misma cola puede representarse de diversas formas
- Pero para cualquier cola $Q \ xs \ ys$, si la lista xs es vacía también lo será ys :
 - $Q [] []$ es válida 😊
 - $Q [1,2] []$ es válida 😊
 - $Q [] [5,4,3]$ es inválida 😞. La implementación evitará esto



Invariante

Impl. DataStructures.Queue.TwoListsQueue vía dos listas (II)

```
module DataStructures.Queue.TwoListsQueue
```

```
( Queue
, empty
, isEmpty
, enqueue
, first
, dequeue
) where
```

```
data Queue a = Q [a] [a]
```

```
empty :: Queue a
```

```
empty = Q [] []
```

```
isEmpty :: Queue a -> Bool
```

```
isEmpty (Q [] _) = True
```

```
isEmpty _ = False
```

Por el invariante, la segunda lista es vacía

Impl. DataStructures.Queue.TwoListsQueue vía dos listas (III)

```
mkValid :: [a] -> [a] -> Queue a
mkValid [] ys = Q (reverse ys) []
mkValid xs ys = Q xs ys
```

privada al módulo

Construye una cola a partir de dos listas manteniendo el **invariante**

```
enqueue :: a -> Queue a -> Queue a
enqueue x (Q xs ys) = mkValid xs (x:ys)
```

Se encola un nuevo elemento manteniendo el invariante

```
first :: Queue a -> a
first (Q [] _) = error "first on empty queue"
first (Q (x:xs) ys) = x
```

El primero está en la cabeza de la primera lista

```
dequeue :: Queue a -> Queue a
dequeue (Q [] _) = error "dequeue on empty queue"
dequeue (Q (x:xs) ys) = mkValid xs ys
```

El primer elemento se elimina manteniendo e invariante

Impl. DataStructures.Queue.TwoListsQueue vía dos listas (IV). enqueue

```
mkValid :: [a] -> [a] -> Queue a
mkValid [] ys = Q (reverse ys) []
mkValid xs ys = Q xs ys
```

enqueue :: a -> Queue a -> Queue a
enqueue x (Q xs ys) = mkValid xs (x:ys)

- Si xs no es vacía se usa la segunda ecuación de mkValid , por tanto enqueue es $O(1)$
- Si xs es vacía, ys también lo es (**invariante**), por tanto $(x:ys)$ es una lista con un elemento, y enqueue es $O(1)$
- Finalmente, enqueue es siempre $O(1)$ ☺

Impl. DataStructures.Queue.TwoListsQueue vía dos listas (V). dequeue

```
mkValid :: [a] -> [a] -> Queue a
mkValid [] ys = Q (reverse ys) []
mkValid xs ys = Q xs ys
```

- La llamada a reverse es O(n)

```
dequeue :: Queue a -> Queue a
dequeue (Q [] _) = error "dequeue on empty queue"
dequeue (Q (x:xs) ys) = mkValid xs ys
```

- Si $(x:xs)$ tiene más de un elemento, xs no es vacía y se usa la segunda ecuación de mkValid : dequeue es O(1)
- Si $(x:xs)$ tiene un solo elemento, xs es vacía y se usa la primera ecuación de mkValid : dequeue es O(n) (siendo n la longitud de ys), pero la primera lista no volverá a ser vacía en las próximas $n-1$ llamadas a dequeue
- Por tanto dequeue es como mínimo O(1) y a lo sumo O(n), pero el coste amortizado es O(1) ☺

Impl. DataStructures.Queue.TwoListsQueue vía dos listas (y VI)

Eficiencia de la implementación:

Operación	Orden
enqueue	$O(1)$
dequeue	$O(1), O(n)$ *
first	$O(1)$
isEmpty	$O(1)$
empty	$O(1)$

* El **coste amortizado** es $O(1)$: invertimos una lista de n elementos después de encolar n elementos

