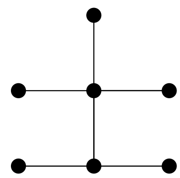
Билет 11

1 Задача

Для уравнения $u_{tt} = c^2 u_{xx} + f$ составить схему на шаблоне 

и исследовать аппроксимацию и устойчивость. Устойчивость исследовать 2-мя способами: методом гармоник и операторным методом, предварительно записав схему в канонической форме.

1.1 Рассмотрим вопрос об аппроксимации.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f \Rightarrow \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2} = c^2 \left(\sigma \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} + (1-\sigma) \frac{u_{i+1}^{j-1} - 2u_i^{j-1} + u_{i-1}^{j-1}}{h^2} \right) + \varphi_i^j$$

В более компактном виде

$$u_{\bar{t}t} = c^2(\sigma u_{\bar{x}x} + (1-\sigma)\check{u}_{\bar{x}x}) + \varphi \quad (*)$$

Разложим все вхождения функции в ряд Тейлора в окрестности точки (i, j).

Получим

$$u_{tt} + o(\tau^2) = c^2(\sigma u_{xx} + (1-\sigma)\check{u}_{xx} + o(h^2))$$

или

$$u_{tt} + o(\tau^2) = c^2(\sigma u_{xx} + (1-\sigma)u_{xx} - (1-\sigma)u_{xxt} + o(h^2+\tau^2))$$

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = (\sigma - 1)u_{xxt} + o(h^2 + \tau^2) = o(h^2 + \tau) \text{ в случае } \sigma \neq 1$$

(при $\sigma = 1$ получаем схему крест, имеющую аппроксимацию $o(h^2 + \tau^2)$, но это всё таки другой шаблон)

1.2 Рассмотрим вопрос об устойчивость схемы.

1.2.1 Метод разделения переменных.

Будем искать решение численной задачи в виде

$$u = T(t) * X(x)$$

Подставляя в $(*)$ и полагая $\varphi = 0$, получаем

$$X\frac{\hat{T} - 2T + \check{T}}{\tau^2} = c^2\Lambda(\sigma T X + (1-\sigma)\check{T}X)$$

$$\frac{\hat{T} - 2T + \check{T}}{c^2\tau^2(\sigma T - (1-\sigma)\check{T})} = \frac{\Lambda X}{X} = -\lambda$$

На X имеем задачу Штурма-Лиувиля(доп.$X(0) = X(1) = 0$), решение которой хорошо известно.

Для временной функции полагаем

$$\hat{T} = qT, \quad \check{T} = \frac{1}{q}T$$

Покажем, что при определённом выборе σ выполнено $|q_k| \leqslant 1$, т.е схема устойчива.

На q имеем уравнение

$$q - 2 + \frac{1}{q} = -\lambda c^2\tau^2(\sigma + (1-\sigma)\frac{1}{q}),$$

$$q^2 - 2q + 1 = -\lambda c^2\tau^2(\sigma(q-1) + 1),$$
$$q^2 + (\lambda c^2\tau^2\sigma - 2)q + 1 + (1-\sigma)\lambda c^2\tau^2 = 0,$$
$$D = (\lambda c^2\tau^2\sigma - 2)^2 - 4 - 4(1-\sigma)\lambda c^2\tau^2 =$$
$$= (\lambda c^2\tau^2\sigma)^2 - 4\lambda c^2\tau^2;$$

Если $\sigma \leqslant \frac{2}{\sqrt{\lambda}\tau c}$, то $D \leqslant 0$, и мы имеем два комплексно-сопряженных корня, по модулю равных $\sqrt{1 + (1-\sigma)\lambda c^2\tau^2}$.

Отсюда получаем $|q_k| \leqslant 1$, при $1 \leqslant \sigma \leqslant \frac{2}{\sqrt{\lambda_k}\tau c}$ и, учитывая $\lambda_k \leqslant \frac{4}{h^2}$, условие устойчивости $1 \leqslant \sigma \leqslant \frac{h}{\tau c}$.

Т.о мы показали, что при числе куранта $\delta = \frac{c^2\tau^2}{h^2} \leqslant 1$, можно так выбрать σ, что схема будет устойчивой (при $\sigma = 1$ опять же получаем устойчивую схему крест)

1.2.2 Операторный метод.

$$u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1} = \delta(\sigma(u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j) + (1-\sigma)(u_{i+1}^{j-1} - 2u_i^{j-1} + u_{i-1}^{j-1})) + \tau^2\varphi_i^j,$$

$$u_i^{j+1} - \delta\sigma u_{i+1}^j + 2(\delta\sigma - 1)u_i^j - \delta\sigma u_{i-1}^j - \delta(1-\sigma)u_{i+1}^{j-1} + (1 + 2\delta(1-\sigma))2u_i^{j-1} - \delta(1-\sigma)u_{i-1}^{j-1} = \tau^2\varphi_i^j,$$

