Ejercicios Tema 2

Ejercicio 1

Sea (X, Y) es un vector aleatorio con distribución uniforme en el cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$ de área 4.

1. Aproximar mediante simulación $P(X + Y \leq 0)$ y compararla con la probabilidad teórica (obtenida aplicando la regla de Laplace $\frac{\text{área favorable}}{\text{área posible}}$).
2. Aproximar el valor de π mediante simulación a partir de $P(X^2 + Y^2 \leq 1)$.

Ejercicio2

Consideramos el experimento de Bernoulli consistente en el lanzamiento de una moneda.

1. Empleando la función sample, obtener 1000 simulaciones del lanzamiento de una moneda (0 = cruz, 1 = cara), suponiendo que no está trucada. Aproximar la probabilidad de cara a partir de las simulaciones.
2. En R pueden generarse valores de la distribución de Bernoulli mediante la función rbinom(nsim, size=1, prob). Generar un gráfico de lineas considerando en el eje X el número de lanzamientos (de 1 a 10000) y en el eje Y la frecuencia relativa del suceso cara (puede ser recomendable emplear la función cumsum).

Ejercicio 3

En 1651, el Caballero de Méré le planteó a Pascal una pregunta relacionada con las apuestas y los juegos de azar: ¿es ventajoso apostar a que en cuatro lanzamientos de un dado se obtiene al menos un seis? Este problema generó una fructífera correspondencia entre Pascal y Fermat que se considera, simbólicamente, como el nacimiento del Cálculo de Probabilidades.

1. Escribir una función que simule el lanzamiento de n dados. El parámetro de entrada es el número de lanzamientos n, que toma el valor 4 por defecto, y la salida debe ser TRUE si se obtiene al menos un 6 y FALSE en caso contrario.
2. Utilizar la función anterior para simular $ nsim= 10000 $ jugadas de este juego y calcular la proporción de veces que se gana la apuesta (obtener al menos un 6 en n lanzamientos), usando $n = 4$. Comparar el resultado con la probabilidad teórica $1 - (5/6)^n$.

Ejercicio 4

Partiendo de la generación de números aleatorios uniformes en el intervalo $[0, 1]$, simule por el método de la transformada inversa las siguientes distribuciones:

1. Distribución Uniforme: $X \sim U[a, b]$ sabiendo que $f_X = 1/(b - a)$ y que $F_X = \int_a^x f_X dx$. Compare el resultado con lo obtenido con la función `runif`.
2. Distribución Weibull: $X \sim Weibull(\lambda, \alpha)$ sabiendo que $F_X(x) = 1 - e^{-(\lambda x)^\alpha}$. Compare el resultado con lo obtenido con la función `rweibull`.
3. Distribución Pareto: $X \sim Pareto(a, b)$ sabiendo que $F_X(x) = 1 - (b/x)^a$.