Secuencias Aritméticas como Iterables

```
public class ArithmeticSeq implements Iterable<Integer> {  
    private int from, to, step;  
  
    public ArithmeticSeq(int n, int m) {  
        from = n;  
        to = m;  
        step = n < m ? 1 : -1;  
    }  
  
    public ArithmeticSeq(int n, int m, int s) {  
        from = n;  
        to = m;  
        step = s;  
    }  
  
    public Iterator<Integer> iterator() {  
        return new ArithmeticIter();  
    }  
}
```

new ArithmeticSeq(1,4) representa 1,2,3,4
new ArithmeticSeq(4,1) representa 4,3,2,1

new ArithmeticSeq(1,7,2) representa 1,3,5,7

Secuencias Aritméticas como Iterables (II)

```
public class ArithmeticSeq implements Iterable<Integer> {  
    ...  
    private class ArithmeticIter implements Iterator<Integer> {  
        int current; // holds value to return on invoking next method  
  
        public ArithmeticIter() {  
            current = from;  
        }  
  
        public boolean hasNext() {  
            return step > 0 ? current <= to : current >= to;  
        }  
  
        public Integer next()  
        if (!hasNext())  
            throw new NoSuchElementException();  
        else {  
            int x = current;  
            current += step;  
            return x;  
        }  
    }  
}
```

Una secuencia decreciente

Una secuencia creciente

Secuencias Aritméticas como Iterables (III)

```
public class ExplicitIterator {  
    public static void main(String[] args) {  
        Iterator<Integer> it = new ArithmeticSeq(5,9).iterator();  
        while (it.hasNext())  
            System.out.println(it.next());  
    }  
}
```

Salida:

```
5  
6  
7  
8  
9
```

```
public class ForEachLoop {  
    public static void main(String[] args) {  
        for (int i : new ArithmeticSeq(0,6,2))  
            System.out.println(i);  
    }  
}
```

Salida:

```
0  
2  
4  
6
```

Material a Quitar

Para profundizar

Tipo Abstracto de Datos (TAD)

Interfaz/Signatura y Axiomas (y IV)

Un ejemplo sencillo: los enteros

Interfaz:

```
cero    :: Entero
suc     :: Entero -> Entero
pre     :: Entero -> Entero
(+)    :: Entero -> Entero -> Entero
```

Axiomas:

(Ax1) suc (pre x) = x ,	pre (suc x) = x
(Ax2) cero + x = x	
(Ax3) suc x + y = suc (x + y),	pre x + y = pre (x+y)

- Hay que combinar las operaciones respetando la tipificación
- Los axiomas permiten “simplificar” expresiones a una forma “canónica”:
 $\text{pre}(\text{suc cero} + \text{suc cero}) \rightarrow (\text{por Ax3})$
 $\text{pre}(\text{suc}(\text{cero} + \text{suc cero})) \rightarrow (\text{por Ax1})$
 $\text{cero} + \text{suc cero} \rightarrow (\text{por Ax2})$
 suc cero
- ¡Es posible demostrar algunas propiedades (como la asociatividad de +) utilizando únicamente los axiomas!

Utilizamos la sintaxis de Haskell

-- el sucesor de un entero
-- el predecesor
-- la suma

Forma Canónica de un Stack

- Una pila está bien definida si:
 - o bien es **empty**,
 - o bien es **push x s**, con **s** bien definida,
 - o bien es **pop s**, con **s** bien definida, en la cual aparecen menos operaciones pop que push, y éstas en número finito.
- Utilizando los axiomas de Stack, es posible demostrar que cada pila bien definida se puede escribir de forma única en forma canónica

$\text{push } x_1 (\text{push } x_2 (\dots (\text{push } x_n \text{ empty})\dots))$

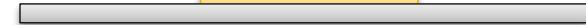
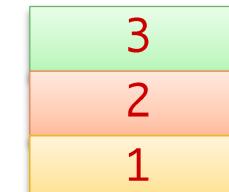
Impl. DataStructures.Stack.LinearStack (III)

Existen varias representaciones algebraicas lineales:

```
data Stack a = Empty | Node a (Stack a)
```

Node 3 (Node 2 (Node 1 Empty))

Nombramos las componentes



```
data Stack a = Empty | Node {item :: a, next :: Stack a}
```

pop s = next s

Otras representaciones basada en listas:

```
data Stack a = SonL [a]
```

pop (SonL (x:xs)) = SonL xs

Impl. DataStructures.Queue.LinearQueue (IV)

```
instance (Show a) => Show (Queue a) where  
    show q = "LinearQueue(" ++ queueToString q ++ ")"  
    where
```

Determina cómo Haskell mostrará la Queue

```
queueToString Empty      = ""  
queueToString (Node x q) = ' ' : show x ++ queueToString q
```

```
instance (Eq a) => Eq (Queue a) where  
    Empty == Empty = True  
    (Node x q) == (Node x' q') = x == x' && q == q'  
    _ == _ = False
```

