Relación de ejercicios 1.3 – REPASO

1. Determine las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 8x^3 + 8x + 8y = 0 \\ 2y + 8x + 4 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x\mathrm{e}^{x-y} + (x^2 + y^2)\mathrm{e}^{x-y} = 0 \\ 2y\mathrm{e}^{x-y} - (x^2 + y^2)\mathrm{e}^{x-y} = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x^2 - 2\beta x = 0 \\ 3y^2 - 2\beta y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

Solución

a) Las soluciones son $(-1, 2)$ y $(2, -10)$.

b) El sistema de ecuaciones es equivalente a este sistema:

$$\begin{cases} 2x + (x^2 + y^2) = 0 \\ 2y - (x^2 + y^2) = 0 \end{cases}$$

Por reducción (sumando las ecuaciones) obtenemos:

$$2x + 2y = 0 \qquad \longrightarrow \qquad y = -x$$

y sustituyendo en cualquiera de las ecuaciones iniciales obtenemos las dos soluciones

$$(x, y) = (0, 0) \quad \text{y} \quad (x, y) = (-1, 1)$$

c) Factorizando la primera ecuación se deduce que

$$3x^2 - 2\beta x = 0 \quad \longrightarrow \quad x(3x - 2\beta) = 0 \quad \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \quad x = 0 \quad \text{o bien} \quad 3x - 2\beta = 0$$

- Si $x = 0$ entonces de la tercera ecuación se deduce que $y = \pm 1$ y para cada una de esas parejas de valores de x y de y se puede deducir el valor de β a partir de la segunda ecuación, obteniendo las soluciones $(0, 1, 3/2)$ y $(0, -1, -3/2)$.

- Si $3x - 2\beta = 0$ entonces factorizamos la segunda ecuación

$$3y^2 - 2\beta y = 0 \quad \longrightarrow \quad y(3y - 2\beta) = 0 \quad \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \quad y = 0 \quad \text{o bien} \quad 3y - 2\beta = 0$$

  - Si $y = 0$ entonces de la tercera ecuación se deduce que $x = \pm 1$ y para cada una de esas parejas de valores de x y de y se puede deducir el valor de β a partir de la primera ecuación, obteniendo las soluciones $(1, 0, 3/2)$ y $(-1, 0, -3/2)$.
  - Si $3y - 2\beta = 0$ entonces de la primera y de la segunda ecuación, aplicando reducción, deducimos

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x - 2\beta & = & 0 \\ 3y - 2\beta & = & 0 \end{array} \right. \quad \longrightarrow \quad 3x - 3y = 0 \quad \longrightarrow \quad x = y$$

    que al sustituirlo en la tercera ecuación se obtienen cuatro pares de soluciones para x y para y:

$$x = \pm 1/\sqrt{2} \quad , \quad y = \pm 1/\sqrt{2}$$

    Pero de esas cuatro parejas de valores para x y para y, sustituyendo en la primera y la segunda ecuación, sólo se obtienen las siguientes dos soluciones:
    $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 3/2\sqrt{2})$ y
    $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, -3/2\sqrt{2})$.

Por lo tanto las soluciones del sistema son las seis siguientes:

$$(0, 1, 3/2), (0, -1, -3/2), (1, 0, 3/2), (-1, 0, -3/2)$$

$$(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 3/2\sqrt{2}), (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, -3/2\sqrt{2})$$

2. Use la fórmula del binomio de Newton para desarrollar las siguientes potencias:

a) $(a + b)^7$ b) $(x - 1)^4$ c) $\left(2x^3 - \dfrac{2}{5x^2}\right)^2$

d) $(x - 2)^5$ e) $(1 - 2x)^3$ f) $(z + 1/2)^3$

Solución

a) $(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$

b) $(x-1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$

c) $\left(2x^3 - \dfrac{2}{5x^2}\right)^2 = 4x^6 - \dfrac{8x}{5} + \dfrac{4}{25x^4}$

d) $(x-2)^5 = x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32$

e) $(1-2x)^3 = 1 - 6x + 12x^2 - 8x^3$

f) $(z+1/2)^3 = z^3 + \dfrac{3}{2}z^2 + \dfrac{3}{4}z + \dfrac{1}{8}$

3. Simplifique y exprese el resultado en forma binómica:

   a) $\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ b) $\dfrac{5}{1-3\mathrm{i}} - \dfrac{5}{1+3\mathrm{i}}$ c) $\frac{1}{2}(1+\mathrm{i})^2$ d) i^{2014} e) $(1-\mathrm{i})^8$

Solución

a) $-\mathrm{i}$ b) $3\mathrm{i}$ c) i d) -1 e) 16

4. Exprese en forma binómica las soluciones de la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{z} = \frac{2}{2+3\mathrm{i}} + \frac{\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}$$

Solución

$z = 2 + 3\mathrm{i}$

5. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} z - w + u = 2 - \mathrm{i} \\ z + \mathrm{i}w = 6 + 8\mathrm{i} \\ w + 2\mathrm{i}u = -2\mathrm{i} \end{cases}$

Solución

$$\begin{aligned} z &= 12 + 2\mathrm{i} \\ w &= 6 + 6\mathrm{i} \\ u &= -4 + 3\mathrm{i} \end{aligned}$$

