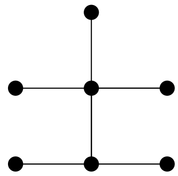
Билет 11

1 Задача

Для уравнения $u_{tt} = c^2 u_{xx} + f$ составить схему на шаблоне 

и исследовать аппроксимацию и устойчивость. Устойчивость исследовать 2-мя способами: методом гармоник и операторным методом, предварительно записав схему в канонической форме.

1.1 Рассмотрим вопрос об аппроксимации.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f \Rightarrow \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2} = c^2 \left(\sigma \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} + (1-\sigma) \frac{u_{i+1}^{j-1} - 2u_i^{j-1} + u_{i-1}^{j-1}}{h^2} \right) + \varphi_i^j$$

В более компактном виде

$$u_{\bar{t}t} = c^2(\sigma u_{\bar{x}x} + (1-\sigma)\check{u}_{\bar{x}x}) + \varphi \quad (*)$$

Разложим все вхождения функции в ряд Тейлора в окрестности точки (i, j).

Получим

$$u_{tt} + o(\tau^2) = c^2(\sigma u_{xx} + (1-\sigma)\check{u}_{xx} + o(h^2))$$

или

$$u_{tt} + o(\tau^2) = c^2(\sigma u_{xx} + (1-\sigma)u_{xx} - (1-\sigma)u_{xxt} + o(h^2 + \tau^2))$$

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = (\sigma - 1)u_{xxt} + o(h^2 + \tau^2) = o(h^2 + \tau) \text{ в случае } \sigma \neq 1$$

(при $\sigma = 1$ получаем схему крест, имеющую аппроксимацию $o(h^2 + \tau^2)$, но это всё таки другой шаблон)

1.2 Рассмотрим вопрос об устойчивость схемы.

1.2.1 Метод разделения переменных.

Будем искать решение численной задачи в виде

$$u = T(t) * X(x)$$

Подставляя в $(*)$ и полагая $\varphi = 0$, получаем

$$X\frac{\hat{T} - 2T + \check{T}}{\tau^2} = c^2\Lambda(\sigma T X + (1-\sigma)\check{T}X)$$

$$\frac{\hat{T} - 2T + \check{T}}{c^2\tau^2(\sigma T - (1-\sigma)\check{T})} = \frac{\Lambda X}{X} = -\lambda$$

На X имеем задачу Штурма-Лиувиля(доп.$X(0) = X(1) = 0$), решение которой хорошо известно.

Для временной функции полагаем

$$\hat{T} = qT, \quad \check{T} = \frac{1}{q}T$$

Покажем, что при определённом выборе σ выполнено $|q_k| \leqslant 1$, т.е схема устойчива.

На q имеем уравнение

$$q - 2 + \frac{1}{q} = -\lambda c^2\tau^2(\sigma + (1-\sigma)\frac{1}{q}),$$

$$q^2 - 2q + 1 = -\lambda c^2\tau^2(\sigma(q-1)+1),$$
$$q^2 + (\lambda c^2\tau^2\sigma - 2)q + 1 + (1-\sigma)\lambda c^2\tau^2 = 0,$$
$$D = (\lambda c^2\tau^2\sigma - 2)^2 - 4 - 4(1-\sigma)\lambda c^2\tau^2 =$$
$$= (\lambda c^2\tau^2\sigma)^2 - 4\lambda c^2\tau^2;$$

Если $\sigma \leqslant \frac{2}{\sqrt{\lambda}\tau c}$, то $D \leqslant 0$, и мы имеем два комплексно-сопряженных корня, по модулю равных $\sqrt{1 + (1-\sigma)\lambda c^2\tau^2}$.

Отсюда получаем $|q_k| \leqslant 1$, при $1 \leqslant \sigma \leqslant \frac{2}{\sqrt{\lambda_k}\tau c}$ и, учитывая $\lambda_k \leqslant \frac{4}{h^2}$, условие устойчивости $1 \leqslant \sigma \leqslant \frac{h}{\tau c}$.

Т.о мы показали, что при числе Куранта $k = \frac{c\tau}{h} \leqslant 1$, можно так выбрать σ, что схема будет устойчивой (при $\sigma = 1$ опять же получаем устойчивую схему крест)

1.2.2 Метод гармоник.

