Relación de ejercicios 1.2 (Lección 1.4)

1. Determine la forma binómica de los siguientes números complejos.

   a) $(5+3\mathrm{i})(2-\mathrm{i})-(3+\mathrm{i})$ b) $\dfrac{1}{\mathrm{i}}$ c) $\dfrac{18+\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}$ d) i^{-17} e) $(1-2\mathrm{i})^5$

   Solución

   a) 10 b) $-\mathrm{i}$ c) $2+3\mathrm{i}$ d) $-\mathrm{i}$ e) $41+38\mathrm{i}$

2. Resuelva en $\mathbb{C}$ la siguiente ecuación y exprese la solución en forma binómica:

$$\frac{2z}{1+\mathrm{i}}-\frac{2z}{\mathrm{i}}=\frac{5}{2+\mathrm{i}}$$

   Solución

   $z=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}$

3. Resuelva en $\mathbb{C}$ el siguiente sistema y exprese las soluciones en su forma binómica:

$$\begin{cases} 4z+3w=23 \\ z+\mathrm{i}w=6+8\mathrm{i} \end{cases}$$

   Solución

   $z=2+3\mathrm{i}$, $w=5-4\mathrm{i}$

4. Resuelva en $\mathbb{C}$ la siguiente ecuación y exprese la solución en forma binómica:

$$z^2+2\overline{z}-1=0$$

   Solución

   Si sustituimos $z=x+y\mathrm{i}$ y obtenemos la ecuación

$$(x+yi)^2+2(x-yi)-1=0 \quad \to \quad x^2+2xyi-y^2+2x-2yi-1=0$$

   que nos permite plantear el siguiente sistema de ecuaciones no lineales

$$\left.\begin{aligned} x^2-y^2+2x-1&=0 \\ 2xy-2y&=0 \end{aligned}\right\}$$

   Los pares de soluciones (x,y) de este sistema determinan las soluciones complejas de la ecuación $z^2 + 2\overline{z} - 1 = 0$ en $\mathbb{C}$

$$z_1 = 1 + \sqrt{2}\mathrm{i}, \quad z_2 = 1 - \sqrt{2}\mathrm{i}, \quad z_3 = -1 + \sqrt{2}, \quad z_4 = -1 - \sqrt{2}$$

5. Factorice en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$ el polinomio $x^3 - 5x^2 + 11x - 15$. ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $x^3 - 5x^2 + 11x - 15 = 0$?

Solución

- Factorización en $\mathbb{R}$: $(x-3)\cdot(x^2-2x+5)$
- Factorización en $\mathbb{C}$: $(x-3)\cdot(x-1-2\mathrm{i})\cdot(x-1+2\mathrm{i})$
- Soluciones de la ecuación: $x_1 = 3, x_2 = 1+2\mathrm{i}, x_3 = 1-2\mathrm{i}$

6. Factorice en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$ el polinomio $x^4 - 4$. ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $x^4 - 4 = 0$?

Solución

- Factorización en $\mathbb{R}$: $(x-\sqrt{2})\cdot(x+\sqrt{2})\cdot(x^2+2)$
- Factorización en $\mathbb{C}$: $(x-\sqrt{2})\cdot(x+\sqrt{2})\cdot(x-\mathrm{i}\sqrt{2})\cdot(x+\mathrm{i}\sqrt{2})$
- Soluciones de la ecuación: $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$,
  $x_3 = \mathrm{i}\sqrt{2}$, $x_4 = -\mathrm{i}\sqrt{2}$

7. Exprese en forma exponencial los siguientes números

a) $1 - \mathrm{i}$ b) $-\sqrt{3} + \mathrm{i}$ c) $-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$

Solución

a) $1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\exp\left(\frac{7\pi}{4}\mathrm{i}\right)$

b) $-\sqrt{3} + \mathrm{i} = 2\exp\left(\frac{5\pi}{6}\mathrm{i}\right)$

c) $-1 - \mathrm{i}\sqrt{3} = 2\exp\left(\frac{4\pi}{3}\mathrm{i}\right)$

8. Escriba $\operatorname{sen} 4\theta$ en términos de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$

Solución

$$\operatorname{sen}(4\theta) = 4\operatorname{sen}(\theta)\cos^3(\theta) - 4\operatorname{sen}^3(\theta)\cos(\theta)$$

9. Exprese $\operatorname{sen}^6\theta$ en función del seno y coseno de múltiplos de θ, y utilice la expresión obtenida en el apartado anterior y las *propiedades de linealidad* de la integral para calcular la integral $\displaystyle\int \operatorname{sen}^6\theta \mathrm{d}\theta$

Solución

$$\operatorname{sen}^6(\theta) = \frac{1}{32}(-\cos(6\theta) + 6\cos(4\theta) - 15\cos(2\theta) + 10)$$

$$\int \operatorname{sen}^6(\theta)d\theta = \frac{1}{192}(-\operatorname{sen}(6\theta) + 9\operatorname{sen}(4\theta) - 45\operatorname{sen}(2\theta) + 60\theta) + C$$

10. Encuentre y represente gráficamente los siguientes números:

   a) las raíces quintas de -1
   b) las raíces sextas de $-\mathrm{i}$
   c) las raíces cuartas de $32(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})$

   Observe que la representación gráfica de las raíces de un número complejo determinan los vértices de un polígono regular. Justifique esta distribución de los puntos en el plano.

Solución

a) $z^5 = -1 = \exp(\pi \mathrm{i}) \quad \longrightarrow \quad z = \exp\left(\frac{\pi+2k\pi}{5}\mathrm{i}\right) \quad , \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$

$$z_0 = \exp\left(\frac{\pi}{5}\mathrm{i}\right), z_1 = \exp\left(\frac{3\pi}{5}\mathrm{i}\right), z_2 = \exp(\pi \mathrm{i}),$$

$$z_3 = \exp\left(\frac{7\pi}{5}\mathrm{i}\right), z_4 = \exp\left(\frac{9\pi}{5}\mathrm{i}\right)$$

b) $z^6 = -\mathrm{i} = \exp\left(\frac{3\pi}{2}\mathrm{i}\right) \quad \longrightarrow \quad z = \exp\left(\frac{3\pi+4k\pi}{12}\mathrm{i}\right) \quad , \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

$$z_0 = \exp\left(\frac{3\pi}{12}\mathrm{i}\right), z_1 = \exp\left(\frac{7\pi}{12}\mathrm{i}\right), z_2 = \exp\left(\frac{11\pi}{12}\mathrm{i}\right),$$

$$z_3 = \exp\left(\frac{15\pi}{12}\mathrm{i}\right), z_4 = \exp\left(\frac{19\pi}{12}\mathrm{i}\right), z_5 = \exp\left(\frac{23\pi}{12}\mathrm{i}\right)$$

c) $z^4 = 32(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}) = 64\exp\left(\frac{5\pi}{3}\mathrm{i}\right)$
$\longrightarrow \quad z = 2\sqrt{2}\exp\left(\frac{5\pi+6k\pi}{12}\mathrm{i}\right) \quad , \quad k = 0, 1, 2, 3$

$$z_0 = 2\sqrt{2}\exp\left(\frac{5\pi}{12}\mathrm{i}\right), z_1 = 2\sqrt{2}\exp\left(\frac{11\pi}{12}\mathrm{i}\right),$$

$$z_2 = 2\sqrt{2}\exp\left(\frac{17\pi}{12}\mathrm{i}\right), z_3 = 2\sqrt{2}\exp\left(\frac{23\pi}{12}\mathrm{i}\right)$$