Relación de ejercicios 2.3

1. Identifique y clasifique (si existen) los puntos críticos de los siguientes campos:

   a) $f_1(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ b) $f_2(x,y) = (x^2+y^2)e^{x-y}$

   c) $f_3(x,y) = 2x^4 + 4x^2 + y^2 + 8xy + 4y + 3$ d) $f_4(x,y) = \ln(1 + x^2y^2)$

   Solución

   a) Los puntos críticos de $f_1(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ son el punto $(0,0)$ que es punto de silla, y el punto $(1,1)$ que es mínimo.

   b) Los puntos críticos de $f_2(x,y) = (x^2+y^2)\mathrm{e}^{x-y}$ son el punto $(0,0)$ que es mínimo, y el punto $(-1,1)$ que es punto de silla.

   c) Los puntos críticos de $f_3(x,y) = 2x^4 + 4x^2 + y^2 + 8xy + 4y + 3$ son el punto $(-1,2)$ que no es posible clasificar, y el punto $(2,-10)$ que es mínimo.

   d) Los puntos críticos de $f_4(x,y) = \ln(1 + x^2y^2)$ son todos los puntos (x,y) tal que $x = 0$ o bien $y = 0$, es decir, los ejes de coordenadas, y todos ellos son mínimos.

2. Determine y clasifique los puntos críticos de $f(x,y) = x^3+y^3$ sobre la restrición $x^2+y^2 = 1$.

   Solución

   $F(x,y;\mu) = x^3 + y^3 - \mu(x^2+y^2-1)$

$$\begin{array}{l}\text{Puntos}\\ \text{críticos}\end{array}\left\{\begin{array}{llll}(0,1) & \text{con} & \mu = 3/2 & \to \text{máximo}\\ (1,0) & \text{con} & \mu = 3/2 & \to \text{máximo}\\ (0,-1) & \text{con} & \mu = -3/2 & \to \text{mínimo}\\ (-1,0) & \text{con} & \mu = -3/2 & \to \text{mínimo}\\ (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) & \text{con} & \mu = 3\sqrt{2}/4 & \to \text{mínimo}\\ (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) & \text{con} & \mu = -3\sqrt{2}/4 & \to \text{máximo}\end{array}\right.$$

3. Consideramos el campo $f(x,y) = 3x^2 + y^3$:

   a) Determine, sin clasificar, todos los puntos críticos del campo f sobre la curva $x^2+y^2 = 9$

b) Uno de los puntos obtenidos en el apartado anterior debe ser $(\sqrt{5}, 2)$: clasifique este punto.

Solución

a) $F(x,y,\lambda) = 3x^2 + y^3 - \lambda(x^2 + y^2 - 9)$

$$\text{Puntos críticos} \begin{cases} (0,3) & \text{con} \quad \lambda = 9/2 \\ (0,-3) & \text{con} \quad \lambda = -9/2 \\ (3,0) & \text{con} \quad \lambda = 3 \\ (-3,0) & \text{con} \quad \lambda = 3 \\ (\sqrt{5},2) & \text{con} \quad \lambda = 3 \\ (-\sqrt{5},2) & \text{con} \quad \lambda = 3 \end{cases}$$

b) El punto $(\sqrt{5}, 2)$ es mínimo.

4. Consideremos la función $f(x,y) = -3xy^2 + 4y^2 - 10xy + 12y + 4x^2 - 15x + 14$.

   a) Compruebe que $(1,-1)$ es un punto crítico de $f(x,y)$ sujeto a la condición $x - 2y - 3e^{x+y} = 0$.

   b) Clasifique el punto crítico del apartado anterior.

Solución

a) $F(x,y;\lambda) = -3xy^2 + 4y^2 - 10xy + 12y + 4x^2 - 15x + 14 - \lambda\,(x - 2y - 3e^{x+y})$
El punto $(1,-1)$ es punto crítico porque se verifica la igualdad $\nabla F(1,-1,\lambda) = (2\lambda, 5\lambda, 0) = (0,0,0)$ para $\lambda = 0$

b) El punto $(1,-1)$ es un MÍNIMO porque

$$\nabla g(1,-1)\cdot \boldsymbol{u} = 0 \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{u} = (5u, -2u)$$

$$d^2F_{(1-,1)}(\boldsymbol{u}) = (5u \ \ -2u)\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5u \\ -2u \end{pmatrix} = 288u^2 > 0$$

5. Sabemos que $(2,1)$ es un punto crítico de un campo $f(x,y)$ sujeto a la restricción $x^3 + y^2 - 4xy - y = 0$, siendo $\alpha = \frac{1}{2}$ el multiplicador de Lagrange y $\nabla^2 f(2,1) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. Determine si el punto crítico es máximo o mínimo.