Или в матричном виде

$$B_0\hat{u} + B_1 u + B_2\check{u} = \tau\varphi,$$

где

$$B_0 = \tau^{-1}E, \quad B_1 = \tau^{-1}\begin{vmatrix} 2(\delta\sigma-1) & -\delta\sigma & 0 & 0 & . \\ -\delta\sigma & 2(\delta\sigma-1) & -\delta\sigma & 0 & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & -\delta\sigma & 2(\delta\sigma-1) \end{vmatrix}$$

$$B_2 = \tau^{-1}\begin{vmatrix} 1+2\delta(1-\sigma) & -\delta(1-\sigma) & 0 & 0 & . \\ -\delta(1-\sigma) & 1+2\delta(1-\sigma) & -\delta(1-\sigma) & . & \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & -\delta(1-\sigma) & 1+2\delta(1-\sigma) \end{vmatrix}$$

Перепишем трёхслойную схему в канонической форме

$$B\frac{\hat{u} - \check{u}}{2\tau} + R(\hat{u} - 2u + \check{u}) + Au = \varphi$$

Здесь

$$B = B_0 - B_2 = \frac{1}{\tau}\begin{vmatrix} -2\delta(1-\sigma) & \delta(1-\sigma) & 0 & 0 & . \\ \delta(1-\sigma) & -2\delta(1-\sigma) & \delta(1-\sigma) & . & \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & \delta(1-\sigma) & -2\delta(1-\sigma) \end{vmatrix}$$

$$R = \frac{1}{2\tau}(B_0+B_2) = \frac{1}{2\tau^2}\begin{vmatrix} 2+2\delta(1-\sigma) & -\delta(1-\sigma) & 0 & 0 & . \\ -\delta(1-\sigma) & 2+2\delta(1-\sigma) & -\delta(1-\sigma) & . & \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & -\delta(1-\sigma) & 2+2\delta(1-\sigma) \end{vmatrix}$$

$$A = \frac{1}{\tau}(B_0+B_1+B_2) = \frac{1}{\tau^2}\begin{vmatrix} 2\delta & -\delta & 0 & 0 & . \\ -\delta & 2\delta & -\delta & 0 & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & -\delta & 2\delta \end{vmatrix}$$

$$R - \frac{1}{4}A = \frac{1}{2\tau^2}\begin{vmatrix} 2+\delta-2\delta\sigma & -\frac{\delta}{2}+\delta\sigma & 0 & 0 & . \\ -\frac{\delta}{2}+\delta\sigma & 2+\delta-2\delta\sigma & -\frac{\delta}{2}+\delta\sigma & . & \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & -\frac{\delta}{2}+\delta\sigma & 2+\delta-2\delta\sigma \end{vmatrix}$$

Далее при $a \geqslant 0$ рассмотрим вопрос о положительной определённости матрицы

$$M = \begin{vmatrix} a & \pm1 & 0 & 0 & . \\ \pm1 & a & \pm1 & . & \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & \pm1 & a \end{vmatrix}$$

Главные миноры такой матрицы находятся из рекуррентного соотношения

$$\Delta_k = a\Delta_{k-1} - \Delta_{k-2}, \quad \Delta_0 = 1, \quad \Delta_{-1} = 0$$

Решим эту рекурренту

$$\lambda^2 = a\lambda - 1$$

$$\lambda_1 = \frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$$

$$\Delta_k = c_1\lambda_1^k + c_2\lambda_2^k$$

Используя $\Delta_0 = 1, \quad \Delta_{-1} = 0$ находим c_1 и c_2

$$c_1 + c_2 = 1, \quad \frac{c1}{c2} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

$$c_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}, \quad c_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}$$

По Критерию Сильвестра $M > 0$ т. и т.т, когда все $\Delta_k > 0$. Найдём ограничения на a для выполнения этого равенства при всех k.

1. a > 2;

$$\frac{\lambda_1^{k+1}}{\lambda_1-\lambda_2}+\frac{\lambda_2^{k+1}}{\lambda_2-\lambda_1}>0$$
$$\lambda_1^{k+1}-\lambda_2^{k+1}>0$$
$$\lambda_1>\lambda_2$$

что выполнено при всех рассматриваемых a.

2. a < 2;

$$\Delta_k=\frac{\lambda_1^{k+1}}{\lambda_1-\bar{\lambda}_1}-\frac{\bar{\lambda}_1^{k+1}}{\lambda_1-\bar{\lambda}_1},\quad \text{т. к.}\quad \lambda_2=\bar{\lambda}_1(\text{комплексно сопряжены})$$

подставляя $\lambda_1=|r|e^{i\varphi}$, получаем

$$\Delta_k=\frac{|r|}{Im\lambda_1}\frac{e^{i(k+1)\varphi}-e^{-i(k+1)\varphi}}{2i}=\frac{|r|}{Im\lambda_1}\sin{(k+1)\varphi}$$

видим, что в этом случае $\Delta_k<0$ при некоторых k.