6. Resuelva la siguiente ecuación y exprese la solución en forma binómica:

$$z + \bar{z}\mathrm{i} - 5 = \frac{3 - z\bar{z}}{2\mathrm{i}}$$

Solución

Se expresa la incógnita en forma binómica ($z = x + y\mathrm{i}$) y se reescribe la ecuación:

$$(x + y\mathrm{i}) + (x - y\mathrm{i})\mathrm{i} - 5 = \frac{3 - (x + y\mathrm{i})(x - y\mathrm{i})}{2\mathrm{i}}$$

y se opera hasta obtener

$$(x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3) + (2x + 2y - 10)\mathrm{i} = 0$$

que equivale al sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 & = & 0 \\ 2x + 2y - 10 & = & 0 \end{array} \right.$$

cuyas soluciones son

$$(x, y) = (2, 3) \quad \text{y} \quad (x, y) = (3, 2)$$

Solución: $\boxed{z_1 = 2 + 3\mathrm{i} \quad \text{y} \quad z_2 = 3 + 2\mathrm{i}}$

7. Calcule el módulo de $\quad z = \dfrac{(1 + 2\mathrm{i})^3(4 - 3\mathrm{i})^4}{(3 + 4\mathrm{i})^4(2 - \mathrm{i})^3}$

Solución

$|z| = 1$

8. Exprese en forma exponencial los siguientes números

a) $\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}$ b) $\left(\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)^2$ c) $-2 + 2\mathrm{i}$ d) $-\sqrt{3} - \mathrm{i}$ e) $1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$

Solución

a) $2e^{\frac{7\pi}{4}\mathrm{i}}$ b) $4e^{\frac{3\pi}{2}\mathrm{i}}$ c) $\sqrt{8}e^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}}$ d) $2e^{\frac{7\pi}{6}\mathrm{i}}$ e) $2e^{\frac{5\pi}{3}\mathrm{i}}$

9. Calcule las siguientes exponenciales complejas

a) $\exp(1 - \pi\mathrm{i})$ b) $\exp\left(1 - \frac{5\pi}{3}\mathrm{i}\right)$ c) $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}\mathrm{e}^{1 - \frac{3\pi}{4}\mathrm{i}}$

Solución

a) $-\mathrm{e}$ b) $\dfrac{\mathrm{e}}{2} + \dfrac{\mathrm{e}\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ c) $\dfrac{\mathrm{e}\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\mathrm{e}\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$

10. Exprese $\operatorname{sen} 3\theta$, $\cos 6\theta$ y $\operatorname{sen} 5\theta$ como polinomios en $\operatorname{sen}\theta$.

Solución

$\operatorname{sen}(3\theta) = -4\operatorname{sen}^3\theta + 3\operatorname{sen}\theta$
$\cos(6\theta) = -32\operatorname{sen}^6\theta + 48\operatorname{sen}^4\theta - 18\operatorname{sen}^2\theta + 1$
$\operatorname{sen}(5\theta) = 16\operatorname{sen}^5\theta - 20\operatorname{sen}^3\theta + 5\operatorname{sen}\theta$

11. Exprese $\cos^4\theta$, $\operatorname{sen}^3\theta$ y $\cos^5\theta$ en términos de senos y cosenos de múltiplos de θ.

Solución

$\cos^4\theta = \frac{1}{8}\cos(4\theta) + \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{3}{8}$
$\operatorname{sen}^3\theta = -\frac{1}{4}\operatorname{sen}(3\theta) + \frac{3}{4}\operatorname{sen}\theta$
$\cos^5\theta = \frac{1}{16}\cos(5\theta) + \frac{5}{16}\cos(3\theta) + \frac{5}{8}\cos\theta$

12. Consideramos los números complejos $z = 1 + \mathrm{i}$, $w = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$

a) Calcule y simplifique el producto zw

b) Utilizando la forma exponencial de z y w, calcule el producto zw y exprese el resultado en forma exponencial y forma binómica.

c) A partir de los resultados obtenidos en los dos apartados anteriores, deduzca el valor de $\cos\frac{\pi}{12}$, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$ y $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$

Solución

a) $z \cdot w = (1 + \mathrm{i}) \cdot (-\sqrt{3} + \mathrm{i}) = (-1 - \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})\mathrm{i}$

b) $z \cdot w = \sqrt{2}\exp\left(\frac{\pi}{4}\mathrm{i}\right) \cdot 2\exp\left(\frac{5\pi}{6}\mathrm{i}\right) = 2\sqrt{2}\exp\left(\frac{13\pi}{12}\mathrm{i}\right)$ en forma esponencial
$z \cdot w = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + 2\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\frac{13\pi}{12}\right)\mathrm{i}$ en forma binómica

c) Comparando las dos expresiones binómicas obtenidas en los apartados anteriores para el producto $z \cdot w$ se deduce que

$$\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \quad , \quad \operatorname{sen}\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

y por simetría obtenemos

$$
\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= -\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\
\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) &= -\operatorname{sen}\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\
\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \operatorname{tg}\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \frac{-1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

13. *a*) Calcule las raíces cúbicas de $4\sqrt{2}+4\sqrt{2}\mathrm{i}$ y expréselas en forma binómica. (Indicación: use los valores de $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$ y $\cos\frac{\pi}{12}$ calculados en el ejercicio anterior.)

    b) Represente gráficamente las raíces calculadas en el apartado anterior.

Solución

...

14. Factorice en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$ los siguientes polinomios.

a) z^3+8	b) $3x^3-x^2-7x+5$	c) $x^3-12x+16$
d) z^4+5z^2+4	e) y^4+81 (*)	f) x^4+9 (*)

Solución

...