El punto $(2,1)$ es MÁXIMO:

$$\begin{aligned}
\nabla g(x,y) &= (3x^2-4y, 2y-4x-1)\\
\nabla(f-\alpha g) &= \nabla f - \alpha\nabla g\\
\nabla^2(f-\alpha g) &= \nabla^2 f - \alpha\nabla^2 g\\
\nabla^2(f-\alpha g) &= \nabla^2 f - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6x & -4\\ -4 & 2\end{pmatrix}\\
\nabla^2(f-\alpha g)(2,1) &= \begin{pmatrix} 5 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 12 & -4\\ -4 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2\\ 2 & -4\end{pmatrix}\\
\nabla g(2,1)\cdot(u_1,u_2) &= (8,-7)\cdot(u_1,u_2) = 0 \quad\longrightarrow\quad u_2 = \frac{8}{7}u_1\\
d^2(f-\alpha g)_{(2,1)}(u_1,\frac{8}{7}u_1) &= \begin{pmatrix} u_1 & \frac{8}{7}u_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2\\ 2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1\\ \frac{8}{7}u_1\end{pmatrix} = \frac{-81}{49}u_1^2 < 0
\end{aligned}$$

6. Halle los valores máximo y mínimo del campo escalar $f(x,y) = \exp\left(\frac{-xy}{4}\right)$ en la región $x^2+y^2\le 2$.

Solución

- Puntos críticos asociados a extremos relativos:

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{-y}{4}\exp(\frac{-xy}{4}), \frac{-x}{4}\exp(\frac{-xy}{4})\right)$$

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \quad\longrightarrow\quad (x,y) = (0,0)$$

- Puntos críticos asociados a extremos condicionados a la frontera del recinto:

$$g(x,y) = x^2+y^2-2$$

$$\nabla f(x,y) - \lambda\nabla g(x,y) = \left(\frac{-y}{4}\exp(\frac{-xy}{4}) - 2\lambda x, \frac{-x}{4}\exp(\frac{-xy}{4}) - 2\lambda y\right)$$

$$\nabla f(x,y) - \lambda\nabla g(x,y) = (0,0) \quad\longrightarrow\quad \begin{cases} (1,1)\\ (1,-1)\\ (-1,1)\\ (-1,-1)\end{cases}$$

- Determinación de los extremos absolutos: evaluamos los 5 puntos críticos en el campo $f(x,y)$ y deducimos que los puntos $(1,1), (-1,-1)$ son los mínimos absolutos, y los puntos $(1,-1), (-1,1)$ son los máximos absolutos.

7. Halle los valores máximo y mínimo del campo escalar $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 1$ en la región triangular cerrada del primer cuadrante acotada por las rectas $x = 0$, $y = 4$, $y = x$.

Solución

- Puntos críticos asociados a extremos relativos en el interior de la región triangular:

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \quad \longrightarrow \quad (x,y) = (0,0) \quad ✗$$

  Como $(0,0)$ no está en el interior de la región, concluimos que no hay puntos críticos en el interior de la región triangular.

- Puntos críticos asociados a extremos condicionados a la frontera de la región triangular:

  - En el segmento $\overline{(0,0)(0,4)}$

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 1 \\ g(x,y) = x = 0 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} (0,0) & \checkmark \\ (0,4) & \checkmark \end{array}\right.$$

  - En el segmento $\overline{(0,0)(4,4)}$

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 1 \\ g(x,y) = y - x = 0 \\ 0 \leq x \leq 4\ ,\ 0 \leq y \leq 4 \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} (0,0) & \checkmark \\ (4,4) & \checkmark \end{array}\right.$$

  - En el segmento $\overline{(0,4)(4,4)}$

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 1 \\ g(x,y) = y - 4 = 0 \\ 0 \leq x \leq 4 \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} (0,4) & \checkmark \\ (2,4) & \checkmark \\ (4,4) & \checkmark \end{array}\right.$$

- Determinación de los extremos absolutos: evaluando la función en los puntos $(0,0), (0,4), (2,4), (4,4)$ se obtiene que el punto $(0,0)$ es el mínimo absoluto y los puntos $(0,4)$ y $(4,4)$ son los máximos absolutos de la función $f(x,y)$ en la región triangular.