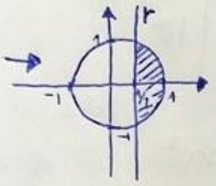
① Considerar la región del plano xy acotada a su derecha por la circunferencia centrada en el origen y radio 1, y a su izquierda por la recta $x = \frac{1}{2}$. Calcule el área de la región, para ello plantee la integral de dos formas distintas (cartesiana y polar) y obtenga la solución aplicando una sola de ellas.

Tenemos una circunferencia: $x^2+y^2=1 : c$ y la recta $r: x = \frac{1}{2}$, dibujamos ambas y vemos nuestra región cuál es:



Realizamos la planteación de la forma cartesiana, en mi caso uso el tipo 2.

1º Buscamos los puntos de corte entre la circunferencia y la recta:

despejo y de 'c': $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ y sustituyo $x = \frac{1}{2}$:

$y = \sqrt{3/4}$ $\quad y = -\sqrt{3/4}$

cartesiana tipo 2

$-\sqrt{3/4} \leq y \leq \sqrt{3/4}$

$\frac{1}{2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$

2º Despejamos x en ambas ecuaciones:

$x = \frac{1}{2}$ $\quad x = \oplus\sqrt{1-y^2}$ escogemos la parte positiva que es la que usamos.

La integral en cartesiana será entonces:

$$A_{(\text{área})} = \int_{-\sqrt{3/4}}^{\sqrt{3/4}} \int_{1/2}^{\sqrt{1-y^2}} dx\,dy$$

• Ahora pasamos a polares, para ello sacamos r:

$x = r \cdot \cos\theta$

$y = r \cdot \operatorname{sen}\theta$

• $x^2+y^2 = 1$

$\hookrightarrow (r\cos\theta)^2 + (r\operatorname{sen}\theta)^2 = 1$

$r^2 \underbrace{[\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta]}_{1} = 1$

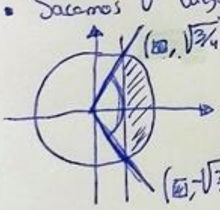
$r = \oplus 1 \rightarrow \boxed{r = 1}$ cogemos el positivo

• $x = \frac{1}{2}$

$r\cos\theta = \frac{1}{2}$

$\left[r = \frac{1}{2\cos\theta} \right]$

• Sacamos θ luego:



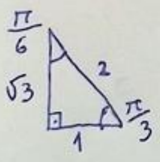
$(\ ,\sqrt{3/4}) \rightarrow \sqrt{3/4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$(\ ,-\sqrt{3/4}) \rightarrow -\sqrt{3/4} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

en polar tenemos entonces:

$-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$

$\frac{1}{2\cos\theta} \leq r \leq 1$



$\operatorname{sen}\boxed{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Nuestra integral para el área será entonces:

$$A = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{\frac{1}{2\cos\theta}}^{1} \overset{\text{r siendo el |det| Jacobiano}}{r} \, dr \, d\theta$$

Resolvemos en polar:

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{\frac{1}{2\cos\theta}}^{1} r \, dr \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{\frac{1}{2\cos\theta}}^{1} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2\cos\theta}\right] d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} \, d\theta - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2\cos\theta} \, d\theta = \left[\frac{\theta}{2}\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec^2\theta}{8} \cdot d\theta$$

$$= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} - \left[\frac{tg(\theta)}{8}\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{2\pi}{6} - \frac{2\sqrt{3}}{8}$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}} = \underline{\text{Área}}.$$

② Consideremos la ecuación diferencial ordinaria $(x+1)y' + y = 1 - 2x$

a) Compruebe que es exacta.

Las EDO exactas tienen la forma: $Q(x,y)\,y' + P(x,y) = 0$, identificamos $P(x,y)$ y $Q(x,y)$:

$$\underbrace{(x+1)}_{Q(x,y)}y' + \underbrace{y - 1 + 2x}_{P(x,y)} = 0$$

Para verificar que es exacta, debe de cumplir el Lema de Poincaré, que dicta que:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial P}{\partial y} = 1 \\[2mm] \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1\end{array}\right\rangle \checkmark \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Como lo cumple. $\boxed{\text{Es exacta.}}$

b) Obtenga la solución general explícita de dicha EDO.

Como es exacta $\exists\, U(x,y)$ tal que $\nabla U(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ y $U(x,y) = C$ es la solución general de la EDO.

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = y - 1 + 2x$$

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = x + 1 \longrightarrow U(x,y) = \int x+1\,dy = xy + y + C(x)$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x} = y + C'(x) \\[2mm] \dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x} = y - 1 + 2x\end{array}\right\rangle \cancel{y} + C'(x) = \cancel{y} - 1 + 2x$$

Sacamos $C(x)$: $C'(x) = -1 + 2x$

$$C(x) = \int 2x - 1\,dx = \underline{x^2 - x}$$

$$U(x,y) = xy + y + x^2 - x$$

$$U(x,y) = C \rightarrow \quad x\cdot y + y + x^2 - x = C$$

$$x\cdot y + y = x - x^2 + C$$

$$\boxed{y = \frac{x - x^2}{x+1} + \frac{C}{x+1}}$$ Sol. general explícita

c) Obtenga la solución particular que pasa por el punto $(1,2)$. Comprueba el resultado utilizando una calculadora gráfica (Desmos)

punto: $(1,2)$ ec. general: $x \cdot y + y + x^2 - x = C$

sustituimos $(1,2)$ en la ec. general para sacar C:

$$1 \cdot 2 + 2 + 1 - 1 = C \rightarrow C = 4$$

luego la sol particular será:

$$y = \frac{x - x^2}{x+1} + \frac{C}{x+1} \rightarrow \boxed{y = \frac{x - x^2}{x+1} + \frac{4}{x+1}}$$