Igualdad estructural para Queue

Se podría haber generado la igualdad estructural directamente

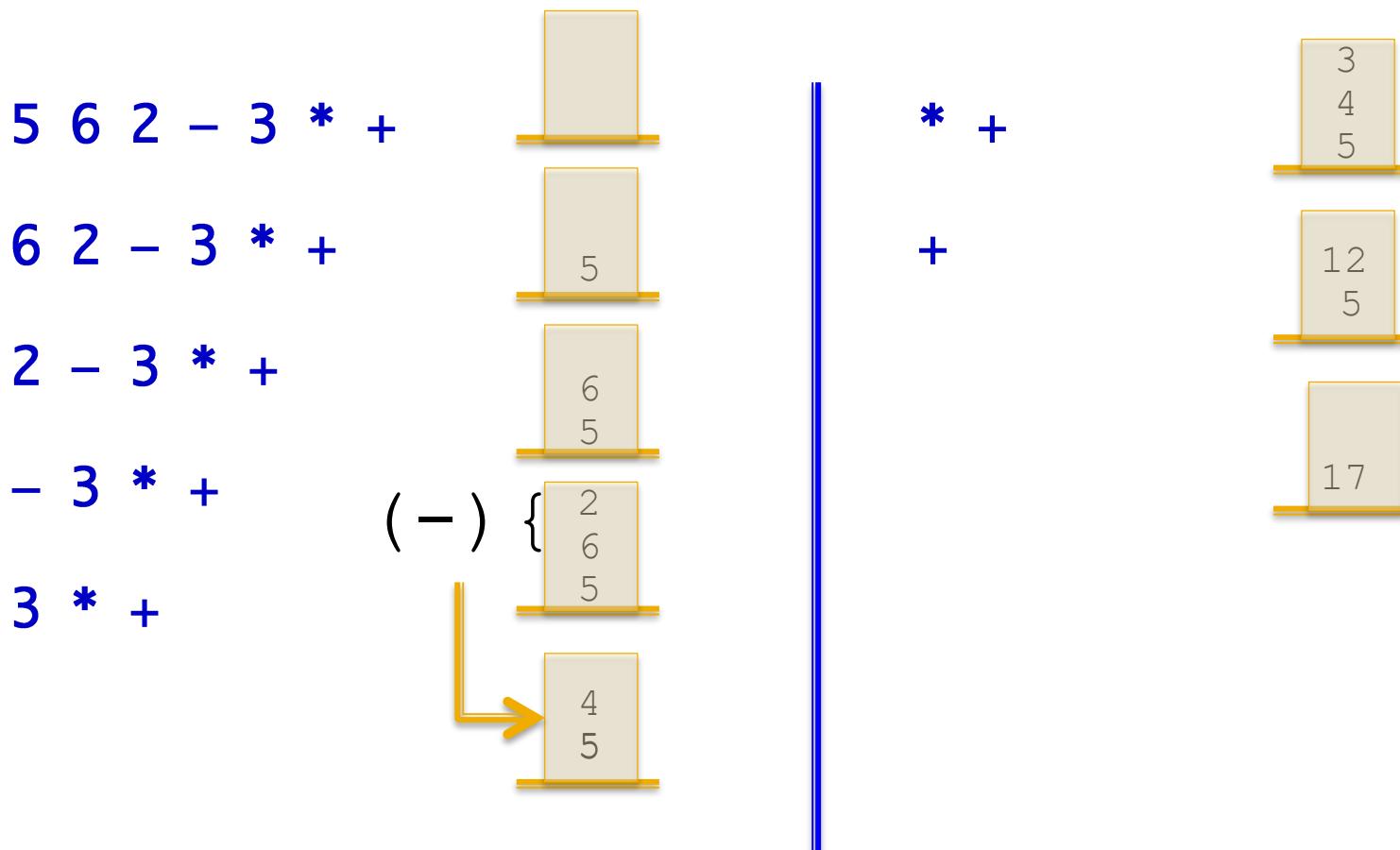
```
data Queue a = Empty | Enqueue a (Queue a) deriving Eq
```

Evaluación de una Expresión en Polaca Inversa usando una Pila (I)

La expresión:

En Polaca Inversa es:

5 + (6 - 2) * 3
5 6 2 - 3 * +



Un Módulo para Representar Expresiones (I)

```
module Expression (
    Item(..),
    Expression,
    value,
    showExpr,
    sample1, sample2
) where
```

