Relación de ejercicios 2.2

1. Determine y represente el dominio de los siguientes campos:

a) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, b) $g(x,y) = \log \dfrac{y}{x^2 + y^2 - 1}$.

Solución

a) $\mathrm{Dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. La representación gráfica del dominio del campo $f(x,y)$ se muestra en la figura 2.14 y corresponde a un círculo centrado en el origen y de radio 1 (incluyendo la circunferencia).

b) $\mathrm{Dom}(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0, x^2 + y^2 > 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0, x^2 + y^2 < 1\}$. La representación gráfica del dominio del campo $g(x,y)$ se muestra en la figura 2.15 y corresponde al exterior del círculo de radio 1 por encima del eje X e interior del círculo de radio 1 por debajo del eje X, sin incluir la circunferencia.

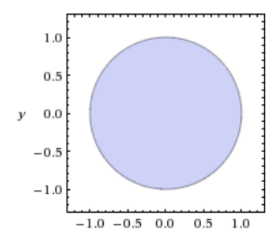

Figura 2.14: Dominio del campo $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
@2019 Wolfram Alpha LLC.

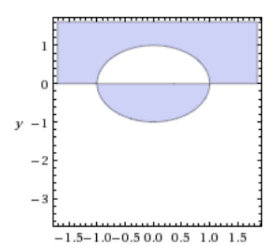

Figura 2.15: Dominio del campo $g(x,y) = \log \dfrac{y}{x^2 + y^2 - 1}$
@2019 Wolfram Alpha LLC.

2. Determine las curvas de nivel de los siguientes campos escalares, representándolas para algunos valores.

   a) $f(x,y) = y + \cos 2x$, b) $g(x,y) = e^{y-x^2}$, c) $h(x,y) = \dfrac{2x^2+y^2}{x-2y}$.

Solución

a) $y + \cos(2x) = k \quad \rightsquigarrow \quad y = k - \cos(2x)$

La representación gráfica de estas curvas de nivel se muestra en la figura 2.16.

b) $\mathrm{e}^{y-x^2} = k \quad \rightsquigarrow \quad y = x^2 + \log k$

La representación gráfica de estas curvas de nivel se muestra en la figura 2.17.

c) $\dfrac{2x^2+y^2}{x-2y} = k \quad \rightsquigarrow \quad 2\left(x - \frac{k}{4}\right)^2 + (y+k)^2 = \frac{9}{8}k^2$

La representación gráfica de estas curvas de nivel se muestra en la figura 2.18 y corresponden a elipses que pasan por el origen de coordenadas, todas ellas tienen los ejes paralelos a los ejes de coordenadas, y sus centros están en los puntos $\left(\frac{k}{4}, -k\right)$.

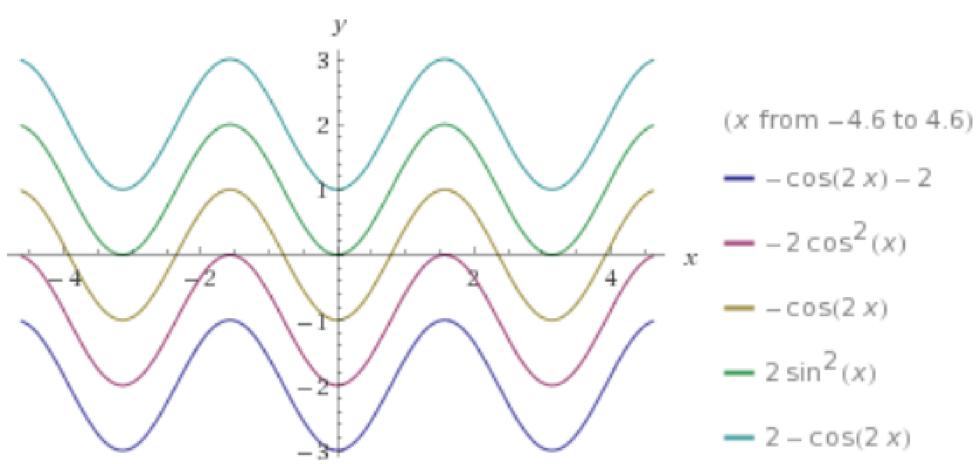

Figura 2.16: Curvas de nivel del campo $f(x,y) = y + \cos 2x$
@2019 Wolfram Alpha LLC.

