**Ш. А. АЛИМОВ, О. Р. ХОЛМУХАМЕДОВ,
М. А. МИРЗААХМЕДОВ**

А Л Г Е Б Р А

УЧЕБНИК ДЛЯ 8 КЛАССОВ СРЕДНИХ
ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ШКОЛ

Издание четвертое, переработанное и дополненное

*Рекомендован Министерством народного образования
Республики Узбекистан*

ИЗДАТЕЛЬСКО-ПОЛИГРАФИЧЕСКИЙ ТВОРЧЕСКИЙ ДОМ
“O‘QITUVCHI”
ТАШКЕНТ – 2019

УДК 512(075.3)=161.1
ББК 22.14я72
А 45

Рецензенты:

Г. П. Мухамедова – *доцент кафедры общей математики ТГПУ им. Низами;*

Н.Ш. Каршибаева – методист учебно-методического управления *ТГПУ им. Низами;*

М.М. Шаниязова – *преподаватель математики школы № 300 Сергелийского района города Ташкента;*

И.Б. Соибова – *преподаватель математики специализированной школы № 307 Яшнабадского района города Ташкента;*

Б.О. Уринбаева – *преподаватель математики специализированной школы № 6 Сергелийского района города Ташкента.*

Условные знаки, приведённые в учебнике:

△ – начало решения задачи

▲ – конец решения задачи

○ – начало обоснования математического доказательства или выведения формулы

● – конец обоснования или вывода

– занимательные задачи

16, 18,... – усложнённые задачи

– текст, который важно знать и полезно запомнить

ПРОВЕРЬ СЕБЯ! – самостоятельная работа для проверки знаний по основному материалу

– тестовые задания к главе

– исторические задачи

– исторические сведения

– практические и межпредметные задачи

Издано за счёт средств Республиканского целевого книжного фонда.

ISBN 978–9943–5749-8-4

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА „АЛГЕБРЫ“ 7 КЛАССА

Дорогой ученик! Для повторения знаний, полученных в 7-ом классе, предлагаем вам решить следующие упражнения.

1. Найдите числовое значение выражения:

1) $S = 2(ab + ac + bc)$, где $a=5$, $b=4$, $c=10$;

2) $V = \frac{h}{3}(a^2 + b^2 + ab)$, где $h=12$, $a=10$, $b=8$;

3) $S = \frac{(a+b)n}{2}$, где $a=10$, $b=40$, $n=16$;

4) $V = \frac{1}{3}abh$, где $a=30$, $b=20$, $h=25$.

2. Раскройте скобки и упростите:

1) $7a - (5a + 4b)$; 2) $9x - (7y - 4x)$;

3) $-(2a - 3b) - (-a + 3b)$; 4) $8x - (3y + 5x) - (-2y - x)$.

3. Найдите числовое значение выражения $S = \frac{1}{5}v + \frac{1}{200}v^2$, если:

1) $v = 60$; 2) $v = 75$; 3) $v = 90$;
4) $v = 100$; 5) $v = 20{,}4$; 6) $v = 28{,}5$.

4. За каждый правильный ответ по русскому языку и литературе начисляется n баллов, по математике – k баллов, по английскому языку – m баллов. Надира ответила на c вопросов по русскому языку и литературе, на a вопросов по математике, на b вопросов по английскому языку.

1) Составьте выражение для подсчёта общего числа баллов, набранных Надирой;

2) сколько баллов она набрала, если $a=35$, $b=34$, $c=36$; $k=3{,}1$; $m=2{,}1$ и $n=1{,}1$?

5. Решите уравнение **(5–6)**:

1) $2x + 15 = 3x - 11$; 2) $7 - 5x = x - 2$;

3) $2(x - 3) = 3(2 - x)$; 4) $-3(4 - x) = 2(x - 5)$.

6. 1) $3{,}2x + 1{,}8x = 6x - 3{,}5$; 2) $7{,}5x - 2{,}5x = 7x - 10$;

3) $0{,}5\,(0{,}4x - 8) = 5\,(0{,}2x - 1)$; 4) $2{,}4\,(5x - 3) = -\,0{,}8(10 - 5x)$.

7. После того как турист прошел 3 км и еще $\frac{1}{3}$ оставшегося пути, он подсчитал, что ему остается пройти еще 1 км. Какой путь он наметил пройти?

8. Кусок проволоки длиной 9,9 м разделили на две части. Найдите длину каждой из частей, если:
1) одна часть короче другой на 20 %;
2) одна часть длиннее другой на 20 %.

9. 1) Одно число составляет 45 % другого. Найдите эти числа, если одно из них больше другого на 66.
2) Одно число составляет 30 % другого. Найдите эти числа, если одно из них меньше другого на 35.

10. Из одного села в другое отправился пешеход со скоростью 4 км/ч. Через 2 часа следом за ним выехал велосипедист со скоростью 10 км/ч. Во второе село он прибыл на один час раньше пешехода. Найдите расстояние между сёлами.

11. Вычислите:

1) $\frac{3 \cdot 4^{10} - 5 \cdot 2^{19}}{2^{15}}$; 2) $\frac{2^3 \cdot (4 \cdot 3^{15} - 7 \cdot 3^{14})}{3^{16} + 5 \cdot 3^{15}}$; 3) $\frac{2^{15} \cdot a^{16}}{4^7 \cdot a^{15}}$.

12. Запишите одночлен в стандартном виде и вычислите его числовое значение:

1) $ba \cdot 8ac$, где $a = \frac{1}{2}, b = -3, c = 2$;

2) $\frac{4}{5}x \cdot 8y^2 \cdot \frac{5}{16}x^2y$, где $x = 3, y = \frac{1}{9}$.

13. Приведите многочлен к стандартному виду:

1) $1,2ab + 0,8b^2 - 0,2ab + 2,2b^2 + 2ab$;

2) $3a^2 2a^2 + 3b^2 4a^2 - 2a^2 5b^2 - 3a 2ab^2 - a^3 2a$.

14. Выполните действия (**14–15**):

1) $(3a^2 - 2ab - b^2) - (2a^2 - 3ab - 2b^2)$;

2) $(7a^2-13ab+10b^2)+(-3a^2+10ab-7b^2)$;

3) $(a^2+3ab-b^2)\cdot ab$; 4) $abc\cdot(2a^2b-3abc)$.

15. 1) $(x+y)(a-b)$; 2) $(a-b+c)(a-c)$;

3) $(a^2-b^2)(a+b)$; 4) $(a-3)(a-2)-(a-1)(a-4)$.

16. Упростите выражение:

1) $4a^3:a-(2a)^2+a^4:3a^2$;

2) $(5a^4+\frac{1}{3}a^3):a^2-(4a^3):(2a)+(2a)^2$;

3) $(0,1b^4-2b^3+0,4b^2+0,02b):(0,1b)$;

4) $\left(\frac{3}{8}a^3b^2+\frac{9}{10}a^2b^3-\frac{15}{16}ab^4\right):\left(\frac{3}{4}ab^2\right)$.

17. Разложите на множители (**17–18**):

1) $5a^2-15a^4+10a^6$; 2) $9a^3+12a^2-6a$;

3) $a(x+y)-b(x+y)$; 4) $(x-1)-a(1-x)$;

5) $4(a-3)+a(3-a)$; 6) $a^2(1-a)+4(a-1)$.

18. 1) $ay+zy-2ap-2zp$; 2) $5ac-6bd+5ad-6bc$;

3) $a(5a-4b)-10a+8b$; 4) $4ab-6cd-12ad+2bc$.

19. Вычислите:

1) $49^2+51\cdot 98+51^2$; 2) $58^2-116\cdot 33+33^2$;

3) $\frac{19^2+38\cdot 11+11^2}{19^2-11^2}$; 4) $\frac{53^2-53\cdot 94+47^2}{53^2-47^2}$;

5) $\frac{183^3-93^3}{183^2+183\cdot 93+93^2}$; 6) $\frac{43,73^2-43,73\cdot 56,27+56,27^2}{43,73^3+56,27^3}$.

20. Если производитель продаст свои изделия по 19 800 сумов за 1 килограмм, то получит 162 800 сумов прибыли. Если же он будет продавать свои изделия по 16 500 сумов за 1 килограмм, то его убыток составит 81 400 сумов. Сколько килограммов изделий было?

21. Тест для ученика состоял из 60 вопросов. Каждый правильный ответ оценивается в 5 баллов. За 4 неверных ответа в качестве штрафа убирают один верный ответ. На сколько вопросов верно ответил ученик, если он набрал 225 баллов?

22. Цифры трёхзначного числа последовательно уменьшаются. Из этого числа вычитают число, цифры которого записаны в обратном порядке. Докажите, что полученная разность делится на 2, 9 и 11.

23. Автомобиль двигался со скоростью 60 км/ч в течение 4 часов. На сколько процентов надо увеличить скорость, чтобы уменьшить время в пути на 1 час?

24. Расстояние между двумя сёлами один турист проходит за 2 часа, а другой – за 3 часа. Через сколько времени они встретятся, если выйдут одновременно навстречу друг другу?

25. Первоначально товар стоил a сумов. Его уценили на $q\%$. Через некоторое время новая цена увеличилась на $p\%$. По какой цене продают этот товар теперь?

26. Ширина прямоугольника равна a, а длина b. Его ширину увеличили на $p\%$, а длину уменьшили на q %. Вычислите площадь получившегося прямоугольника.

27. Машина двигалась n часов со скоростью v_1 км/ч и m часов со скоростью v_2 км/ч.

1) Сколько всего километров пути проехала машина?

2) Какова средняя скорость машины?

28. 405 тонн груза перевозили 50 машин грузоподъёмностью 5 тонн и 10 тонн. Сколько машин грузоподъёмностью 5 тонн и сколько машин грузоподъёмностью 10 тонн принимали участие в перевозке?

ГЛАВА I АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

§1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Задумайте число, умножьте его на 3, к полученному результату прибавьте 6, найденную сумму разделите на 3 и из результата вычтите задуманное число. Какое число получилось?

△ Пусть задумано число 8. Выполним по порядку все действия указанные в условии задачи:

1) $8 \cdot 3 = 24$;   2) $24 + 6 = 30$;   3) $30 : 3 = 10$;   4) $10 - 8 = 2$.

Получилось число 2. Это решение можно записать в виде выражения $(8 \cdot 3 + 6) : 3 - 8$, числовое значение которого равно 2.

Если же задумать число 5, то числовое значение выражения $(5 \cdot 3 + 6) : 3 - 5$ опять будет равно 2.

Получается, что какое бы число мы не задумали, в результате получаем число 2. Проверим это. Обозначим задуманное число буквой a и запишем по порядку все действия указанные в условии задачи:

$$(a \cdot 3 + 6) : 3 - a.$$

Упростим выражение, пользуясь известными нам свойствами арифметических операций:

$$(a \cdot 3 + 6) : 3 - a = a + 2 - a = 2. \ ▲$$

Для решения задачи мы обозначили произвольное число буквой a и, используя числа 3 и 6, скобки и знаки арифметических действий, составили выражение $(a \cdot 3 + 6) : 3 - a$. Это пример *алгебраического выражения* и образец записи условия задачи математическим языком.

Приведем еще примеры алгебраических выражений:

$$2(m+n), \ \ 3a + 2ab - 7, \ \ (a+b)(a-b), \ \ \frac{x+y}{a}.$$

Выражение, состоящее из чисел и букв, соединенных знаками арифметических действий называют алгебраическим.

Если в алгебраическом выражении вместо букв подставить некоторые числа и выполнинть указанные действия, то полученное число называется *числовым значением* алгебраического выражения.

Например, числовое значение выражения

$$3a+2b-7$$

при $a=2$, $b=3$ равно 5, так как $3\cdot2+2\cdot3-7=5$; числовое значение этого же выражения при $a=1$; $b=0$ равно -4, так как

$$3\cdot1+2\cdot0-7=-4.$$

Значение алгебраического выражения

$$(a\cdot3+6):3-a$$

равно 2 при любом значении a.

Задача 2. Найдите значение выражения $\frac{(3a+7)b}{a-b}$ при $a=10$, $b=5$.

$$\triangle\ \frac{(3\cdot10+7)\cdot5}{10-5}=\frac{37\cdot5}{5}=37.\ \blacktriangle$$

Алгебраическое выражение, состоящее из нескольких многочленов, соединенных знаками сложения, вычитания и умножения, называют *целым выражением*.

Любое целое выражение можно привести к многочлену в стандартном виде.

Пример: Целое выражение $P(a,b)=30a^3b^2-(6a^2b+a)(5ab-2)$ приведите к многочлену в стандартном виде.

$$\triangle\ P(a,b)=30a^3b^2-30a^2b\cdot ab-5ab\cdot a+12a^2b+2a=$$

$$=30a^3b^2-30a^3b^2-5a^2b+12a^2b+2a=7a^2b+2a.$$

Ответ: $7a^2b+2a.\blacktriangle$

Упражнения

1. Найдите значение алгебраического выражения:

1) $3a-2b$, где $a=\frac{1}{3}, b=1$;

2) $2a+3b$, где $a=3$, $b=-2$;

3) $0,25a-4c^2$, где $a=4, c=3$;

4) $\left(2a^2-\frac{1}{3}b\right)$, где $a=2, b=9$.

2. Найдите значение алгебраического выражения:

1) $\frac{1}{4}x-\frac{3}{7}y$, где $x=8, y=-14$;

2) $\frac{2}{3}x+\frac{4}{5}y$, где $x=9$, $y=-10$;

3) $\frac{a-3b}{a+3b}$, где $a=4$, $b=-2$;

4) $\frac{a+3c}{2a-c}$, где $a=3$, $c=-1$.

3. Из нефтяной скважины за 1 час вытекает 7 т нефти. Сколько тонн нефти вытекает из нефтяной скважины за m часов? А за сутки?

4. Сколько минут содержится в 1) m часах; 2) p секундах; 3) m часах, l минутах и p секундах?

5. Найдите утроенную разность чисел x и y. Найдите числовое значение этого выражения при:

1) $x=-0,37$, $y=-0,42$;

2) $x=-2,98$, $y=-4,48$;

3) $x=-\frac{5}{6}$, $y=-\frac{9}{4}$;

4) $x=\frac{2}{15}$, $y=-0,7$

6. Запишите произведение суммы и разности чисел x и y. Найдите числовое значение полученного выражения, если:

1) $x=-\frac{1}{8}$, $y=\frac{1}{4}$;

2) $x=-\frac{5}{8}, y=\frac{3}{4}$;

3) $x=0,15$, $y=-0,75$;

4) $x=1,32$, $y=-1,28$

Найдите числовое значение алгебраического выражения (**7–8**):

7. 1) $\dfrac{2mn(n+k)}{n-k}$, где $m=k=\dfrac{1}{3}$, $n=\dfrac{1}{2}$;

2) $\dfrac{(3p+1)\cdot 2p}{p-l}+\dfrac{1}{3}$, где $p=\dfrac{1}{3}$, $l=1$.

8. 1) $\dfrac{3(x-y)}{2p+q}$, где $x=8{,}31$; $y=2{,}29$; $p=2{,}01$; $q=2$;

2) $\dfrac{5(bc+m)}{2q+4\frac{1}{4}}$, где $b=\dfrac{2}{3}$; $c=6$; $q=\dfrac{1}{2}$, $m=\dfrac{1}{5}$.

9. Найдите значение n при $k=0$, $k=1$, $k=7$, $k=10$, пользуясь формулой нечетного числа $n=2k+1$.

10. Запишите в виде алгебраического выражения:
1) сумму двух последовательных натуральных чисел, меньшее из которых равно n; 2) произведение двух последовательных натуральных чисел, большее из которых равно m; 3) сумму трех последовательных четных натуральных чисел, меньшее из которых равно $2k$; 4) произведение трех последовательных нечетных натуральных чисел, меньшее из которых равно $2p+1$.

11. Запишите периметр и площадь фигуры в виде алгебраического выражения (рис. 1):

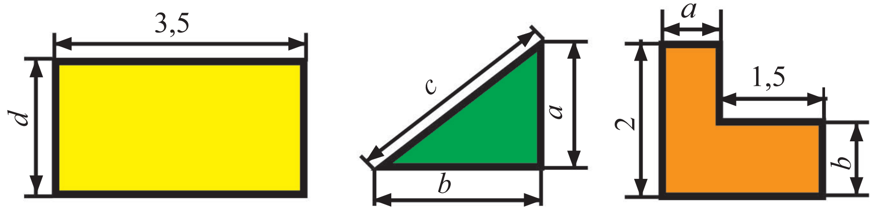


Рис. 1.

12. Для отопления дома было приобретено p тонн угля; из этого запаса израсходовали q тонн. Сколько тонн угля осталось? 1) Вычислите при $p=20$, $q=15$; 2) может ли число q быть больше числа p? А равным числу p?

13. На соревнования по борьбе кураш были проданы n билетов по 400 сумов и m билетов по 500 сумов. Сколько денег получили за все билеты? Составьте соответствующее выражение и вычислите его значение при $n=200$, $m=150$; $n=100$, $m=230$.

14. Цена одного альбома 200 сумов, одной тетради 40 сумов, одной ручки 60 сумов. Запишите формулу нахождения общей стоимости c альбомов, a тетрадей и b ручек (в сумах), обозначив ее буквой p. Найдите p по этой формуле, если $c=9$, $a=21$, $b=4$.

15. Каждую минуту через трубу, перегоняющую газ на тепловую станцию, проходит 26 м^3 газа. Сколько кубических метров газа проходит за 5 суток; m суток?

16. Геологи двигались по намеченному пути, проехав 3 часа 10 минут на лошади со скоростью c км/ч, проплыв на плоту 1 час 40 минут (скорость течения реки a км/ч), и пройдя пешком 2 часа 30 минут со скоростью b км/ч. Запишите формулу вычисления длины пути геологов, обозначив ее буквой s. Вычислите длину пути при $a=3{,}3$ км/ч, $b=5{,}7$ км/ч, $c=10{,}5$ км/ч.

17. Смешанное число записано в виде $a+\frac{b}{c}$. Запишите с помощью букв правило преобразования этого числа в неправильную дробь.

18. 1) Составьте формулу для вычисления периметра и площади фигуры (прямоугольника), изображенного на рисунке 2:

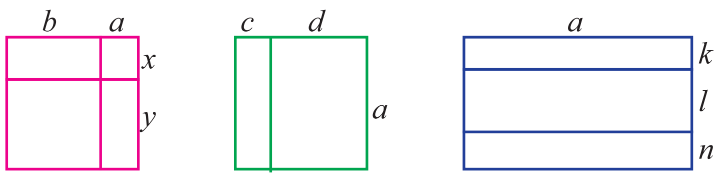


Рис. 2.

2) Используя фигуры на рисунке 2, докажите равенства:

a) $(a+b)(x+y)=ax+bx+ay+by$;

b) $a(c+d)=ac+ad$;

c) $a\cdot(k+l+n)=ak+al+an$

Объясните, что выражают эти формулы.

19. Составьте *практические задачи*, приводящие к формулам:

1) $a-(b+c+d)=a-b-c-d$;

2) $a-(b-c)=a-b+c$;

3) $(ab)c=a(bc)$;

4) $a-(b-c+d)=a-b+c-d$.

20. Докажите формулу $(ab):c=a\cdot(b:c)$. Используйте геометрическое обоснование и рисунок 3.

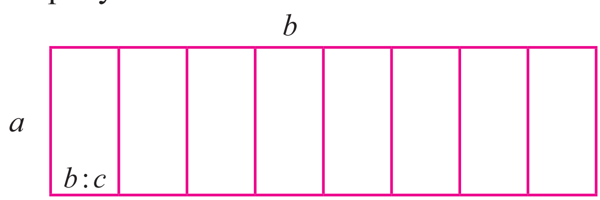


Рис. 3.

§2. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ДРОБЬ. СОКРАЩЕНИЕ ДРОБЕЙ

Задача 1. Скорость катера в стоячей воде равна a километров в час, а скорость течения реки b километров в час. Во сколько раз скорость катера по течению реки больше скорости катера против течения реки?

△ Скорость катера по течению реки равна $(a+b)$ километров в час; а против течения реки $(a-b)$ километров в час. Поэтому скорость катера по течению реки в

$$\frac{a+b}{a-b}$$

раз больше скорости катера против течения реки. ▲

Выражение $\frac{a+b}{a-b}$ называют *алгебраической дробью*. $a+b$ числитель этой дроби, а $a-b$ ее знаменатель.

Вообще, *дробь, числитель и знаменатель которой являются алгебраическими выражениями, называют алгебраической дробью.*

Приведем еще несколько примеров алгебраических дробей:

$$\frac{a}{b};\quad \frac{2}{x+y};\quad \frac{a-b}{c};\quad \frac{x(b+c)}{y(a-c)}.$$

Если в алгебраической дроби вместо букв подставить некоторые числа и выполнить необходимые вычисления, то получим *числовое значение* алгебраической дроби.

Например, при $a=10,\ b=8$ алгебраическое значение дроби $\frac{a+b}{a-b}$ равно $\frac{10+8}{10-8}=\frac{18}{2}=9$.

В алгебраическую дробь $\frac{a+b}{a-b}$ вместо a и b можно подставить произвольные не равные между собой числа $(a\neq b)$, так как при $a=b$ знаменатель дроби будет равен нулю, а это недопустимо.

Теперь условимся, что вместо букв, входящих в алгебраическую дробь, можно подставлять только допустимые значения, то есть те значения, которые не обращают в нуль знаменатель этой дроби.

Например, для дроби $\frac{a}{a(a-1)}$ допустимыми значениями a являются все числа, кроме $a=0$ и $a=1$.

Основное свойство дроби можно записать так:

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb},}$$

где $b\neq 0,\ m\neq 0.$

Если числитель и знаменатель алгебраической дроби умножить или разделить на одно и тоже алгебраическое выражение, то по этому свойству получим равную ей дробь, например: $\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 5}=\frac{15}{20},\ \frac{a+b}{b}=\frac{(a+b)\cdot c}{bc}$.

По основному свойству алгебраическую дробь можно сократить на один и тот же множитель, входящий в числитель и знаменатель этой дроби, например:

$$\frac{a(b+c)}{a(b-c)}=\frac{b+c}{b-c},\ \frac{(a+b)c}{(a+b)d}=\frac{c}{d}.$$

При упрощении дроби нужно сначала выделить общий множитель ее числителя и знаменателя. Рассмотрим соответствующие примеры.

Задача 2. Сократите дроби:

1) $\frac{12a^2b}{4ab^2}$; 2) $\frac{m^2-n^2}{m^2+mn}$.

△ 1) Одночлены $12a^2b$ и $4ab^2$ имеют общий множитель $4ab$. Числитель и знаменатель дроби разделим на $4ab$:

$$\frac{12a^2b}{4ab^2}=\frac{4ab\cdot 3a}{4ab\cdot b}=\frac{3a}{b}.$$

2) Многочлены m^2-n^2 и m^2+mn имеют общий множитель $m+n$, так как $m^2-n^2=(m+n)(m-n)$, $m^2+mn=m(m+n)$. Числитель и знаменатель дроби разделим на $m+n$:

$$\frac{m^2-n^2}{m^2+mn}=\frac{(m+n)(m-n)}{m(m+n)}=\frac{m-n}{m}.$$ ▲

❗ Чтобы сократить дробь, нужно разделить числитель и знаменатель этой дроби на их общий множитель.

Если знак числителя или знаменателя дроби $\frac{a}{b}$ поменять на противоположный, то получим дробь противоположную данной.

Дроби $\frac{-a}{b}$ и $\frac{a}{b}$; $\frac{a}{-b}$ и $\frac{a}{b}$ – противоположные. Кроме того,

$$\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b};\ \frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}.$$

Например, $\frac{-3}{7}=-\frac{3}{7}$; $\frac{-a}{1-a}=-\frac{a}{1-a}=\frac{a}{a-1}$.

Задача 3. Сократите дробь $\frac{3a(y-x)}{a^2(x-y)}$:

$$\triangle\quad \frac{3a(y-x)}{a^2(x-y)}=\frac{-3a(x-y)}{a^2(x-y)}=\frac{-3}{a}=-\frac{3}{a}.\quad\blacktriangle$$

Упражнения

21. Запишите алгебраическую дробь, числитель которой равен произведению чисел x и y, а знаменатель их сумме.

22. Запишите алгебраическую дробь, числитель которой равен разности чисел p и q, а знаменатель их произведению.

23. Запишите алгебраическую дробь, числитель которой равен разности квадратов чисел a и b, а знаменатель квадрату разности этих чисел.

24. Запишите алгебраическую дробь, числитель которой равен сумме кубов чисел c и d, а знаменатель удвоенному произведению этих чисел.

25. Найдите значение алгебраической дроби:

1) $\frac{1}{a}$, где $a=2\frac{3}{5}$;

2) $\frac{b+1}{b-1}$, где $b=1{,}5$;

3) $\frac{a^2+1}{2a}$, где $a=-3$;

4) $\frac{a-b}{a+2b}$, где $a=16$, $b=-3$;

5) $\frac{5a+b^2}{a^2-5b}$, где $a=2$, $b=8$;

6) $\frac{-7ab}{3b^2-a^3}$, где $a=3$, $b=4$.

26. Найдите 1) v из формулы $S=vt$; 2) V из формулы $p=\frac{m}{V}$;

3) R из формулы $C=2\pi R$; 4) a из формулы $P=2(a+b)$.

27. Сколько грузовых машин (x) грузоподъемностью a тонн нужно для перевозки картофеля, если картофель положили в n мешков по p килограммов в каждый? Найдите x при $n=90$, $p=50$, $a=1{,}5$.

28. Машина в час в среднем изготавливает c метров линолеума. За сколько дней машина изготовит a метров линолеума, если она работает n часов в день? Обозначьте время изготовления буквой t и найдите его значение при $c=47$, $a=11280$ и $n=16$.

29. Покажите равенство заданных дробей:

1) $\frac{6}{7}$ и $\frac{18}{21}$; 3) $\frac{2}{3}$ и $\frac{2a}{3a}$; 5) $\frac{m-n}{m+n}$ и $\frac{m^2-n^2}{(m+n)^2}$;

2) $\frac{-3}{5}$ и $\frac{27}{-45}$; 4) $\frac{2a}{7b}$ и $\frac{2a^2b}{7ab^2}$; 6) $\frac{a+3b}{c}$ и $\frac{(a+3b)c}{c^2}$.

Сократите дробь (**30–45**):

30. 1) $\frac{-48}{-56}$; 2) $\frac{-64}{-80}$; 3) $\frac{-121}{55}$; 4) $\frac{28}{-14}$.

31. 1) $\frac{12a}{20}$; 2) $\frac{2c}{3c}$; 3) $\frac{7b}{21b}$;

4) $\frac{4ab}{8ac}$; 5) $\frac{a^2}{2a}$; 6) $\frac{5x}{x^3y}$.

32. 1) $\frac{a^2}{a^3}$; 2) $\frac{b^3}{b^7}$;

3) $\frac{a^5}{a^4}$; 4) $\frac{b^6}{b^4}$.

33. 1) $\frac{6ab}{4a}$; 2) $\frac{14c}{49c}$; 3) $\frac{a^4b}{ab^3}$;

4) $\frac{3a^2b}{9a^3}$; 5) $\frac{12a^4b^2}{18a^3b^3}$; 6) $\frac{25a^3bc^2}{125ac^3}$.

34. 1) $\frac{4(m+n)}{5(m+n)}$; 3) $\frac{2b(m-n)}{8b(m-n)(m-n)}$; 5) $\frac{2(a-b)}{b-a}$;

2) $\frac{7a(a-b)}{5(a-b)}$; 4) $\frac{3a(a+b)}{9a(a+b)(a-b)}$; 6) $\frac{5(x-y)}{15(y-x)}$.

35. 1) $\frac{(a-b)^2}{a-b}$; 3) $\frac{m-n}{(n-m)^2}$; 5) $\frac{3m(1-x)^2}{9m^2(x-1)^2}$;

2) $\frac{m+n}{(m+n)^4}$; 4) $\frac{(2x-3y)^2}{3y-2x}$; 6) $\frac{8a^2b(a-b)}{4a^3b(b-a)^2}$.

36. 1) $\frac{3x+3y}{6c}$; 3) $\frac{2a+2b}{4a-4b}$; 5) $\frac{ac-bc}{ac+bc}$;

2) $\frac{8a}{4m-4n}$; 4) $\frac{12a-3}{6a+9}$; 6) $\frac{a+ab}{a-ab}$.

37. 1) $\frac{a^2}{a^2+ab}$; 3) $\frac{7a+14b}{3a+6b}$; 5) $\frac{3a-6b}{12b-6a}$;

2) $\frac{pq^3}{p^2q-pq^2}$; 4) $\frac{2m^2-mn}{2mn-n^2}$; 6) $\frac{x^2-2xy}{2y^2-xy}$.

38. 1) $\frac{12x^2-30xy}{30x^2-12xy}$; 2) $\frac{36a^2+24ab}{24a^2+36ab}$; 3) $\frac{m^3-3m^2n}{3m^2n-3m^3}$; 4) $\frac{a^3-2a^2b}{2a^3b^2-a^4b}$.

39. 1) $\frac{a^2-b^2}{a+b}$; 3) $\frac{4c^2-9x^2}{2c-3x}$; 5) $\frac{3a(a-b)}{6a^2(b-a)}$;

2) $\frac{a-b}{a^2-b^2}$; 4) $\frac{25-x^2}{5-x}$; 6) $\frac{5a(c^2-4)}{10a^2(2-c)}$.

40. 1) $\frac{8-3c}{9c^2-64}$; 3) $\frac{2y-10}{25-y^2}$; 5) $\frac{b^2-c^2}{b^4n-c^4n}$;

2) $\frac{100-49b^2}{7b+10}$; 4) $\frac{5y-y^2}{25-y^2}$; 6) $\frac{5a^3b+5ab^3}{a^4-b^4}$.

41. 1) $\frac{d^2-6d+9}{d-3}$; 2) $\frac{b+7}{b^2+14b+49}$; 3) $\frac{9-6a+a^2}{3-a}$; 4) $\frac{1-2p}{1-4p+4p^2}$.

42. 1) $\frac{4y^2-4y+1}{4y^2-1}$; 3) $\frac{3a^2-6ab+3b^2}{6a^2-6b^2}$;

2) $\frac{16a^2-1}{16a^2-8a+1}$; 4) $\frac{50m^2+100mn+50n^2}{15m^2-15n^2}$.

43. 1) $\dfrac{1-a^2}{(a-1)^2}$; 2) $\dfrac{(m-n)^2}{n-m}$; 3) $\dfrac{4y^2-4y+1}{2-4y}$; 4) $\dfrac{5-2x}{4x^2-20x+25}$.

44. 1) $\dfrac{9c^2-16}{16-24c+9c^2}$; 4) $\dfrac{36c-c^3}{c^3+12c^2+36c}$;

2) $\dfrac{16x^2-24xy+9y^2}{9y^2-16x^2}$; 5) $\dfrac{25b-49b^3}{49b^3-70b^2+25b}$;

3) $\dfrac{4x^2-4xy+y^2}{y^2-4x^2}$; 6) $\dfrac{4b^2-12bc+9c^2}{-2ab+3ac}$.

