① Sabiendo que $\cos 5\theta = a\cos^5\theta + b\cos^3\theta + c\cos\theta$, se pide obtener los valores de los escalares a, b, c. Utilice la fórmula de Moivre vista en clase.

- Según la fórmula de Moivre tenemos que:

$$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\, n\theta$$

Aplicando esta fórmula con $n=5$ nos queda: $(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^5 = \cos 5\theta + \mathrm{sen}\,5\theta\, i$

Vamos a calcular $(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^5$, para ello usaremos el método de resolución del binomio de Newton. Primero miramos el triángulo de pascal para $n=5$

1	0
1 1	1
1 2 1	2
1 3 3 1	3
1 4 6 4 1	4
$\boxed{1\ 5\ 10\ 10\ 5\ 1}$	5

$a = \cos\theta$

$b = i\,\mathrm{sen}\,\theta$

Resolvemos:

$$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^5 = 1\cdot\cos^5\theta + 5\cdot\cos^4\theta\cdot i\,\mathrm{sen}\,\theta - 10\cos^3\theta\cdot\mathrm{sen}^2\theta - 10\cos^2\theta\cdot i\,\mathrm{sen}^3\theta + 5\cos\theta\cdot\mathrm{sen}^4\theta + i\,\mathrm{sen}^5\theta$$

$$= \underbrace{\cos^5\theta - 10\cos^3\theta\cdot\mathrm{sen}^2\theta + 5\cos\theta\cdot\mathrm{sen}^4\theta}_{\cos 5\theta} + \underbrace{5\cos^4\theta\, i\,\mathrm{sen}\,\theta - 10\cos^2\theta\cdot i\,\mathrm{sen}^3\theta + i\,\mathrm{sen}^5\theta}_{\mathrm{sen}\,5\theta}$$

luego $\cos 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\cdot\mathrm{sen}^2\theta + 5\cos\theta\cdot\mathrm{sen}^4\theta$

para "quitarnos" los $\mathrm{sen}\,\theta$ usamos la equivalencia: $\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta = 1$

$\mathrm{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$\mathrm{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$\mathrm{sen}^4\theta = (1-\cos^2\theta)^2 = 1 + \cos^4\theta - 2\cos^2\theta$

Sustituimos y operamos:

$$\cos 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta(1-\cos^2\theta) + 5\cos\theta(1+\cos^4\theta - 2\cos^2\theta)$$

$$= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta + 10\cos^5\theta + 5\cos\theta + 5\cos^5\theta - 10\cos^3\theta$$

$$= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$$

Comparándolo con la ecuación que contiene a, b y c obtenemos que:

$$\boxed{a = 16 \quad b = -20 \quad c = 5}$$

② Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones en $\mathbb{C}$:

$$\left.\begin{array}{ll} ① & 2iw - 4u = 4 \\ ② & zi - w = -8+6i \\ ③ & z - w + u = 2 - i \end{array}\right\}$$

Primero multiplicamos ③ por i y restamos ② - ③

$$\begin{array}{r} - \quad zi - w = -8+6i \\ zi - wi + ui = 2i + 1 \\ \hline -w + wi - ui = -9 + 4i \quad ④ \end{array}$$

A continuación, despejamos u de ① y lo sustituimos en ④ $u = \frac{4-2iw}{-4} = \frac{-4+2iw}{4}$

$$-w + wi - \left(\frac{-4+2iw}{4}\right)i = -9+4i \qquad \{i^2 = -1\}$$

$$-4w + 4wi + 4i + 2w = -36 + 16i$$

$$-2w + 4wi = -36 + 12i$$

Como w es un número complejo sabemos que $w = a + bi$, luego sustituimos w por eso:

$$-2(a+bi) + 4(a+bi)i = -36+12i$$

$$-2a - 2bi + 4ai - 4b = -36 + 12i$$

Separando la parte real de la imaginaria, hacemos un sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} -2a - 4b = -36 \\ 4a - 2b = 12i \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{:2} ① \ -a - 2b = -18 \\ \xrightarrow{:2} ② \ 2a - b = 6 \end{array} \Big\} \rightarrow \text{despejamos a de ① } a = 18 - 2b$$

Sustituimos a en ②

$$2(18-2b) - b = 6$$
$$36 - 4b - b = 6$$
$$-5b = -30$$
$$b = 6$$

Si $b = 6 \rightarrow a = 18 - 2\cdot 6 = 6$

luego $\underline{w = 6 + 6i}$
$(a+bi)$

Si $w = 6+6i \rightarrow u = \frac{4-2iw}{-4} = \frac{-4+2i(6+6i)}{4} = \frac{-4+12i-12}{4} = \underline{-4+3i}$

Sabiendo w y u sacamos z de ③: $z = 2 - i + w - u = 2 - i + 6 + 6i + 4 - 3i = \underline{12+2i}$

$$\boxed{\text{Solución:} \quad \begin{array}{l} w = 6+6i \\ u = -4+3i \\ z = 12+2i \end{array}}$$

(2) a.) Halla la raíz cúbica de $\bar{\omega}$ que se encuentra en el segundo cuadrante.
Expresa el resultado en forma trigonométrica.

Sabemos que $\omega = 6+6i$, luego $\bar{\omega} = 6-6i$

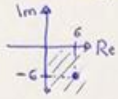
Paso 1: pasamos $\bar{\omega}$ a forma exponencial, su forma será del tipo: $r\cdot e^{i\theta}$

Sabiendo que $a=6$ y $b=-6$ sacamos r y θ:

$$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{6^2+(-6)^2}=\sqrt{72}=\sqrt{2^3\cdot 3^2}=3\cdot 2\sqrt{2}$$

$tg\,\theta = \frac{b}{a} = \frac{-6}{6} = -1$ → la tangente de -1 está en 2 cuadrantes: 2º cuad, 4º cuad

Como $\bar{\omega} = 6-6i$ →



4º cuadrante $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

Teniendo r y θ expresamos $\bar{\omega}$ en forma exponencial:

$$W = r\cdot e^{i\theta} = 3\cdot 2\sqrt{2}\cdot e^{\frac{7\pi}{4}i} = 3\cdot 2\sqrt{2}\cdot e^{\left(\frac{7\pi}{4}+2k\pi\right)i}$$ → donde $2k\pi$ son k vueltas $(k\in\mathbb{N})$

Queremos sacar la raíz cúbica, que será de la forma: $w=r\cdot e^{i\theta}$

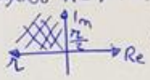
donde $w^3 = r^3\cdot e^{3\theta i}$ es la forma exponencial que sacamos.

$$r^3 = 3\cdot 2\sqrt{2} \to r = \sqrt[3]{3\cdot \underbrace{2\sqrt{2}}_{(\sqrt{2^3})}} = \sqrt[3]{3}\cdot\sqrt{2}$$

$$3\theta = \frac{7\pi}{4}+2k\pi \to \theta = \frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3} = \frac{7\pi+8\pi k}{12}$$

Sabiendo θ, buscamos θ tal que esté en el 2º cuadrante, sustituyendo $k=\{0,1,2\}$

$k=0 \to \theta = \frac{7\pi}{12}$ $\frac{7\pi}{12} > \frac{\pi}{2}$ y $\frac{7\pi}{12} < \pi$ luego →



2º cuadrante

La raíz que queremos está en $k=0$, y su forma será:

$$W_0 = \sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot e^{\frac{7\pi}{12}i}$$

expresándolo en forma trigonométrica obtenemos:

$$\boxed{W_0 = \sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right]}$$, que es nuestra solución.