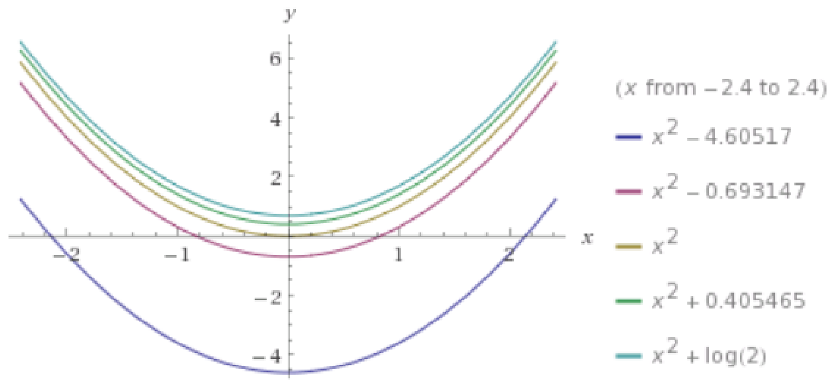

Figura 2.17: Curvas de nivel del campo $g(x, y) = e^{y-x^2}$
@2019 Wolfram Alpha LLC.

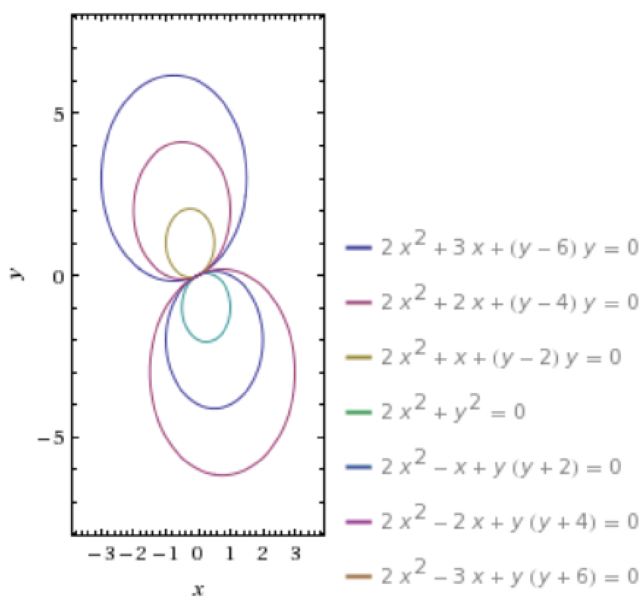

Figura 2.18: Curvas de nivel del campo $h(x, y) = \dfrac{2x^2 + y^2}{x - 2y}$
@2019 Wolfram Alpha LLC.

3. Halle el vector gradiente de los siguientes campos.

a) $f(x,y) = \log(\operatorname{sen} xy)$ b) $g(x,y,z) = x^2y^3z^4$

Solución

a) $\nabla f(x,y) = (y\operatorname{cotg}(xy), x\operatorname{cotg}(xy))$

b) $\nabla g(x,y,z) = (2xy^3z^4, 3x^2y^2z^4, 4x^2y^3z^3)$

4. Calcule la derivada direccional del campo $f(x,y) = x^3 + 3xy$ en el punto $(1,1)$ a lo largo de la recta $y = x$ y en la dirección de decrecimiento de x, de dos formas distintas:

a) Utilizando la definición de derivada direccional.

b) Utilizando una de las aplicaciones del gradiente.