45. 1) $\dfrac{2a^5-128a^2}{(2a^2+8a+32)(a^4-4a^3)}$; 3) $\dfrac{3a^3+ab^2-6a^2b-2b^3}{9a^5-ab^4-18a^4b+2b^5}$;

2) $\dfrac{2a^4+3a^3+2a+3}{(a^2-a+1)(2a+3)}$; 4) $\dfrac{3ac^2+3bc^2-3ab^2-3b^3}{6ac^2+6bc^2-6ab^2-6b^3}$.

§3. ПРИВЕДЕНИЕ ДРОБЕЙ К ОБЩЕМУ ЗНАМЕНАТЕЛЮ

При сложении обыкновенных дробей их сначала приводят к общему знаменателю. Например, общим знаменателем дробей $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{25}$, $\frac{7}{10}$ будет 100, это число является наименьшим общим кратным чисел 4, 25, 10.

❗ Общий знаменатель алгебраических дробей – это наименьшее общее кратное знаменателей этих дробей. При приведении дробей к общему знаменателю применяют основное свойство дроби.

Задача 1. Приведите дроби $\dfrac{m}{3a^2b}$, $\dfrac{n}{6ab^2}$ и $\dfrac{p}{4ac}$ к общему знаменателю.

△ Общий знаменатель этих дробей должен делиться на знаменатель каждой дроби. Следовательно, он должен делиться на 3, 6, 4, то есть на 12; на a^2, a, то есть на a^2; на b и b^2, то есть на b^2; на c.

Таким образом, общий знаменатель дробей должен содержать множители 12, a^2, b^2 и c. Достаточно взять в качестве общего знаменателя произведение $12a^2b^2c$. Разделив общий знаменатель на знаменатель первой дроби, найдем одночлен, на который надо умножить числитель и знаменатель этой дроби. Этот одночлен называют *дополнительным множителем дроби*. Для первой дроби он равен $4bc$. Аналогично находим дополнительные множители для второй и третьей дробей: $2ac$ и $3ab^2$.

Умножив числитель и знаменатель первой, второй и третьей дробей соответственно на $4bc$, $2ac$ и $3ab^2$, приводим их к общему знаменателю $12a^2b^2c$:

$$\frac{m}{3a^2b}=\frac{4mbc}{12a^2b^2c},\ \frac{n}{6ab^2}=\frac{2nac}{12a^2b^2c},\ \frac{p}{4ac}=\frac{3pab^2}{12a^2b^2c}.\ \blacktriangle$$

Задача 2. Приведите к общему знаменателю дроби:

$$\frac{a}{x^2-y^2};\quad \frac{b}{2x^2-4xy+2y^2};\quad \frac{c}{3x^2+6xy+3y^2}.$$

$\triangle$ Разложим на множители знаменатели дробей. Общий знаменатель данных дробей должен делиться на знаменатель каждой дроби:

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y);$$

$$2x^2-4xy+2y^2=2\left(x^2-2xy+y^2\right)=2(x-y)^2;$$

$$3x^2+6xy+3y^2=3\left(x^2+2xy+y^2\right)=3(x+y)^2.$$

Чтобы общий знаменатель делился на знаменатель первой дроби, он должен содержать произведение $(x-y)(x+y)$.

Затем, чтобы общий знаменатель делился на знаменатель второй дроби, он должен содержать множитель $2(x-y)^2$. Поэтому к знаменателю первой дроби нужно приписать множитель $2(x-y)$, то есть общим множителем двух первых дробей является произведение

$$2(x-y)^2(x+y)$$

Чтобы общий знаменатель делился на знаменатель $3(x+y)^2$ третьей дроби, нужно к полученному произведению приписать множитель $3(x+y)$. Итак, общим знаменателем трех дробей будет произведение

$$6(x-y)^2(x+y)^2.$$

Чтобы привести дроби к общему знаменателю нужно их числители и знаменатели умножить на дополнительные множители, которые находят разделив общий знаменатель на знаменатель каждой дроби; дополнительные множители данных дробей соответственно равны:

$$6(x-y)(x+y),\ 3(x+y)^2,\ 2(x-y)^2.$$

Таким образом, данные дроби можно представить в виде:

$$\frac{a}{x^2-y^2}=\frac{6a(x-y)(x+y)}{6(x-y)^2(x+y)^2}; \qquad \frac{b}{2x^2-4xy+2y^2}=\frac{3b(x+y)^2}{6(x-y)^2(x+y)^2};$$

$$\frac{c}{3x^2+6xy+3y^2}=\frac{2c(x-y)^2}{6(x-y)^2(x+y)^2}. \ \blacktriangle$$

Чтобы привести алгебраические дроби к общему знаменателю:

1) нужно найти общий знаменатель данных дробей;

2) нужно найти дополнительные множители каждой дроби;

3) умножить знаменатель каждой дроби на его дополнительный множитель;

4) заменить числитель и знаменатель каждой дроби полученными выражениями.

Упражнения

Приведите следующие дроби к общему знаменателю (**46–53**):

46. 1) $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{5}{7}$ и $\frac{3}{14}$; 5) $\frac{x}{2y}$ и $\frac{x}{3y}$;

2) $\frac{1}{a}$ и $\frac{2}{b}$; 4) $\frac{a}{b}$ и $\frac{a}{2b}$; 6) $\frac{8}{15}$ и $\frac{5}{12}$.

47. 1) $\frac{3}{4a}$, $\frac{1}{5b}$ и $\frac{7}{20ab}$; | 2) $\frac{3x}{4y}$, $\frac{6}{xy}$ и $\frac{4y}{3x}$; | 3) $\frac{7}{a^2}$ и $\frac{8}{a^3}$; | 4) $\frac{a}{2x}$ и $\frac{b}{4x^3}$.

48. 1) a и $\frac{b^2}{a}$; | 2) $3b$ и $\frac{a^2}{2b}$; | 3) a^2 и $\frac{c}{2ab}$; | 4) $\frac{b}{3a}$, $\frac{3c}{2b}$ и ab.

49. 1) $\frac{1}{2p^2}$, $\frac{1}{6pk}$ и $\frac{1}{3k^2}$;

2) $\frac{1}{6b^2}$, $\frac{a^2+b^2}{9a^2b^2}$ и $\frac{3-a^2}{18ab^2}$;

3) $\frac{2a}{b^2}$, $\frac{4}{15a^2b}$ и $\frac{3}{20a^3b^4}$;

4) $\frac{7}{20x^4y}$, $\frac{31}{6xy^3}$ и $\frac{4}{3x^2y^4}$.

50. 1) $\frac{3}{x+y}$ и $\frac{5}{x}$;

2) $\frac{6}{a-1}$ и $\frac{2}{a}$;

3) $\frac{7x}{2(x-1)}$ и $\frac{5x}{x-1}$;

4) $\frac{2a^2}{3(a+1)}$ и $\frac{5a^2}{4(a+1)}$.

51. 1) $\frac{1}{x-y}$ и $\frac{1}{x+y}$;

2) $\frac{7a}{3x-y}$ и $\frac{6b}{3x+y}$;

3) $\frac{5x}{2x-2}$ и $\frac{3}{4x-4}$.

4) $\frac{3x}{4x+4y}$ и $\frac{x}{8x+8y}$.

52. 1) $\frac{3b}{b-2}$ и $\frac{4}{b^2-4}$;

2) $\frac{7a}{x^2-9}$ и $\frac{a}{x+3}$;

3) $\frac{1}{1-a}$, $\frac{2a}{1+a}$ и $\frac{a^2}{1-a^2}$;

4) $\frac{6x}{x-y}$, $\frac{7xy}{x+y}$ и $\frac{3}{x^2-y^2}$.

53. 1) $\frac{m}{2m+2n}$, $\frac{n}{8m-8n}$ и $\frac{mn}{6m^2-6n^2}$;

3) $\frac{1}{a^2-4b^2}$, $\frac{1}{3a^2+6ab}$ и $\frac{1}{2ab-a^2}$;

2) $\frac{2c}{5b-5c}$, $\frac{3a^2}{35b^2-35c^2}$ и $\frac{7b}{14b+14c}$;

4) $\frac{5}{4x-4}$, $\frac{4x}{1-x^2}$ и $\frac{1}{3x^2+3x}$.

№1

Улитка ползет с земли вверх по стволу дерева к его макушке. Ночью она поднимается вверх по дереву на 2 м, а днем спускается вниз на 1 м. На девятую ночь она добралась до макушки дерева. Найдите высоту дерева.

§4. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ

Правила вычисления суммы и разности дробей с равными знаменателями можно записать так:

$$\boxed{\frac{a}{m}+\frac{b}{m}=\frac{a+b}{m};} \qquad \boxed{\frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m}.}$$

Задача 1. Найдите сумму дробей $\frac{a-b}{a+b}$, $\frac{2a-b}{a+b}$ и $\frac{a-2b}{a+b}$.

$$\triangle\ \frac{a-b}{a+b}+\frac{2a-b}{a+b}+\frac{a-2b}{a+b}=\frac{a-b+2a-b+a-2b}{a+b}=\frac{4a-4b}{a+b}=\frac{4(a-b)}{a+b}.\ \blacktriangle$$

Задача 2. Найдите разность дробей $\frac{a^2}{a+b}$ и $\frac{b^2}{a+b}$.

$$\triangle\ \frac{a^2}{a+b}-\frac{b^2}{a+b}=\frac{a^2-b^2}{a+b}=\frac{(a+b)(a-b)}{a+b}=a-b.\ \blacktriangle$$

Чтобы сложить или вычесть дроби с разными знаменателями, нужно привести их к общему знаменателю и применить правила сложения и вычитания дробей с равными знаменателями.

Задача 3. Сложите дроби $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{2a^2b}$ и $\frac{1}{3ab^2}$.

$\triangle$ Общим знаменателем данных дробей будет произведение $6a^3b^2$. Следовательно,

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{2a^2b}+\frac{1}{3ab^2}=\frac{6b^2}{6a^3b^2}+\frac{3ab}{6a^3b^2}+\frac{2a^2}{6a^3b^2}=\frac{2a^2+3ab+6b^2}{6a^3b^2}.\ \blacktriangle$$

Задача 4. Найдите разность дробей $\frac{a}{3b^2c}$ и $\frac{c}{15ab^2}$

$$\triangle\ \frac{a}{3b^2c}-\frac{c}{15ab^2}=\frac{5a^2}{15ab^2c}-\frac{c^2}{15ab^2c}=\frac{5a^2-c^2}{15ab^2c}.\ \blacktriangle$$

Задача 5. Сложите дроби $\frac{1}{x^2-x}$ и $\frac{3}{x^2-1}$.

△ Разложим на множители многочлены в знаменателях дробей:

$$x^2-x=x(x-1),\ x^2-1=(x-1)(x+1).$$

Общим знаменателем дробей будет произведение $x(x-1)(x+1)$. Приведя дроби к общему знаменателю, найдем сумму:

$$\frac{1}{x^2-x}+\frac{3}{x^2-1}=\frac{1}{x(x-1)}+\frac{3}{(x-1)(x+1)}=\frac{x+1}{x(x^2-1)}+\frac{3x}{x(x^2-1)}=$$

$$=\frac{x+1+3x}{x(x^2-1)}=\frac{4x+1}{x(x^2-1)}.$$ ▲

(!) Чтобы найти сумму или разность дробей с разными знаменателями, нужно:
1) найти общий знаменатель дробей;
2) привести дроби к общему знаменателю;
3) сложить или вычесть полученные дроби;
4) упростить результат, если это возможно.

Задача 6. Вычислите числовое значение выражения

$$\frac{1}{a^2+4a+4}-\frac{4}{a^4+4a^3+4a^2}+\frac{4}{a^3+2a^2} \quad \text{при } a=0{,}5.$$

△ Данное выражение можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{1}{(a+2)^2}-\frac{4}{a^2(a^2+4a+4)}+\frac{4}{a^2(a+2)}=\frac{1}{(a+2)^2}-\frac{4}{a^2(a+2)^2}+\frac{4}{a^2(a+2)}=$$

$$=\frac{a^2-4+4(a+2)}{a^2(a+2)^2}=\frac{a^2+4a+4}{a^2(a+2)^2}=\frac{1}{a^2}.$$

Искомое числовое значение выражения равно:

$$\frac{1}{0{,}5^2}=\frac{1}{0{,}25}=\frac{100}{25}=4.$$ ▲

Упражнения

Выполните действия (**54–60**):

54. 1) $\dfrac{p}{q^2}+\dfrac{3p}{q^2}$; 2) $\dfrac{8a}{b^3}-\dfrac{3a}{b^3}$; 3) $\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{c}{a+b}$; 4) $\dfrac{x}{n+a}-\dfrac{y}{n+a}$.

55. 1) $\dfrac{c+d}{2a}+\dfrac{2c-d}{2a}$; 2) $\dfrac{a+2b}{3c^2}+\dfrac{5a-2b}{3c^2}$; 3) $\dfrac{a+b}{2c}-\dfrac{a-b}{2c}$;

4) $\dfrac{10a-b}{a^3}-\dfrac{3a-b}{a^3}$; 5) $\dfrac{(1+b)^2}{5d}+\dfrac{(1-b)^2}{5d}$; 6) $\dfrac{(2+a)^2}{a^2b}-\dfrac{(2-a)^2}{a^2b}$.

56. 1) $\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{7}$; 3) $\dfrac{2}{3a}+\dfrac{1}{a}$; 5) $\dfrac{c}{15a}+\dfrac{d}{3}$;

2) $\dfrac{4}{7}-\dfrac{5}{28}$; 4) $\dfrac{1}{b}-\dfrac{2}{5b}$; 6) $\dfrac{a}{4}-\dfrac{b}{12d}$.

57. 1) $\dfrac{m}{2}-\dfrac{1}{n}$; 2) $\dfrac{3}{a}+\dfrac{b}{5}$; 3) $5-\dfrac{1}{a}$; 4) $\dfrac{2}{b}+7$.

58. 1) $5-\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{b^2}$; 2) $\dfrac{2}{c}+4-\dfrac{3}{c^2}$;

3) $d-\dfrac{c}{d}+\dfrac{c^2}{d^2}$; 4) $\dfrac{m}{n}-k+\dfrac{m^2}{n^2}$.

59. 1) $\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}$; 3) $\dfrac{a}{bc}-\dfrac{a}{bd}$; 5) $\dfrac{3}{m^2}+\dfrac{4}{mn}$;

2) $\dfrac{1}{mn}-\dfrac{1}{mk}$; 4) $\dfrac{b}{ac}+\dfrac{b}{cd}$; 6) $\dfrac{2}{mn}-\dfrac{3}{n^3}$.

60. 1) $\dfrac{3c}{4a^3b}+\dfrac{5d}{6ab^3}$; 3) $\dfrac{2}{3y^3}-\dfrac{1}{6x^2y}+\dfrac{5}{12xy^2}$; 5) $\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{c^2}+\dfrac{c}{a^2}$;

2) $\dfrac{2a}{9b^4}-\dfrac{7c}{6a^3b}$; 4) $\dfrac{5}{7x^2y}-\dfrac{3}{4xy^2}+\dfrac{11}{14x^2y^2}$; 6) $\dfrac{b}{c}+\dfrac{b}{c^2d}+\dfrac{b}{cd^2}$;

Сложите или вычтите алгебраические дроби (**61–72**):

61. 1) $\frac{2x}{3(a-b)}+\frac{x}{a-b}$;

2) $\frac{7x}{2(x-1)}-\frac{5x}{x-1}$;

3) $\frac{2a^2}{3(a+1)}+\frac{5a^2}{4(a+1)}$;

4) $\frac{4y}{5(y-3)}-\frac{5x}{2(y-3)}$.

62. 1) $\frac{5}{2x-2}+\frac{3}{4x-4}$;

2) $\frac{7}{5b+5}-\frac{3}{10b+10}$;

3) $\frac{a}{3a+3b}-\frac{2a}{6a+6b}$;

4) $\frac{3x}{4x+4y}-\frac{x}{8x+8y}$.

63. 1) $\frac{3}{a^2+a}+\frac{5a}{ab+b}$;

2) $\frac{5b}{ax+ay}-\frac{2a}{bx+by}$;

3) $\frac{y+a}{b^2+ba}+\frac{y-b}{ab+a^2}$;

4) $\frac{y-b}{a^2-ab}-\frac{y-a}{ab-b^2}$.

64. 1) $\frac{3}{x+y}-\frac{5}{x}$;

2) $\frac{6}{a}-\frac{10}{a-1}$;

3) $\frac{1}{x(x-3)}+\frac{1}{x(x+3)}$;

4) $\frac{4}{5(a-b)}-\frac{7}{8(a+b)}$.

65. 1) $\frac{a}{1-b^2}+\frac{1}{1+b}$;

2) $\frac{2}{x^2-9}+\frac{1}{x+3}$;

3) $\frac{5+p^2}{p^2-36}-\frac{p}{6+p}$;

4) $\frac{2x}{x-4}-\frac{5x-2}{x^2-16}$.

66. 1) $\frac{2x}{x-4}-\frac{5x-2}{16-x^2}$;

2) $\frac{12n-5}{n^2-49}+\frac{6}{7-n}$;

3) $\frac{c^2-8}{2c+3}-\frac{16c-2c^3}{9-4c^2}$;

4) $\frac{21y^2+1}{1-9y^2}-\frac{y}{3y-1}$.

67. 1) $\frac{3}{a+2}+\frac{2a}{(a+2)^2}$;

2) $\frac{a}{(3a+1)^2}+\frac{4}{3a+1}$.

68. 1) $\frac{2y+8}{y^2-4y+4}-\frac{7}{y-2}$;

2) $\frac{4-5x}{1+6x+9x^2}-\frac{2}{3x+1}$;

3) $\frac{7}{(a-b)^2}-\frac{5}{b-a}$;

4) $\frac{4}{(m-n)^2}-\frac{7}{n-m}$;

5) $\frac{2a}{25-10a+a^2}+\frac{10}{a^2-25}$;

6) $\frac{1}{x^2-6x+9}+\frac{1}{(x+3)^2}$.

69. 1) $a+\frac{a}{a-1}$;

2) $b-\frac{b}{b-2}$;

3) $c+1-\frac{c^2}{c-1}$;

4) $\frac{a^2}{a+1}-a+1$.

70. 1) $\frac{7}{a+b}+\frac{8}{a-b}-\frac{16b}{a^2-a^2}$;

2) $\frac{6x}{x^2-y^2}-\frac{3}{x-y}-\frac{4}{x+y}$;

3) $\frac{3}{a+3}+\frac{2}{3-a}-\frac{6}{a^2-9}$;

4) $\frac{3}{4a^2-9}-\frac{8}{2a+3}-\frac{7}{3-2a}$.

71. 1) $\frac{a+b}{a}-\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a^2-ab}$;

2) $\frac{5b-1}{3b^2-3}+\frac{b+2}{2b+2}-\frac{b+1}{b-1}$;

3) $\frac{6a}{9a^2-1}+\frac{3a+1}{3-9a}+\frac{3a-1}{6a+2}$;

4) $\frac{7}{m}-\frac{4}{m-2n}-\frac{m-n}{4n^2-m^2}$;

5) $x-\frac{xy}{x+y}-\frac{x^3}{x^2-y^2}$;

6) $a-2+\frac{4a}{2+a}-\frac{a^3+b}{a^2+2a}$.

72. 1) $\frac{a+1}{a^3-1}-\frac{1}{a^2+a+1}$;

2) $\frac{a^2+4}{a^3+8}-\frac{1}{a+2}$;

3) $\frac{a+b}{a^2-ab+b^2}-\frac{1}{a+b}$;

4) $\frac{m^2-3m+9}{m^3-27}-\frac{1}{m-3}$.

73. Найдите числовое значение выражения, упростив его:

1) $\dfrac{8a^2}{a^3-1}+\dfrac{a+1}{a^2+a+1}$, где $a=2$;

2) $\dfrac{3c^2-c+3}{c^3-1}-\dfrac{c-1}{c^2+c+1}+\dfrac{2}{1-c}$, где $c=1\dfrac{1}{2}$.

§5. УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ

Умножение и деление алгебраических дробей также выполняется по правилам умножения и деления обыкновенных дробей:

$$\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd};} \qquad \boxed{\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.}$$

Задача 1. Найдите произведение дробей:

$$\frac{1}{2xy},\ \frac{4x^2y^3}{5z}\text{ va }\frac{10z^2}{3x^3}.$$

△ $\dfrac{1}{2xy}\cdot\dfrac{4x^2y^3}{5z}\cdot\dfrac{10z^2}{3x^3}=\dfrac{1\cdot4x^2y^3\cdot10z^2}{2xy\cdot5z\cdot3x^3}=\dfrac{4y^2z}{3x^2}$. ▲

Задача 2. Найдите произведение дробей $\dfrac{a-b}{a^2+ab}$ и $\dfrac{b^2+ab}{(a-b)^2}$.

△ Найдем, разложив на множители:

$$\frac{a-b}{a^2+ab}\cdot\frac{b^2+ab}{(a-b)^2}=\frac{(a-b)\,b\,(a+b)}{a(a+b)\,(a-b)^2}=\frac{b}{a(a-b)}.$$ ▲

Задача 3. Разделите дробь $\dfrac{m+n}{9m^2n^3}$ на дробь $\dfrac{m^2-n^2}{27mn^2}$.

△ $\dfrac{m+n}{9m^2n^3}:\dfrac{m^2-n^2}{27mn^2}=\dfrac{(m+n)\cdot27mn^2}{9m^2n^3\left(m^2-n^2\right)}=\dfrac{(m+n)\,3}{mn\,(m-n)\,(m+n)}=\dfrac{3}{mn\,(m-n)}$. ▲

При возведении алгебраической дроби в степень, пользуются следующим правилом $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Например,

$$\left(\frac{4a^2}{b}\right)^2 = \frac{16a^4}{b^2}; \quad \left(\frac{a+b}{3c}\right)^3 = \frac{(a+b)^3}{27c^3}.$$

Выполните умножение (**74–75**):

74. 1) $\frac{85}{24}\cdot\frac{72}{17}$; 2) $\frac{256}{169}\cdot\frac{13}{64}$; 3) $50\cdot\frac{7}{625}$; 4) $\frac{5}{26}\cdot 39$.

75. 1) $\frac{a^3b}{c}\cdot\frac{c^2}{a^4}$; 3) $\frac{6a}{5b}\cdot\frac{15c}{2d}$; 5) $\frac{2a}{3b}\cdot 3c$;

2) $\frac{m^2n^2}{k}\cdot\frac{k^3}{m^3n^3}$; 4) $\frac{4m}{9n}\cdot\frac{27k}{16d}$; 6) $14a^2\cdot\frac{b^2}{7c^3}$.

76. Выполните деление:

1) $\frac{3}{5} : \frac{3}{7}$; 3) $\frac{a}{8} : \frac{1}{3}$; 5) $\frac{2}{a} : \frac{6}{7}$;

2) $\frac{11}{12} : \frac{2}{5}$; 4) $\frac{6}{c} : \frac{m}{13}$; 6) $\frac{9}{35} : \frac{b}{5}$.

77. Выполните деление:

1) $\frac{8}{17} : \frac{8}{17}$; 3) $\frac{3a}{7b} : \frac{a}{b}$; 5) $\frac{2a}{3b} : \frac{a^2}{bc}$;

2) $\frac{a}{b} : \frac{a}{b}$; 4) $\frac{c}{2d} : \frac{4c^2}{5d}$; 6) $\frac{5m}{n^2} : \frac{10m^3}{n}$.

78. Выполните деление:

1) $\frac{17}{12} : \frac{34}{39}$; 3) $\frac{4}{13} : 5$; 5) $12 : \frac{8}{9}$;

2) $\frac{54}{25} : \frac{81}{75}$; 4) $\frac{a}{b} : c$; 6) $a : \frac{b}{c}$.

79. Выполните деление:

1) $\frac{a^2b}{c} : \frac{a^4}{c^2}$;
2) $\frac{mn}{k} : \frac{m^2n^2}{k^3}$;
3) $\frac{4a}{5b} : \frac{12c}{25d}$;
4) $\frac{8m}{9n} : \frac{16k}{27d}$;
5) $\frac{6a}{5b} : (5c)$;
6) $12a^2 : \frac{4d}{5c^2}$.

Выполните указанные действия (**80–86**):

80. 1) $\left(\frac{5a}{7b}\right)^2 \cdot \frac{14b^2}{25a^3}$;
2) $\left(\frac{3a^2}{2b}\right)^3 \cdot \frac{16b^3}{21a^4}$;
3) $\frac{2a^2}{5b^2} : \frac{12a^2}{15b^2}$;
4) $\frac{3a^3}{7b} : \frac{9a^4}{21b}$;
5) $\left(\frac{ab}{cd}\right)^2 \cdot acd$;
6) $abc^2 \cdot \left(\frac{ab}{cd}\right)^2$.

81. 1) $\frac{8a^2b}{9c} \cdot \frac{36c^3}{5a^3b}$;
2) $\frac{7b^4}{9c^5y} : \frac{35b^4c^2}{18c^4y^2}$;
3) $\frac{16x^2y}{7z} : \frac{20xy^3}{21z^2}$;
4) $\frac{46d^3c}{15a} : \frac{23dc^2}{5a^3}$;
5) $\frac{18m^3n^5}{7k} : (9n^2)$;
6) $24k^2 : \frac{12m^4k^2}{11p^3n}$.

82. 1) $\frac{3x^2y}{4a^2b} \cdot 4a^2b$;
2) $\frac{5a^2b}{7xy^2} \cdot 14xy^2$;
3) $15xy : \frac{30xy}{7a^2b}$;
4) $\frac{7x^2y}{2a^2b} : (14x^2y)$.

83. 1) $\frac{7-x}{a+b} \cdot \frac{a-b}{7-x}$;
2) $\frac{x-y}{2a} \cdot \frac{4b}{x-y}$;
3) $\frac{c+d}{c-d} : \frac{c}{c-d}$;
4) $\frac{a-b}{2b} : \frac{a-b}{6b^2}$;
5) $\frac{a^2-ab}{b} \cdot \frac{b}{a}$;
6) $\frac{a^2-ab}{b} \cdot \frac{b}{a}$;

84. 1) $\frac{a+1}{b} \cdot \frac{4b^2}{a^2-1}$;
2) $\frac{1-a}{3b^2} \cdot \frac{b^3}{1-a^2}$;
3) $\frac{a^2-b^2}{9b^2} : \frac{a+b}{3b}$;
4) $\frac{5m}{m^2-n^2} : \frac{15m^3}{m-n}$;
5) $\frac{3(x+y)}{4y^2(x^2+y^2)} \cdot \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$;
6) $\frac{5(a-b)}{3(a^2+b^2)} : \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}$.

85. 1) $\frac{a^2-b^2}{3a+3b}\cdot\frac{3a^2}{5b-5a}$; 4) $\frac{3n^2-3m^2}{n^2+np}\cdot\frac{6m-6n}{n+p}$;

2) $\frac{5x^2-5y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{3x^2}{10y-10x}$; 5) $\frac{a^2+b^2}{x^3+x^2y}\cdot\frac{x^2-y^2}{a^4-b^4}$;

3) $\frac{a^2-25}{a^2-3a}:\frac{a+5}{9-a^2}$; 6) $\frac{a^2+b^2}{a^2-ab}:\frac{a^4b-b^5}{a^2b-ab^2}$.

86. 1) $\frac{a-5}{a^2+6a+9}\cdot\frac{(a+3)^2}{a^2-25}$; 3) $\frac{a^2-49}{a^2+2ab+b^2}\cdot\frac{a+b}{a-7}$;

2) $\frac{b^2-8b+16}{b+3}:\frac{(b-4)^2}{b^2-9}$; 4) $\frac{a^2-2a+1}{2a+1}:\frac{a-1}{4a^2-1}$.

§ 6. ЗАМЕНА ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ ТОЖДЕСТВЕННЫМИ

! Выражение, состоящее из нескольких алгебраических дробей, связанных знаками арифметических действий, называют *дробно-рациональным* выражением. Знаменатель дробно-рационального выражения не должен равняться нулю.

Дробно-рациональные выражения можно упростить, применяя тождественные преобразования и используя правила для алгебраичеких дробей.

Задача 1. Упростить дробно-рациональное выражение:

$$R(x,y)=\frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{6}{x}+\frac{6}{xy}+\frac{12}{y}}-\frac{\frac{xy}{6}}{2x+y+1},\ x\neq 0,\ y\neq 0.$$

△ В соответствии с правилами сложения алгебраических дробей приведем их к общему знаменателю:

$$R(x,y)=\frac{\dfrac{x+1}{x}}{\dfrac{6y+12x+6}{xy}}-\frac{\dfrac{xy}{6}}{2x+y+1}=$$

По правилу деления алгебраических дробей:

$$=\frac{(x+1)xy}{x(12x+6y+6)}-\frac{xy}{6(2x+y+1)}=$$

Сократим на неравное нулю число $(x \neq 0)$ и раскроем скобки:

$$=\frac{(x+1)y}{12x+6y+6}-\frac{xy}{12x+6y+6}=$$

По правилу вычитания алгебраических дробей:

$$=\frac{xy+y-xy}{12x+6y+6}=$$

Взаимно уничтожим подобные члены в знаменателе, вынеся за скобки общий множитель:

$$=\frac{y}{12x+6y+6}=\frac{y}{6(2x+y+1)}.$$

Ответ: $R(x,y)=\dfrac{y}{6(2x+y+1)}$. ▲

Задача 2. Упростить выражение: $\left(\dfrac{a+1}{2a-2}-\dfrac{1}{2a^2-2}\right)\cdot\dfrac{2a+2}{a+2}$.

△ Упростим выражение в скобках:

$$\frac{a+1}{2a-2}-\frac{1}{2a^2-2}=\frac{a+1}{2\left(a-1\right)}-\frac{1}{2\left(a^2-1\right)}=\frac{\left(a+1\right)^2-1}{2\left(a^2-1\right)}=$$

$$=\frac{\left(a+1-1\right)\left(a+1+1\right)}{2\left(a^2-1\right)}=\frac{a\left(a+2\right)}{2\left(a+1\right)\left(a-1\right)}.$$

Найдем произведение:

$$\frac{a(a+2)}{2(a+1)(a-1)}\cdot\frac{2a+2}{a+2}=\frac{a(a+2)2(a+1)}{2(a+1)(a-1)(a+2)}=\frac{a}{a-1}. \blacktriangle$$

Задача 3. Выполните указанные действия:

$$\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right):\left(\frac{a+b}{a-b}-1\right).$$

$\triangle$ Выполним действия в первой скобке:

$$\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}=\frac{(a+b+a-b)(a+b-a+b)}{a^2-b^2}=$$

$$=\frac{2a\cdot 2b}{a^2-b^2}=\frac{4ab}{a^2-b^2}.$$

Теперь выполним действия во второй скобке:

$$\frac{a+b}{a-b}-1=\frac{a+b-a+b}{a-b}=\frac{2b}{a-b}.$$

Выполним деление:

$$\frac{4ab}{a^2-b^2}:\frac{2b}{a-b}=\frac{4ab(a-b)}{(a^2-b^2)2b}=\frac{2a}{a+b}. \blacktriangle$$

Задача 4. Первая труба наполняет бассейн за a часов, а вторая – за b часов. За сколько часов наполнится бассейн, если одновременно открыть обе трубы?