La implementación del tipo
Item se muestra fuera del
módulo

```
data Item = Add | Dif | Mul | Value Integer | LeftP | RightP
          deriving Show
type Expression = [Item]

-- sample1 corresponde con 5 + (6 - 2) * 3
sample1 = [ Value 5, Add, LeftP, Value 6
           , Dif, Value 2, RightP, Mul, Value 3 ]

-- sample2 es la expresión anterior en Polaca Inversa
sample2 = [ Value 5, Value 6, Value 2, Dif, Value 3, Mul, Add ]
```

Un módulo para representar expresiones (y II)

```
value :: Item -> Integer -> Integer -> Integer
value Add x y = x + y
value Dif x y = x - y
value Mul x y = x * y

showExpr :: Expression -> String
showExpr (Value x : ts) = ' ' : show x ++ Expr ts
showExpr (Add : ts)     = '+' : Expr ts
showExpr (Dif : ts)     = '-' : Expr ts

...
```

Evaluación de una Expresión en Polaca Inversa usando una Pila (II)

```
*PostFix> sample2
[Value 5, Value 6, Value 2,Dif, Value 3,Mul,Add]
*PostFix> show' sample2
“ 5 6 2 - 3 * +“
*PostFix> postFixEval sample2
17
```

```
module PostFix(postFixEval) where
```

```
import DataStructures.Stack.LinearStack
import Expression
```

```
postFixEval :: Expression -> Integer
postFixEval e = eval e empty
```

```
eval :: Expression -> Stack Integer -> Integer
```

```
eval [] s = top s
```

```
eval (Value x : ts) s = eval ts (push x s)
```

```
eval (op:ts) v2v1s = eval ts (push (value op v1 v2) s)
```

```
where v2 = top v2v1s -- segundo arg
```

```
v1s = pop v2v1s -- el stack sin segundo arg
```

```
v1 = top v1s -- primer arg
```

```
s = pop v1s -- el stack sin los dos args
```

Implementación de Stack por Delegación sobre java.util.LinkedList (I)

- La clase `java.util.LinkedList<T>`, perteneciente a la biblioteca de colecciones de Java, dispone de los siguientes métodos útiles para implementar un `Stack<T>`
 - `public boolean isEmpty()`
 - `public void addFirst(T elem)`
 - `public T getFirst()`
 - `public T removeFirst()`
- Todas estas operaciones tienen complejidad $O(1)$

Implementación de Stack por Delegación sobre java.util.LinkedList (II)

```
package dataStructures.stack;

import java.util.*;

public class LinkedListStack<T> implements Stack<T> {
    protected LinkedList<T> elements;

    public LinkedListStack() {
        elements = new LinkedList<T>();
    }

    public void push(T elem) {
        elements.addFirst(elem);
    }

    public boolean isEmpty() {
        return elements.isEmpty();
    }

    public T top() {
        if (isEmpty())
            throw new EmptyStackException("top on empty stack");
        return elements.getFirst();
    }

    public void pop() {
        if (isEmpty())
            throw new EmptyStackException("pop on empty stack");
        elements.removeFirst();
    }
}
```

El constructor crea la lista interna

push llama a addFirst de LinkedList

isEmpty llama a isEmpty de LinkedList

top llama a getFirst de LinkedList

pop llama a removeFirst de LinkedList

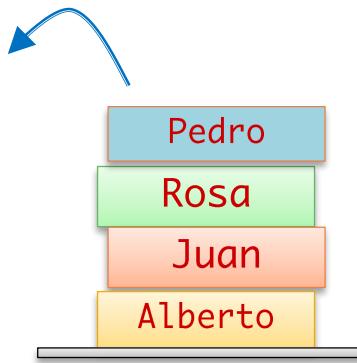
Implementación de Stack por Delegación sobre java.util.LinkedList (III)

La eficiencia de esta implementación depende de la complejidad de las operaciones de LinkedList usadas:

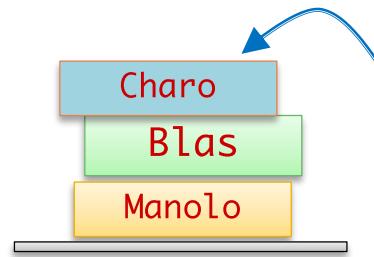
Operación	Orden
push	O(1)
pop	O(1)
top	O(1)
isEmpty	O(1)
LinkedListStack	O(1)

Implementación de Queue con dos Stacks (I)