Solución

Para obtener la dirección de decrecimiento de x sobre la recta $y = x$ tomamos dos puntos cualesquiera de la recta, por ejemplo $(0,0)$ y $(1,1)$, y determinamos un vector $\boldsymbol{v}$ en la dirección de decrecimiento de la x que, en este caso, sería el vector que va desde el punto $(1,1)$ al punto $(0,0)$, es decir, $\boldsymbol{v} = (0,0) - (1,1) = (-1,-1)$. Pero la definición de derivada direccional exige que el vector sea unitario, así que consideraremos el vector $\boldsymbol{u} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

a)
$$g(t) = f\left((1,1) + t\left(\tfrac{-1}{\sqrt{2}}, \tfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right) = f\left(1 - \tfrac{t}{\sqrt{2}}, 1 - \tfrac{t}{\sqrt{2}}\right) =$$
$$= \left(1 - \tfrac{t}{\sqrt{2}}\right)^3 + 3\left(1 - \tfrac{t}{\sqrt{2}}\right)\left(1 - \tfrac{t}{\sqrt{2}}\right) = \left(1 - \tfrac{t}{\sqrt{2}}\right)^3 + 3\left(1 - \tfrac{t}{\sqrt{2}}\right)^2$$
$$g'(t) = -\tfrac{3}{\sqrt{2}}\left(1 - \tfrac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 - \tfrac{6}{\sqrt{2}}\left(1 - \tfrac{t}{\sqrt{2}}\right) \rightsquigarrow g'(0) = \frac{-9}{\sqrt{2}}$$

b) $f(x,y) = x^3 + 3xy$, $\nabla f(x,y) = (3x^2 + 3y, 3x)$, $\nabla f(1,1) = (6,3)$

$$D_{\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)} f(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = (6,3) \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-9}{\sqrt{2}}$$

5. Consideremos el campo escalar $f(x,y) = x\mathrm{e}^{1-y}$ y el punto $P = (3,1)$.

a) Calcule la derivada direccional máxima de f en P.

b) Comprobar que la derivada direccional de f en P en dirección al punto $(0,0)$ es 0, y justifique este resultado.

Solución

$f(x,y) = x\mathrm{e}^{1-y}$, $\nabla f(x,y) = (\mathrm{e}^{1-y}, -x\mathrm{e}^{1-y})$, $\nabla f(3,1) = (1,-3)$

a) El gradiente determina la dirección de máximo crecimiento:

$$(1,-3) \quad \to \quad \boldsymbol{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

y la derivada direccional $D_{\boldsymbol{u}}f(\boldsymbol{a}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{u}$ es

$$D_{\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)} f(3,1) = (1,-3) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \sqrt{10}$$

b) La dirección de P al $(0,0)$ es

$$(0,0) - (3,1) = (-3,-1) \quad \to \quad \boldsymbol{u} = \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

y la derivada direccional $D_{\boldsymbol{u}}f(\boldsymbol{a}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{u}$ es

$$D_{\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right)} f(3,1) = (1,-3) \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = 0$$

Obsérvese que el vector $\boldsymbol{u} = \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ es perpendicular al gradiente $(1,-3)$ y, por lo tanto, determina la dirección tangente a la curva, por esa razón, la derivada direccional es 0.

6. Encuentre las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal al grafo del campo $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x+y}$ en el punto $(2,2,1)$.

Solución

Consideramos el grafo como superficie de nivel del campo escalar

$$F(x,y,z) = \frac{x^2}{x+y} - z = 0$$

Entonces:

- $\nabla F(x,y,z) = \left(\dfrac{x^2+2xy}{(x+y)^2}, \dfrac{-x^2}{(x+y)^2}, -1\right)$
- $\nabla F(2,2,1) = \left(\dfrac{3}{4}, -\dfrac{1}{4}, -1\right)$
- Ecuación del plano tangente:

$$\frac{3}{4}(x-2) - \frac{1}{4}(y-2) - 1(z-1) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad 3x - y - 4z = 0$$

- Ecuaciones paramétricas de la recta normal:

$$\begin{cases} x &= 2+\frac{3}{4}t \\ y &= 2-\frac{1}{4}t \\ z &= 1-t \end{cases}$$

7. Encuentre las ecuaciones del plano tangente y la recta normal a la superficie $x \operatorname{sen} y + x^2 e^z = 4$ en el punto $(2, \pi, 0)$.