$\triangle$ Пусть объем бассейна V. За один час первая труба наполняет объем бассейна, равный $\frac{V}{a}$, вторая наполняет объем бассейна, равный $\frac{V}{b}$, а обе трубы вместе – объем бассейна, равный $\frac{V}{a}+\frac{V}{b}$. Пусть искомое время t . За время t обе трубы должны наполнить бассейн, то есть

$$\left(\frac{V}{a}+\frac{V}{b}\right)t=V.$$

Разделив обе части варажения на V, получим

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)t=1$$

Сумма дробей, стоящих в скобках, равна $\frac{a+b}{ab}$. Поэтому $\frac{a+b}{ab}t=1$, откуда $t=\frac{ab}{a+b}$. ▲

Упражнения

Выполните указанные действия (**87–92**):

87. 1) $\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{3}\right)\cdot\frac{1}{a^2}$; 3) $\frac{a-b}{a+b}\left(\frac{a}{5}+\frac{b}{5}\right)$; 5) $1:\left(1+\frac{1}{a}\right)$;

2) $\frac{a^2}{3}\cdot\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{a^2}\right)$; 4) $\frac{ab}{a-b}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$; 6) $b:\left(b+\frac{1}{b}\right)$.

88. 1) $\left(1+\frac{1}{a}\right):\left(1-\frac{1}{a}\right)$; 3) $\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-2\right):\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$;

2) $\left(a+\frac{a}{b}\right)\left(a-\frac{a}{b}\right)$; 4) $\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}+2\right)\left(1+\frac{m-n}{m+n}\right)$.

89. 1) $\left(1-\frac{a-b}{a+b}\right)\left(2+\frac{2b}{a-b}\right)$; 3) $\left(\frac{6}{a-b}-\frac{5}{a+b}\right)\cdot\frac{a-b}{a+11b}$;

2) $\left(1+\frac{a+b}{a-b}\right)\left(2-\frac{2a}{a+b}\right)$; 4) $\left(\frac{3}{c}+\frac{3}{c+d}\right)\cdot\frac{c}{18(2c+d)}$.

90. 1) $\left(\frac{2m+1}{2m-1}-\frac{2m-1}{2m+1}\right):\frac{4m}{10m-5}$; 3) $\frac{y-1}{y}:\left(\frac{y^2+1}{y^2+2y}-\frac{2}{y+2}\right)$;

2) $\left(\frac{z+6}{3z+9}-\frac{1}{z+3}\right):\frac{z+2}{27z}$; 4) $\frac{m-2}{m-5}:\left(\frac{m^2+24}{m^2-25}-\frac{4}{m-5}\right)$.

91. 1) $\frac{a^2+ab}{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}\right)$;

2) $\frac{ab-b^2}{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}\right)$;

3) $\left(\frac{c+d}{c}-\frac{2c}{c-d}\right)\cdot\frac{d-c}{c^2+d^2}$;

4) $\left(\frac{2c}{c+d}+\frac{d-c}{c}\right)\cdot\frac{c+d}{c^2+d^2}$.

92. 1) $\left(\frac{a+1}{2a-1}+\frac{6}{2a^2-2}-\frac{a+3}{2a+2}\right)\cdot\frac{4a^2-4}{3}$;

2) $\left(\frac{b}{a^2+ab}+\frac{2}{a+b}+\frac{a}{b^2+ab}\right):\frac{a^2-b^2}{4ab}$;

3) $\frac{a^2-c^2}{a+b}\cdot\frac{a^2-b^2}{ac+c^2}\cdot\left(a+\frac{ac}{a-c}\right)$;

4) $\frac{c^2-ac}{a^2-b^2}\cdot\frac{a-b}{c^2-a^2}:\left(c-\frac{ac}{a+c}\right)$.

93. Масса куска льда объемом V равна p килограммов. Чему равна масса куска льда объемом V_1?

94. Автомобиль двигаясь со скоростью v километров в час, прошел s километров пути. Какой путь преодолеет мотоцикл за это же время, если он едет со скоростью u километров в час?

95. Скорость моторной лодки в стоячей воде v километров в час, а по течению реки v_1 километров в час. Лодка, двигаясь по течению, прошла s километров. Какой путь преодолеет моторная лодка за это же время, если будет двигаться против течения реки?

96. *(Задача Абу Райхона Бируни.)* 10 изделий одного вида стоят 1 динар (денежная единица) и 15 изделий второго вида стоят 1 динар. Какое равное количество изделий двух видов можно купить на 1 динар?

§7. ФУНКЦИЯ $y=\frac{k}{x}$. ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

Задача 1. Постройте график функции $y=\frac{1}{x}$.

△ 1) Область определения – все действительные числа, кроме нуля;

2) Функция – нечетная, так как $\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}$ при $x\neq 0$;

3) По свойству степени с отрицательным показателем при $x > 0$ функция убывает, так как $\frac{1}{x} = x^{-1}$;

4) при $x > 0$ функция принимает положительные значения;

5) найдя несколько точек графика, например, $(\frac{1}{3}; 3)$, $(\frac{1}{2}; 2)$, $(1; 1)$, $(2; \frac{1}{2})$, построим оставшуюся часть графика для $x<0$ (рис. 4). ▲

График функции $y = \frac{1}{x}$ называют *гиперболой*. Он состоит из двух частей, называемых *ветвями гиперболы*. Одна из ветвей расположена в первой четверти, а вторая в третьей четверти.

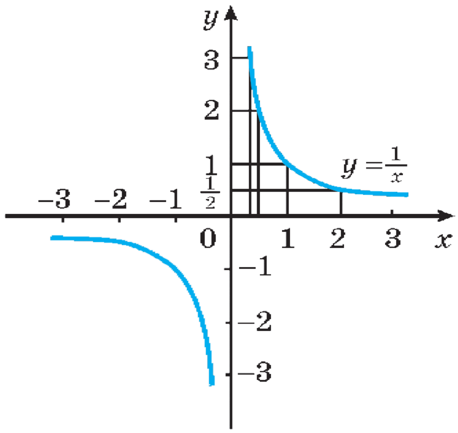


Рис. 4.

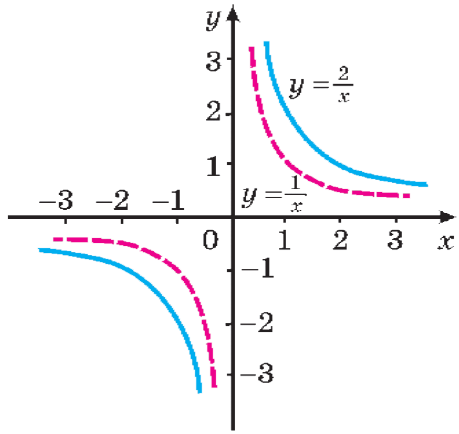


Рис. 5.

Задача 2. Постройте график функции $y = \frac{k}{x}$ при $k = 2$ и $k = -2$.

△ Напомним, что при одних и тех же значениях аргумента значения функции $y = \frac{2}{x}$ получаются из значений функции $y = \frac{1}{x}$ умножением их на 2. А это значит, что график функции $y = \frac{2}{x}$ расположен дальше от оси абсцисс, чем график функции $y = \frac{1}{x}$, вдвое растягиваясь вдоль оси ординат (рис 5).

Значения функции $y=-\frac{2}{x}$ отличаются от значений функции $y=\frac{2}{x}$ только знаком. Следовательно, график функции $y=-\frac{2}{x}$ симметричен относительно оси абсцисс графику функции $y=\frac{2}{x}$ (рис. 6). ▲

Для любого $k \neq 0$ график функции $y=\frac{k}{x}$ также называют *гиперболой*. *Гипербола состоит из двух ветвей*. При $k>0$ они расположены в первой и третьей четверти, а при $k<0$ во второй и четвертой четвертях.

Функция $y=\frac{k}{x}$ (где $k>0$) обладает всеми *свойствами* функции $y=\frac{1}{x}$, а именно эта функция:

1) определена при $x \neq 0$;
2) принимает все значения отличные от нуля;
3) *нечетная;*
4) при $x>0$ принимает *положительные* значения и при $x<0$ принимает *отрицательные* значения;
5) при $x<0$ и $x>0$ *убывает*.

При $k<0$ функция $y=\frac{k}{x}$ удовлетворяет свойствам 1–3; а свойств 4–5 будут формулироваться следующим образом:

4′) При $x<0$ принимает *положительные* значения и при $x>0$ принимает *отрицательные* значения;
5′) при $x<0$ и $x>0$ возрастает.

Говорят, что при $k>0$ для $y=\frac{k}{x}$ x и y функции связаны *обратной пропорциональностью*. Такая связь между переменными часто встречается в физике, технике и других областях науки.

Например, тело, совершающее равномерное движение по окружности с постоянной скоростью v, движется с центробежным ускорением $a=\frac{v^2}{r}$ (где r – радиус окружности), то есть центробежное ускорение обратно пропорционально радиусу окружности.

Задача 3. Луна находится на расстоянии $3{,}84 \cdot 10^8$ м от Земли. Луна в течение 27,3 суток совершает один оборот вокруг Земли. Вычислите центробежное ускорение Луны.

△ Ускорение a вычислим по формуле $a = \frac{v^2}{r}$, где $v = \frac{C}{t}$, $C = 2\pi r$, $t = 27{,}3 \cdot 24 \cdot 3600$ с, $r = 3{,}84 \cdot 10^8$.

Тогда:

$$a = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 3{,}84 \cdot 10^8}{(27{,}3 \cdot 24 \cdot 3600)^2} \approx 2{,}72 \cdot 10^{-3}.$$

Ответ: $2{,}72 \cdot 10^{-3}$ м/с^2. ▲

Задача 4. Постройте график функции $y = \frac{2}{x-1} - 2$.

△ График функции $y = \frac{2}{x-1} - 2$ можно получить из графика функции $y = \frac{2}{x}$ (рис. 6), сдвинув его на одну единицу вправо вдоль оси Ox и на две единицы вниз вдоль оси Oy (рис. 7). ▲

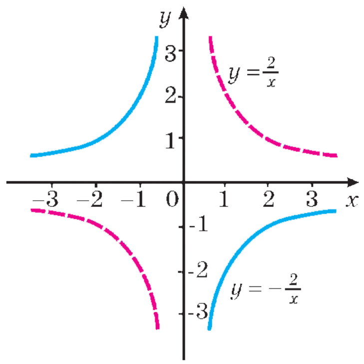


Рис. 6.

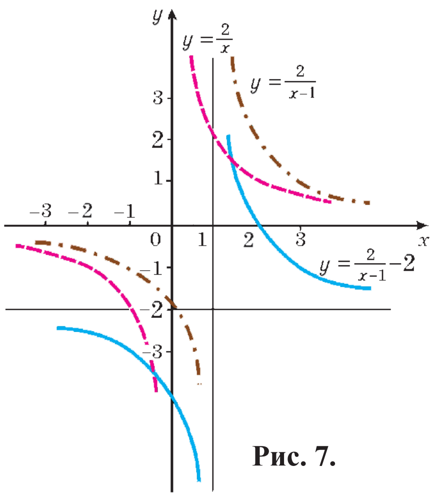


Рис. 7.

Упражнения

97. Постройте график функции $y = \frac{2}{x}$. Найдите при каких значениях x:

1) $y(x) = 4$; 2) $y(x) = -\frac{1}{2}$; 3) $y(x) > 4$; 4) $y(x) \leq 1$.

98. На одной координатной плоскости постройте графики функций $y=\frac{1}{x}$ и $y=x$. Определите при каких значениях x:

1) графики этих функций пересекаются;

2) график первой функции расположен выше (ниже) графика второй функции.

99. Найдите точки пересечения графиков функций, не строя их:

1) $y=\frac{12}{x}, y=3x$; 2) $y=-\frac{8}{x}, y=-2x$;

3) $y=\frac{2}{x}, y=x-1$; 4) $y=\frac{6}{x+1}, y=x+2$.

100. Найдите точки пересечения графиков функций, построив их:

1) $y=\frac{3}{x}, y=x+1$; 2) $y=-\frac{3}{x}, y=1-x$;

3) $y=\frac{2}{x}, y=x^2+2$; 4) $y=\frac{1}{x}, y=x^2+4x$.

101. Под поршнем цилиндра находится газ постоянной температуры. Вычислите объем V (в литрах) газа под давлением p (атмосфер) по формуле $V=\frac{12}{p}$.

1) Вычислите объем газа, находящегося под давлением 4 атм; 5 атм; 10 атм; 2) вычислите под каким давлением находится газ, если его обеъм равен 3 *л*; 5 *л*; 15 *л*; 3) постройте график зависимости объема газа от его давления.

102. Сила тока I (в амперах) реостата вычисляется по формуле $I=\frac{U}{R}$, где U – напряжение (в вольтах), R – сопротивление (в омах).

1) Постройте график зависимости $I(R)$ при $U=6$.

2) По графику найдите приближенное значение: a) силы тока, если R равно 6, 12, 20 Ω; b) сопротивления реостата, если сила тока равна 10, 5, 1,2 A.

103. Автомобиль совершает поворот со скоростью 60 км/ч по дуге окружности радиуса 150 м. Найдите центростремительное ускорение автомобиля. Увеличится или уменьшится центростремительное ускорение, если скорость атомобиля останется прежней, а радиус окружности увеличится?

104. Постройте график функции:

1) $y=\frac{3}{x}-2$; 2) $y=\frac{2}{x}+1$; 3) $y=\frac{2}{x+2}-1$; 4) $y=\frac{3}{1-x}+1$.

§8. АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КОРЕНЬ НАТУРАЛЬНОЙ СТЕПЕНИ И ЕГО СВОЙСТВА

Известный среднеазиатский математик и астроном **Джамшид ибн Масуд ибн Махмуд Гияс эд-Дин ал-Каши** (ум. прибл. в 1430 г) определил действие извлечения корня произвольной степени n. Об этом он пишет в пятой главе своего труда „Ключ арифметики“.

Рассмотрим следующие примеры.

Задача 1. Решите уравнение: $x^4=81$.

△ Перепишем уравнение в виде $x^4-81=0$ или $(x^2-9)(x^2+9)=0$.

Так как $x^2+9\neq 0$, то получим $x^2-9=0$, откуда

$$x^2-9=(x-3)(x+3)=0,\ x_1=3,\ x_2=\ -3.\ ▲$$

Поэтому, уравнение $x^4=81$ имеет два действительных корня: $x_1=3$, $x_2=-3$. Их называют *корнями четвертой степени* из числа 81, а положительный корень (число 3) называют арифметическим *корнем четвертой степени* и обозначают: $\sqrt[4]{81}$. Таким образом, $\sqrt[4]{81}=3$.

Можно доказать, что уравнение $x^n=a$, где n – натуральное число, a – неотрицательное число, имеет единственный неотрицательный корень. Этот корень называют арифметическим *корнем n-ой степени из числа a.*

Определение. *Арифметическим корнем натуральной степени $n\geq 2$ из неотрицательного числа называют неотрицательное число a, n-ая степень которого равна a. Арифметический корень n-ой степени обозначают: $\sqrt[n]{a}$. Число a называют подкоренным выражением. Если $n=2$, то вместо $\sqrt[2]{a}$ пишут $\sqrt{a}$.*

Арифметический корень второй степени называют также *квадратным корнем*, а корень 3-ей степени *кубическим корнем*.

В случаях, когда точно известно, что речь идет об арифметическом корне n-ой степени, кратко говорят „корень n-ой степени“.

По определению для доказательства того, что $\sqrt[n]{a}$ *равен* b, *нужно показать, что:* 1) $b \geq 0$; 2) $b^n = a$.

Например, $\sqrt[3]{64} = 4$, так как $4 > 0$ и $4^3 = 64$.

Из определения арифметического корня следует, что, если $a \geq 0$, *то* $\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, \ \sqrt[n]{a^n} = a}$

Например, $\left(\sqrt[5]{7}\right)^5 = 7$, $\sqrt[6]{13^6} = 13$.

Действие нахождения корня n-ой степени из числа называют *извлечением корня n-ой степени из этого числа.* Это действие является обратным к действию возведения числа в n-ую степень.

Задача 2. Решите уравнение $x^3 = -8$.

△ Это уравнение можно переписать в виде $-x^3 = 8$ или $(-x)^3 = 8$. Введем обозначение $-x = y$, тогда получим $y^3 = 8$.

Это уравнение имеет один положительный корень: $y = \sqrt[3]{8} = 2$. Уравнение $y^3 = 8$ не имеет отрицательных корней, так как если $y < 0$, то $y^3 < 0$. Число $y = 0$ также не может быть корнем этого уравнения.

Таким образом, уравнение $y^3 = 8$ имеет только один корень $y = 2$, следовательно, уравнение $x^3 = -8$ также имеет один корень: $x = -y = -2$.

Ответ: $x = -2$. ▲

Решение уравнения $x^3 = -8$ кратко можно записать так:

$$x = -\sqrt[3]{8} = -2.$$

Вообще, для любого нечетного натурального числа $2k+1$ уравнение $x^{2k+1} = a$ при $a < 0$ имеет только один отрицательный корень. Этот корень обозначают как и арифметический: $\sqrt[2k+1]{a}$. *Он называется корнем нечетной степени из отрицательного числа.*

Например, $\sqrt[3]{-27}=-3$, $\sqrt[5]{-32}=-2$.

Так как для отрицательного числа a: $-a=|a|$, то для нечетной степени из отрицательного числа a имеет место равенство:

$$\sqrt[2k+1]{a}=-\sqrt[2k+1]{-a}=-\sqrt[2k+1]{|a|}.$$

Например, $\sqrt[5]{-243}=-\sqrt[5]{243}=-3.$

Упражнения

105. (Устно.) 1) Найдите арифметический квадратный корень из числа:

$$1;\quad 0;\quad 16;\quad 0,81;\quad 169;\quad \frac{16}{121};\quad \frac{49}{144}.$$

2) Найдите арифметический корень 3-ей степени из числа:

$$1;\quad 0;\quad 5;\quad \frac{1}{27};\quad 0,027;\quad 0,064;\quad 0,729;\quad \frac{1}{343}.$$

3) Найдите арифметический корень 4-ой степени из числа;

$$0;\quad 1;\quad 16;\quad \frac{16}{81};\quad \frac{256}{625};\quad 0,0016;\quad \frac{625}{1296}.$$

Вычислите (**106–108**):

106. 1) $\sqrt[6]{36^3}$; 2) $\sqrt[12]{64^2}$; 3) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{25}\right)^2}$; 4) $\sqrt[8]{225^4}$; 5) $\sqrt[7]{2\cdot 4^3}$.

107. 1) $\sqrt[3]{10^6}$; 2) $\sqrt[3]{3^{12}}$; 3) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}$; 4) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^{16}}$; 5) $\sqrt[5]{32^2}$.

108. 1) $\sqrt[3]{-8}$; 2) $\sqrt[15]{-1}$; 3) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$;

4) $\sqrt[5]{-1024}$; 5) $\sqrt[3]{-34^3}$; 6) $\sqrt[7]{-8^7}$.

109. Решите уравнение:

1) $x^4=81$; 2) $x^5=-\frac{1}{32}$; 3) $5x^5=-160$; 4) $2x^6=128$.

110. При каких значениях x выражение имеет смысл:

1) $\sqrt[6]{2x-3}$; 2) $\sqrt[3]{x+3}$; 3) $\sqrt[3]{2x^2-x-1}$; 4) $\sqrt[4]{\frac{2-3x}{2x-4}}$?

Вычислите (**111–112**):

111. 1) $\sqrt[3]{-125}+\frac{1}{8}\sqrt[6]{64}$; 2) $\sqrt[5]{32}-0,5\sqrt[3]{-216}$;

3) $-\frac{1}{3}\sqrt[4]{81}+\sqrt[4]{625}$; 4) $\sqrt[3]{-1000}-\frac{1}{4}\sqrt[4]{256}$;

5) $\sqrt[4]{0,0001}-2\sqrt{0,25}+\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$; 6) $\sqrt[5]{\frac{1}{243}}+\sqrt[3]{-0,001}-\sqrt[4]{0,0016}$.

112. 1) $\sqrt{9+\sqrt{17}}\cdot\sqrt{9-\sqrt{17}}$; 2) $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2$;

3) $\left(\sqrt{5+\sqrt{21}}+\sqrt{5-\sqrt{21}}\right)^2$; 4) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

113. 1) Упростите $\sqrt[3]{(x-2)^3}$, если a) $x\geq 2$; b) $x<2$;

2) Упростите $\sqrt{(3-x)^6}$, если a) $x\leq 3$; b) $x>3$.

114. $1987<\sqrt{n}<1988$. Сколько таких натуральных чисел n существует?

§9. СТЕПЕНЬ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ И ЕГО СВОЙСТВА

Задача 1. Вычислите: $\sqrt[4]{5^{12}}$.

△ Так как $5^{12}=(5^3)^4$, то $\sqrt[4]{5^{12}}=\sqrt[4]{(5^3)^4}=5^3=125$. ▲

Таким образом, $\sqrt[4]{5^{12}}=5^{\frac{12}{4}}$.

Точно также можно показать, что $\sqrt[5]{7^{-15}}=7^{-\frac{15}{5}}$.

Вообще, если n – натуральное число, $n\geq 2$, m – целое число и частное $\frac{m}{n}$ является целым числом, то при $a>0$ справедливо следующее равенство:

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}.} \quad (1)$$

По условию $\frac{m}{n}$ – целое число, то есть при делении m на n в результате получается некоторое целое число k. Тогда из равенства $\frac{m}{n}=k$ следует, что $m=kn$. Применяя свойства степени и арифметического корня, получаем:

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n]{a^{kn}}=\sqrt[n]{\left(a^k\right)^n}=a^k=a^{\frac{m}{n}}.$$

Если же частное $\frac{m}{n}$ не является целым числом, то степень $a^{\frac{m}{n}}$, где $a>0$ определяют так, чтобы осталась верной формула (1), то есть и в этом случае считают, что

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}} \qquad (2)$$

Таким образом, формула (2) справедлива для любого целого числа m и любого натурального числа $n\geq 2$ и $a>0$. Например,

$$16^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{16^3}=\sqrt[4]{2^{12}}=2^3=8; \qquad 7^{\frac{5}{4}}=\sqrt[4]{7^5}=\sqrt[4]{7^4\cdot 7}=7\sqrt[4]{7};$$

$$27^{-\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{27^{-2}}=\sqrt[3]{\frac{1}{27^2}}=\frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{3^6}}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}.$$

Напомним, что рациональное число r – это число вида $\frac{m}{n}$, где m – целое число, n – натуральное число, то есть $r=\frac{m}{n}$. Тогда по формуле (2) получаем $a^r=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$. Таким образом, степень определена для любого рационального показателя и любого положительного основания. Если $r=\frac{m}{n}>0$, то выражение $\sqrt[n]{a^m}$ имеет смысл не только при $a>0$, но и при $a=0$. Если $a=0$, то $\sqrt[n]{0^m}=0$. Поэтому считают, что при $r>0$ выполняется равенство $0^r=0$.

Пользуясь равенствами (1) и (2), степень с рациональным показателем можно представить в виде корня и наоборот.

Отметим, что из формулы (2) и свойств корня следует равенство

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mk}{nk}}},$$

где $a>0$, m – целое число, n, k – натуральные числа.

Например, $7^{\frac{3}{4}} = 7^{\frac{6}{8}} = 7^{\frac{9}{12}}$.

Можно показать, что *все свойства степени с натуральным показателем, верны и для степени с любым рациональным показателем при положительном основании. А именно, для любых рациональных чисел p и q и при любых положительных a и b верны равенства:*

1) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$;	4) $(ab)^p = a^p b^p$;
2) $a^p : a^q = a^{p-q}$;	5) $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.
3) $(a^p)^q = a^{pq}$;	

Эти свойства вытекают из свойств корней. Докажем, например, свойство $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$.

Пусть $p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{k}{l}$ (где n и l — натуральные числа, m и k – целые числа). Нужно доказать, что

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{l}}. \qquad (3)$$

Приведя дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{k}{l}$ к общему знаменателю, запишем левую часть равенства (3) в виде

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{ml}{nl}} \cdot a^{\frac{kn}{nl}}.$$

Используя определение степени с рациональным показателем, свойства корня и степени с целым показателем, получаем:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{ml}{nl}} \cdot a^{\frac{kn}{nl}} = \sqrt[nl]{a^{ml}} \cdot \sqrt[nl]{a^{kn}} =$$

$$= \sqrt[nl]{a^{ml} \cdot a^{kn}} = \sqrt[nl]{a^{ml+kn}} = a^{\frac{ml+kn}{nl}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{l}}.$$

Аналогично доказываются остальные свойства степени с рациональным показателем.

Приведем примеры применения свойств степени.

1) $7^{\frac{1}{4}} \cdot 7^{\frac{3}{4}} = 7^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 7;$ $\quad 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 5^{1} = 5;$

2) $9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}} = 9^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3;$ $\quad 8^{\frac{2}{3}} : 8 = 8^{\frac{2}{3}-1} = 8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2};$

3) $\left(16^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{9}{4}} = 16^{\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4}} = 16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^{4\cdot\frac{3}{4}} = 2^3 = 8;$

4) $24^{\frac{2}{3}} = (2^3 \cdot 3)^{\frac{2}{3}} = 2^{3\cdot\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 4\sqrt[3]{3^2} = 4\sqrt[3]{9};$

5) $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{8^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}} = \frac{(2^3)^{\frac{1}{3}}}{(3^3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3};$ $\quad \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{2^4}{3^4}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4\cdot\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$

Задача 2. Вычислите: $25^{\frac{1}{5}} \cdot 125^{\frac{1}{5}}$.

$$\triangle\ 25^{\frac{1}{5}} \cdot 125^{\frac{1}{5}} = (25 \cdot 125)^{\frac{1}{5}} = (5^5)^{\frac{1}{5}} = 5.\ \blacktriangle$$

Задача 3. Упростите выражение: $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$.

$$\triangle\ \frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \frac{ab\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}} = ab.\ \blacktriangle$$

Задача 4. Упростите выражение: $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{4}{3}}}-\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}-a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}}$.

$$\triangle\ \frac{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{4}{3}}}-\frac{a^{-\frac{1}{3}}-a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}(1-a^2)}{a^{\frac{1}{3}}(1-a)}-\frac{a^{-\frac{1}{3}}(1-a^2)}{a^{-\frac{1}{3}}(1+a)}=$$

$$=1+a-(1-a)=2a. \ \blacktriangle$$

Покажем, как можно *ввести степень с иррациональным показателем*, например $3^{\sqrt{2}}$. Выпишем последовательно приближенные значения $\sqrt{2}$ с точностью 0,1; 0,01; 0,001; ... . Получим следующую последовательность:

$$1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ \dots\ .$$

Запишем последовательность степеней числа 3 с этими рациональными показателями:

$$3^{1{,}4},\ 3^{1{,}41},\ 3^{1{,}414},\ 3^{1{,}4142},\ \dots\ .$$

Можно показать, что эти степени являются последовательными приближенными значениями некоторого действительного числа, которое обозначают $3^{\sqrt{2}}$:

$$3^{1{,}4}=\underline{4},\ 6555355,$$
$$3^{1{,}41}=\underline{4{,}7}069644,$$
$$3^{1{,}414}=\underline{4{,}72}76942,$$
$$3^{1{,}442}=\underline{4{,}728}7329,$$
$$3^{\sqrt{2}}\approx\underline{4{,}7288033}.$$

Аналогично определяется степень a^b с положительным основанием a и любым иррациональным показателем. Таким образом, степень с положительным основанием определена для любого действительного показателя. Причем свойства степени с действительным показателем такие же как и свойства степени с рациональным показателем.

Упражнения

115. (Устно). Представьте в виде степени с рациональным показателем:

1) $\sqrt{x^3}$; 2) $\sqrt[3]{a^4}$; 3) $\sqrt[4]{b^3}$; 4) $\sqrt[5]{x^{-1}}$; 5) $\sqrt[6]{a}$; 6) $\sqrt[7]{b^{-3}}$.

116. (Устно). Представьте в виде степени с целым показателем:

1) $x^{\frac{1}{4}}$; 2) $y^{\frac{2}{5}}$; 3) $a^{-\frac{5}{6}}$; 4) $b^{-\frac{1}{3}}$; 5) $(2x)^{\frac{1}{2}}$; 6) $(3b)^{-\frac{2}{3}}$.

Вычислите (**117–120**):

117. 1) $64^{\frac{1}{2}}$; 2) $27^{\frac{1}{3}}$; 3) $8^{\frac{2}{3}}$;

4) $81^{\frac{3}{4}}$; 5) $16^{-0,75}$; 6) $9^{-1,5}$.

118. 1) $2^{\frac{4}{5}} \cdot 2^{\frac{11}{5}}$; 2) $5^{\frac{2}{7}} \cdot 5^{\frac{5}{7}}$; 3) $9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}}$; 4) $4^{\frac{1}{3}} : 4^{\frac{5}{6}}$;

5) $\left(7^{-3}\right)^{-\frac{2}{3}}$; 6) $\left(8^{\frac{1}{12}}\right)^{-4}$; 7) $8^{\frac{4}{5}} : 8^{\frac{7}{15}}$; 8) $\left(5^{-4}\right)^{-\frac{3}{4}}$.

119. 1) $9^{\frac{2}{5}} \cdot 27^{\frac{2}{5}}$; 2) $7^{\frac{2}{3}} \cdot 49^{\frac{2}{3}}$; 3) $144^{\frac{3}{4}} : 9^{\frac{3}{4}}$; 4) $150^{\frac{3}{2}} : 6^{\frac{3}{2}}$.

120. 1) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$; 2) $(0,04)^{-1,5} - (0,125)^{-\frac{2}{3}}$;

3) $8^{\frac{9}{7}} : 8^{\frac{2}{7}} - 3^{\frac{6}{5}} \cdot 3^{\frac{4}{5}}$; 4) $\left(5^{-\frac{2}{5}}\right)^{-5} + \left((0,2)^{\frac{3}{4}}\right)^{-4}$.

121. Вычислите:

1) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a}$ при $a=0{,}09$;

2) $\sqrt{b} : \sqrt[6]{b}$ при $b=27$;

3) $\dfrac{\sqrt{b} \cdot \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[6]{b}}$ при $b=1{,}3$;

4) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[12]{a^5}$ при $a=2{,}7$.

122. Представьте в виде степени с рациональным показателем:

1) $a^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{a}$; 2) $b^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[6]{b}$; 3) $\sqrt[3]{b}:b^{\frac{1}{6}}$;

4) $a^{\frac{4}{3}}:\sqrt[3]{a}$; 5) $x^{1,7}\cdot x^{2,8}:\sqrt{x^5}$; 6) $y^{-3,8}:y^{-2,3}\cdot\sqrt{y^3}$.