Вводим в исходном уравнении параметр $\delta = k^2$(квадрату числа Куранта), собираем коэффициенты при одних и тех же значениях функции и отбрасываем правую часть.

$$u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1} = \delta(\sigma(u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j) + (1-\sigma)(u_{i+1}^{j-1} - 2u_i^{j-1} + u_{i-1}^{j-1}))$$

$$u_i^{j+1} - \delta\sigma u_{i+1}^j + 2(\delta\sigma - 1)u_i^j - \delta\sigma u_{i-1}^j - \delta(1-\sigma)u_{i+1}^{j-1} + (1 + 2\delta(1-\sigma))u_i^{j-1} - \delta(1-\sigma)u_{i-1}^{j-1} = 0$$

подставляя гармоники $y_m^n = q^n e^{i\varphi m}$ получаем

$$q^2 - \delta\sigma q e^{i\varphi} + 2(\delta\sigma - 1)q - \delta\sigma q e^{-i\varphi} - \delta(1-\sigma)e^{i\varphi} + (1 + 2\delta(1-\sigma)) - \delta(1-\sigma)e^{-i\varphi} = 0$$

$$q^2 - q(\delta\sigma(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) - 2(\delta\sigma - 1)) + 1 - \delta(1-\sigma)(e^{i\varphi} + e^{i\varphi} - 2) = 0$$
$$q^2 - 2q(\delta\sigma(\cos\varphi - 1) + 1) + 1 - 2\delta(1-\sigma)(\cos\varphi - 1) = 0$$

$$\frac{D}{4} = 1 + 2\delta\sigma(\cos\varphi - 1) + \delta^2\sigma^2(\cos\varphi - 1)^2 - 1 - 2\delta\sigma(\cos\varphi - 1) + 2\delta(\cos\varphi - 1) = \delta^2\sigma^2(\cos\varphi - 1)^2 + 2\delta(\cos\varphi - 1)$$

Учитывая, что $\cos\varphi - 1 \leqslant 1$ имеем

$$D \leqslant 0 \text{ при всех } \varphi\text{, если } \sigma^2 \leqslant \frac{1}{\delta}$$

Тогда корни комплексно сопряжённые, а модуль их меньше 1, если $\sigma \geqslant 1$

В итоге, как и в методе разделения переменных получаем, что при $1 \leqslant \sigma \leqslant \frac{1}{k}$ схема устойчива. А существуют такие σ при $k \leqslant 1$

1.2.3 Операторный метод.

$$u_i^{j+1}-\delta\sigma u_{i+1}^j+2(\delta\sigma-1)u_i^j-\delta\sigma u_{i-1}^j-\delta(1-\sigma)u_{i+1}^{j-1}+(1+2\delta(1-\sigma))u_i^{j-1}-\delta(1-\sigma)u_{i-1}^{j-1}=\tau^2\varphi_i^j$$

Или в матричном виде

$$B_0\hat{u}+B_1u+B_2\check{u}=\tau\varphi,$$

где

$$B_0=\tau^{-1}E,\quad B_1=\tau^{-1}\begin{vmatrix}2(\delta\sigma-1) & -\delta\sigma & 0 & 0 & . \\ -\delta\sigma & 2(\delta\sigma-1) & -\delta\sigma & 0 & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & -\delta\sigma & 2(\delta\sigma-1)\end{vmatrix}$$

$$B_2=\tau^{-1}\begin{vmatrix}1+2\delta(1-\sigma) & -\delta(1-\sigma) & 0 & 0 & . \\ -\delta(1-\sigma) & 1+2\delta(1-\sigma) & -\delta(1-\sigma) & . & \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & -\delta(1-\sigma) & 1+2\delta(1-\sigma)\end{vmatrix}$$