3. a = 2;

$$\Delta_k=c_1k+c_2$$
$$c_2=1,\quad c_1=1$$
$$\Delta_k=k+1>0,\quad \text{при всех } k>0$$

После этого заключаем, что

1. $A>0$,
2. $B\geqslant 0$, при $\sigma\geqslant 1$,
3. $R>0$, при $-2-\frac{2}{\delta(1-\sigma)}\geqslant 2$,
4. $R-\frac{1}{4}A>0$, при $2(\frac{1}{-\frac{\delta}{2}+\delta\sigma}-1)\geqslant 2\Rightarrow\sigma\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2\delta}$,

\+ очевидно $A=A^*, R=R^*$;

Получаем достаточное условие устойчивости по начальным данным

$$1\leqslant\sigma\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2\delta}$$

Которое можно удовлетворить при том же $\delta\leqslant 1$, что и в методе разделения переменных.

Кроме того при выполнение условий, записанных выше, схема оказывается устойчивой и по правой части.

$$\|Y(t+\tau)\|\leqslant\|Y(\tau)\|+M_2\max_{\tau<t^{`}\leqslant t}(\|\varphi(t^{`})\|_{A^{-1}}+\|\varphi_{\bar{t}}(t^{`})\|_{A^{-1}})$$

2 Задача.

Привести к каноническому виду схему

$$2\gamma y_i^{j+1}=(\gamma-\frac{1}{2})(y_{i-1}^{j+1}+y_{i+1}^{j+1})+\frac{1}{2}(y_{i-1}^{j}+y_{i+1}^{j}),\quad \gamma=\frac{\tau}{h^2}$$

и исследовать её устойчивость. Устойчивость исследовать 2-мя способами: методом гармоник и операторным методом, предварительно записав схему в канонической форме. Сформулировать корректные начальные и граничные условия для разностной задачи. Предложить метод решения разностной задачи и сформулировать достаточные условия его устойчивости.

2.1 Рассмотрим устойчивость схемы.

2.1.1 Метод гармоник.

Запишем уравнение для погрешностей решения

$$2\gamma\delta y_i^{j+1} = (\gamma - \frac{1}{2})(\delta y_{i-1}^{j+1} + \delta y_{i+1}^{j+1}) + \frac{1}{2}(\delta y_{i-1}^{j} + \delta y_{i+1}^{j}), \quad \gamma = \frac{\tau}{h^2}$$

Гармоники $\delta y_{n,q}^{j}$ и $\delta y_{n,q}^{j+1}$ на слоях j и $j+1$ связаны соотношениями

$$\delta y_{n,q}^{j+1} = \lambda_q \delta y_{n,q}^{j}, \quad \delta y_{n,q}^{j} = C_q(t_j)e^{iqhn}$$

Подставляя в уравнение получаем

$$2\gamma\lambda_q = (\gamma - \frac{1}{2})(\lambda_q e^{-iqh} + \lambda_q e^{igh}) + \frac{1}{2}(e^{-iqh} + e^{iqh})$$

$$\lambda_q = \frac{e^{-iqh} + e^{iqh}}{4\gamma + (1-2\gamma)(e^{-iqh} + e^{iqh})} = \frac{\cos qh}{2\gamma + (1-2\gamma)\cos qh}$$

Потребуем, чтобы особенность функции $\frac{-2\gamma}{1-2\gamma}$ не лежала на $[-1;1]$. Для этого $\gamma > \frac{1}{4}$.

Т.к $\lambda_q(\cos qh) = \lambda_q(x)$ возрастает при $x \in [-1, 1]$,

$$\lambda_q^{'}(x) = \frac{2\gamma}{(2\gamma + (1-2\gamma)x)^2} > 0$$

получаем

$$\lambda_q \in [\frac{1}{1-4\gamma}, 1]$$

Условие устойчивости счемы выполнено, если

$$\frac{1}{1-4\gamma} \geqslant -1, \quad \gamma > \frac{1}{4}$$

или

$$\gamma = \frac{\tau}{h^2} \geqslant \frac{1}{2}$$

2.1.2 Операторный метод

Запишем схему в матричном виде

$$B_0\hat{y} + B_1 y = 0$$

где

$$B_0 = \begin{vmatrix} 2\gamma & \frac{1}{2}-\gamma & 0 & 0 & . \\ \frac{1}{2}-\gamma & 2\gamma & \frac{1}{2}-\gamma & . & \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & \frac{1}{2}-\gamma & 2\gamma \end{vmatrix} \quad B_1 = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & . \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & . & \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix}$$