Упростите выражение (**123–124**):

123. 1) $\left(a^4\right)^{-\frac{3}{4}}\cdot\left(b^{-\frac{2}{3}}\right)^{-6}$; 2) $\left(\left(\frac{a^6}{b^{-3}}\right)^4\right)^{\frac{1}{12}}$; 3) $\left(a^{-7}\right)^{-\frac{5}{7}}\cdot\left(b^{-\frac{3}{4}}\right)^{-4}$.

124. 1) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}}+a^{-\frac{1}{4}}\right)}$; 2) $\dfrac{b^{\frac{1}{5}}\left(\sqrt[5]{b^4}-\sqrt[5]{b^{-1}}\right)}{b^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{b^{-2}}\right)}$; 3) $\dfrac{a^{\frac{5}{3}}b^{-1}-ab^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}$;

4) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b}+b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}$; 5) $\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{4}{3}}\right)}{a^{\frac{2}{5}}\left(a^{\frac{8}{5}}-a^{-\frac{2}{5}}\right)}$; 6) $\dfrac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}$.

125. Вычислите:

1) $\left(2^{\frac{5}{3}}\cdot3^{-\frac{1}{3}}-3^{\frac{5}{3}}\cdot2^{-\frac{1}{3}}\right)\cdot\sqrt[3]{6}$; 2) $\left(5^{\frac{1}{4}}:2^{\frac{3}{4}}-2^{\frac{1}{4}}:5^{\frac{3}{4}}\right)\cdot\sqrt[4]{1000}$.

126. Упростите выражение:

1) $a^{\frac{1}{9}}\sqrt[6]{a\sqrt[3]{a}}$; 2) $b^{\frac{1}{12}}\sqrt[3]{b\sqrt[4]{b}}$; 3) $\left(\sqrt[3]{ab^{-2}}+(ab)^{-\frac{1}{6}}\right)\sqrt[6]{ab^4}$;

4) $\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{ab}\right)$; 5) $\dfrac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$; 6) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}}$;

7) $\dfrac{m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}}{m+2\sqrt{mn}+n}$; 8) $\dfrac{c-2c^{\frac{1}{2}}+1}{\sqrt{c}-1}$; 9) $\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}\right)$.

Упростите выражение (**127–129**):

127. 1) $\left(1-2\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{b}{a}\right):\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^2$; 2) $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right):\left(2+\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)$;

3) $\dfrac{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{9}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{5}{4}}}-\dfrac{b^{-\frac{1}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}}$;

4) $\dfrac{\sqrt{a}-a^{-\frac{1}{2}}b}{1-\sqrt{a^{-1}b}}-\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-a^{-\frac{1}{3}}b}{\sqrt[6]{a}+a^{-\frac{1}{3}}\sqrt{b}}$.

128. 1) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{ab^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}-\dfrac{2a^2-4ab}{a-b}$;

2) $\dfrac{3xy-y^2}{x-y}-\dfrac{y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{y\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$;

3) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-\dfrac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{a^{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}}$;

4) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}}$.

129. 1) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$;

2) $\dfrac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$;

3) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a-b}-\dfrac{1}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}$;

4) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}{a+b}+\dfrac{1}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$.

§10. УПРОЩЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ СТЕПЕНЬ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

При выполнении упражнений этой темы будем использовать алгебраические дроби и действия над ними, формулы сокращенного умножения и свойства степени с рациональным показателем.

Задача 1. Упростите выражение:

$$\left[\frac{(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})^2+(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}})^2}{x+(xy)^{\frac{1}{2}}}\right]^5\cdot x^3\cdot\sqrt[3]{x\sqrt{x}},\ x>0,\ y>0.$$

△ 1) $\sqrt[3]{x\sqrt{x}}=\sqrt[3]{\sqrt{x^3}}=\sqrt[6]{x^3}=\sqrt{x}$;

2) возведем в квадрат выражения в числителе дроби в квадратных скобках и используем равенство $x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$:

$$\sqrt{x}+2\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y}+\sqrt{x}-2\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y}=2(\sqrt{x}+\sqrt{y});$$

3) в числителе этого выражения вынесем за скобки множитель $\sqrt{x}$:

$$x+\sqrt{xy}=\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y});$$

4) тогда $\dfrac{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$;

5) $\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^5\cdot x^3\sqrt{x}=\dfrac{32}{x^2\sqrt{x}}\cdot x^3\sqrt{x}=32\cdot x$

Ответ: $32\cdot x$. ▲

Задача 2. Упростите выражение и найдите его числовое значение при $x=0{,}16$, $y=25$:

$$\left(\frac{\sqrt[4]{x^3y}-\sqrt[4]{xy^3}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2}\cdot\left(1+2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}},\ x>0,\ y>0.$$

△ 1) $\dfrac{\sqrt[4]{x^3y}-\sqrt[4]{xy^3}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt[4]{xy}\cdot(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}=-\sqrt[4]{xy}$;

2) $-\sqrt[4]{xy}+\dfrac{1+\sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}}=\dfrac{-\sqrt{xy}+1+\sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{xy}}$;

3) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2}=\sqrt{xy}$;

4) $\left(1+2\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\left(1+\sqrt{\dfrac{y}{x}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}=1+\sqrt{\dfrac{y}{x}}$;

5) $\sqrt{xy}\cdot\left(1+\sqrt{\dfrac{y}{x}}\right)=\sqrt{xy}+y$.

Если $x=0{,}16$ и $y=25$, то $\sqrt{0{,}16\cdot 25}+25=\sqrt{4}+25=27$.

Ответ: $\sqrt{xy}+y$; 27. ▲

Задача 3. Упростите выражение и найдите его числовое значение при $a = 25$, $b = 0,6561$:

$$\frac{(\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b})^2+(\sqrt[8]{a}-\sqrt[8]{b})^2}{a-\sqrt{ab}}:\frac{(\sqrt[4]{a}+\sqrt[8]{ab}+\sqrt[4]{b})\cdot(\sqrt[4]{a}-\sqrt[8]{ab}+\sqrt[4]{b})}{\sqrt[4]{a^3b}-b}.$$

△ 1) Возведем в квадрат выражения в числителе первой дроби, а в знаменателе вынесем за скобки $\sqrt{a}$. После преобразования первая дробь будет равна $\dfrac{2}{\sqrt{a}\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)}$;

2) раскроем скобки в числителе второй дроби, пользуясь формулами сокращенного умножения, и придем к выражению $\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}$;

3) а в знаменателе вынесем за скобки $\sqrt[4]{b}$ и разложим выражение $\left(x^3-y^3\right)$ на множители. Тогда вторая дробь будет равна $\dfrac{1}{\sqrt[4]{b}\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)}$;

4) Наконец, разделив первую дробь на вторую, получим $\dfrac{2\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}}$. Значение выражения при $a = 25$, $b = 0,6561$ будет равно $\dfrac{2\cdot\sqrt[4]{0,6561}}{\sqrt{25}}=\dfrac{2}{5}\cdot 0,9=0,36$.

Ответ: $\dfrac{2\cdot\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}}$; 0,36. ▲

Упражнения

Упростите выражение (**130–146**):

130. $\left[\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+5b^{\frac{1}{2}}\right)-\left(a^{\frac{1}{2}}+2b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-2b^{\frac{1}{2}}\right)\right]:\left(2a+3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\right).$

131. $\left[\dfrac{(\sqrt{a}+1)^2-\dfrac{a-\sqrt{ax}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}}{(\sqrt{a}+1)^3-a\sqrt{a}+2}\right]^{-3}.$

132. $\left[\dfrac{4a-9a^{-1}}{2a^{\frac{1}{2}}-3a^{-\frac{1}{2}}}+\dfrac{a-4+3a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}\right]^2.$

133. $\left[(a-b)\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}+a-b\right]\left[(a-b)\left(\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}-1\right)\right].$

134. $\left(\sqrt{ab}-\dfrac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right):\dfrac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}.$

135. $\left(a+b^{\frac{3}{2}}:\sqrt{a}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^{-\frac{2}{3}}.$

136. $\left[\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}-4x^{-\frac{1}{2}}}+\dfrac{2\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[3]{x}-4\sqrt[3]{x}}\right]^{-2}-\sqrt{x^2+8x+16}.$

137. $\left(\dfrac{\sqrt[4]{ax^3}-\sqrt[4]{a^3x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}+\dfrac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}}\right)^{-2}\sqrt{1+2\sqrt{\dfrac{a}{x}}+\dfrac{a}{x}}.$

138. $\dfrac{(a-b^2)\sqrt{3}-b\sqrt{3}\sqrt[3]{-8b^3}}{\sqrt{2(a-b^2)^2+(2b\sqrt{2a})^2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2a}-\sqrt{2c}}{\sqrt{\dfrac{3}{a}}-\sqrt{\dfrac{3}{c}}}.$

139. $\left[\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a}\right)^{-1}+\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{a}\right)^{-1}\right]^{-2}:\dfrac{x-a}{4\sqrt{x}+4\sqrt{a}}.$

140. $\dfrac{\left(\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^3+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{3a^2+3b\sqrt{ab}}+\dfrac{\sqrt{ab}-a}{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}}.$

141. $\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^3+2a^2:\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\dfrac{3\sqrt{ab}-3b}{a-b}.$

142. $$\left(\frac{1}{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}}\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}\right)(ab)^{-\frac{1}{2}}.$$

143. $$\left[\left(\frac{a^2-b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b}}+a\sqrt[3]{b}\right):\left(a+\sqrt[6]{a^3b^2}\right)-\sqrt[3]{b}\right]^2.$$

144. $$\left[\frac{a^2\sqrt[4]{x}+x\sqrt{a}}{a\sqrt[4]{x}+\sqrt{ax}}-\sqrt{a^2+x+2a\sqrt{x}}\right]^4.$$

145. $$\left[\frac{x\sqrt{x}-x}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}-1}{\sqrt[4]{x}-1}-\sqrt{x}\right)\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}+1}{\sqrt[4]{x}+1}-\sqrt{x}\right)}\right]^3.$$

146. $$\frac{\dfrac{a+x}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{\sqrt[3]{ax^2}-\sqrt[3]{a^2x}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{x}}-\sqrt[6]{x}.$$

Упражния к главе I

Приведите дроби к общему знаменателю:

147. 1) $\frac{5a}{a^3-27}$, $\frac{a-3}{a^2+3a+9}$ и $\frac{1}{a-3}$; 2) $\frac{3}{x+2}$, $\frac{x+1}{x^3+8}$ и $\frac{x+2}{x^2-2x+4}$.

Выполните действия (**148–149**):

148. 1) $\frac{a+3}{5}+\frac{7+a}{10}+\frac{a-3}{2}$; 3) $\frac{a-2}{45}-\frac{a+5}{15}-\frac{a-9}{9}$;

2) $\frac{b-7}{4}+\frac{5b-2}{3}+\frac{3b-1}{8}$; 4) $\frac{b}{12}-\frac{3b+1}{9}-\frac{2b-1}{4}$.

149. 1) $\frac{y}{n-2}+\frac{z}{2-n}$;

2) $\frac{p+2q}{3p-q}-\frac{5q-2p}{q-3p}$;

3) $\frac{2m}{3-5n}-1+\frac{7n-4}{5n-3}$;

4) $4-\frac{3a}{5-2b}+\frac{5(a-10)}{2b-5}$.

Выполните указанные действия (**150–152**):

150. 1) $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-ab+b^2}:\frac{8a-8b}{a^3+b^3}$;

2) $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2+ab+b^2}\cdot\frac{a^3-b^3}{7a+7b}$.

151. 1) $\frac{64x^2-1}{x^2-4}\cdot\frac{(x+2)^2}{x^2-4}\cdot\frac{(x-2)^2}{8x+1}$;

2) $\frac{x-6}{x^2+6x+9}\cdot\frac{x^2+4x+4}{(x^2+2)(x-2)}\cdot\frac{x^3-9x}{(x-6)(x+2)}$;

3) $\frac{am^2-an^2}{m^2+2mn+n^2}:\frac{am^2+2amn+an^2}{3m+3n}$;

4) $\frac{ab-4b-2a+8}{2a+8-ab-4b}:\frac{2a-8-ab+4b}{ab+4b-2a-8}$.

152. 1) $(x^2-1)\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{1+x}+1\right)$;

2) $\left(1+a-\frac{a^2+3}{a+1}\right)(1-a^2)$;

3) $\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right):\left(\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}\right)$;

4) $\left(\frac{2-a}{2+a}-\frac{a+2}{a-2}\right):\left(\frac{2+a}{2-a}+\frac{a-2}{a+2}\right)$.

Вычислите (**153–154**):

153. 1) $(0{,}175)^0+(0{,}36)^{-2}-1^{\frac{4}{3}}$;

2) $1^{-0{,}43}-(0{,}008)^{\frac{1}{3}}+(15{,}1)^0$;

3) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}+4\cdot 379^0$;

4) $(0{,}125)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{3}{4}\right)^2-(1{,}85)^0$.

154. 1) $9{,}3\cdot 10^{-6}:(3{,}1\cdot 10^{-5})$;

2) $1{,}7\cdot 10^{-6}\cdot 3\cdot 10^7$;

3) $8{,}1\cdot 10^{16}\cdot 2\cdot\quad 10^{-14}$;

4) $6{,}4\cdot 10^5:(1{,}6\cdot 10^7)$;

5) $2\cdot 10^{-1}+\left(6^0-\dfrac{1}{6}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{3}\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{-1};$

6) $3\cdot 10^{-1}-\left(8^0-\dfrac{1}{8}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-3}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{4}\cdot\left(\dfrac{5}{7}\right)^{-1}.$

155. Найдите значение выражения:

1) $\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{5}{6}}}{x^{\frac{1}{6}}}\right)^{-2}$, где $x=\dfrac{7}{9}$; 2) $\left(\dfrac{a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{1}{9}}}{a^{-\frac{2}{9}}}\right)^{-3}$, где $a=0{,}1$.

156. Упростите выражение:

1) $(\sqrt[3]{125x}-\sqrt[3]{8x})-(\sqrt[3]{27x}-\sqrt[3]{64x});$

2) $(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{16x})+(\sqrt[4]{81x}-\sqrt[4]{625x});$

3) $\left(\dfrac{3}{\sqrt{1+a}}+\sqrt{1-a}\right):\dfrac{3+\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}};$

4) $\left(1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-v^2}}\right):(\sqrt{x^2-y^2}-x).$

157. Вычислите:

1) $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-0,75}+10000^{0,25}-\left(7\dfrac{19}{32}\right)^{\frac{1}{5}};$

2) $(0{,}001)^{-\frac{1}{3}}-2^{-2}\cdot 64^{\frac{2}{3}}-8^{-1\frac{1}{3}};$

3) $27^{\frac{2}{3}}-(-2)^{-2}+\left(3\dfrac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}};$

4) $(-0{,}5)^{-4}-625-\left(2\dfrac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}}.$

158. При каких значениях x выражение имеет смысл:

1) $\sqrt[4]{x^2-4};$ 2) $\sqrt[3]{x^2-5x+6};$ 3) $\sqrt[6]{\dfrac{x-2}{x+3}};$

4) $\sqrt[4]{x^2-5x+6};$ 5) $\sqrt[8]{x^3-x};$ 6) $\sqrt[6]{x^3-5x^2+6x}$?

159. Упростите выражение:

1) $\dfrac{a^{\frac{1}{4}}-a^{-\frac{7}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}-a^{-\frac{3}{4}}};$ 2) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}-a^{-\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-a^{-\frac{2}{3}}};$ 3) $\dfrac{b^{\frac{5}{4}}+2b^{\frac{1}{4}}+b^{-\frac{3}{4}}}{b^{\frac{3}{4}}-b^{-\frac{1}{4}}};$

4) $\dfrac{a^{-\frac{4}{3}}b^{-2}-a^{-2}b^{-\frac{4}{3}}}{a^{-\frac{5}{3}}b^{-2}-b^{-\frac{5}{3}}a^{-2}};$ 5) $\dfrac{\sqrt{a^3b^{-1}}-\sqrt{a^{-1}b^3}}{\sqrt{ab^{-1}}-\sqrt{a^{-1}b}};$ 6) $\dfrac{a^{\frac{3}{4}}b^{-\frac{1}{4}}-a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{1}{4}}-a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}.$

160. 1) выведите формулу вычисления площади закрашенной части фигуры, используя данные на рисунке измерения. (рис. 8);

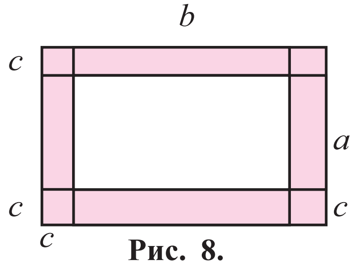


Рис. 8.

2) используя фигуру на рисунке, покажите, что верно равенство

$2bc + 2c(a-2c) = 2ac + 2c(b-2c)$;

3) представьте формулу вычисления площади закрашенной фигуры как разность площадей двух прямоугольников. Используя это, докажите равенство $ab-(b-2c)(a-2c) = 2ac + 2c\cdot(b-2c)$.

161. Проверьте верность равенств, дайте им геометрические комментарии. Начертите соответствующие фигуры:

1) $(a+b)(c+d) = ac+bc+ad+bd$;

2) $(a+b)(c-d) = ac+bc-ad-bd$;

3) $(a+b+c)(d+l) = ad+bd+cd+al+bl+cl$.

162. 1) Докажите верность равенств:

$$c^2 + b(a-c) + (b+d-c)c + d(a-c) = a(b+d).$$

2) Найдите два выражения для вычисления площади прямоугольника *ABCD* (рис. 9). Используйте равенство площади прямоугольника *ABCD* сумме площадей прямоугольников I, II, III, IV и дайте геометрическую интерпретацию первому равенству.

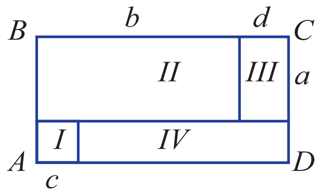


Рис. 9.

№2

Сумма цифр числа n равна 2006. Можно ли число n представить в виде произведения двух одинаковых чисел?

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ!

1. Найдите значения букв, при которых имеют смысл дроби:

$$\frac{a}{b};\ \frac{3}{c-1};\ \frac{k}{d+2}.$$

2. Выполните действия:

1) $4a+\frac{1-4a^2}{a}$; 2) $\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}$;

3) $\frac{2a-4}{3b}\cdot\frac{6b}{a-2}$; 4) $\frac{a^2-b^2}{b^2}:\frac{a+b}{b}$.

3. Упростите выражение $\frac{1+2x}{x-3}-\frac{x^2+3x}{5}\cdot\frac{10}{x^2-9}$. Найдите его числовое значение при $x=2\frac{2}{3}$:

4. Вычислите:

1) $3^{-5}:3^{-7}-2^{-2}\cdot 2^4+\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right)^3$; 2) $\sqrt[5]{3^{10}\cdot 32}-\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3}}$;

3) $25^{\frac{3}{2}}\cdot 25^{-1}+(5^3)^{\frac{2}{3}}:5^3-48^{\frac{2}{3}}:6^{\frac{2}{3}}$; 4) $4^{-7}:4^{-10}-3^{-2}\cdot 3^5+\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$.

5. Упростите выражение:

1) $\frac{3x^{-9}\cdot 2x^5}{x^{-4}}$; 2) $(x^{-1}+y^{-1})\left(\frac{1}{xy}\right)^{-2}$; 3) $\frac{2a^{-8}\cdot 4a^3}{16\cdot a^{-5}}$.

6. Упростите выражение $\frac{a^{\frac{5}{3}}}{\sqrt[3]{a^5}\cdot a^{-\frac{3}{4}}}$ и найдите его числовое значение при a=8.

Тестовые задания к главе I

1. Сократите дробь: $\dfrac{27a^2-36ab+12b^2}{9a^2-4b^2}$.

A) $\dfrac{3(3a-2b)}{3a+2b}$; B) $\dfrac{3a-2b}{3a+2b}$; C) $\dfrac{39-36ab}{5}$; D) $\dfrac{3a^2-36ab+3b^2}{a^2-b^2}$.

2. Сократите дробь: $\dfrac{7a^2(ab^2-9a)}{3a(21a-7ab)}$.

A) $\dfrac{7a(ab^2-9a)}{3(21a-7ab)}$; B) $\dfrac{-a(b+3)}{3}$; C) $\dfrac{7(ab^2-9a)}{3(21-7b)}$; D) $\dfrac{a(b-3)}{3}$.

3. Выполните действия: $\dfrac{4}{a+b}+\dfrac{5}{a-b}-\dfrac{10b}{a^2-b^2}$.

A) $\dfrac{9}{a-b}$; B) $\dfrac{9}{a+b}$; C) $\dfrac{-9}{a+b}$; D) $\dfrac{9(a+b)}{a-b}$.

4. Вычислите разность: $\dfrac{a^2+9}{a^3+27}-\dfrac{1}{a+3}$.

A) $\dfrac{1}{a^2+9}$; B) $\dfrac{3}{a^2+9}$; C) $\dfrac{a}{a^3+9}$; D) $\dfrac{3a}{a^3+27}$.

5. Выполните умножение: $\dfrac{9a^2-16b^2}{6a+8b}\cdot\dfrac{6a^2}{12b-9a}$.

A) a^2; B) $-a^2$; C) $\dfrac{a^2}{3a-4b}$; D) $\dfrac{6}{3a+4b}$.

6. Выполните деление: $\dfrac{4a^2-20ab+25b^2}{5b+4}:\dfrac{(2a-5b)^2}{25b^2-16}$.

A) $\dfrac{5b+4}{2a-5b}$; B) $\dfrac{2a-5b}{5b-4}$; C) $5b-4$; D) $5b+4$.

7. Сократите дробь: $\dfrac{8a^2-22ab+15b^2}{16a^2-25b^2}$.

A) $\dfrac{2a-3b}{4a+5b}$; B) $\dfrac{2a+3b}{4a-5b}$; C) $\dfrac{4a-5b}{4a+5b}$; D) $\dfrac{4a+3b}{2a-5b}$.

8. Вычислите разность: $\dfrac{9x^2+16}{27x^3+64}-\dfrac{1}{3x+4}$.

A) $\dfrac{9x^2+16}{3x+4}$; B) $\dfrac{-12x}{27x^3+64}$; C) $\dfrac{12x}{27x^3+64}$; D) $\dfrac{9x^2+4}{27x^3-64}$.

9. Выполните действия: $\dfrac{4}{3a+2b}-\dfrac{2}{2b-3a}+\dfrac{8b}{4b^2-9a^2}$.

A) $\dfrac{6}{3a-2b}$; B) $\dfrac{6}{3a+2b}$; C) $\dfrac{12a}{9a^2-4b^2}$; D) $\dfrac{12b}{2b-3a}$.

10. Вычислите: $(-8)^2-(-5)^3-(12)^{-1}$.

A) $188\frac{11}{12}$; B) $-61\frac{1}{12}$; C) $189\frac{1}{12}$; D) $61\frac{1}{12}$.

11. Вычислите: $(-0,2)^{-3}+(0,2)^{-2}-(-2)^{-2}$.

A) $-150\frac{1}{4}$; B) $-100\frac{1}{4}$; C) $99\frac{1}{4}$; D) 11,25.

12. Вычислите: $\dfrac{\sqrt[3]{-16}+\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{-250}}$.

A) $\sqrt[3]{2}$; B) 1; C) –1; D) $\frac{9}{5}$.

13. Вычислите: $\sqrt[4]{\dfrac{(4,15)^3-(1,61)^3}{2,54}+4,15\cdot 1,61}$.

A) 3,4; B) 5,76; C) 24; D) 2,4.

14. Вычислите: $\sqrt[3]{\dfrac{(2,08)^3+(2,016)^3}{4,096}-2,08\cdot 2,016}$.

A) 0,16; B) 4,096; C) 1,6; D) 0,8.

15. Вычислите: $\sqrt{2\sqrt{2}+1}\cdot\sqrt[4]{9-4\sqrt{2}}$. *Указание:* $\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{b}=\sqrt[4]{a^2\cdot b}$.

A) $\sqrt{7}$; B) $2\sqrt{15}$; C) $3-2\sqrt{2}$; D) 7.

16. Вычислите: $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}$. *Указание:* $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{b}=\sqrt[6]{a^2\cdot b}$.

A) -1; B) 1; C) $3+2\sqrt{3}$; D) $5+3\sqrt{3}$.

17. Вычислите: $\dfrac{\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}\cdot(3-\sqrt{2})}{11-6\sqrt{2}}$. *Указание:* $\sqrt[3]{a}\cdot b=\sqrt[3]{a\cdot b^3}$.

A) $5-\sqrt{2}$; B) $5\sqrt{2}$; C) -1; D) 1.

18. Вычислите: $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$.

A) 2; B) $\sqrt{2}$; C) $2\sqrt{2}$; D) -2.

19. Вычислите: $\dfrac{\sqrt[3]{98}\cdot\sqrt[3]{-112}}{\sqrt[3]{500}}$.

A) $-\sqrt[3]{4}$; B) 2,84; C) $-2,8$; D) $-1,4$.

20. Найдите числовое значение выражения $\sqrt{a}:\sqrt[6]{a}$ при $a=125$:

A) -25; B) 15; C) -5; D) 5.

21. Найдите числовое значение выражения $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{a}$ при $a=0,04$:

A) 0,2; B) $\sqrt[3]{0,4}$; C) 0,4; D) $-0,2$.

22. Упростите выражение: $\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\cdot\left(a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}\right)$.

A) $a+b$; B) $a-b$; C) a^3+b^3; D) a^3-b^3.

Исторические сведения

В древних трудах описаны формулы сокращенного умножения, сведения об алгебраических дробях. Например, в трудах „ Ал-Фахри“ **ал-Караджи,** „Книга ал-Джабр вал-мукабала“ египетского ученого **Абу Камиля** (850—930) также изучаются алгебраические дроби. Абу Камиль был первым после ал-Хорезми ученым, написавшим книгу по алгебре. Абу Камиль в своих трудах обращал также внимание на простые соотношения

$$\left(\frac{a}{b}\right)\cdot b=a,\quad \frac{a}{b}=\frac{a^2}{ab},\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1,\quad \frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}.$$

В своей книге „Общая арифметика“ И. Ньютон также достаточное место отводит алгебраическим дробям. „Дробь $\frac{a}{b}$ является величиной, являющейся результатом деления a на b. Точно также, $\frac{aa-bb}{a+x}$ величина являющаяся результатом деления $aa-bb$ на $a+x$“, – писал Ньютон.

Степень с рациональным показателем ввел **И. Ньютон** (1643–1727). Понятие степени a^{α}, $a>0$ для произвольного действительного числа α определено **Л. Эйлером** (1707–1783) в сочинении „Введение в анализ“.

Абу Райхан Беруни в своем сочинении „Канон Масуда“ писал „Отношение длины окружности к ее диаметру является иррациональным числом“. Уже в Древней Греции было доказано, что „диагональ квадрата со стороной, равной единице, не может быть выражена рациональным числом“. В V–IV вв. до н. э. античные ученые доказали, что число $\sqrt{n}$ является иррациональным числом для любого натурального числа n, не являющегося точным квадратом. В своем трактате „Ключ арифметики“ ал-Каши предложил общий метод извлечения корня из натурального числа. Корень $\sqrt[n]{a^n+r}$ он выражал приближенной формулой $\sqrt[n]{a^n+r}\approx a+\frac{r}{(a+1)^n-a^n}$, где a – натуральное число и $r<(a+1)^n-a^n$.

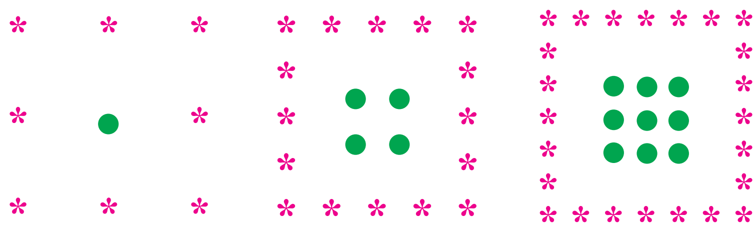
Для нахождения более точного значения корня ал-Каши предложил умножать на соответствующую степень 10: $\sqrt[n]{N} = \dfrac{\sqrt[n]{10^{mn} \cdot N}}{10^m}$. Для извлечения корня из дроби использовалась формула: $\sqrt[n]{\dfrac{M}{N}} = \dfrac{\sqrt[n]{M \cdot N^{n-1}}}{N}$.

Наряду с этим ал-Каши предложил формулу для произведения корней с разными степенями:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{b} = \sqrt[kn]{a^k} \cdot \sqrt[kn]{b^n} = \sqrt[kn]{a^k \cdot b^n}.$$

Практические и межпредметные задачи

163. На рисунке зелеными точками отмечены фруктовые деревья редкого сорта (например, груши редкого сорта). Грушевые деревья посажены в квадрате с измерениями $n \times n$ (м^2). Красными звездочками (*) отмечены защитные деревья.



Защитные деревья посажены вокруг грушевой посадки вдоль сторон квадрата.

Ответьте на вопросы:

Сколько защитных деревьев, окружающих груши с измерениями:
1) 20 м × 20 м; 2) 25 м × 25 м, посажено в квадрате?
3) Какая связь имеется между числом грушевых деревьев и числом окружающих их защитных деревьев?

164. При каких значениях n в условии предыдущей задачи число грушевых деревьев в квадрате со стороной n будет: 1) равно; 2) больше; 3) меньше числа защитных деревьев?

4) Заполните таблицу и проанализируйте ее. Сделайте вывод.

Длина стороны квадрата (м)	Число грушевых деревьев	Число защитных деревьев
1	1	8
2	4	16
.	.	.
.	.	.
.	.	.
10	...	...

165. При определении рейтинга автомобиля учитывают следующие показатели: безопасность (S), удобство (C), выполнение различных функций (F), качество (Q) и дизайн (D). Оценивается каждый из этих показателей (например, в баллах). Рейтинг автомобиля вычисляется по формуле:

$$R = \frac{3S+2C+2F+2Q+D}{50}.$$

В таблице приведены различные показатели для трех марок автомобилей (условно обозначенных A, B, C).

Марка автомобиля	**Безопасность S**	**Удобство C**	**Выполнение различных функций F**	**Качество Q**	**Дизайн D**
A	3	3	5	5	3
B	4	5	3	4	3
C	4	4	3	3	4

1) Какая марка автомобиля имеет наивысший рейтинг?
2) Разместите марки автомобилей по убыванию рейтинга.
3) Какой показатель важен для вас? Почему?
4) Автомобиль с каким рейтингом вы бы выбрали? Почему?

166. Энергия, необходимая для дыхания, пищеварения, кровообращения – интенсивность (скорость) обмена веществ (ИОВ).

Интенсивность обмена веществ обозначим через ИОВ. ИОВ измеряют в калориях, при этом человек должен спокойно и тихо лежать в комнате при температуре 23 °C. Для женщин ИОВ вычисляют по следующей формуле:

$$\text{ИОВ} = 9,74M + 172,9P - 4,737B + 667,051, \qquad (*)$$

где M – масса тела, P – рост (в метрах), B – возраст (в годах).