Перепишем трёхслойную схему в канонической форме

$$B\frac{\hat{u}-\check{u}}{2\tau}+R(\hat{u}-2u+\check{u})+Au=\varphi$$

Здесь

$$B=B_0-B_2=\frac{1}{\tau}\begin{vmatrix}-2\delta(1-\sigma) & \delta(1-\sigma) & 0 & 0 & . \\ \delta(1-\sigma) & -2\delta(1-\sigma) & \delta(1-\sigma) & . & \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & \delta(1-\sigma) & -2\delta(1-\sigma)\end{vmatrix}$$

$$R=\frac{1}{2\tau}(B_0+B_2)=\frac{1}{2\tau^2}\begin{vmatrix}2+2\delta(1-\sigma) & -\delta(1-\sigma) & 0 & 0 & . \\ -\delta(1-\sigma) & 2+2\delta(1-\sigma) & -\delta(1-\sigma) & . & \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & -\delta(1-\sigma) & 2+2\delta(1-\sigma)\end{vmatrix}$$

$$A=\frac{1}{\tau}(B_0+B_1+B_2)=\frac{1}{\tau^2}\begin{vmatrix}2\delta & -\delta & 0 & 0 & . \\ -\delta & 2\delta & -\delta & 0 & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & -\delta & 2\delta\end{vmatrix}$$

$$R-\frac{1}{4}A=\frac{1}{2\tau^2}\begin{vmatrix}2+\delta-2\delta\sigma & -\frac{\delta}{2}+\delta\sigma & 0 & 0 & . \\ -\frac{\delta}{2}+\delta\sigma & 2+\delta-2\delta\sigma & -\frac{\delta}{2}+\delta\sigma & . & \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & -\frac{\delta}{2}+\delta\sigma & 2+\delta-2\delta\sigma\end{vmatrix}$$

Хотим, чтобы выполнялись условия теоремы об устойчивости трёхслойной схемы по начальным данным.

Матрицы A и R являются самосопряжёнными $A=A^*, R=R^*$.

Потребуем, чтобы
1. $A > 0$
2. $B \geqslant 0$
3. $R > 0$
4. $R - \frac{1}{4}A > 0$

Для выполнения этих требований необходимо и достаточно(доказательство можно найти в Приложении к работе), чтобы были справедливы следующие неравенства(условия диагонального преобладания для матриц + положительность диагональных элементов).

$$\begin{cases} 2 \geqslant 2, & (A) \\ -1 + \sigma \geqslant 0, & (B) \\ 1 + \delta(1-\sigma) \geqslant \delta(\sigma - 1), & (R) \\ 2 + \delta - 2\delta\sigma \geqslant -\delta + 2\delta\sigma. & (R - \frac{1}{4}A) \end{cases}$$

Получаем достаточное условие устойчивости схемы по начальным данным

$$1 \leqslant \sigma \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2\delta}$$

которое можно удовлетворить при том же $k \leqslant 1$, что и в методе разделения переменных.

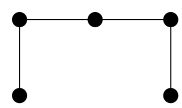
Кроме того при выполнение условий, записанных выше, схема оказывается устойчивой и по правой части.

$$\|Y(t+\tau)\| \leqslant \|Y(\tau)\| + M_2 \max_{\tau < t' \leqslant t} (\|\varphi(t')\|_{A^{-1}} + \|\varphi_{\bar{t}}(t')\|_{A^{-1}})$$

2 Задача.

Привести к каноническому виду схему

$$2\gamma y_i^{j+1} = (\gamma - \frac{1}{2})(y_{i-1}^{j+1} + y_{i+1}^{j+1}) + \frac{1}{2}(y_{i-1}^{j} + y_{i+1}^{j}), \quad \gamma = \frac{\tau}{h^2}$$



и исследовать её устойчивость. Устойчивость исследовать 2-мя способами: методом гармоник и операторным методом, предварительно записав схему в канонической форме. Сформулировать корректные начальные и граничные условия для разностной задачи. Предложить метод решения разностной задачи и сформулировать достаточные условия его устойчивости.

2.1 Рассмотрим устойчивость схемы.

2.1.1 Метод гармоник.