или в канонической форме

$$B\frac{\hat{y} - y}{\tau} + Ay = 0$$

$$B = B_0, \quad A = \frac{B_0 + B_1}{\tau} = \frac{1}{\tau}\begin{vmatrix} 2\gamma & -\gamma & 0 & 0 & . \\ -\gamma & 2\gamma & -\gamma & . & \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & -\gamma & 2\gamma \end{vmatrix}$$

$$B - \frac{\tau}{2}A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2\gamma & 1-\gamma & 0 & 0 & . \\ 1-\gamma & 2\gamma & 1-\gamma & . & \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & 1-\gamma & 2\gamma \end{vmatrix}$$

Сразу видим, что $A = A^* > 0$ и $B = B^*$.

Для выполнения $B - \frac{\tau}{2}A > 0$ требуем

$$\frac{\gamma}{1-\gamma} \geqslant 1, \quad 1-\gamma \geqslant 0 \text{ или } -\frac{\gamma}{1-\gamma} \geqslant 1, \quad -(1-\gamma) \geqslant 0$$
$$2\gamma - 1 \geqslant 0, \quad 1-\gamma \geqslant 0 \text{ или } 1 \geqslant 0, \quad -(1-\gamma) \geqslant 0$$

откуда

$$\gamma \geqslant \frac{1}{2}$$

При этом выполняется и $B > 0$.

Т.о при $\gamma \geqslant \frac{1}{2}$ схема устойчива по начальным данным в норме операторов A и B.

Это условие совпадают с полученными в методе гармоник.

2.2 Решении разностной задачи.

$$B\hat{y} = (B - \tau A)y \quad (*)$$

Предполагается, что мы решаем задачу в некоторой(прямоугольной) области. Тогда мы должны задать начальные условия (в т. $(0, i)$ при $0 \leqslant i \leqslant N_x$) и граничные условия (в т. $(j, 0)$ и (j, N_x) при $0 \leqslant j \leqslant N_t$). Что и понятно, т.к рассматриваемая схема

$$\Lambda\hat{y} = \frac{1}{2}((y_t)_{j+1} + (y_t)_{j-1})$$

аппроксимирует уравнение теплопроводности.

Рассмотрим например холодный стержень, у которого на левом конце поддерживается постоянная температура.

$$y_i^0 = 0, \quad 0 < i < N_x$$
$$y_0^j = y_0, \quad 0 \leqslant j \leqslant N_t$$
$$y_L^j = 0, \quad 0 \leqslant j \leqslant N_t$$

Значения y на 1-м и всех последующих слоях по времени, рассчитываются по $(*)$, где справа в равенстве стоит известный вектор. Для этого используется методом прогонки, который в данном случае будет устойчивым т.к матрица B имеет диагональное преобладание.

Действительно, для неё: $a1 + a2 + a3 = 1$

Будем рассматривать смешанную задачу для линейного однородного уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u(0,t) = b_l(t), \quad u(1,t) = b_r(t)$$

$$0 \leqslant x \leqslant 1$$

$$0 \leqslant t \leqslant T.$$

Для нахождения численного решения проведем дискретизацию только по пространственной переменной - временной займемся позже. Введем расчетную сетку по пространству:

$$G_h = \left(x_i : x_i = ih; i = 0, ..., n; h = \frac{1}{n} \right)$$

В узлах сетки будем рассматривать динамику значений функции-решения $[U_i(t)]_{i=0}^{n}$, которые теперь выступают в качестве неизвестных. Для приближения пространственной производной при $x = ih$, $\forall t$ воспользуемся стандартной разностной формулой 2-го порядка точности, в которой используются значения $U_{i-1}(t), U_i(t), U_{i+1}(t)$ на соседних прямых:

$$\frac{dU_i(t)}{dt} = \kappa \frac{U_{i+1}(t) - 2U_i(t) + U_{i-1}(t)}{h^2}, \quad i = 1, ..., n-1, \quad \forall t$$

Таким образом, мы получили систему ОДУ с вектором неизвестных $[U_i]_{i=1}^{n-1}$, матрицей A и вектором правой части $[F_i]_{i=1}^{n}$:

$$\frac{dU(t)}{dt} = AU(t) + F(t)$$

$$A = \frac{\kappa}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$F(t) = \frac{\kappa}{h^2} \begin{pmatrix} b_l(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_r(t) \end{pmatrix}$$ - вспомогательный вектор для учета граничных условий.

К полученной системе теперь можно применять как аналитические, так численные методы решения. Способ численного решения УрЧП, основанный на приближенном сведении последнего к системе ОДУ, называется методом прямых.