1) Вычислите ИОВ, если $M = 60$ кг, $P = 1,7$ м, $B = 35$ лет (округлите до ближайшего целого числа);

2) Определите по формуле (*) как может влиять масса тела, рост и возраст женщины на ИОВ.

Ответьте на вопросы:

a) Повышается ли ИОВ с возрастом?
b) Как влияет на ИОВ рост человека?
c) Связано ли число 667,051 с возрастом, ростом и массой женщины?
d) Изменится ли ИОВ, если ее масса уменьшится (она похудеет)?
3) Один врач пришел к выводу, что „если рост двух женщин одного возраста и равного веса разнится на 10 см, то ИОВ будет разнится на 17,29 килокалорий“. Верен ли этот вывод? Проверьте его, пользуясь формулой (*).

167. Между временем изготовления одного изделия и числом изделий, изготавливаемых за один час, имеется обратно пропорциональная зависимость. Заполните таблицу и проанализируйте ее. Сделайте вывод.

Время, отведенное на изготовление одного изделия (в минутах)	2	3		5	6		10	12	
Число изделий, изготовленных за один час (штук)	30		15			8	6		4

168. Площадь поперечного сечения реки на различных ее участках обратно пропорциональна средней скорости реки на этом участке. Заполните таблицу. К какому выводу вы пришли?

Площадь поперечного сечения (кв.м)	40	45		54	60		
Скорость течения (м/с)	0,9	0,8	0,75			0,5	0,4

169. За 4,5 часа рабочие распилили бревна двухметровой длины на чурбаны по 0,5 м. Сколько времени уйдет на эту же работу, если эти бревна распиливать на чурбаны по 40 см? Как при этом изменится объем работы?

170. 1) Два шкива объединены ремнем. Диаметр одного шкива 28 см, а второго – 42 см. Сколько оборотов в минуту совершает второй шкив, если первый в минуту совершает 600 оборотов?

2) Два шкива объединены ремнем. Первый шкив совершает в минуту 560 оборотов, а второй – 240 оборотов. Найдите длину окружности второго шкива, если длина окружности первого шкива равна 0,36 м.

171. Расстояние между городами A и B 360 км. Это расстояние легковая машина проходит за 4 часа, а грузовая за – 6 часов. Из города A по направлению к городу B выехал грузовик. В это же время из города B по направлению к городу A выехала легковая машина. На каком расстоянии от города A они встретятся?

△ Так как скорости легковой и грузовой машин различны, то нет прямой пропорциональности и между расстоянием 360 км и 4 и 6 часами, и нельзя ее использовать.

Применим другой метод:

За час легковая машина проходит $\frac{1}{4}$ часть, а грузовая $\frac{1}{6}$ часть пути AB. Следовательно, для определения места встречи нужно расстояние 360 км разделить пропорционально числам $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{6}$.

Но $\frac{1}{4}:\frac{1}{6}=\frac{3}{12}:\frac{2}{12}=3:2.$

Отсюда $3+2=5.$

Пусть машины встретятся на расстоянии x км от A, тогда $x = \frac{360}{5} \cdot 2 = 144$ (км).

Ответ: На расстоянии 144 км от A. В задаче даны числа 360, 4, 6. Для решения задачи мы ввели числа $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{6}$ (обратные числам 4 и 6). Следовательно, чтобы решать задачи такого типа, нужно 360 разделить обратно пропорционально числам 4 и 6 (и прямо пропорционально числам $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{6}$). Отсюда приходим к выводу:

Чтобы данное число разделить на части, обратно пропорциональные некоторым числам, нужно это число разделить прямо пропорционально к числам, обратным этим. ▲

172. Разделите число 195 на три части, обратно пропорциональные числам 2, 3, 4.

△ 1) Числами, обратными числам 2, 3, 4 являются, соответственно, числа $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$. Следовательно, нужно число 195 разделить на три части, пропорцианальные числам $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$. Но $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4} = \frac{6}{12}:\frac{4}{12}:\frac{3}{12} = 6:4:3$. Если первое число обозначить за a_1, второе за a_2, третье за a_3, то

$a_1 = \frac{195 \cdot 6}{6+4+3} = \frac{195 \cdot 6}{13} = 15 \cdot 6 = 90$; $a_2 = \frac{195 \cdot 4}{13} = 15 \cdot 4 = 60$;

$a_3 = \frac{195 \cdot 3}{13} = 15 \cdot 3 = 45$.

Ответ: 90, 60, 45.

Проверка: 1) $90 + 60 + 45 = 195$.

2) $90:60:45 = 6:4:3 = \frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$ (члены отношения в начале разделили на 15, а затем на 12). ▲

173. 1) Разделите число 4480 на две части, обратно пропорционально числам: a) $\frac{1}{3}$ и $\frac{3}{5}$; b) $\frac{3}{4}$ и $\frac{2}{9}$.

2) Разделите число 987 на две части, обратно пропорционально числам: a) 0,6 и 0,3; b) 0,4 и 0,(3).

174. 1) Разделите число 2040 на три части, обратно пропорционально числам: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ и $\frac{5}{6}$.

2) Разделите число 4530 на три части, обратно пропорционально числам: $\frac{2}{3}$, 0,7 и $1\frac{1}{2}$.

175. 1) Расстояние между городами A и B 465 км. Это расстояние пассажирский поезд прошел за 10,5 часа, а товарный – за 12 часов. Сколько километров проехал каждый поезд до встречи, если они выехали из городов A и B одновременно навстречу друг другу?
2) Первый спортсмен пробегает 100 м за 12 с, а второй за 13 с. Они, находясь друг от друга на расстоянии 200 м, начали бег одновременно навстречу друг другу. Сколько метров пробежал каждый спортсмен до встречи?

176. 1) 36-зубчатая шестерня соединена с 18 зубчатой шестерней. Сколько оборотов делает 36 зубчатая шестерня за то время, когда 18 зубчатая шестерня совершает 60 оборотов? А если 18 зубчатая шестерня совершает 24 оборота?
2) Передняя (ведущая) шестерня велосипеда, соединенная с педалями, имеет 48 зубьев, а шестерня заднего колеса 16 зубьев. Сколько оборотов совершит задняя шестерня за минуту, если передняя совершает за это время 40 оборотов? А если она совершает 45 оборотов; 60 оборотов? Найдите скорость велосипеда в каждом из случаев, если диаметр колеса равен 70 см.

177. 1) *Задача Абу Райхона Беруни.* Измерения кирпича равны 5, 4, 3 единицам длины. 30 таких кирпичей стоят 60 дирхемов (денежная единица). Сколько дирхемов стоят 20 кирпичей с измерениями 8, 6, 2 единицы длины?
2) Пусть отношение длины, ширины и высоты кирпича равно 4 : 2 : 1. Сколько кирпичей по ширине и сколько по высоте можно уложить на место, соответствующее длине 6 кирпичей?

ГЛАВА II НЕРАВЕНСТВА

§11. ЧИСЛОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Сравнение чисел широко используют на практике. Например, экономист сравнивает реальные показатели с плановыми, врач сравнивает температуру больного с нормальной, токарь сравнивает размеры детали с эталоном.

Во всех этих случаях сравниваются между собой некоторые числа. В результате сравнения чисел возникают числовые неравенства.

Например, сравним числа $\frac{4}{5}$ и $\frac{3}{4}$. Для этого найдем их разность: $\frac{4}{5}-\frac{3}{4}=\frac{16-15}{20}=\frac{1}{20}$.

Следовательно, $\frac{4}{5}=\frac{3}{4}+\frac{1}{20}$, то есть число $\frac{4}{5}$ получается в результате прибавления к числу $\frac{3}{4}$ положительного числа $\frac{1}{20}$. Это означает, что число $\frac{4}{5}$ больше числа $\frac{3}{4}$ на $\frac{1}{20}$. Таким образом, число $\frac{4}{5}$ больше числа $\frac{3}{4}$, так как их разность положительна.

О п р е д е л е н и е. *Число* ***a*** ***больше числа b, если их разность положительна.*** *Число* ***a меньше числа b, если их разность отрицательна.***

Если число a больше числа b, то пишут $a>b$; если число a меньше числа b, то пишут $a<b$.

Таким образом, неравенство $a>b$ означает, что разность $a-b$ положительна, то есть $a-b>0$, а неравенство $a<b$ означает, что разность $a-b$ *отрицательна, то есть* $a-b<0$.

Задача 1.. Докажите, что если $a>b$, то $b<a$.

△ Неравенство $a>b$ означает, что разность $a-b$ положительное число. Тогда $b-a=-(a-b)$ — отрицательное число, то есть $b<a$. ▲

Для любых двух чисел a и b только одно из трех соотношений:

$$a>b,\ a=b,\ a<b$$

является верным.

Например, для чисел –5 и –3 верно неравенство $-5<-3$, а соотношения $-5=-3$ и $-5>-3$ не верны.

Сравнить числа a и b значит определить, какой из знаков >, = или < нужно поставить между ними, чтобы соотношение было верным. Это можно сделать, определив знак разности $a-b$.

Задача 2. Сравните числа 0,79 и $\frac{4}{5}$.

△ Найдем их разность:

$$0,79-\frac{4}{5}=0,79-0,8=-0,01.$$

Так как $0,79-\frac{4}{5}<0$, то $0,79<\frac{4}{5}$. ▲

Геометрически $a>b$ означает, что на числовой оси *точка* a *лежит правее точки* b (рис. 10).

Рис. 10.

Например, точка $\frac{4}{5}$ лежит правее точки 0,79, так как $\frac{4}{5}>0,79$; точка 2,3 лежит левее точки 4,4, так как $2,3<4,4$ (рис. 11).

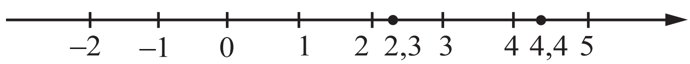


Рис. 11.

Задача 3. Докажите, что если $a \neq b$, то $a^2+b^2>2ab$.

△ Докажем, что разность a^2+b^2-2ab положительна. Действительно, $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2>0$, так как $a \neq b$. ▲

Задача 4. Докажите, что если $a>0$ и $a \neq 1$, то $a+\frac{1}{a}>2$.

△ Докажем, что разность $a+\frac{1}{a}-2$ положительна. Действительно,

$$a+\frac{1}{a}-2=\frac{a^2+1-2a}{a}=\frac{(a-1)^2}{a}>0,$$

так как $a>0$ и $a \neq 1$. ▲

Задача 5. Докажите, что если $\frac{n}{m}$ правильная дробь, то $\frac{n}{m}<\frac{n+1}{m+1}$.

△ Напомним, что дробь $\frac{n}{m}$ называется правильной, если $n<m$ (n и m – натуральные числа).

Разность $\frac{n}{m}-\frac{n+1}{m+1}=\frac{n(m+1)-m(n+1)}{m(m+1)}=\frac{n-m}{m(m+1)}$ меньше нуля, так как $n-m<0$, $m>0$, $m+1>0$. Следовательно, $\frac{n}{m}<\frac{n+1}{m+1}$. ▲

Упражнения

178. Используя определение неравенства, сравните следующие числа:

1) 0,3 и $\frac{1}{5}$; 2) $\frac{1}{3}$ и 0,3; 3) $\frac{13}{40}$ и 0,35;

4) $-\frac{5}{8}$ и $-0{,}7$; 5) $\frac{22}{7}$ и 3,14; 6) $\frac{4}{9}$ и 0,44.

179. Сравните числа a и b, если:

1) $b-a=-1{,}3$; 2) $b-a=0{,}01$; 3) $a-b=(-5)^4$;

4) $a-b=-5^4$; 5) $a-b=0{,}8$; 6) $b-a=(-2)^3$.

180. Докажите, что для любого значения a верно неравенство:

1) $a^2>(a+1)(a-1)$; 2) $(a+2)(a+4)>(a+1)(a+5)$.

181. Докажите, что для любого значения a верны следующие неравенства:

1) $a^3 < (a+1)(a^2 - a + 1)$; 2) $(a+7)(a+1) < (a+2)(a+6)$;

3) $1 + (3a+1)^2 > (1+2a)(1+4a)$; 4) $(3a-2)(a+2) < (1+2a)^2$.

182. Докажите, что для любых значений a и b верны следующие неравенства:

1) $a(a+b) > ab - 2$; 2) $2ab - 1 < b(2a+b)$;

3) $3ab - 2 < a(3b + a)$; 4) $b(a+2b) > ab - 3$.

183. Два мальчика купили одинаковое число тетрадей. Первый мальчик выбрал все тетради по 150 сумов, а второй купил половину тетрадей по 130 сумов, а остальные по 160 сумов. Какой мальчик истратил денег больше?

§12. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ НЕРАВЕНСТВ

В этом параграфе рассматриваются свойства числовых неравенств, которые называют *основными*, так как они часто используются при доказательстве других свойств неравенств и решении многих задач.

Теорема 1. ***Если $a>b$ и $b>c$, то $a>c$.***

По условию $a>b$ и $b>c$. Это означает, что $a-b>0$ и $b-c>0$. Складывая положительные числа $a-b$ и $b-c$, получаем $(a-b)+(b-c)>0$, то есть $a-c>0$.

Следовательно, $a>c$.

Геометрически теорема 1 означает, что если на числовой оси точка a лежит правее точки b и точка b лежит правее точки c, то точка a лежит правее точки c (рис. 12).

Рис. 12.

Теорема 2. *Если к обеим частям неравенства прибавить одно и то же число, то смысл неравенства не изменится.*

○ Пусть $a>b$. Требуется доказать, что неравенство

$$a+c>b+c$$

выполняется для любого числа c.

Рассмотрим разность

$$(a+c)-(b+c)=a+c-b-c=a-b.$$

Эта разность положительна, так как по условию $a>b$. Следовательно, $a+c>b+c$. ●

Следствие. ***Любое слагаемое можно перенести из одной части неравенства в другую, изменив знак этого слагаемого на противоположный.***

○ Пусть $a>b+c$. Прибавляя к обеим частям этого неравенства число $-c$, получим $a-c>b+c-c$, то есть $a-c>b$. ●

Теорема 3. *Если обе части неравенства умножить на одно и то же положительное число, то знак неравенства не изменится. Если обе части неравенства умножить на одно и то же отрицательное число, то знак неравенства изменится на противоположный.*

○ 1) Пусть $a>b$ и $c>0$. Докажем, что $ac>bc$.

По условию $a-b>0$ и $c>0$. Поэтому $(a-b)c>0$, то есть $ac-bc>0$. Следовательно, $ac>bc$.

2) Пусть $a>b$ и $c<0$. Докажем, что $ac<bc$.

По условию $a-b>0$ и $c<0$. Поэтому $(a-b)c<0$, то есть $ac-bc<0$. Следовательно, $ac<bc$. ●

Например, умножив обе части неравенства $\frac{1}{5}<0,21$ на 3, получим, $\frac{3}{5}<0,63$, умножив обе части неравенства $\frac{1}{5}<0,21$ на -4, получим неравенство $-\frac{4}{5}>-0,84$.

Заметим, что если $c \neq 0$, то числа c и $\frac{1}{c}$ имеют один и тот же знак. Так как деление на c можно заменить умножением на $\frac{1}{c}$, то из теоремы 3 вытекает следующее утверждение:

Следствие. ***Если обе части неравенства разделить на одно и то же положительное число, то знак неравенства не изменится. Если обе части неравенства разделить на одно и то же отрицательное число , то знак неравенства изменится на противоположный.***

Например, разделив обе части неравенства $0{,}99<1$ на 3, получим $0{,}33<\frac{1}{3}$, разделив обе части неравенства $0{,}99<1$ на –9, получим $-0{,}11>-\frac{1}{9}$.

Задача 1. Докажите, что $-a<-b$, если $a>b$.

△ Умножив обе части неравенства $a>b$ на отрицательное число –1, получим $-a<-b$. ▲

Например, из неравенства $1{,}9<2{,}01$ следует неравенство $-1{,}9>-2{,}01$, из наравенства $0{,}63<\frac{3}{5}$ следует неравенство $-0{,}63<-\frac{3}{5}$.

Задача 2. Докажите, что $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$, если a и b – отрицательные числа и $a>b$.

△ Разделив обе части неравенства $b<a$ на положительные числа ab, получим неравенство $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$. ▲

Отметим, что все свойства неравенств, рассмотренные в этом параграфе, доказаны для неравенств со знаком > (больше).

Точно также они доказываются и для неравенств со знаком < (меньше).

Упражнения

184. Докажите следующие неравенства:

1) если $a-2<b$ и $b<0$, то $a-2$ – отрицательное число;
2) если $a^2-5>a$ и $a>1$, то $a^2-5>1$.

185. Выясните положительным или отрицательным числом является число a, если:

1) $a>b$ и $b>1$;
2) $a<b$ и $b<-2$;
3) $a-1<b$ и $b<-1$;
4) $a+1>b$ и $b>1$?

186. Запишите неравенство, которое получится, если к обеим частям неравенства $-2<4$ прибавить число: 1) 5; 2) –7.

187. Запишите неравенство, которое получится, если к обеим частям неравенства $2a+3b>a-2b$ прибавить число: 1) $2b$; 2) $-a$.

188. Запишите неравенство, которое получится, если из обеих частей неравенства $3>1$ вычесть число: 1) 1; 2) –5.

189. Запишите неравенство, которое получится, если из обеих частей неравенства $a-2b<3a+b$ вычесть число: 1) a; 2) b.

190. Пусть $a<b$. Сравните следующие числа:

1) $a+x$ и $b+x$;
2) $a-5$ и $b-5$.
3) Объясните какие свойства числовых неравенств изображены на рисунках 13 и 14.

Рис. 13.

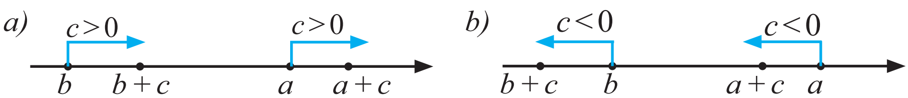


Рис. 14.

Умножьте обе части неравенства на указанное число (**191–192**):

191. 1) $3{,}35<4{,}5$ на 4; 2) $3{,}8>2{,}4$ на 5;

3) $\frac{5}{6}>\frac{2}{3}$ на -12; 4) $\frac{3}{4}<\frac{7}{8}$ на -16.

192. 1) $2a >$ на $0,5$; 2) $4a < -1$ на $0,25$;
3) $-4a < -3$ на $0,25$; 4) $-2a > -4$ на $-0,5$;

Разделите обе части неравенства на указанное число (**193–194**):

193. 1) $-2 < 5$ на 2; 2) $4,5 > -10$ на 5;
3) $-25 > -30$ на -5; 4) $-20 < -12$ на -4;

194. 1) $1,2a < 4,8$ на $1,2$; 2) $2,3a < -4,6$ на $2,3$;

3) $-\frac{2}{3}x < -\frac{1}{4}$ на $\frac{2}{3}$; 4) $-\frac{3}{4}x > \frac{1}{3}$ на $-\frac{3}{4}$.

§13. СЛОЖЕНИЕ И УМНОЖЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ

При решении некоторых задач часто приходится складывать или умножать неравенства на число, то есть складывать или умножать отдельно правые и левые части неравенств. При этом говорят, что неравенства складываются или умножаются почленно.

Например, если турист прошел за первый день более 20 км, а за второй – более 25 км, то можно утверждать, что за два дня он прошел более 45 км.

Точно также, если длина прямоугольника меньше 13 см, а ширина меньше 5 см, то можно утверждать, что площадь этого прямоугольника меньше 65 см^2.

При рассмотрении этих примеров применялись следующие *теоремы о сложении и умножении неравенств*.

> Теорема 1. При сложении неравенств одинакового знака получаются неравенства того же знака: ***если $a>b$ и $c>d$, то $a+c>b+d$.***

○ По условию $a-b>0$ и $c-d>0$. Рассмотрим разность:

$$(a+c)-(b+d)=a+c-b-d=(a-b)+(c-d).$$

Так как сумма положительных чисел положительна, то $(a+c)-(b+d)>0$, то есть $a+c>b+d$.

Примеры:

1) $+\begin{array}{r} 3>2{,}5 \\ 5>4 \\ \hline 8>6{,}5 \end{array}$ 2) $+\begin{array}{r} 1{,}2<1{,}3 \\ -3<-2 \\ \hline -1{,}8<-0{,}7 \end{array}$ 3) $+\begin{array}{r} 4{,}8>2{,}3 \\ -1{,}2>-1{,}3 \\ \hline 3{,}6>1 \end{array}$

Теорема 2. *При умножении неравенств одинакового знака, в которых правые и левые части положительны, получается неравенство того же знака:* ***если $a>b$, $c>d$ и a, b, c, d – положительные числа, то $ac>bd$.***

Рассмотрим разность:

$$ac-bd=ac-bc+bc-bd=c(a-b)+b(c-d).$$

По условию $a-b>0, c-d>0, b>0, c>0$. Поэтому $c(a-b)+$ $+b(c-d)>0$, то есть $ac-bd>0$, откуда $ac>bd$.

Примеры:

1) $\times\begin{array}{r} 3{,}2>3{,}1 \\ 3>2 \\ \hline 9{,}6>6{,}2 \end{array}$ 2) $\times\begin{array}{r} 1{,}8<2{,}1 \\ 4<5 \\ \hline 7{,}2<10{,}5 \end{array}$ 3) $\times\begin{array}{r} 2{,}4<3{,}5 \\ 3<4 \\ \hline 7{,}2<14 \end{array}$

Задача 1. Если a, b – положительные числа и $a>b$, то $a^2>b^2$.

Умножив неравенство $a>b$ на себя, получим: $a^2>b^2$.

Аналогично можно доказать, что если a, b – положительные числа и $a>b$, то $a^n>b^n$ для любого натурального n.

Например, из неравенства $5>3$ следуют неравенства $5^5>3^5$, $5^7>3^7$ и т.д.

Задача 2. Докажите, что сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри треугольника, до его вершин больше полупериметра этого треугольника.

Рассмотрим рисунок 15. Пусть x, y, z — расстояния от внутренней точки O треугольника ABC до его вершин.

По теореме о сумме двух сторон треугольника для треугольников AOB, AOC, BOC:

$$x + y > c,$$
$$x + z > b,$$
$$y + z > a.$$

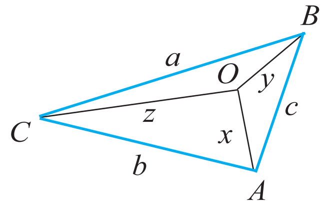


Рис. 15.

Сложив эти неравенства почленно, получим $2x+2y+2z>a+b+c$, откуда

$$x + y + z > \frac{a+b+c}{2}. \blacktriangle$$

Упражнения

195. (Устно.) Верно ли, что:

1) если $x>7$ и $y>4$, то $x+y>11$;
2) если $x>5$ и $y>8$, то $xy<40$;
3) если $x<-7$ и $y<7$, то $x+y<0$;
4) если $x<2$ и $y<5$, то $xy<10$?

196. Сложите неравенства:

1) $5>-8$ и $8>5$; 2) $-8<2$ и $3<5$;
3) $3x+y<2x+1$ и $3y-2x<14-2a$;
4) $3x^2+2y>4a-2$ и $5y-3x^2>3-4a$.

197. Выполните умножение неравенств:

1) $2\frac{2}{3}>1\frac{1}{3}$ и $12>6$; 2) $6\frac{1}{4}<9\frac{2}{3}$ и $4<6$;
3) $x-2>1$ и $x+2>4$; 4) $4<2x+1$ и $3<2x-1$.

198. Докажите, что если $a>2$ и $b>5$, то

1) $3a+2b>16$; 2) $ab-1>9$; 3) $a^2+b^2>29$;
4) $a^3+b^3>133$; 5) $(a+b)^2>35$; 6) $(a+b)^3>340$;
7) $2a+3b>19$; 8) $6ab-5>55$; 9) $ab(a+b)>70$.

199. Стороны треугольника меньше 73 см, 1 м 15 см и 1м 11 см соответственно.Докажите, что его периметр меньше 3 м.

200. Купили 4 общие тетради и 8 блокнотов. Цена общей тетради меньше 200 сумов, а цена блокнота меньше 150 сумов. Покажите, что стоимость всей покупки меньше 2000 сумов.

201. Одна сторона прямоугольника длиннее 7 см, а вторая в 3 раза длиннее первой. Докажите, что периметр прямоугольника больше 56 см.

202. Длина прямоугольного участка земли в 5 раз больше его ширины, а ширина длиннее 4 м. Докажите, что площадь участка больше 80 м^2.

203. Докажите, что сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри прямоугольника, до его вершин больше полупериметра этого прямоугольника.

Строгие и нестрогие неравенства. Неравенства со знаками > (больше) и < (меньше) называют знаками *строгих неравенств*. Например, $\frac{5}{6} > \frac{1}{2}, \frac{3}{4} < 1, a > b, c < d$ – *строгие неравенства.*

Наряду со знаками > и < используют знаки ≥ (больше или равно) и ≤ (меньше или равно). Их называют знаками *нестрогих неравенств.*

Неравенство $a \le b$ означает, что $a < b$ или $a = b$, то есть число a не больше числа b.

Например, если число посадочных мест в самолете 134, то число пассажиров a может быть меньшим или равным 134. В этом случае пишут $a \le 134$.

Точно также неравенство $a \ge b$ означает, что число a больше или равно b, то есть число a не меньше b.

Неравенства, содержащие знак ≥ или ≤ называют *нестрогими неравенствами.* Например, $18 \ge 12$, $11 \le 12$, $7 \ge 7$, $4 \le 4$, $a \ge b$, $c \le d$ – нестрогие неравенства.

Все свойства строгих неравенств, сформулированные в §§12–13, справедливы и для нестрогих неравенств. При этом, если для строгих неравенств противоположными считались знаки > и < , то для нестрогих неравенств противоположными считаются знаки ≥ и ≤ .

Например, теорему 2 из §12 для нестрогих неравенств можно сформулировать следующим образом: если $a \geq b$, то для любого числа c $a+c \geq b+c$. Действительно, для случая, $a>b$ эта теорема доказана, а для случая $a=b$ эта теорема выражает известное утверждение для равенств.

Задача. Докажите, что для любых a и b справедливо неравенство

$$a^2+b^2 \geq 2ab \tag{1}$$

△ Докажем, что для любых a и b разность a^2+b^2-2ab не меньше нуля. Действительно, $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2 \geq 0$. Поэтому неравенство (1) справедливо для любых значений a и b, причем знак равенства имеет место только при $a=b$. ▲

Упражнения

204. Найдите наибольшее целое число n, удовлетворяющее неравенству:

1) $n \leq -2$; 2) $n \leq 3$; 3) $n < 4$; 4) $n < -5$;

5) $n \leq 0{,}2$; 6) $n \leq -0{,}3$; 7) $n < -\pi$; 8) $n < \pi$.

205. Найдите наименьшее целое число n, удовлетворяющее неравенству:

1) $n \geq -3$; 2) $n \geq 6$; 3) $n \geq -6$; 4) $n > -4$;

5) $n > -4{,}21$; 6) $n \geq 3{,}24$; 7) $n \geq \pi - 1$; 8) $n \geq -\pi + 1$.

206. Найдите наибольшее целое число x, удовлетворяющее неравенству:

1) 1) $\frac{x}{6} \leq 1$; 2) $\frac{x}{4} < -2$; 3) $\frac{x}{10} \leq -3{,}14$; 4) $\frac{x}{7} \leq 0{,}15$.

207. Запишите, используя неравенства, утверждения:

1) Сегодня в Ферганской долине температура (t °C) не выше 20°C.

2) Вода поднялась на высоту (h м), не меньшую 5 м.

3) Температура (t °C) воды в жидком состоянии при нормальном атмосферном давлении не меньше 0°C; не больше 100 °C.

4) Скорость (v км/ч) движения автомобильного транспорта в городе не больше 70 км/ч.

208. Пусть $a \leq b$. Верно ли неравенство:

1) $a-3 \leq b-3$; 2) $5a \leq 5b$; 3) $a+2,5 < b+2,5$;

4) $a-4 > b-4$; 5) $a-4 \leq b+1$; 6) $a-3,1 \leq b+0,1$?

209. Пусть $a \geq b$. Верно ли неравенство:

1) $-2a > -2b$; 2) $-3a \leq -3b$; 3) $\frac{a}{12} \geq \frac{b}{12}$;

4) $\frac{a}{15} < \frac{b}{15}$; 5) $0,5a \geq 0,4b$; 6) $-2a \leq -b$?

§14. ВОЗВЕДЕНИЕ ЧИСЛОВЫХ НЕРАВЕНСТВ В СТЕПЕНЬ

В §11 было показано, что если почленно умножить неравенства одинакового знака, правые и левые части которых положительны, то получится неравенство с этим же знаком.

Отсюда следует, что если $a > b > 0$ и n – натуральное число, то $a^n > b^n$.

○ По условию $a > 0$, $b > 0$. Если перемножить n одинаковых неравенств $a > b$, то получим неравенство: $a^n > b^n$. ●

Задача 1. Сравните числа $(0,43)^5$ и $\left(\frac{3}{7}\right)^5$.

△ Так как $\frac{3}{7} \approx 0,428$ с точностью до 0,001, то $0,43 > \frac{3}{7}$. Поэтому $(0,43)^5 > \left(\frac{3}{7}\right)^5$. ▲

Неравенство, правая и левая части которого положительны, можно возводить в рациональную степень,
если $a > b > 0$, $r > 0$, то:

$$a^r > b^r; \quad (1)$$

если $a>b>0$, $r<0$, то

$$a^r<b^r. \qquad (2)$$

Докажем свойство (1).

Вначале докажем верность свойства (1) при $r=\frac{1}{n}$, а затем в общем случае, когда $r=\frac{m}{n}$.

а) Пусть $r=\frac{1}{n}$, где n – натуральное число, больше единицы, $a>0$, $b>0$. По условию $a>b$. Нужно доказать, что $a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$. Предположим, что это неверно, то есть $a^{\frac{1}{n}}\le b^{\frac{1}{n}}$. В этом случае, возведя неравенство в натуральную степень n, получим $a\le b$, а это противоречит условию $a>b$. Следовательно, из условия $a>b>0$ следует, что $a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$.

б) Пусть, $r=\frac{m}{n}$, где m и n – натуральные числа. В этом случае, по доказанному, из условия $a>b>0$, следует, что $a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$. Возведя это неравенство в натуральную степень m, получим:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m>\left(b^{\frac{1}{n}}\right)^m, \text{ то есть } a^{\frac{m}{n}}>b^{\frac{m}{n}}.$$

Например, $5^{\frac{2}{7}}>3^{\frac{2}{7}}$, так как $5>3$; $2^{\frac{3}{4}}<4^{\frac{3}{4}}$, так как $2<4$; $\sqrt[5]{7^2}>\sqrt[5]{6^2}$, так как $7>6$.

Теперь докажем свойство (2).

Если $r<0$, то $-r>0$. По свойству (1) из условия $a>b>0$ следует, что $a^{-r}>b^{-r}$. Умножив обе части этого неравенства на положительное число $a^r b^r$, получим $b^r>a^r$, то есть $a^r<b^r$.