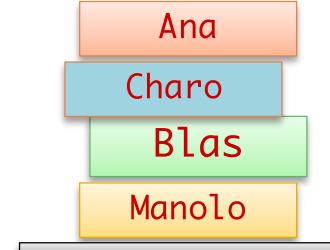
El **Juez** extrae expedientes de la cima de su pila:



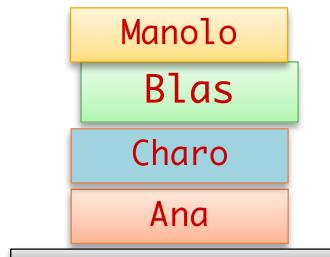
La **Secretaria** añade expedientes en la cima de su pila:



Si la pila del **Juez** queda vacía ...



.... la Secretaria le pasa su pila, pero invertida; ahora el **Juez** tiene una nueva pila, y la de la Secretaria queda vacía:



Implementación de Queue con dos Stacks (y II)

Eficiencia de la implementación:

Ejercicio para casa:
realiza la
implementación

Operación	Orden
enqueue	$O(1)$
dequeue	$O(1), O(n)$ *
first	$O(1)$
isEmpty	$O(1)$
empty	$O(1)$

* El **coste amortizado** es $O(1)$: sólamente invertimos una pila de n elementos después de encolar n elementos

El Problema de Josephus

En época de superpoblación mundial se decide reducir la población.

De cada M personas, deben morir todas menos una.

La elección de los que mueren se hace mediante un juego

Se colocan las M personas en un círculo

Se elige un número N y se procede desde el principio:

Se saltan N posiciones y se elimina la persona que ocupa ese lugar.

Se sigue así hasta que quede una persona

Por ejemplo con M = 7 y N = 2

0 1 2 3 4 5 6

inicio

3 4 5 6 0 1

Se elimina el 2

6 0 1 3 4

Se elimina el 5

3 4 6 0

Se elimina el 1

0 3 4

Se elimina el 6

0 3

Se elimina el 4

3

Se elimina el 0

Queda viva la persona que ocupa la posición número 3

La lista de eliminaciones resultante es [2,5,1,6,4,0,3]

Un programa enseñaría a Josephus dónde colocarse para salvarse siempre

El Problema de Josephus en Haskell

```
module Josephus where
import DataStructures.Queue.LinearQueue

createQueue :: Int -> Queue Int
createQueue m = foldr enqueue empty [m-1, m-2..0]

skip :: Int -> Queue Int -> Queue Int
skip 0 q = q
skip n q = skip (n-1) (enqueue x q')
    where x = first q
          q' = dequeue q

josephus :: Int -> Int -> [Int]
josephus m n = josephus' n (createQueue m)

josephus' :: Int -> Queue Int -> [Int]
josephus' n q
| isEmpty q = []
| otherwise = x : josephus' n q'
  where q' = skip n q
        x = first q'
        q'' = dequeue q'
```

La lista de los sacrificados y en ese orden. El último es el superviviente

Implementaciones de Stack y Queue por delegación sobre `dataStructures.list.LinkedList`

- Ya se comentó la posibilidad de implementar un Stack y una Queue por delegación sobre `java.util.LinkedList`
- También es posible implementar un Stack y una Queue delegando sobre `dataStructures.list.LinkedList`

([Ejercicio para casa](#): realiza las implementaciones y analiza sus eficiencias)

Implementación de Stack vía listas (dataStructures.list.LinkedList) (I)

La clase `dataStructures.list.LinkedList` dispone de métodos adecuados para poder implementar un `Stack<T>`

- `public boolean isEmpty()`
- `public void insert(int i, T elem)`
- `public T get(int i)`
- `public T remove(int i)`

Impl. dataStructures.stack.LinkedListStack vía listas (dataStructures.list.LinkedList) (II)

```
package dataStructures.stack;

import dataStructures.list.*;

public class LinkedListStack<T> implements Stack<T> {
    protected LinkedList<T> elements;

    public LinkedListStack() {
        elements = new LinkedList<T>();
    }

    public void push(T elem) {
        elements.insert(0, elem);
    }

    public boolean isEmpty() {
        return elements.isEmpty();
    }

    public T top() {
        if (isEmpty()){
            throw new EmptyStackException("top: empty stack");
        }
        return elements.get(0);
    }

    public void pop() {
        if (isEmpty()){
            throw new EmptyStackException("pop: empty stack");
        }
        elements.remove(0);
    }
}
```