Запишем уравнение для погрешностей решения

$$2\gamma \delta y_i^{j+1} = (\gamma - \frac{1}{2})(\delta y_{i-1}^{j+1} + \delta y_{i+1}^{j+1}) + \frac{1}{2}(\delta y_{i-1}^{j} + \delta y_{i+1}^{j}), \quad \gamma = \frac{\tau}{h^2}$$

Гармоники $\delta y_{n,q}^{j}$ и $\delta y_{n,q}^{j+1}$ на слоях j и $j+1$ связаны соотношениями

$$\delta y_{n,q}^{j+1} = \lambda_q \delta y_{n,q}^{j}, \quad \delta y_{n,q}^{j} = C_q(t_j)e^{iqhn}$$

Подставляя в уравнение получаем

$$2\gamma\lambda_q = (\gamma - \frac{1}{2})(\lambda_q e^{-iqh} + \lambda_q e^{iqh}) + \frac{1}{2}(e^{-iqh} + e^{iqh})$$

$$\lambda_q = \frac{e^{-iqh} + e^{iqh}}{4\gamma + (1-2\gamma)(e^{-iqh} + e^{iqh})} = \frac{\cos qh}{2\gamma + (1-2\gamma)\cos qh}$$

Потребуем, чтобы особенность функции $\frac{-2\gamma}{1-2\gamma}$ не лежала на $[-1;1]$. Для этого $\gamma > \frac{1}{4}$.

Т.к $\lambda_q(\cos qh) = \lambda_q(x)$ возрастает при $x \in [-1,1]$,

$$\lambda_q^{'}(x) = \frac{2\gamma}{(2\gamma + (1-2\gamma)x)^2} > 0$$

получаем

$$\lambda_q \in [\frac{1}{1-4\gamma}, 1]$$

Условие устойчивости схемы выполнено, если

$$\frac{1}{1-4\gamma} \geqslant -1, \quad \gamma > \frac{1}{4}$$

или

$$\gamma = \frac{\tau}{h^2} \geqslant \frac{1}{2}$$

2.1.2 Операторный метод

Запишем схему в матричном виде

$$B_0\hat{y} + B_1 y = 0$$

где

$$B_0 = \begin{vmatrix} 2\gamma & \frac{1}{2}-\gamma & 0 & 0 & . \\ \frac{1}{2}-\gamma & 2\gamma & \frac{1}{2}-\gamma & . & \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & \frac{1}{2}-\gamma & 2\gamma \end{vmatrix} \quad B_1 = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & . \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & . & \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix}$$

или в канонической форме

$$B\frac{\hat{y} - y}{\tau} + Ay = 0$$

$$B = B_0, \quad A = \frac{B_0 + B_1}{\tau} = \frac{1}{\tau}\begin{vmatrix} 2\gamma & -\gamma & 0 & 0 & . \\ -\gamma & 2\gamma & -\gamma & . & \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & -\gamma & 2\gamma \end{vmatrix}$$

$$B - \frac{\tau}{2}A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2\gamma & 1-\gamma & 0 & 0 & . \\ 1-\gamma & 2\gamma & 1-\gamma & . & \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & 1-\gamma & 2\gamma \end{vmatrix}$$

Матрицы A и B являются самосопряжёнными $A = A^*, B = B^*$.

Требуем выполнения
1. $A > 0$
2. $B > 0$
3. $B - \frac{\tau}{2}A > 0$

Для этого должна быть справедлива систему неравенств

$$\begin{cases} 2 \geqslant 2, & (A) \\ \gamma \geqslant |\frac{1}{2} - \gamma|, & (B) \\ \gamma \geqslant |1 - \gamma|. & (B - \frac{\tau}{2}A) \end{cases}$$

откуда получаем

$$\gamma \geqslant \frac{1}{2}$$

Т.о при $\gamma \geqslant \frac{1}{2}$ схема устойчива по начальным данным в норме операторов A и B. Это условие совпадает с полученными в методе гармоник.

2.2 Решение разностной задачи.

Используемую разностную схему легко переписать в следующем виде

$$\Lambda \hat{y} = \frac{1}{2}((y_t)_{j+1} + (y_t)_{j-1})$$

где Λ - оператор Лапласа, а $(y_t)_{j+1}$ и $(y_t)_{j-1}$ - это аппроксимации производной по времени соответственно в двух крайних левых точках шаблона и в двух крайних правых.