Например, $(0{,}7)^{-8}<(0{,}6)^{-8}$, так как $0{,}7>0{,}6$; $13^{-0{,}6}>15^{-0{,}6}$, так как $13<15$; $\sqrt[4]{8^{-3}}<\sqrt[4]{7^{-3}}$, так как $8>7$.

В курсе высшей математики доказывают, что свойство (1) верно для любого действительного числа r, а свойство (2) – для любого отрицательного действительного числа r. Например,

$$\left(\frac{8}{9}\right)^{\sqrt{2}} > \left(\frac{7}{8}\right)^{\sqrt{2}}, \text{ так как } \frac{8}{9} > \frac{7}{8}; \qquad \left(\frac{7}{8}\right)^{-\sqrt{3}} < \left(\frac{6}{7}\right)^{-\sqrt{3}}, \text{ так как } \frac{7}{8} > \frac{6}{7}.$$

Подчеркнем, что свойства возведения в степень неравенств, рассмотренные для строгих знаков ($>$ или $<$) верны и для нестрогих неравенств (для знаков $\geq$ или $\leq$).

Таким образом, *если обе части неравенства положительны, то при возведении его в положительную степень знак неравенства сохраняется, а при возведении в отрицательную степень знак неравенства меняется на противоположный.*

Напомним, что для строгих неравенств противоположными являются знаки $>$ и $<$, а для нестрогих неравенств знаки $\geq$ и $\leq$.

Задача 2. Сравните числа:

1) $\left(\frac{17}{18}\right)^{-\frac{1}{3}}$ и $\left(\frac{18}{17}\right)^{-\frac{1}{3}}$; 2) $\left(\frac{6}{7}\right)^{\sqrt{2}}$ и $(0,86)^{\sqrt{2}}$.

△ 1) $\frac{17}{18} < \frac{18}{17}$, так как $\frac{17}{18} < 1$ и $\frac{18}{17} > 1$.

Возведя это неравенство в отрицательную степень $\left(-\frac{1}{3}\right)$, получим: $\left(\frac{17}{18}\right)^{-\frac{1}{3}} > \left(\frac{18}{17}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

2) Сравним основания степеней. Так как $\frac{6}{7} = 0,857...$, то $\frac{6}{7} < 0,86$. Возведя это неравенство в положительную степень $\sqrt{2}$, получим:

$$\left(\frac{6}{7}\right)^{\sqrt{2}} < 0,86^{\sqrt{2}}.$$ ▲

Задача 3. Решите неравенство: $10^x = 1$.

△ Число $x = 0$ – корень этого уравнения, так как $10^0 = 1$. Покажем, что уравнение не имеет других корней.

Данное уравнение перепишем в виде $10^x = 1^x$.

Если $x > 0$, то $10^x > 1^x$, следовательно, уравнение не имеет положительных корней.

Если $x < 0$, то $10^x < 1^x$ и, следовательно, уравнение не имеет отрицательных корней. Таким образом, $x = 0$ единственный корень уравнения $10^x = 1$. ▲

Точно также доказывается, что уравнение $a^x = 1$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ имеет единственный корень $x = 0$. Отсюда следует, что уравнение

$$a^x = a^y \qquad (3)$$

верно при $x = y$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

○ Умножив равенство (3) на a^{-y}, получим $a^{x-y} = 1$, откуда $x = y$. ●

Задача 4. Решите уравнение $3^{2x-1} = 9$.

△ Так как $3^{2x-1} = 3^2$, то $2x - 1 = 2$, $x = 1{,}5$. ▲

Рассмотрим уравнение $a^x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Можно доказать, что это уравнение имеет единственный корень x_0. *Число x_0 называют логарифмом числа b по основанию a и обозначают* $\log_a b$. Например, число 2 – корень уравнения $3^x = 9$, то есть $\log_3 9 = 2$. Аналогично, $\log_2 16 = 4$, так как $2^4 = 16$, $\log_5 \frac{1}{5} = -1$, так как $5^{-1} = \frac{1}{5}$; $\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$, так как $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$.

Логарифм числа b по основанию 10 называют *десятичным логарифмом* и обозначают $\lg b$. Например, $\lg 100 = 2$, так как $10^2 = 100$; $\lg 0{,}001 = -3$, так как $10^{-3} = 0{,}001$.

Упражнения

210. (Устно). Сравните числа:

1) $2^{\frac{1}{3}}$ и $3^{\frac{1}{3}}$; 2) $5^{-\frac{4}{5}}$ и $3^{-\frac{4}{5}}$; 3) $5^{\sqrt{3}}$ и $7^{\sqrt{3}}$; 4) $21^{-\sqrt{2}}$ и $31^{-\sqrt{2}}$.

211. Сравните числа:

1) $(0{,}88)^{\frac{1}{6}}$ и $\left(\frac{6}{11}\right)^{\frac{1}{6}}$; 2) $\left(\frac{5}{12}\right)^{-\frac{1}{4}}$ и $(0{,}41)^{-\frac{1}{4}}$;

3) $(4{,}09)^{\sqrt[3]{2}}$ и $\left(4\frac{3}{25}\right)^{\sqrt[3]{2}}$; 4) $\left(\frac{11}{12}\right)^{-\sqrt{5}}$ и $\left(\frac{12}{13}\right)^{-\sqrt{5}}$.

212. Решите уравнение:

1) $6^{2x}=6^{\frac{1}{5}}$; 2) $3^{x}=27$; 3) $7^{1-3x}=7^{10}$;

4) $2^{2x+1}=32$; 5) $4^{2+x}=1$; 6) $\left(\frac{1}{5}\right)^{4x-3}=5$.

213. Сравните числа:

1) $\sqrt[7]{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^{2}}$ и $\sqrt[7]{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)^{2}}$; 2) $\sqrt[5]{\left(1\frac{1}{4}-1\frac{1}{5}\right)^{3}}$ и $\sqrt[5]{\left(1\frac{1}{6}-1\frac{1}{7}\right)^{3}}$.

Решите уравнение (**214–216**):

214. 1) $3^{2-y}=27$; 2) $3^{5-2x}=1$;

3) $9^{\frac{1}{2}x-1}-3=0$; 4) $27^{3-\frac{1}{3}y}-81=0$.

215. 1) $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x-5}=3^{5x-8}$; 2) $2^{4x-9}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}$; 3) $8^{x}4^{x+13}=\frac{1}{16}$;

4) $\frac{25^{x-2}}{\sqrt{5}}=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-7{,}5}$; 5) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-4}=2^{x+2}$; 6) $3^{x}\cdot 9^{x-1}=\frac{1}{27}$.

216. 1) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2x+1}=(3\sqrt{3})^{x}$; 2) $(\sqrt[3]{2})^{x-1}=\left(\frac{2}{\sqrt[3]{2}}\right)^{2x}$;

3) $9^{3x+4}\sqrt{3}=\frac{27^{x-1}}{\sqrt{3}}$; 4) $\frac{8}{(\sqrt{2})^{x}}=4^{3x-2}\sqrt{2}$.

217. Вычислите:

1) $\log_7 49$; 2) $\log_2 64$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} 4$;

4) $\log_3 \frac{1}{27}$; 5) $\log_7 \frac{1}{7}$.

218. Решите уравнение:

1) $7^{5x-1}=49$; 2) $(0{,}2)^{1-x}=0{,}04$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x+3}=3^{2x}$;

4) $3^{5x-7}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$; 5) $(0{,}3)^{2-3x}=0{,}027$; 6) $\left(\frac{1}{6}\right)^{2x-3}=6^{x}$.

§15. НЕРАВЕНСТВА С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Задача 1. Из двух городов отправляются одновременно навстречу друг другу два поезда с одинаковыми постоянными скоростями. С какой скоростью должны двигаться поезда, чтобы через 2 часа после начала движения сумма расстояний, пройденных ими, была не менее 200 км?

△ Пусть x км/ч – искомая скорость движения поездов. За 2 часа каждый из поездов пройдет путь $2x$ километров. По условию задачи сумма расстояний, пройденных поездами за 2 часа, должна быть не меньше 200 километров:

$$2x+2x\geq 200.$$

Откуда $4x\geq 200$, $x\geq 50$.

Ответ: скорость движения каждого поезда должна быть не меньше 50 км/ч. ▲

В неравенстве $4x\geq 200$ буквой x обозначено неизвестное число. Это пример *линейного неравенства с одним неизвестным.*

Неравенства

$$ax>b,\ ax<b,\ ax\geq b,\ ax\leq b,$$

в которых a и b – заданные числа, x – неизвестное, называют линейными неравенствами с одним неизвестным.

Многие неравенства, например,

$$4(3-x)>5+2x,\quad \frac{x-3}{2}\leq\frac{x-2}{3},\quad 1-\frac{x}{2}<3(x+4)$$

сводятся к линейным неравенствам с одним неизвестным.

Выражения, стоящие слева и справа от знака неравенства, называют *левой и правой частями неравенства.* Каждое слагаемое левой и правой частей неравенства называют *членом неравенства.*

Например, в неравенстве $2x-5\geq 4+3x$ левая часть – $2x-5$, правая часть – $4+3x$, $2x$, -5, 4 и $3x$ – члены неравенства.

Если в неравенство $2x+2x\geq 200$, полученное в задаче, подставить $x=50$, $x=51$, $x=60$, то получим верные числовые неравенства:

$$2\cdot 50+2\cdot 50\geq 200;\ 2\cdot 51+2\cdot 51\geq 200;$$
$$2\cdot 60+2\cdot 60\geq 200.$$

каждое из чисел 50, 51, 60 называют решением неравенства $2x+2x\geq 200$.

Решением неравенства *с одним неизвестным называют то значение неизвестного, при котором это неравенство обращается в верное числовое неравенство.* ***Решить неравенство*** *– это значит найти все его решения или установить, что их нет.*

Неизвестное число в неравенстве может быть обозначено любой буквой. Например, в неравенствах

$$3(y-5)<2(4-y),\qquad 2t-1\geq 4(t+3),\qquad 5-\frac{z}{2}>\frac{z}{3}-4$$

неизвестные обозначены буквами *y, t, z* соответственно.

Приведем примеры решения неравенств.

Задача 2. Решите неравенство:

$$x+1>7-2x.$$

△ Предположим, что число x – решение данного неравенства, тогда число x обращает неравенство $x+1>7-2x$ в верное неравенство.

Перенесем член неравенства $-2x$ из правой части в левую, поменяв его знак на противоположный, а число 1 перенесем вправо со знаком „–“. В результате получим верное неравенство

$$x+2x>7-1.$$

В обеих частях неравенства приведем подобные члены:

$$3x>6.$$

Разделив обе части неравенства на 3, получим,

$$x>2$$

Таким образом, предположив, что x – решение заданного неравенства, мы получили, что $x>2$. Чтобы убедиться в том, что любое значение x, больше 2, является решением неравенства, достаточно провести все рассуждения в обратном порядке.

Пусть $x>2$. Используя свойства верных числовых неравенств, последовательно получим следующие неравенства:

$$3x>6,$$

$$x+2x>7-1,$$

$$x+1>7-2x.$$

Следовательно, любое число, больше 2, является решением заданного неравенства.

Ответ: $x>2$. ▲

При решении неравенства не обязательно подробно записывать все объяснения. Например, решение задачи 1 можно записать так:

$$x+1>7-2x,$$
$$3x>6,$$
$$x>2.$$

Таким образом, при решении неравенства пользуемся следующими его *основными свойствами*:

Свойство 1. *При решении неравенства* ***любой его член можно переносить из одной части неравенства в другую, поменяв знак этого члена на противоположный****, при этом знак неравенства не изменится.*

Свойство 2. ***Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же не равное нулю число; если это число положительно, то знак неравенства не изменится, если оно отрицательно, то знак изменится на противоположный.***

Эти свойства дают возможность заменять данное неравенство другим неравенством, имеющим точно такие же решения.

Для решения неравенств, сводящихся к линейным неравенствам с одним неизвестным, нужно:

1) члены, содержащие неизвестное, перенести в левую часть неравенства, члены, не содержащие неизвестное (свободные), перенести в правую часть неравенства (свойство 1);

2) приведя подобные члены, разделить обе части неравенства на коэффициент при неизвестном (если он отличен от нуля) (свойство 2).

Задача 3. Решите неравенство:

$$3(x-2)-4(x+1)<2(x-3)-2.$$

△ Упростим правую и левую части неравенства. Раскроем скобки:

$$3x-6-4x-4<2x-6-2.$$

Перенесем члены, содержащие неизвестное, в левую часть неравенства, члены, не содержащие неизвестное (свободные), в правую часть неравенства (свойство 1):

$$3x-4x-2x<6+4-6-2.$$

Приведем подобные члены:

$$-3x<2$$

и разделим обе части неравенства на –3 (свойство 2):

$$x>-\frac{2}{3}.$$

Ответ: $x>-\frac{2}{3}$. ▲

Это решение можно коротко записать так:

$$3(x-2)-4(x+1)<2(x-3)-2,$$

$$3x-6-4x-4<2x-6-2,$$

$$-x-10<2x-8,$$

$$-3x<2,$$

$$x>-\frac{2}{3}.$$

Множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $x > -\frac{2}{3}$, изображают на числовой прямой в виде *луча* (рис.16). Точка $x = -\frac{2}{3}$ не принадлежит этому лучу, она изображена на рисунке 16 *светлой точкой*, а луч выделен темной линией.

Множество точек x, удовлетворяющих, например, неравенству $x \geq 2$, также называют *лучом*. Точка $x = 2$ принадлежит этому лучу. На рисунке 17 она изображена *темной точкой*.

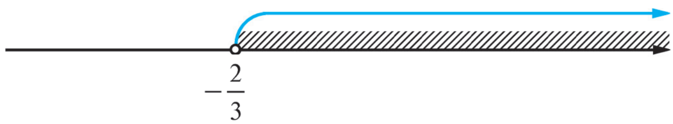


Рис.16.

Рис.17.

Задача 4. Решите неравенство:

$$\frac{x-5}{6} + 1 \geq \frac{5x}{2} - \frac{x-3}{3}.$$

△ Умножим обе части неравенства на 6:

$$6 \cdot \frac{x-5}{6} + 6 \cdot 1 \geq 6 \cdot \frac{5x}{2} - 6 \cdot \frac{x-3}{3},$$

$$(x-5) + 6 \geq 15x - 2(x-3).$$

Раскроем скобки и приведем подобные члены:

$$x - 5 + 6 \geq 15x - 2x + 6,$$

$$x + 1 \geq 13x + 6,$$

Откуда

$$-12x \geq 5, \; x \leq -\frac{5}{12}. \; ▲$$

Множество решений $x \leq -\frac{5}{12}$ этого неравенства, то есть луч, изображен на рисунке 18.

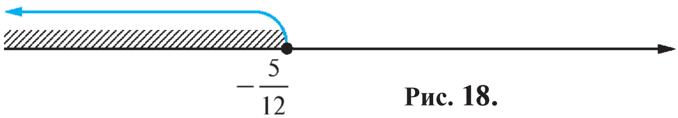


Рис. 18.

В рассмотренных примерах после упрощения неравенств они приводятся к линейным с отличным от нуля коэффициентом при неизвестном. Однако в некоторых случаях этот коэффициент может равняться нулю.

Приведем примеры таких неравенств.

Задача 5. Решите неравенство:

$$2(x+1)+5>3-(1-2x).$$

△ Преобразуем обе части неравенства:

$$2x+2+5>3-1+2x,$$
$$2x+7>2+2x,$$

откуда

$$2x-2x>2-7,$$
$$0\cdot x>-5.$$

Последнее неравенство верно для любого значения x, так как его левая часть при любом значении x равна нулю, а $0>-5$. Следовательно, любое значение x является решением неравенства.

Ответ: x – любое число. ▲

Задача 6. Решите неравенство:

$$3(2-x)-2>5-3x.$$

△ Преобразуем левую часть неравенства:

$$6-3x-2>5-3x,$$
$$4-3x>5-3x,$$

откуда

$$-3x+3x>5-4,$$
$$0\cdot x>1.$$

Последнее неравенство не имеет решений, так как левая часть неравенства при любом значении x равна нулю, а неравенство $0>1$ неверно. Следовательно, данное неравенство не имеет решений.

Ответ: решений нет. ▲

Упражнения

219. Запишите следующие предложения неравенством:

1) сумма чисел x и 17 больше 18;
2) разность чисел 13 и x меньше 2;
3) произведение чисел 17 и x не меньше 3;
4) удвоенная сумма чисел x и –3 не больше 2;
5) половина суммы чисел x и 3 не больше их произведения;
6) удвоенное произведение чисел x и -4 не меньше их разности.

220. Какие из чисел 10, $\frac{1}{2}$, 0, –1 являются решением неравенства:

1) $3x+4>2$; 2) $3x+4\leq x$; 3) $\frac{1}{2}x-3>\leq 1-x$;
4) $3-x\geq\frac{1}{2}x$; 5) $0,8x+5>7$; 6) $0,2x-4\leq -2$?

221. При каких значениях y верны неравенства:

1) $-2y>0$; 2) $-3y<0$; 3) $y^2+1\geq 0$;
4) $2y^2+3\leq 0$; 5) $(y-1)^2\leq 0$; 6) $(y+2)^2\geq 0$?

222. На рисунке 19 изображен график линейной функции $y=kx+b$. Запишите с помощью неравенства, какие значения принимает y, если:

1) $x\geq 0$; 2) $x<0$;
3) $x>-5$; 4) $x\leq -5$.

223. На рисунке 20 изображен график линейной функции $y=kx+b$. Запишите, при каких значениях x значения функции будут: 1) положительны; 2) не отрицательны; 3) отрицательны; 4) меньше -4; 5) не меньше -4; 6) больше -4.

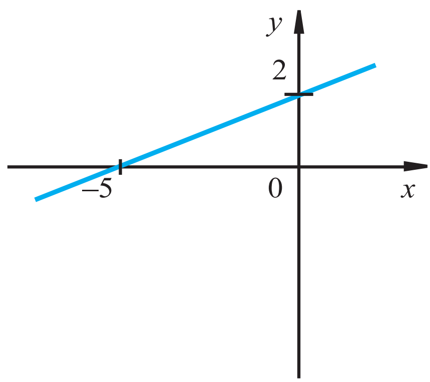


Рис. 19.

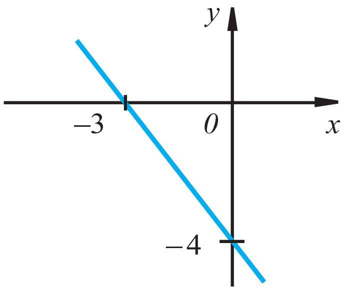


Рис. 20.

224. Постройте график функции. По графику найдите, при каких значениях x функция:

1) $y = 2x + 4$; 2) $y = 3x - 9$;

3) $y = -2x - 8$; 4) $y = -3x + 6$.

1) положительна; 2) отрицательна;

3) равна нулю; 4) больше 1; 5) меньше 1.

Решите неравенство (**225–226**):

225. 1) $x + 2 \geq 15$; 2) $x - 6 < 8$; 3) $3 \leq y + 6$;

4) $-4 > 5 - y$; 5) $2z \geq z - 7$; 6) $3z \leq 2z + 4$.

226. 1) $12x > -36$; 2) $-7x \leq 56$; 3) $\frac{y}{4} \leq 7$;

4) $-5 < \frac{z}{3}$; 5) $7{,}2z > -27$; 6) $-4{,}5x \geq 9$.

Решите неравенство и изобразите множество его решений на числовой оси (**227–228**):

227. 1) $2x - 16 > 0$; 2) $18 - 3x > 0$; 3) $3x - 15 < 0$;

4) $25 - 5x < 0$; 5) $9 - 3x \geq 0$; 6) $2x + 4 \leq 0$;

7) $6 - 2x \leq 0$; 8) $1{,}8 + 3x \geq 0$; 9) $-4x + 2 \leq 0$.

228. 1) $3(x + 1) \leq x + 5$; 2) $4(x - 1) \geq 5 + x$;

3) $2(x - 3) + 4 < x - 2$; 4) $x + 2 < 3(x + 2) - 4$;

5) $\frac{x-1}{3} \geq \frac{3x-3}{5}$; 6) $\frac{3x-2}{4} \geq \frac{2x-1}{3}$.

229. Определите, при каких значениях x положительно выражение:

1) $\frac{3}{8}x + 4$; 2) $\frac{5}{2} - 4x$; 3) $2(x+3)+3x$;

4) $3(x-5)-8x$; 5) $\frac{1}{3} - 2(x + 4)$; 6) $\frac{1}{2} - 3(x - 5)$.

230. Определите, при каких значениях y отрицательно выражение:

1) $5-\frac{2}{3}y$; 2) $\frac{3}{4}-2y$; 3) $\frac{y-2}{3}+\frac{1}{3}$;

4) $\frac{8y-3}{5}-\frac{2}{5}$; 5) $\frac{3y-5}{2}-\frac{y}{2}$; 6) $\frac{4-5y}{6}-\frac{y}{6}$.

231. Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству:

1) $4(y-1)<2+7y$;

2) $4y-9\geq 3(y-2)$;

3) $3(x-2)-2x<4x+1$;

4) $6x+1\geq 2(x-1)-3x$.

232. Найдите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству:

1) $5-2x>0$; 2) $6x+5\leq 0$;

3) $3(1-x)>2(2-x)$; 4) $4(2-x)<5(1-x)$.

233. 1) Для каких значений a дробь $\frac{a}{3}$ больше дроби $\frac{a+1}{4}$?

2) Для каких значений b дробь $\frac{b+3}{2}$ меньше дроби $\frac{b-1}{5}$?

3) Для каких значений x дробь $\frac{3x-5}{6}$ больше разности дробей $\frac{6x-7}{15}$ и $\frac{3-x}{9}$?

4) Для каких значений x сумма дробей $\frac{2-5x}{4}$ и $\frac{7x-3}{6}$ меньше дроби $\frac{2x+5}{18}$?

Решите неравенство (**234–236**):

234. 1) $3(x-2)+x<4x+1$; 2) $5(x+2)-x>3(x-1)+x$;

3) $\frac{3x+6}{4}-\frac{x}{4}>\frac{x+2}{2}$; 4) $\frac{2x-1}{5}-4<x-\frac{3x+1}{5}$.

235. 1) $5(x+2)+2(x-3)<3(x-1)+4x$;

2) $3(2x-1)+3(x-1)>5(x+2)+2(2x-3)$;

3) $\frac{5x+3}{2}-1\geq 3x-\frac{x-7}{2}$;

5) $\frac{3x+2}{4}-1\leq 2x+\frac{x-5}{2}$;

4) $2-\frac{x-4}{3}\leq 2x-\frac{7x-4}{3}$;

6) $3-\frac{x-1}{2}\geq 3x-\frac{5x-3}{3}$.

236. 1) $\frac{2}{3x+6}<0$; 2) $\frac{3}{2x-4}>0$; 3) $\frac{-1{,}7}{0{,}5x-2}>0$;

4) $\frac{-2{,}3}{0{,}4x+8}<0$; 5) $\frac{-1{,}7}{2{,}1+6{,}3x}<0$; 6) $\frac{-3{,}8}{3{,}2-6{,}4x}>0$.

237. Для каких значений x значения функции $y=2{,}5x-4$: 1) положительны; 2) отрицательны; 3) больше 1; 4) меньше -4?

238. Для каких значений x значения функции $y=3{,}5-0{,}5x$: 1) положительны; 2) не отрицательны; 3) не больше 3,5; 4) не меньше 1?

239. Постройте график функции $y=3-2x$. С помощью графика найдите, при каких значениях x точки графика лежат: 1) выше оси абсцисс; 2) выше прямой $y=2$; 3) ниже оси абсцисс; 4) ниже прямой $y=4$. Проверьте результаты, решая соответствующие неравенства.

240. По плану мастера должны изготовить 40 деталей. Сколько деталей им нужно изготовить, чтобы перевыполнить план более чем на 10%?

§16. СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ. ЧИСЛОВЫЕ ПРОМЕЖУТКИ

1. Системы неравенств.

Задача. Пустой бассейн объемом 4000 *л* наполняют водой. Сколько литров воды в час нужно наливать в бассейн, чтобы через 4 часа было заполнено более половины всего бассейна и чтобы через 5 часов бассейн не переполнился?

△ Пусть x литров — количество воды, поступающей в бассейн за 1 час. По условию задачи $4x > 2000$, $5x \leq 4000$.

Из первого неравенства получим $x > 500$, а из второго $x \leq 800$.

Ответ: за час нужно вливать в бассейн более 500 *л*, но не более 800 *л*. ▲

В неравенствах $4x > 2000$ и $5x \leq 4000$ неизвестное число одно и то же, поэтому эти неравенства рассматривают совместно и говорят, что они образуют систему неравенств:

$$\begin{cases} 4x > 2000, \\ 5x \leq 4000. \end{cases} \tag{1}$$

Фигурная скобка показывает, что нужно найти такие значения x, при которых оба неравенства системы (1) обращаются в верные числовые неравенства.

Система (1) — пример *системы линейных неравенств с одним неизвестным*. Приведем еще примеры *систем линейных неравенств с одним неизвестным:*

$$\begin{cases} 3(x+1) > 5, \\ 4(x-1) > x-2; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-1 \geq 3x, \\ 5(x-1) \leq 8, \\ x-1 > 5. \end{cases}$$

Решением системы линейных неравенств *называют то значение неизвестного, при котором все неравенства системы обращаются в верные числовые неравенства.*

Решить систему неравенств *— это значит найти все значения неизвестного или установить, что их нет.*

Например, $x = 1$ является решением системы

$$\begin{cases} 2x \geq -4, \\ 3x \leq 9 \end{cases} \tag{2}$$

так как при $x = 1$ оба числовых неравенства системы (2) верны:

$$\begin{cases} 2\cdot 1 \geq -4, \\ 3\cdot 1 \leq 9. \end{cases}$$

Разделив обе части первого неравенства системы (2) на 2, а второго – на 3, получим:

$$\begin{cases} x \geq -2, \\ x \leq 3. \end{cases}$$

Следовательно, решениями системы (2) являются все значения x, которые не меньше -2 и не больше 3.

Неравенства $x \geq -2$ и $x \leq 3$ можно записать в виде *двойного неравенства*:

$$-2 \leq x \leq 3.$$

2. Числовые промежутки.

Решениями систем неравенств с одним неизвестным являются различные числовые множества. Эти множества имеют свои названия.

Например, на числовой оси множество чисел, таких, что $-2 \leq x \leq 3$, изображается отрезком с концами в точках –2 и 3 (рис. 21).

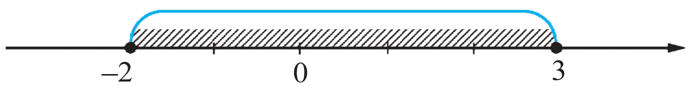


Рис. 21.

Поэтому множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $-2 \leq x \leq 3$, называют *отрезком* и обозначают [–2; 3].

*Если $a < b$, то множество чисел, удовлетворяющих неравенству $a \leq x \leq b$, называют **отрезком** и обозначают $[a;\ b]$.*

Например, отрезок [4; 7] – это множества чисел x, удовлетворяющих неравенству $4 \leq x \leq 7$.

Для множества чисел x, удовлетворяющих неравенствам $2 < x < 7$, $-1 \leq x < 2$, $4 < x \leq 7$, также вводятся специальные названия.

Если $a<b$, то множество чисел, удовлетворяющих неравенству $a<x<b$, называют ***интервалом*** *и обозначают $(a;\ b)$.*

Например, интервал $(-2;\ 3)$ – это множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $-2<x<3$ (рис. 22).

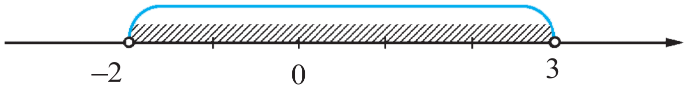


Рис. 22.

Множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \le x < b$ или $a < x \le b$, называют ***полуинтервалами*** *и обозначают соответственно $[a;\ b)$ и $(a;\ b]$.*

Например, полуинтервал $[-1;\ 2)$ – это множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $-1 \le x < 2$; полуинтервал $(4;\ 7]$ — это множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $4 < x \le 7$.

Рис. 23.

Отрезки, интервалы, полуинтервалы и лучи называют *числовыми промежутками*. Таким образом, числовые промежутки можно задавать в виде неравенств.

Рассмотрим примеры решения систем неравенств.

Задача 1. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 5x-1>3(x+1), \\ 2(x+4)>x+5. \end{cases} \qquad (1)$$

△ Решим первое неравенство:

$$5x-1>3x+3,$$

$$2x>4,\ \ x>2.$$

Таким образом, первое неравенство выполняется при $x>2$.

Решим второе неравенство:

$$2x+8>x+5, \; x>-3.$$

Таким образом, второе неравенство системы (1) выполняется при $x>-3$.

Изобразим на числовой оси множество решений первого и второго неравенства.

Решение первого неравенства – все точки луча $x>2$, решение второго неравенства – все точки луча $x>-3$ (рис. 24).

Рис. 24.

Решениями системы (1) являются такие значения x, которые одновременно принадлежат обоим лучам. На рисунке видно, что множество всех общих точек этих лучей – луч $x>2$.

О т в е т : $x>2$. ▲

З а д а ч а 2. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 3(x-1)\le 2x+4, \\ 4x-3\ge 13. \end{cases} \qquad (2)$$

△ Решим первое неравенство:

$$3x-3\le 2x+4,$$
$$x\le 7.$$

Решим второе неравенство системы (2):

$$4x\ge 16,$$
$$x\ge 4.$$

Изобразим на числовой оси множества решений первого и второго неравенств системы (2). Решение первого неравенства – луч $x\le 7$, решение второго неравенства – луч $x\ge 4$ (рис. 25).

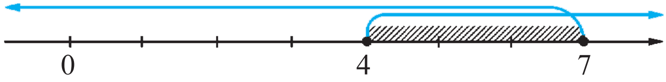


Рис. 25.

На рисунке видно, что множество общих точек этих лучей отрезок [4; 7].

Ответ: $4 \le x \le 7$. ▲

Задача 3. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \frac{5x}{12} + \frac{4}{3} \ge \frac{x+1}{3}, \\ 2 - \frac{5x}{14} < \frac{2-x}{2}. \end{cases} \qquad (3)$$

△ Решим первое неравенство системы (3):

$$5x + 16 \ge 4x + 4,$$

$$x \ge -12.$$

Решим второе неравенство:

$$28 - 5x < 14 - 7x,$$

$$2x < -14,$$

$$x < -7.$$

Изобразим на числовой оси лучи $x \ge -12$ и $x < -7$ (рис. 26). Из рисунка видно, что множество общих точек этих лучей полуинтервал [–12; –7).

Ответ: $-12 \le x < -7$. ▲

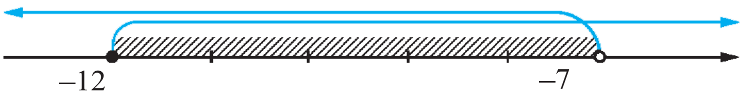


Рис. 26.