El constructor crea la lista interna

push llama a insert en la posición 0 de LinkedList

isEmpty llama a isEmpty de LinkedList

top llama a get en la posición 0 de LinkedList

pop llama a removeFirst en la posición 0 de LinkedList

Impl. `dataStructures.stack.LinkedListStack` vía listas (`dataStructures.list.LinkedList`) (y III)

El análisis de esta implementación solo necesita la complejidad de las operaciones usadas en `dataStructures.list.LinkedList`

Operación	Orden
push	$O(1)$
pop	$O(1)$
top	$O(1)$
isEmpty	$O(1)$
LinkedListStack	$O(1)$

Implementación de Queue por Delegación sobre java.util.LinkedList (I)

La clase `java.util.LinkedList<T>`, perteneciente a la biblioteca de colecciones de Java, dispone de los siguientes métodos útiles para implementar una `Queue<T>`

- `public boolean isEmpty()`
- `public void addLast(T elem)`
- `public T getFirst()`
- `public T removeFirst()`
- Todas estas operaciones tienen complejidad $O(1)$

Implementación de Queue por Delegación sobre java.util.LinkedList (II)

```
package dataStructures.queue;

import java.util.*;

public class LinkedListQueue<T> implements Queue<T> {
    protected LinkedList<T> elements;

    public LinkedListQueue() {
        elements = new LinkedList<T>();
    }

    public void enqueue(T elem) {
        elements.addLast(elem);
    }

    public boolean isEmpty() {
        return elements.isEmpty();
    }

    public T first() {
        if (isEmpty())
            throw new EmptyQueueException("first on empty queue");
        return elements.getFirst();
    }

    public void dequeue() {
        if (isEmpty())
            throw new EmptyQueueException("dequeue on empty queue");
        elements.removeFirst();
    }
}
```

El constructor crea la lista interna

enqueue llama a addLast de LinkedList

isEmpty llama a isEmpty de LinkedList

first llama a getFirst de LinkedList

dequeue llama a removeFirst de LinkedList

Implementación de Queue por Delegación sobre java.util.LinkedList (y III)

La eficiencia de esta implementación depende de la complejidad de las operaciones de LinkedList usadas:

Operación	Orden
push	O(1)
pop	O(1)
top	O(1)
isEmpty	O(1)
LinkedListQueue	O(1)

Implementación de Queue vía listas (dataStructures.list.LinkedList) (I)

La clase `dataStructures.list.LinkedList` dispone de métodos adecuados para poder implementar una `Queue<T>`

- `public boolean isEmpty()`
- `public void insert(int i, T elem)`
- `public T get(int i)`
- `public T remove(int i)`
- `public int size()`

Impl. dataStructures.queue.LinkedListQueue vía listas (dataStructures.list.LinkedList) (II)

```
package dataStructures.queue;

import dataStructures.list.*;

public class LinkedListQueue<T> implements Stack<T> {
    protected LinkedList<T> elements;

    public LinkedListQueue() {
        elements = new LinkedList<T>();
    }

    public void enqueue(T elem) {
        elements.insert(size(), elem);
    }

    public boolean isEmpty() {
        return elements.isEmpty();
    }

    public T first() {
        if (isEmpty()){
            throw new EmptyQueueException("first: empty queue");
        }
        return elements.get(0);
    }

    public void dequeue() {
        if (isEmpty()) {
            throw new EmptyQueueException("dequeue: empty queue");
        }
        elements.remove(0);
    }
}
```

El constructor crea la lista interna

Enqueue llama a insert por el final de LinkedList

isEmpty llama a isEmpty de LinkedList

First llama a getFirst del primero de LinkedList

Dequeue llama a remove del primero de LinkedList

Impl. `dataStructures.queue.LinkedListQueue` vía listas (`dataStructures.list.LinkedList`) (y III)

El análisis de esta implementación solo necesita la complejidad de las operaciones usadas en `dataStructures.list.LinkedList`

Operación	Orden
push	$O(1)$
pop	$O(1)$
top	$O(1)$
isEmpty	$O(1)$
<code>LinkedListQueue</code>	$O(1)$

Propiedades de Set usando QuickCheck

Comprobando los axiomas anteriores

```
import DataStructures.Set.LinearSet -- ListSet
import DataStructures.Set.SetAxioms
import Test.QuickCheck
...
...
```

*SetDemo > setAxioms

```
+++ OK, passed 100 tests.  
*** Gave up! Passed only 10 tests.  
+++ OK, passed 100 tests.
```