Solución

- La superficie $x \operatorname{sen} y + x^2 e^z = 4$ es una superficie de nivel del campo

$$F(x,y,z) = x \sin y + x^2 \mathrm{e}^z$$

- $\nabla F(x,y,z) = (\sin y + 2x\mathrm{e}^z, x\cos y, x^2\mathrm{e}^z)$
- $\nabla F(2,\pi,0) = (4,-2,4)$ Ecuación del plano tangente:

$$4(x-2) - 2(y-\pi) + 4(z-0) = 0$$

o bien

$$4x - 2y + 4z + 2\pi - 8 = 0$$

- Ecuaciones paramétricas de la recta normal: $\begin{cases} x &= 2+4t \\ y &= \pi-2t \\ z &= 4t \end{cases}$

8. Determine la ecuación general de la recta tangente a la curva $y^2 - 2y - x = 0$ en el punto $(0, 0)$, de dos maneras distintas:

   a) Utilice una parametrización de la curva.

   b) Utilice las propiedades del vector gradiente.

Solución

a) La curva $y^2 - 2y - x = 0$ es una parábola

$$(y-1)^2 = x+1 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} x(t) = t^2 - 1 \\ y(t) = t+1 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Utilizamos la parametrización

$$\left.\begin{aligned} x(t) = t^2 - 1 &= 0 \\ y(t) = t + 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \rightsquigarrow \quad t = -1$$

$$\begin{cases} x(t) = t^2 - 1 & \longrightarrow \quad x'(t) = 2t \quad \longrightarrow \quad x'(-1) = -2 \\ y(t) = t + 1 & \longrightarrow \quad y'(t) = 1 \quad \longrightarrow \quad y'(-1) = 1 \end{cases}$$

para calcular la recta tangente

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= 0 - 2t \\ y(t) &= 0 + t \end{aligned}\right\} \quad \rightsquigarrow \quad x + 2y = 0$$

b) La curva $y^2 - 2y - x = 0$ es una curva de nivel del campo

$$f(x, y) = y^2 - 2y - x$$

El vector gradiente en $(0, 0)$ es perpendicular a la curva de nivel

$$\nabla f(x, y) = (-1, 2y - 2) \quad \rightsquigarrow \quad \nabla f(0, 0) = (-1, -2)$$

y nos permite obtener la recta tangente

$$-1(x - 0) - 2(y - 0) = 0 \quad \text{equivalente a} \quad x + 2y = 0$$

9. Consideramos la curva

$$9x^2 + 4xy + 6y^2 - 14x + 8y + 10 = 0$$

a) Halle la recta tangente a la curva en el punto $\left(\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}\right)$.

b) Halle los puntos de la curva cuya tangente es horizontal.

Solución

a) La curva $9x^2 + 4xy + 6y^2 - 14x + 8y + 10 = 0$ es una elipse y podríamos obtener la recta tangente a partir de su parametrización pero vamos a hacerlo aplicando las propiedades del gradiente pues esta elipse es una curva de nivel del campo escalar

$$f(x, y) = 9x^2 + 4xy + 6y^2 - 14x + 8y + 10$$

- $\nabla f(x, y) = (18x + 4y - 14, 4x + 12y + 8)$
- $\nabla f\left(\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}\right) = (-2, 4)$

- La recta tangente a la curva en $\left(\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}\right)$ es

$$-2\left(x-\frac{4}{5}\right)+4\left(y+\frac{3}{5}\right)=0 \quad \rightsquigarrow \quad x-2y-2=0$$

b) Los puntos de tangente horizontal son puntos de la curva (1) que verifican (2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 9x^2+4xy+6y^2-14x+8y+10=0 \\ 18x+4y-14=0 \end{array} \right.$$

La solución del sistema son los puntos de tangencia horizontal:

$$\left(1-\frac{\sqrt{2}}{15}, \frac{3}{5\sqrt{2}}-1\right) \qquad \text{y} \qquad \left(1+\frac{\sqrt{2}}{15}, -\frac{3}{5\sqrt{2}}-1\right)$$