Задача 4. Показать, что система неравенств

$$\begin{cases} 2(1 - x) < 4 - 3x, \\ 10 - 3x < 1 \end{cases} \qquad (4)$$

не имеет решений.

△ Решим первое неравенство:

$$2-2x<4-3x, \quad x<2.$$

Решим второе неравенство системы (4):

$$-3x<-9,$$
$$x>3.$$

На числовой оси изобразим лучи $x<2$ и $x>3$ (рис. 27).

На рисунке видно, что эти лучи не имеют общих точек. Следовательно, система (4) не имеет решений. ▲

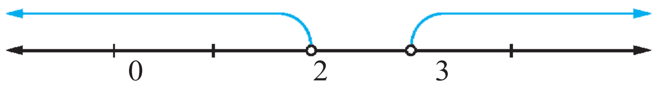


Рис. 27.

Упражнения

241. Какие из чисел –3; 0; 5 являются решениями системы неравенств:

1) $\begin{cases} 5-x\le 9, \\ 2-3x>-4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{1}{3}x-2>1, \\ 5-2x>-25; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 0,5x+3>4, \\ 7-x>1? \end{cases}$

242. Какие из чисел –2; 0; 1 являются решениями системы неравенств:

1) $\begin{cases} 12x-1<11, \\ -3-x\le 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x-1\ge 4-x, \\ x+6>2? \end{cases}$

243. Найдите все целые числа, являющиеся решениями системы неравенств:

1) $\begin{cases} x>2, \\ x<7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x\le 3, \\ x>-1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x\le 2,7, \\ x\ge 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x\ge -5,1, \\ x<5,1. \end{cases}$

244. Множество чисел x, удовлетворяющих двойному неравенству, запишите с помощью обозначений числового промежутка:

1) $1\le x\le 5$; 2) $-1\le x\le 3$; 3) $-1<x<4$;

4) $1<x<2$; 5) $-3\le x<1$; 6) $-4<x\le -2$.

245. Множество чисел x, принадлежащих числовому промежутку, запишите в виде двойного неравенства и изобразите его на числовой оси:

1) $[-4; 0]$; 2) $[-3; -1]$; 3) $(-4; -2)$;

4) $(0; 3)$; 5) $(-1; 4]$; 6) $[-2; 2)$.

246. Запишите в виде двойного неравенства, а также с помощью обозначений числового промежутка множество чисел, изображенных на рисунке 28:

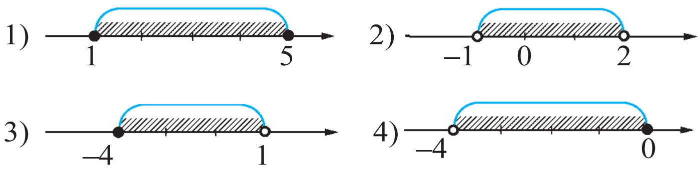


Рис. 28.

247. Принадлежит ли отрезок $[2; 3]$ интервалу $(1; 4)$?

248. Имеют ли общие точки отрезки $[2; 4]$ и $[3; 5]$?

249. На одной координатной плоскости изображены графики двух линейных функций (рис. 29). При каких x значения обеих функций одновременно положительны? А при каких значениях одновременно отрицательны?

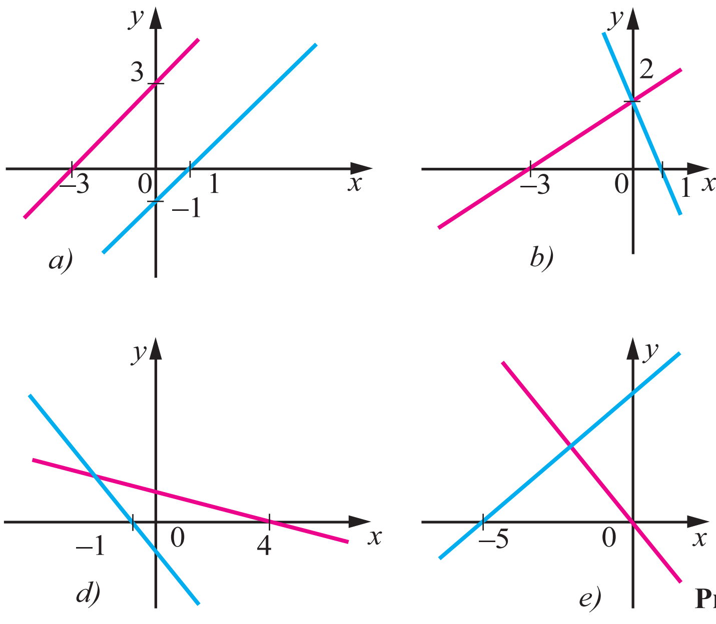


Рис. 29.

№ 3

Длины сторон прямоугольника выражаются натуральными числами. Какой длины должны они быть, чтобы числовое значение периметра прямоугольника было численно равно значению его площади?

250. На одной координатной плоскости постройте графики функций $y=-2x-2$ и $y=2-\frac{x}{2}$. Отметьте на оси абсцисс множество значений x, при которых значения обеих функций: 1) положительны; 2) отрицательны.

251. Решите неравенство:

1) $(x-3)(2x-3)+6x^2 \geq 2(2x-3)^2$;

2) $(5-6x)(1+3x)+(1+3x)^2 \leq (1+3x)(1-3x)$;

3) $(2x+1)(4x^2-2x+1)-8x^3 \geq -2(x+3)$;

4) $(x-2)(x^2+2x+4) \leq x(x^2+2)+1$.

Запишите все решения системы неравенств одним неравенством и изобразите его на числовой оси (**252–253**):

252. 1) $\begin{cases} x>2, \\ x>5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x>0, \\ x>-1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x>2, \\ x\geq -3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x\geq -2, \\ x\geq -4. \end{cases}$

253. 1) $\begin{cases} x\leq 1, \\ x<5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x<0, \\ x<-1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x<-2, \\ x<-5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x\leq 1, \\ x\leq 0. \end{cases}$

Запишите все решения системы неравенств двойным неравенством и изобразите его на числовой оси (**254–255**):

254. 1) $\begin{cases} x>2, \\ x<5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x>3, \\ x<6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x<0, \\ x\geq -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x\geq 0, \\ x<\frac{1}{2}. \end{cases}$

255. 1) $\begin{cases} x \le -2, \\ x \ge -7,5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < 1,5, \\ x \ge -1,5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x \ge 0,8, \\ x < 2,2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x \le 7,5, \\ x \ge -0,5; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x \ge -2, \\ x \le 2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x < 3,5, \\ x > 0. \end{cases}$

Решите систему неравенств (**256–259**):

256. 1) $\begin{cases} 3x - 18 > 0, \\ 4x > 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x - 14 \ge 0, \\ 2x \ge 8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x + 5 > 0, \\ 3x + 6 \ge 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x + 7 \ge 0, \\ 5x + 15 > 0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 5x + 10 > 0, \\ 3x \le 9; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 4x - 7 < 0, \\ 2x + 1 \ge 0. \end{cases}$

257. 1) $\begin{cases} 3 - 2x \ge 0, \\ 4x + 8 < 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 4 \le 0, \\ 4 - 3x > 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x + 3 \le 0, \\ 3x + 9 \le 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x - 9 < 0, \\ 12 > 3x; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 24 < 6x, \\ 3x \ge 2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 7x + 14 > 0, \\ 3x - 6 \le 0. \end{cases}$

258. 1) $\begin{cases} 7 - 2x \ge 0, \\ 5x - 20 < 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 5 \le 0, \\ 9x + 18 \le 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 6 - 2x > 0, \\ 3x + 6 > 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 10 - 2x \ge 0, \\ 4x - 8 \ge 0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 5x - 12 \ge 0, \\ 15 - 3x \le 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 6 - 4x \le 0, \\ 3x + 9 > 0. \end{cases}$

259. 1) $\begin{cases} 3x + 3 \le 2x + 1, \\ 3x - 2 \le 4x + 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x + 2 \ge 5x + 3, \\ 2 - 3x < 7 - 2x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5(x+1) - x > 2x + 2, \\ 4(x+1) - 2 < 2(2x+1) - x; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2(x-1) - 3 < 5(2x-1) - 7x, \\ 3(x+1) - 2 \le 6(1-x) + 7. \end{cases}$

260. Найдите все целые числа, являющиеся решениями системы неравенств:

1) $\begin{cases} 0,2x > -1, \\ -\frac{x}{3} \geq 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 1 - 0,5x \geq 0, \\ -\frac{x+5}{5} < -1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x-1}{2} < \frac{x}{3}, \\ \frac{x+1}{2} \geq \frac{x}{5}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{x-1}{4} \leq \frac{x}{5}, \\ \frac{x}{3} > \frac{x+4}{7}; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 0,4x > -2, \\ 0,3x < 1; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 1 + 0,2x \geq 0, \\ 0,5x - 1 < 0. \end{cases}$

261. Для каких x значения функций $y=0,5x+2$ и $y=3-3x$ одновременно: 1) положительны; 2) отрицательны; 3) больше 3; 4) меньше 3?

262. Для каких x значения функций $y=x-2$ и $y=0,5x+1$ одновременно: 1) не отрицательны; 2) не положительны; 3) не меньше 4; 4) не больше 4?

263. Одна сторона треугольника 5 м, а вторая 8 м. Какой может быть третья сторона, если периметр треугольника: 1) меньше 22 м; 2) больше 17 м?

264. Если из $\frac{3}{2}$ целого числа вычесть $\frac{1}{4}$ его часть, то получится число большее 29, если же из $\frac{3}{2}$ этого же числа вычесть $\frac{1}{3}$ его, то получится число меньшее 29. Найдите это целое число.

265. Если к удвоенному целому числу прибавить его половину, то получится число, меньше 92, если из удвоенного этого же целого числа вычесть его половину, то получится число, больше 56. Найдите это целое число.

§17. МОДУЛЬ ЧИСЛА. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ МОДУЛЬ

1. Модуль числа.

Напомним понятие модуля числа:

1) *Модуль положительного числа равен самому числу.*

Например, $|3|=3,\ \left|\frac{2}{7}\right|=\frac{2}{7},\ |2,4|=2,4.$

2) *Модуль отрицательного числа равен противоположному ему числу.*

Например, $|-2|=-(-2)=2,\ \left|-\frac{5}{6}\right|=-\left(-\frac{5}{6}\right)=\frac{5}{6},\ |-1,5|=-(-1,5)=1,5.$

3) *Модуль нуля равен нулю:* $|0|=0.$

Таким образом, получаем следующее определение модуля:

$$|a| = a, \text{ если } a \geq 0;$$

$$|a| = -a, \text{ если } a < 0.$$

Это определение коротко записывают формулой:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0; \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Выясним геометрический смысл модуля числа.

Отметим на числовой оси, например, числа 3 и –2 (рис. 30). Из рисунка видно, что $|3|=3$ – это расстояние от точки 0 до 3, $|-2|=2$ – это расстояние от точки 0 до точки –2.

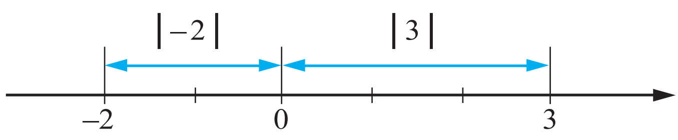


Рис. 30.

Итак, геометрически $|a|$ *– это расстояние от точки 0 до точки, изображающей число* a.

2. Уравнения, содержащие неизвестное под знаком модуля.

Задача 1. Решите уравнение:

$$|x| = 7.$$

△ 1) Пусть $|x| \geq 0$. Тогда по определению модуля $|x| = x$ и уравнение принимает вид:

$$x = 7,$$

то есть $x = 7$ — корень исходного уравнения;

2) Пусть $x < 0$. В этом случае по определению модуля $|x| = -x$ и уравнение принимает вид:

$$-x = 7,$$

откуда $x = -7$ — второй корень исходного уравнения.

Ответ: $x_1 = 7$, $x_2 = -7$. ▲

Задача 2. Решите уравнение $|3x + 2| = 1$.

△ 1) Пусть $3x + 2 \geq 0$. Тогда $3x + 2 = 1$, $3x = -1$, $x = -\frac{1}{3}$;

2) Пусть $3x + 2 < 0$. Тогда $3x + 2 = -1$, $3x = -3$, $x = -1$.

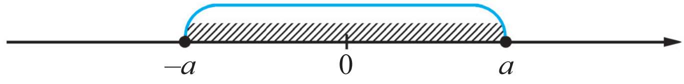
Ответ: $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = -1$. ▲

3. Неравенства, содержащие неизвестное под знаком модуля.

Рассмотрим неравенство

$$|x| \leq a, \quad \text{где} \quad a > 0.$$

Этому неравенству удовлетворяют все точки x, принадлежащие отрезку $[-a;\ a]$ (рис. 31).



$|x| \leq a$

Рис. 31.

Отрезок $[-a;\ a]$ — это множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $-a \le x \le a$.

> Следовательно, неравенство $|x| \le a$, где $a > 0$, равносильно двойному неравенству $-a \le x \le a$.

Например, неравенство $|x| \le 2{,}5$ означает, что $-2{,}5 \le x \le 2{,}5$; неравенство $|x| < 3$ означает, что $-3 < x < 3$.

Задача 3. Решите неравенство $|5 - 3x| < 8$.

△ Запишем данное неравенство в виде:

$$-8 < 5 - 3x < 8.$$

Это двойное неравенство означает то же самое, что и система неравенств:

$$\begin{cases} 5 - 3x < 8, \\ 5 - 3x > -8. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что $-1 < x < 4\frac{1}{3}$ (рис. 32). ▲

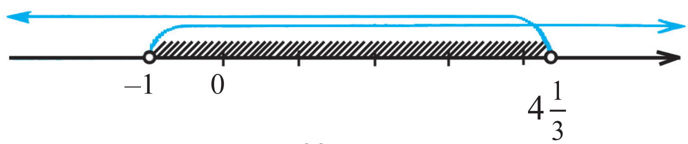


Рис. 32.

Рассмотрим неравенство

$$|x| \ge a, \quad \text{где} \quad a > 0.$$

Этому неравенству удовлетворяют все точки x, находящиеся от точки 0 на расстоянии, не меньшем a, то есть точки двух лучей $x \ge a$ и $x \le -a$ (рис. 33).

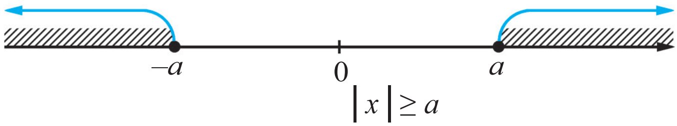


Рис. 33.

Задача 4. Решите неравенство: $|x-1| \ge 2$.

△ 1) Пусть $x-1 \ge 0$. Тогда $x-1 \ge 2$. Получим следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} x-1 \ge 0, \\ x-1 \ge 2. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $x \ge 3$.

2) Пусть $x-1<0$. Тогда $-(x-1) \ge 2$ или $x-1 \le -2$.

Получим следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} x-1 < 0, \\ x-1 \le -2. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $x \le -1$.

Следовательно, решениями неравенства $|x-1| \ge 2$, во-первых, являются числа $x \ge 3$, а во-вторых, числа $x \le -1$.

Ответ: $x \le -1, x \ge 3$. ▲

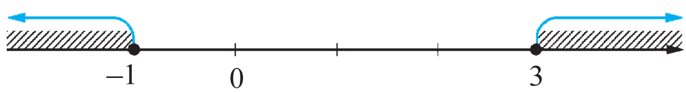


Рис. 34.

Решения неравенства $|x-1| \ge 2$ изображены на рисунке 34.

Если в неравенстве

$$|x| \le a$$

число a равно нулю, то неравенство имеет единственное решение $x=0$, а если $a<0$, то неравенство не имеет решений.

Если в неравенстве

$$|x| \geq a$$

число a меньше или равно нулю, то любое число является его решением.

Упражнения

266. (Устно.) Найдите модуль числа:

1) 23; 2) 4,7; 3) $\frac{2}{7}$; 4) -47; 5) $-2{,}1$; 6) $-\frac{3}{8}$?

Решите уравнение (**267–270**):

267. 1) $|x| = 2{,}5$; 2) $|x| = 1{,}5$; 3) $|x-1| = 2$;

4) $|x+3| = 3$; 5) $|x+4| = 4$; 6) $|x-4| = 4$.

268. 1) $|x+4| = 0$; 2) $|x-2| = 0$; 3) $|2x-3| = 0$;

4) $|3-4x| = 0$; 5) $|7+3x| = 0$; 6) $|2x+5| = 0$.

269. 1) $|3x-5| = 5$; 2) $|4x+3| = 2$; 3) $\left|\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}\right| = \frac{1}{3}$;

4) $\left|\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{4}$; 5) $|7x-10| = 4$; 6) $|0{,}5-2x| = 2{,}5$.

270. 1) $|-x| = 3{,}4$; 2) $|-x| = 2{,}1$; 3) $|5-x| = 5$;

4) $|3-x| = 8$; 5) $|x-7| = 1$; 6) $|5-x| = 2$.

271. Изобразите на числовой оси множество решений неравенства:

1) $|x| < 5$; 2) $|x| \leq 4$; 3) $|x| \leq 4$; 4) $|x| > 2$.

272. Запишите неравенство с модулем в виде двойного неравенства:

1) $|x| \geq 3$; 2) $|x| < 2$; 3) $|x| < 3{,}5$; 4) $|x| \leq 2{,}4$.

273. Запишите двойное неравенство в виде одного неравенства с модулем:

1) $-3,1 < x < 3,1$; 2) $-0,3 \le x \le 0,3$; 3) $-4,8 < x < 4,8$.

Решите неравенство (**274–277**):

274. 1) $|1+x| \le 0,3$; 2) $|2+x| < 0,2$; 3) $|3-x| \le \frac{2}{3}$;

4) $|1-x| < \frac{3}{4}$; 5) $|x-1| \le 1$; 6) $|x-4| \le 2$.

275. 1) $|3x-4| < 5$; 2) $|2x+3| < 3$; 3) $|2-3x| \le 2$;

4) $|5-4x| \le 1$; 5) $|4x-1| < 7$; 6) $|3-2x| \le 3$.

276. 1) $|x+1| > 1,3$; 2) $|x-2| \ge 1,1$; 3) $|1-x| \ge \frac{1}{2}$;

4) $|3-x| > \frac{2}{3}$; 5) $|x-1| > 3,8$; 6) $|5-4x| \le 1$.

277. 1) $|4x-3| \ge 3$; 2) $|3x+2| > 1$; 3) $|3x-2| > 4$;

4) $|4-5x| \ge 4$; 5) $|6x-1| \le 2$; 6) $|3-5x| \ge 2$.

278. Найдите все целые значения x, при которых выполняется неравенство:

1) $|5x-2| < 8$; 2) $|5x+3| < 7$; 3) $|5-3x| \le 1$;

4) $|3-4x| \le 3$; 5) $|2x-5| \le 1$; 6) $|3-4x| \le 6$.

279. Решите неравенство:

1) $|2x-3| > 5$; 2) $|3x-1| \le 4$; 3) $|1-3x| \le 1$;

4) $|3-2x| \ge 3$; 5) $|1,5x-2| \le 1$; 6) $|4-3x| > 2$.

§18. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ВЕЛИЧИН, ПОГРЕШНОСТЬ ПРИБЛИЖЕНИЯ

При решении практических задач часто приходится иметь дело с *приближенными значениями различных величин.* Приближенные значения обычно получаются при подсчете большого количества предметов, например, числа деревьев в лесу; при измерении различных величин с помощью приборов, например, длины, массы, температуры; при округлении чисел.

Рассмотрим несколько примеров:

1) первая почтовая марка Республики Узбекистан, которая была посвящена поэтессе Нодире, была выпущена в обращение в количестве 2 миллионов экземпляров;

2) в классе 36 учеников;

3) в Узбекистане имеется более 10 000 общеобразовательных школ;

4) длина железной дороги Навои – Нукус 342 км;

5) рабочий получил в кассе 70 600 сумов;

6) за последние годы в Узбекистане площадь, отведенная под зерновые культуры, увеличилась на 300 тысяч гектаров;

7) расстояние от Ташкента до Бухары равно 500 км;

8) в килограмме пшеницы содержится 30 000 зерен;

9) расстояние от Земли до Солнца $1{,}5 \cdot 10^8$ км;

10) на Государственном флаге Республики Узбекистан имеется 12 звезд.

В примерах 2, 5, 10 значения величин точные, а в остальных – приближенные.

Задача 1. Один из школьников на вопрос о том, сколько учащихся учатся в школе, ответил „1000“, а другой на тот же вопрос ответил „950“. Чей ответ точнее, если в школе учатся 986 учащихся?

△ Первый ученик ошибся на 14, а второй – на 36. Следовательно, более точным был ответ первого учащегося. ▲

Заметим, что разность между точным и приближенным значениями числа учащихся в первом случае отрицательна:

$$986-1000=-14,$$

а во втором случае – положительна:

$$986 - 950 = 36.$$

На практике важно знать отклонение приближенного значения от точного в ту или другую сторону, то есть модуль (абсолютную величину) разности между точным значением и приближенным.

Модуль разности между точным значением величины и ее приближенным значением называют *абсолютной погрешностью приближения.*

Таким образом, если a – приближенное значение величины, точное значение которой равно x, то абсолютная погрешность приближения равна

$$|x - a|.$$

Абсолютную погрешность приближения называют просто *погрешностью*.

Задача 2. При нахождении суммы углов треугольника с помощью транспортира получили результат 182°. Чему равна абсолютная погрешность этого приближения?

△ Точное значение суммы углов треугольника равно 180°, а приближенное значение – 182°. Поэтому абсолютная погрешность равна

$$|180° - 182°| = |-2°| = 2°.$$ ▲

Задача 3. Найдите погрешность приближения числа $\frac{3}{7}$ десятичной дробью 0,43.

△ $$\left|\frac{3}{7} - 0{,}43\right| = \left|\frac{3}{7} - \frac{43}{100}\right| = \left|\frac{300 - 301}{700}\right| = \left|-\frac{1}{700}\right| = \frac{1}{700}.$$ ▲

Упражнения

280. Какие из приведенных в примерах чисел являются точными значениями величин, а какие приближенными:
1) одна лепешка стоит 500 сумов;
2) 12 листовая тетрадь стоит 60 сумов и имеет толщину 3 мм;
3) за один год автомобильный завод выпустил 200 тысяч машин?

281. При измерении ширины книги учащийся получил результат в промежутке от 16,2 см до 16,4 см.

1) Можно ли назвать точное значение ширины книги?

2) Указать несколько приближенных значений ширины книги.

282. Найдите абсолютную погрешность приближения числа $\frac{4}{9}$ числом:

1) $\frac{6}{13}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $0,3$; 4) $0,44$; 5) 0,43; 6) 0,45.

283. Найдите погрешность следующих приближений:

1) числа 0,1975 числом 0,198;

2) числа –3,254 числом –3,25;

3) числа $-\frac{8}{17}$ числом $-\frac{1}{2}$;

4) числа $\frac{22}{7}$ числом 3,14.

284. Пусть *a* приближенное значение числа *x*. Найдите погрешность приближения, если:

1) $x = 5{,}346$, $a = 5{,}3$; 2) $x = 4{,}82$, $a = 4{,}9$;

3) $x = 15{,}9$, $a = 16$; 4) $x = 25{,}08$, $a = 25$.

285. Известно, что сумма углов четырехугольника равна 360°. При измерении суммы углов четырехугольника транспортиром получили результат 363°. Чему равна погрешность этого приближения?

286. С помощью графиков прямых $y = 7x + 9$ и $y = 1$ получили, что абсцисса точки пересечения этих прямых равна –1. Чему равна погрешность этого приближения?

287. Верно ли, что десятичная дробь 0,33 является приближенным значением числа $\frac{1}{3}$ с абсолютной погрешностью, меньшей 0,01?

§19. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ

Во многих случаях точное значение величины неизвестно, и тогда абсолютную погрешность найти нельзя. Тем не менее часто удается дать *оценку абсолютной погрешности*, если известны приближения с избытком и с недостатком.

Задача 1. В комнатном термометре верхний конец столбика с жидкостью находится между отметками 21 и 22 °С. В качестве приближенного значения температуры взято число 21,5. Оцените абсолютную погрешность приближения.

△ Точное значение температуры t не известно, однако можно утверждать, что

$$21 \le t \le 22.$$

Чтобы получить оценку разности между точным значением температуры и его приближенным, то есть разность $t-21{,}5$, вычтем из каждой части этого двойного неравенства число 21,5.

Получим $-0{,}5 \le t-21{,}5 \le 0{,}5$, то есть $|t-21{,}5| \le 0{,}5$. Следовательно, абсолютная погрешность не больше 0,5. ▲

В этом случае говорят также, что температура измерена с точностью до 0,5 и записывают:

$$t=21{,}5 \pm 0{,}5.$$

Вообще, если число a – приближенное значение числа x и $|x-a| \le h$, то говорят, что число x равно числу a с точностью до h и записывают:

$$\boxed{x=a\pm h.} \qquad (1)$$

Напомним, что неравенство $|x-a| \le h$ означает то же самое, что и двойное неравенство

$$a-h \le x \le a+h. \qquad (2)$$

Например, запись $x = 2{,}43 \pm 0{,}01$ означает, что число x равно 2,43 с точностью до 0,01, то есть $2{,}43 - 0{,}01 \le x \le 2{,}43 + 0{,}01$, или $2{,}42 \le x \le 2{,}44$.

Числа 2,42 и 2,44 являются приближенными значениями числа x с недостатком и с избытком.

Практически при измерении, рассмотренном в задаче 1, в качестве приближенного значения берут 21° или 22° С. В этом случае абсолютная погрешность каждого приближения не превышает 1° С. Поэтому обычно считают, что измерение температуры с помощью термометра, на котором деления нанесены через 1° С, проводится с точностью до 1° С.

Аналогично и для других измерительных приборов: *точность измерения* обычно устанавливается по наименьшему делению прибора. Например, микрометром измеряют длину с точностью до 0,01 мм, медицинским термометром измеряют температуру с точностью до 0,1°С, наручные часы с секундной стрелкой показывают время с точностью до 1 с.

Таким образом, погрешность измерения зависит от того, каким прибором ведется это измерение, чем меньше погрешность приближения, тем точнее измерительный прибор.

Приближенными значениями часто пользуются при замене обыкновенных дробей десятичными.

Задача 2. Докажите, что число 0,43 является приближенным значением дроби $\frac{13}{30}$ с точностью до 0,01.

△ Требуется доказать, что

$$\left|\frac{13}{30}-0,43\right|\le 0,01.$$

Вычислим разность:

$$\frac{13}{30}-0,43=\frac{13}{30}-\frac{43}{100}=\frac{130-129}{300}=\frac{1}{300}.$$

Следовательно, $\left|\frac{13}{30}-0,43\right|=\frac{1}{300}$; $\frac{1}{300}\le 0,01$.

Откуда получаем $\left|\frac{13}{30}-0,43\right|\le 0,01$. ▲

Упражнения

288. Что означает запись:

1) $x = 3,9 \pm 0,2$; 2) $x = 0,4 \pm 0,15$; 3) $x=\frac{1}{3}\pm\frac{1}{10}$;

4) $x = 0,73\pm 0,01$; 5) $x=-135 \pm 1$; 6) $x=-2\frac{1}{5}\pm\frac{1}{10}$;

7) $x =-1 \pm 0,1$; 8) $x = 9,5 \pm 0,2$; 9) $x =-3,2 \pm 0,01$?

289. Запишите в виде двойного неравенства:

1) $x = 11 \pm 0{,}5$; 2) $m = 142 \pm 1$; 3) $l = 3{,}7 \pm 0{,}1$;
4) $v = 900 \pm 5$; 5) $x = a \pm h$; 6) $y = m \pm n$.

290. Найдите приближенное значение числа x с недостатком и с избытком, если:

1) $x = 4 \pm 0{,}1$; 2) $x = 2{,}7 \pm 0{,}1$;
3) $x = -0{,}6 \pm 0{,}12$; 4) $x = -5{,}9 \pm 0{,}2$.

291. Пусть $x = 5{,}8 \pm 0{,}2$. Может ли точное значение быть равным:
1) 5,9; 2) 6,001; 3) 6; 4) 5,81; 5) 5,75; 6) 5,6?

292. Пусть $x = 8{,}7 \pm 0{,}4$. Может ли число x быть равным:
1) 8,222; 2) 8,4; 3) 9; 4) 9,5; 5) 9,3?

293. Укажите приближенное значение числа x, равное среднему арифметическому приближений с недостатком и с избытком:
1) $20 \le x \le 22$; 2) $5 \le x \le 6$; 3) $4{,}5 \le x \le 4{,}8$;
4) $3{,}7 \le x \le 4{,}1$; 5) $2{,}81 \le x \le 2{,}83$; 6) $0{,}55 \le x \le 0{,}6$.

294. Докажите, что:
1) 2,7 есть приближенное значение числа 2,7356 с точностью до 0,5;
2) 0,27 есть приближенное значение дроби $\frac{11}{40}$ с точностью до 0,01.

295. Является ли число 4 приближенным значением дроби 4,3 с точностью до 0,5? с точностью до 0,1?

296. Согласно оптическим и радиолокационным измерениям, диаметр Меркурия равен (4880 ± 2) км, а радиус Венеры (6050 ± 5) км. Запишите результаты измерений в виде двойных неравенств.

297. Для измерения диаметра цилиндра рабочий пользуется калиброметром, в котором имеются отверстия диаметром 10,00; 10,04; 10,08 мм и т.д. до 10,56 мм. Какова при этом точность измерения?

298. В отделе технического контроля завода измеряется диаметр вала с точностью до 0,1 мм. По таблице допусков диаметр d вала должен быть в промежутке $167{,}8 \le d \le 168{,}2$. Забракует ли отдел технического контроля вал, если в результате измерения его диаметр равен 168,1 мм?

§20. ОКРУГЛЕНИЕ ЧИСЕЛ

Округление чисел используется при действиях с приближенными значениями различных величин во многих практических задачах математики, физики, техники.

Например, ускорение свободного падения на уровне моря и широте 45° равно 9,80665 м/с^2. Обычно это число округляют до десятых: 9,8. При этом пишут: $g \approx 9{,}8$ (читается: g приближенно равно 9,8).

Запись $x \approx a$ означает, что число *a является приближенным значением числа x.*

Задача 1. Площадь земельного участка прямоугольной формы равна 25 м^2, его длина равна 8 м. Найдите ширину участка.

△ Пусть ширина участка равна l метров, тогда

$$l = 25 : 8 = 3{,}125.$$

Ответ: 3,125 м. ▲

Такой результат на практике обычно округляют до десятых, то есть полагают, что $l \approx 3{,}1$.

Рассмотрим правило округления чисел на следующем примере. Пусть требуется округлить число 3,647 до сотых. Для округления с недостатком отбросим последнюю цифру 7, в результате получим 3,64. Для округления с избытком отбросим последнюю цифру 7, а предпоследнюю увеличим на единицу. В результате получим 3,65.