Рассматриваемая схема аппроксимирует уравнение теплопроводности.

$$u_t = u_{xx}$$

Предполагается, что мы решаем задачу в некоторой(прямоугольной) области. Тогда мы должны задать начальные условия (в т. $t = 0$) и граничные условия (в т. $x = 0$ и $x = L$).

Рассмотрим например холодный стержень, у которого на левом конце поддерживается постоянная температура.

$$\begin{aligned} y(x,0) &= 0, \\ y(0,t) &= y_0, \\ y(L,t) &= 0. \end{aligned}$$

Значения y на 1-м и всех последующих слоях по времени, рассчитываются по формуле

$$B\hat{y} = (B - \tau A)y \quad (*)$$

где справа в равенстве стоит известный вектор. Для этого используется методом прогонки, который в данном случае будет устойчивым т.к. матрица B имеет диагональное преобладание.

Действительно, для неё: $a1 + a2 + a3 = 1$

3 Приложение

Рассмотрим вопрос о положительной определённости матрицы вида

$$M = \begin{vmatrix} a & \pm 1 & 0 & 0 & . \\ \pm 1 & a & \pm 1 & . & \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & \pm 1 & a \end{vmatrix}$$

где число $a \geqslant 0$, иначе матрица положительно определённой не является.

Главные миноры такой матрицы находятся из рекуррентного соотношения

$$\Delta_k = a\Delta_{k-1} - \Delta_{k-2}, \quad \Delta_0 = 1, \quad \Delta_{-1} = 0$$

Решим эту рекурренту

$$\lambda^2 = a\lambda - 1$$

$$\lambda_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$$

$$\Delta_k = c_1 \lambda_1^k + c_2 \lambda_2^k$$

Используя $\Delta_0 = 1, \quad \Delta_{-1} = 0$ находим c_1 и c_2

$$c_1 + c_2 = 1, \quad \frac{c1}{c2} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

$$c_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad c_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

По Критерию Сильвестра $M > 0$ т. и т.т, когда все $\Delta_k > 0$. Найдём ограничения на a для выполнения этого равенства при всех k.

1. a $>$ 2;

$$\frac{\lambda_1^{k+1}}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{\lambda_2^{k+1}}{\lambda_2 - \lambda_1} > 0$$

$$\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1} > 0$$

$$\lambda_1 > \lambda_2$$

что выполнено при всех рассматриваемых a.

2. a $<$ 2;

$$\Delta_k = \frac{\lambda_1^{k+1}}{\lambda_1 - \bar{\lambda}_1} - \frac{\bar{\lambda}_1^{k+1}}{\lambda_1 - \bar{\lambda}_1}, \quad \text{т. к.} \quad \lambda_2 = \bar{\lambda}_1 (\text{комплексно сопряжены})$$

подставляя $\lambda_1 = |r|e^{i\varphi}$, получаем

$$\Delta_k = \frac{|r|}{Im\lambda_1} \frac{e^{i(k+1)\varphi} - e^{-i(k+1)\varphi}}{2i} = \frac{|r|}{Im\lambda_1} \sin{(k+1)\varphi}$$

видим, что в этом случае $\Delta_k < 0$ при некоторых k.

3. a $=$ 2;

$$\Delta_k = c_1 k + c_2$$

$$c_2 = 1, \quad c_1 = 1$$

$$\Delta_k = k + 1 > 0, \quad \text{при всех } k > 0$$

Обобщая всё результаты получаем условия на a: $a \geqslant 2$

Пользуясь этим легко найти условие положительной определённости для матрицы вида

$$M^{'} = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & . \\ b & a & b & . & \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & b & a \end{vmatrix}$$

где b уже произвольное число.

Если $b = 0$ проверка очевидна, если $b \neq 0$ получаем

$$M^{'} = |b| \begin{vmatrix} \frac{a}{|b|} & sign(b) & 0 & 0 & . \\ sign(b) & \frac{a}{|b|} & sign(b) & . & \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & sign(b) & \frac{a}{|b|} \end{vmatrix}$$

А из доказанного следует, что $M^{'}$ положительно определена т. и т.т. когда $a \geqslant 2|b|$ Отметим, что это условие означает диагональное преобладание матрицы $M^{'}$ при положительности диагональных элементов.