В первом случае абсолютная погрешность округления равна

$$|3{,}647 – 3{,}64| = 0{,}007,$$

во втором случае равна

$$|3{,}647 – 3{,}65| = 0{,}003.$$

Во вторм случае погрешность приближения меньше, чем в первом случае. Следовательно, в рассматриваемом примере наилучшим является округление с избытком.

Чтобы абсолютная погрешность приближения при округлении положительных чисел была наименьшей, пользуются следующим правилом.

Если первая отбрасываемая цифра меньше 5, то нужно округлять с недостатком, а если эта цифра больше или равна 5, то нужно округлять с избытком.

Например, при округлении до десятых получаем:

$$3{,}647 \approx 3{,}6, \quad 2{,}658 \approx 2{,}7;$$

при округлении до сотых получаем:

$$0{,}6532 \approx 0{,}65, \quad 9{,}0374 \approx 9{,}04.$$

Задача 2. Замените число $\frac{2}{7}$ десятичной дробью, равной этому числу с точностью до 0,01.

△ Запишем результат деления 2 на 7 в виде десятичной дроби с тремя знаками после запятой:

$$\frac{2}{7} = 0{,}285...$$

Округляя это число до сотых, получим $\frac{2}{7} \approx 0{,}29$. ▲

Для решения этой задачи было найдено значение $\frac{2}{7}$ с тремя знаками после запятой, чтобы получить значение с точностью до 0,01. Если бы потребовалось найти приближенное значение числа $\frac{2}{7}$ с точностью до 0,001, то надо было бы найти четыре десятичных знака.

Упражнения

299. Округлите числа 3285,05384; 6377,00753; 1234,5336 последовательно до тысячных, сотых, десятых долей, единиц, десятков, сотен, тысяч.

300. Округлите числа 15,75 и 317,25 до единиц с недостатком и с избытком. Найдите абсолютную погрешность каждого округления.

301. Представьте в виде десятичной дроби с точностью до 0,1 число:

1) $\frac{13}{8}$; 2) $\frac{17}{25}$; 3) $\frac{39}{129}$; 4) $\frac{11}{3}$; 5) $\frac{5}{7}$; 6) $\frac{19}{11}$.

302. Представьте в виде десятичной дроби с точностью до 0,01 число:

1) $\frac{3}{7}$; 2) $\frac{7}{99}$; 3) $\frac{5}{19}$; 4) $1\frac{2}{3}$; 5) $2\frac{3}{11}$; 6) $5\frac{1}{14}$.

303. Представьте в виде десятичной дроби с точностью до 0,001 число:

1) $\frac{2}{7}$; 2) $\frac{5}{13}$; 3) $2\frac{3}{11}$; 4) $7\frac{9}{14}$; 5) $3\frac{1}{7}$; 6) $1\frac{18}{19}$.

304. Средняя скорость движения молекулы водорода при 0°C равна 1693 м/с. Один ученик округлил это число до 1690 м/с, а другой – до 1700 м/с. Найдите абсолютную погрешность каждого округления. В каком случае погрешность приближения меньше?

§21. ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ

Для сравнения точности некоторых приближений одной и той же величины используется абсолютная погрешность. Если же сравниваются приближения различных величин, то абсолютной погрешности недостаточно.

Например, расстояние от Ташкента до Самарканда равно (300 ± 1) км. Длина карандаша равна $(21{,}3 \pm 0{,}1)$ см. Абсолютная погрешность в первом случае 1 км, а во втором – не больше 1 мм. Означает ли это, что длина карандаша измерена точнее, чем расстояние от Ташкента до Самарканда?

При измерении расстояния от Ташкента до Самарканда абсолютная погрешность не превышает 1 км на 300 км, что составляет $\frac{1}{300} \cdot 100\% \approx 0{,}33\%$ измеряемой величины.

При измерении длины карандаша абсолютная погрешность не превышает 0,1 см на 21,3 см, что составляет $\frac{0{,}1}{21{,}3} \cdot 100\% \approx 0{,}47\%$ измеряемой величины.

Для оценки качества приближения вводится понятие относительной погрешности.

Относительной погрешностью называют частное от деления абсолютной погрешности на модуль приближенного значения величины.

Таким образом, если a – приближенное значение числа x, то абсолютная погрешность равна $|x-a|$, а относительная погрешность равна $\frac{|x-a|}{|a|}$. Относительную погрешность обычно выражают в процентах.

Задача. Приближенное значение массы Земли равно $(5{,}98 \pm 0{,}01)\cdot 10^{24}$ кг. Масса пули охотничьего ружья равна (9 ± 1) г. Какое измерение является более точным?

△ Оценим относительную погрешность каждого измерения:

$$1)\ \frac{0{,}01\cdot 10^{24}}{5{,}98\cdot 10^{24}}\cdot 100\% \approx 0{,}2\%; \qquad 2)\ \frac{1}{9}\cdot 100\% \approx 11\%.$$

Масса Земли измерена точнее. ▲

Упражнения

305. Округлите число до единиц и найдите абсолютную и относительную погрешность округления:

1) 3,45; 2) 10,59; 3) 23,263; 4) 0,892; 5) 1,947.

306. Найдите относительную погрешность приближения:

1) $\frac{1}{3}$ числом 0,33; 2) $\frac{1}{7}$ числом 0,14.

307. Какое измерение точнее:

1) $a=(750\pm 1)$ м или $b=(1{,}25\pm 0{,}01)$ м;

2) $p=(10{,}6\pm 0{,}1)$ с или $q=(1{,}25\pm 0{,}01)$ с?

308. Одновременно различными приборами измерили температуру пара и получили в первом случае $t=(104\pm 1)$°С, во втором случае $t=(103{,}8\pm 0{,}1)$°С, в третьем случае $t=(103{,}86\pm 0{,}01)$°С. Оцените относительную погрешность каждого измерения.

309. Двое учащихся, выполняя практическую работу по измерению длины, в результате получили (203 ± 1) мм и (120 ± 1) см. Какой из учащихся выполнил работу качественнее?

310. 1) Приближенное значение числа x равно a. Относительная погрешность этого приближения равна 0,01, то есть 1%. Найдите абсолютную погрешность, если $a = 2{,}71$.

2) Приближенное значение числа x равно b. Относительная погрешность этого приближения равна 0,001, то есть 0,1%. Найдите абсолютную погрешность, если $b = 0{,}398$.

311. Масса Солнца равна $(2\cdot10^{33}\pm0{,}1\cdot10^{33})$ г. Масса детского мяча равна $(2{,}5\pm0{,}1)\cdot10^2$ г. Какое измерение точнее?

Упражнения к главе II

Решите уравнение (**312–313**):

312. 1) $x(2x + 5) = 0$; 2) $x(3x - 4) = 0$;

3) $(x - 5)(3x + 1) = 0$; 4) $(x + 4)(2x - 1) = 0$.

313. 1) $\frac{2x+3}{3x-1}=0$; 2) $\frac{1-2x}{2x+5}=0$; 3) $\frac{(2x+1)(x+2)}{x-3}=0$; 4) $\frac{(x-3)(2x+4)}{x+1}=0$.

314. На числовой оси точка a лежит левее точки b. Положительно или отрицательно число:

1) $b-a$; 2) $2+b-a$; 3) $a-b$; 4) $a-3-b$?

315. Решите неравенство:

1) $x+9>8-4x$; 2) $3(y+4)\geq 4-(1-3y)$;

3) $5(0{,}2+y)-1{,}8\geq 4{,}3+5y$; 4) $3(x-5)+9>15$.

316. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 0{,}5\,(x+3)-0{,}8<0{,}4\,(x+2)-0{,}3, \\ 0{,}7\,(2-x)+1{,}3<0{,}6\,(1-x)+2{,}2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 1{,}5\,(x-2)-2{,}1<1{,}3\,(x-1)+2{,}5, \\ 1{,}3\,(x+3)+1{,}7>1{,}6\,(x+2)+1{,}8. \end{cases}$

317. Решите уравнение:

1) $|x-1|=3,4$; 2) $|1-x|=2,4$; 3) $|1-2x|=5$;

4) $|3x-2|=1$; 5) $|4x-1|=3$; 6) $|2x+7|=9$.

318. Решите неравенство:

1) $|x-1|\le 3,4$; 2) $|x-1|\ge 3,4$; 3) $|x-1|<3,4$;

4) $|2x+1|\ge 3$; 5) $|3+2x|\le 1$; 6) $|1-3x|\ge 4$.

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ!

1. Докажите, что при всех значениях x верно неравенство

$$\frac{1}{2}x(2x-4)\ge(x-2)x$$

2. Решите неравенство:,

1) $12-5x>0$; 2) $3x-7\le 4(x+2)$; 3) $\frac{x}{2}+\frac{3-x}{4}<2$.

3. Решите систему неравенств:,

1) $\begin{cases}3x-13>0,\\25-4x>0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}4x-13\ge 3x-10,\\11-4x\le 12-3x;\end{cases}$

3) $\begin{cases}5x+3<3x-7,\\1-2x>x+4;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}5x-7\le 2-4x,\\7-3x\ge 1-5x.\end{cases}$

319. Пусть $a<2b$. Докажите, что:

1) $4a-2b<a+4b$; 2) $3a-2b<a+2b$;

3) $a+2b>3a-2b$; 4) $a+b>4a-5b$.

320. Одна сторона треугольника больше 4 см, вторая в 1,5 раза больше первой, а третья в 1,5 раза больше второй. Докажите, что периметр треугольника больше 19 см.

321. При каких значениях x значения функций $y=-x+1$ и $y=x+2$ одновременно: 1) положительны; 2) отрицательны; 3) больше 1; 4) больше 2?

322. Сумма четного числа с утроенным последующим четным числом больше 134, а сумма этого же четного числа с удвоенным предыдущим четным числом меньше 104. Найдите это число.

323. Сумма нечетного числа с удвоенным последующим нечетным числом меньше 151, а сумма этого же нечетного числа с утроенным предыдущим нечетным числом больше 174. Найдите это число.

324. Запишите в виде двойного неравенства:

1) $x=12\pm0{,}3$;   2) $y=23\pm1$;   3) $x=a\pm1$;
4) $y=m\pm0{,}1$;   5) $z=1{,}8\pm0{,}01$;   6) $z=b\pm0{,}2$.

325. Представьте числа в виде десятичных дробей с точностью до 0,01:

1) $\frac{5}{11}$;   2) $\frac{3}{22}$;   3) $\frac{3}{13}$;   4) $\frac{2}{7}$;   5) $\frac{17}{24}$;   6) $\frac{5}{12}$.

326. Вычислите сопротивление медного стержня, длина которого равна $l=0{,}25$ м, площадь поперечного сечения $S\approx1{,}2\cdot10^2$ мм^2, а удельное сопротивление $\rho\approx0{,}017\ \Omega\cdot$мм^2/м $\left(R=\frac{\rho l}{S}\right)$.

327. Вычислите кинетическую энергию тела по формуле $E_k=\frac{mv^2}{2}$, если m = 7,6 кг, v = 4,2 м/с.

328. Допустимая погрешность измерения длины 20 см – 0,5 мм, а при измерении расстояния 1000 км – 200 м. Какое измерение точнее?

329. В городе с населением 57 100 человек было проведено медицинское обследование населения с целью выявления частоты встречающихся групп крови. Выяснили, что людей с группой крови I – 32,9%, с группой II – 35,8%, с группой III – 23,2% и с группой IV – 8,1%. Сколько человек с каждой из групп крови проживает в городе?

Тестовые задания к главе II

1. Решите неравенство: $5(x-3)+2x<4x+3$.

A) $x<6$; B) $x<-6$; C) $x>6$; D) $x>-6$.

2. Решите неравенство: $4(x-1)+5(x+1)<6(x+2)+7(x-1)$.

A) $x<-1$; B) $x>-1$; C) $x<1$; D) $x>1$.

3. Решите неравенство: $\frac{2x-3}{4}>\frac{x+1}{6}-\frac{4x+3}{3}$.

A) $x>1$; B) $x\le 1$ C) $x>-0{,}05$; D) $x<2$.

4. Найдите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $7x+5\geq 3(x-1)-4x$.

A) $x=2$; B) $x=-2$; C) $x=3$; D) $x=-1$.

5. Найдите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $7(1-x)>5(3-x)$.

A) $x=-5$; B) $x=-3$; C) $x=2$; D) $x=-2$.

6. При каких x дробь $\frac{3x-6}{5}$ меньше суммы дробей $\frac{4x-5}{15}$ и $\frac{4-x}{3}$?

A) $x<3{,}3$; B) $x>2{,}3$; C) $x\le -2{,}3$; D) $x>4{,}5$.

7. При каких x разность дробей $\frac{3-5x}{4}$ и $\frac{7x+3}{6}$ больше дроби $\frac{3x+5}{12}$?

A) $x<\frac{1}{16}$; B) $x<-\frac{1}{16}$; C) $x>\frac{1}{16}$; D) $x>-\frac{1}{16}$.

8. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 3(1-x)>5-4x, \\ 13-4x<1. \end{cases}$$

A) $x>\frac{1}{2}$; B) $\frac{1}{2}<x<3$; C) $x>3$; D) $x>-3$.

9. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{3} \le \dfrac{x+2}{2}, \\ \dfrac{x-4}{5} \ge \dfrac{x-5}{4}. \end{cases}$$

A) $1 \le x \le 9$; | B) $-12 \le x$; | C) $x \ge 9$; | D) $-12 \le x \le 9$.

10. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} (x+3)(x+2) \le (x+4)(x-1)+5, \\ 2(5x-1) \ge 3(3x-2). \end{cases}$$

A) $-4 \le x \le -2,5$; B) $-4 \le x \le 2,5$; C) $4 \le x \le 2,5$; D) $0 \le x \le 2,5$.

11. Найдите наименьшее целое число, являющееся решением системы:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{3} > 1, \\ 3x - 2 > x + 2. \end{cases}$$

A) $x=7$; B) $x=-7$; C) $x=6$; D) $x=3$.

12. Найдите наибольшее целое число, являющееся решением системы:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{4} + \dfrac{x}{2} < 1, \\ \dfrac{x}{3} - \dfrac{x}{4} < \dfrac{1}{6}. \end{cases}$$

A) $x=-2$; B) $x=1$; C) $x=2$; D) $x=0$.

13. Решите неравенство: $|4x-5| \le 3$.

A) $x \ge -2$; B) $\dfrac{1}{2} \le x \le 1$; C) $\dfrac{1}{2} \le x \le 2$; D) $-2 \le x \le -\dfrac{1}{2}$.

14. Решите неравенство: $|1-3x| \le 2$.

A) $0 \le x \le \dfrac{1}{3}$; | B) $-1 \le x \le -\dfrac{1}{3}$; | C) $\dfrac{1}{3} \le x \le 1$; | D) $-\dfrac{1}{3} \le x \le 1$.

15. Решите неравенство: $|3-2x| \geq 1$.

A) $x \leq 1, x \geq 2$; B) $x \leq -1, x \geq -2$;

C) $x \leq 2, x \geq 3$; D) $1 \leq x \leq 2$.

16. Найдите погрешность округления, если точное значение числа 1,483, приближенное значение 1,48.

A) 0,003; B) 0,435; C) 1,335; D) 0,445.

17. Найдите погрешность округления, если точное значение числа $\frac{8}{17}$, а приближенное значение $\frac{1}{2}$.

A) $\frac{1}{33}$; B) $\frac{1}{34}$; C) $\frac{1}{35}$; D) $\frac{7}{15}$.

18. Запишите в виде двойного неравенства: $a=-1{,}8 \pm 0{,}2$.

A) $-2 < a < -1{,}6$; C) $-2 \leq a \leq -1{,}6$;

B) $-1{,}6 \leq a \leq -2$; D) $-2 \leq a \leq -1{,}82$.

19. Запишите в виде двойного неравенства: $a=2{,}71 \pm 0{,}01$.

A) $2{,}7 < a < 2{,}72$; C) $2{,}7 \leq a < 2{,}711$;

B) $-1{,}6 \leq a \leq -2$; D) $2{,}7 \leq a \leq 2{,}72$.

20. Представьте дробь $\frac{8}{15}$ в виде десятичной дроби с точностью до 0,01.

A) 0,53; B) 0,05; C) 0,61; D) 0,54.

21. Представьте дробь $\frac{5}{14}$ в виде десятичной дроби с точностью до 0,001.

A) 0,357; B) 0,353; C) 0,456; D) 0,361.

22. Длина комнаты $(5 \pm 0{,}02)$ м. Найдите относительную погрешность измерения.

A) 4%; B) 0,4%; C) 0,02%; D) 0,05%.

23. Расстояние между двумя селами равно (100 ± 1) км. Найдите относительную погрешность измерения.

A) 2%; B) 0,5%; C) 1%; D) 1,5%.

24. Округлите число 5,7635 до сотых. Найдите относительную погрешность округления.

A) 5,76; 0,8%; C) 5,77; 0,08%;

B) 5,76; 0,9%; D) 5,76; 0,06%.

25. Округлите число 2,2941 до десятых. Найдите относительную погрешность округления.

A) 2,3; 0,26%; C) 2,3; 0,3%;

B) 2,2; 2,5%; D) 2,3; 0,4%.

Исторические задачи

1. *Задача Евклида.* Докажите, что $a+d>b+c$, если a, b, c, d — положительные числа, a – наибольшее из них и $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

2. *Задача Паппа Александрийского.* Докажите, что $ad>bc$, если a, b, c, d – положительные числа и $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$.

3. *Неравенство Бернулли.* Если $x_1, x_2, \ldots, x_n > -1$ и все числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеют один и тот же знак, то $(1+x_1)(1+x_2) \ldots (1+x_n) \geq 1+x_1+\ldots+x_2+\ +x_n$.

Докажите неравенство Бернулли для $n=2$, 3.

4. Вычислите, используя формулу $(1+a)^2 \approx 1+2a$ и оцените погрешность:

1) $(1{,}01)^2$; 2) $(1{,}001)^2$; 3) $(0{,}99)^2$; 4) $(0{,}999)^2$.

5. Измерение скорости света в вакууме дало результат 299 796 км/с. При этом точность приближения 4 км/с. Найдите относительную погрешность.

6. Толщина человеческого волоса равна $(0{,}15 \pm 0{,}005)$ мм. Расстояние от Земли до Луны равно $(380\ 000 \pm 500)$ км. Какое измерение точнее?

7. *В папирусе Акмима:* „Площадь круга, равного среднему арифметическому длин окружностей с радиусами $r=5$ и $r=10$, равна среднему арифметическому площадей кругов с этими радиусами. Найдите абсолютную и относительную погрешности полученного результата.

Исторические сведения

Знаки > (больше) и < (меньше) – знаки строгих неравенств впервые использовал в своей работе английский ученый Т. Гарриот в 1631 году. А знаки ≥ (больше или равно) и ≤ (меньше или равно) — знаки нестрогих неравенств ввел французский математик П. Буге в 1734 году.

Знак $|x|$ модуля числа x предложил известный немецкий математик К. Вейерштрасс в 1841 году.

Сочинения математического содержания из Древнего Египта и Вавилона, дошедшие до наших дней, свидетельствуют о том, что уже с древних времен были известны некоторые способы приближенных вычислений. 4000 лет назад ученые Вавилона составляли таблицы умножения, квадратов и обратных величин натуральных чисел, а также таблицы квадратных корней из натуральных чисел, в которых были найдены их приближенные значения.

Приближенные методы извлечения корней 2-й и 3-й степени знали в Древнем Китае и Средней Азии.

Ученые Самаркандской научной школы Улугбека составляли уточненные астрономические таблицы (зиджи), для чего ими были разработаны новые способы приближенных вычислений. Видный математик академии Улугбека Гияс эд-Дин Джамшид ал-Каши в своем „Трактате об окружности“ нашел значение числа π с семнадцатью верными знаками после запятой.

Практические и межпредметные задачи

Рассмотрим несколько задач, приводящих к решению неравенств, или систем неравенств.

330. 4 курта и 5 петушков на палочке дешевле 225 сумов. А 3 курта и 2 петушка дороже 120 сумов.

Что дешевле: 13 куртов или 10 петушков?

△ Пусть 1 курт стоит x сумов, а 1 петушок — y сумов. Тогда по условию задачи получим следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} 4x+5y<225, \\ 3x+2y>120. \end{cases} \qquad (1)$$

Откуда

$$\begin{cases} 32x+40y<1800, \\ 45x+30y>1800, \end{cases}$$

или $45x+30y>32x+40y, \qquad 13x-10y>0.$

Следовательно, $13x>10y$.

Ответ: 10 петушков дешевле 13 куртов.

Познакомимся с геометрической трактовкой задачи.

Какая часть плоскости представляет неравенство (1)?

1-ому неравенству системы (1) $4x+5y=225$, то есть $y=45-\frac{4}{5}x$, соответствуют все точки плоскости, которые лежат *ниже* этой прямой; а 2-ому неравенству $3x+2y=120$, то есть $y=60-\frac{3}{2}x$, все точки плоскости, которые лежат *выше* этой прямой (см. рис. 35). Пересечением этих полуплоскостей, если учитывать, что $x>0$, $y>0$, будет $\triangle MNK$. Мы не знаем сколько точно стоят курт и петушок, эту цену изображает любая точка $(x;\ y)$ внутри треугольника MNK. А этот теугольник расположен *ниже* прямой $13x=10y$, то есть $y=1{,}3x$. Следовательно, $y<1{,}3x$, то есть $13x>10y$. ▲

331. На экзамене $\frac{1}{6}$ часть учащихся получила оценку „удовлетворительно“, 56% учащихся оценку „хорошо“ и 14 учеников „отлично“. Найдите

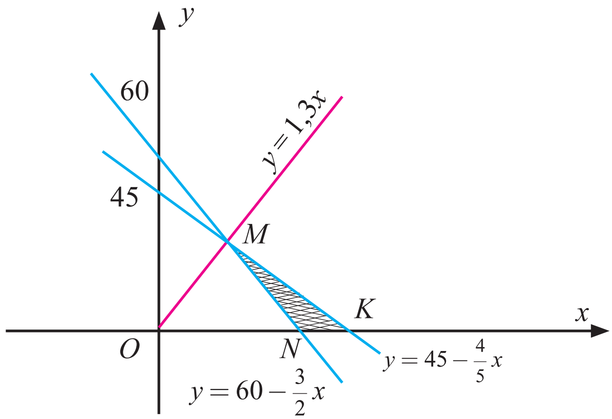


Рис. 35.

общее число учащихся, если известно, что учащихся, получивших оценку „отлично“ больше 4%, но меньше 5%.

△ Пусть общее число учащихся x. Тогда $\frac{x}{6}$ учащихся получила оценку „удовлетворительно“ и $\frac{56x}{100}=\frac{14}{25}x$ учащихся получила оценку „хорошо“. Общее число учащихся должно делиться и на 6, и на 25, следовательно, $x=6\cdot 25\cdot n=150\cdot n$, где n – натуральное число. По условию задачи число „отличников“ удовлетворяет неравенству $0{,}04x<14<0{,}05x$.

Подставив $x=150\cdot n$, найдем $6n<14<7{,}5\cdot n$, то есть $n=2$.

Ответ: 300 учащихся. ▲

332. В двух коробках находится более 29 одинаковых изделий. Если из первой коробки убрать 2 изделия, то в ней останется изделий в 3 раза больше, чем во второй коробке. Разность между утроенным числом изделий в первой коробке и удвоенным числом изделий во второй коробке меньше 60. Сколько изделий в каждой коробке?

△ Обозначим число изделий в первой коробке за x, а число изделий во второй коробке за y. Тогда по условию задачи получим следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} x+y>29, \\ x-2>3y, \\ 3x-2y<60. \end{cases}$$

Перепишем ее следующим образом:

$$\begin{cases} x>29-y, \\ x>3y+2, \\ 20+\frac{2}{3}y>x. \end{cases} \quad (1)$$

Откуда приходим к неравенствам:

$$20+\frac{2}{3}y>29-y, \quad (2)$$

$$20+\frac{2}{3}y>3y+2. \quad (3)$$

Из (2) получим неравенство $y>\frac{27}{5}$, а из (3) неравенство $y<\frac{54}{7}$.

Следовательно, $\frac{27}{5}<y<\frac{54}{7}$ или $5\frac{2}{5}<y<7\frac{5}{7}$. Так как y – натуральное число, то оно может равняться или 6, или 7. Если $y=6$, то систему (1) можно записать в виде:

$$\begin{cases} x>23, \\ x>20, \\ x<24 \end{cases}$$

Но не существует натурального x, удовлетворяющего этой системе. Следовательно, $y=7$. Тогда из (1) получаем систему

$$\begin{cases} x>22, \\ x>23, \\ x<24\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Этой системе удовлетворяет единственное натуральное число $x=24$

Ответ: В первой коробке 24, а во второй 7 изделий. ▲

333. В двух коробках вместе более 27 деталей. Если из второй коробки убрать 12 деталей, то число деталей в первой коробке будет более чем в 2 раза больше числа деталей во второй коробке. Если же убрать 10 деталей из первой коробки, то число деталей во второй коробке будет более чем в 9 раз больше числа деталей в первой коробке. Сколько деталей было в каждой коробке?

334. Первый завод за 1 день изготавливал не более 950 изделий. Второй завод сначала изготавливал 95% того количества, что выпускал первый завод. После установки новых станков второй завод увеличил производство на 23% относительно первого завода, что составило более 1000 изделий в день. Сколько изделий в день изготавливал каждый завод до того, как второй завод установил новые станки? Число изделий выражается натуральным числом.

△ Пусть первый завод за 1 день изготавливает x изделий. Тогда второй завод сначала изготавливал $\frac{95x}{100}$, а после установки новых станков стал изготавливать $\left(\frac{95x}{100}+\frac{23x}{100}\right)$ изделий. Согласно условию задачи получим следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} x \leq 950, \\ \frac{95x}{100}+\frac{23x}{100} > 1000. \end{cases}$$

Откуда

$$847\frac{27}{59} < x \leq 950. \qquad (1)$$

Но числа $\frac{95x}{100}$ и $\frac{23x}{100}$ должны быть натуральными, то есть x должен быть равен 100. В промежутке (1) только число 900 делится на 100. Следовательно, первый завод за 1 день изготавливал 900 изделий. А второй завод до установки новых станков изготавливал $\frac{95}{100}\cdot 900 = 855$ изделий.

Ответ: 900 изделий и 855 изделий.▲

335. В одной коробке зеленые шары, а во второй – белые. Число зеленых шаров составляет $\frac{15}{19}$ частей числа белых шаров. После того как из коробок забрали $\frac{3}{7}$ части зеленых шаров и $\frac{2}{5}$ части белых, в первой коробке осталось менее 1000 шаров, а во второй более 1150 шаров. Сколько шаров было в каждой коробке первоначально?

336. Имеются вагоны грузоподъёмностью 80 т, 60 т и 50 т. Если загрузить груз в 80-тоные вагоны, то 1 вагон останется незаполненным. Если загрузить груз в 60-тоные вагоны, то потребуется еще 8 таких вагонов и 1 вагон останется незаполненным. Если же загрузить груз в 50-тоные вагоны, то понадобится еще 5 таких вагонов, и в этом случае груз заполнит все вагоны. Какова масса всего груза?

337. Если учащихся построить в ряды по 8 человек, то один ряд не заполнится. Если же их построить в ряды по 7 человек, то все ряды заполнятся, но число рядов увеличится на 2. Если учащихся построить в ряды по 5 человек, то число рядов увеличится на 7 и один ряд не заполнится. Найдите число учащихся.

338. 1) Докажите, что $ac > bd$, если a, b, c, d – положительные числа и $a > b$, $c > d$. Дайте этому неравенству геометрическое истолкование и поясните на рисунке 36.

2) Докажите, что сумма расстояний от любой внутренней точки выпуклого многоугольника до его вершин больше полупериметра этого многоугольника.

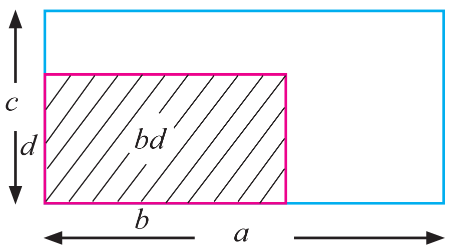


Рис. 36.

339. Объем 60% раствора кислоты равен 8 *л*. В него стали вливать 20% раствор кислоты. Сколько литров второго раствора нужно влить, чтобы получившаяся смесь имела концентрацию кислоты не более 40%, но не менее 30%?

340. 1) Бригада рабочих изготавливает за 5 дней менее 300 деталей, а за 10 дней более 500 деталей. Сколько деталей изготавливал каждый рабочий, если бригада состояла из 8 человек с одинаковой производительностью труда?

2) Автобус за 8 ходок перевез более 185 пассажиров, а за 15 ходок менее 370 пассажиров. Сколько мест в автобусе, если в каждой ходке автобус перевозил столько пассажиров, сколько в нем имеется мест?

341. Постройте график функции и по графику определите при каких значениях x значения функции: больше 2; меньше –1:

1) $y = 5x + 2$; 2) $y = 2x - 6$;

3) $y = -4x + 5$; 3) $y = -3x - 1$.

342. На рисунке 37 изображен график линейной функции $y = kx + b$. 1) Найдите k и b; запишите при помощи неравенства те значения функции y, когда 2) $x \geq 0$; 3) $x < 0$; 4) $x \geq 3$ 5); $7 \leq -2x$ и решите их. Решения изобразите на числовой оси.

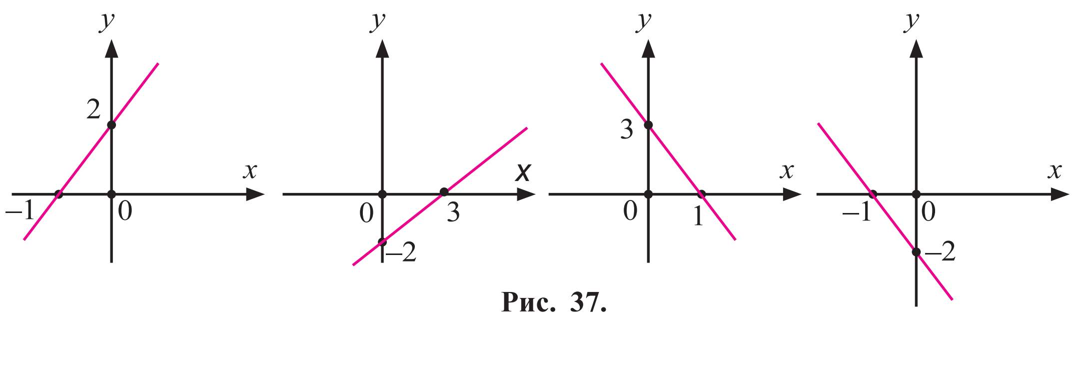


Рис. 37.

ГЛАВА III

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§22. КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ И ЕГО КОРНИ

Задача 1. Основание прямоугольника на 10 см больше его высоты, а площадь равна 24 см^2. Найдите высоту прямоугольника.

△ Пусть высота прямоугольника x см, тогда его основание равно $(x+10)$ сантиметров. Площадь этого прямоугольника равна $x(x+10)$ см^2. По условию задачи $x(x+10)=24$.

Раскрыв скобки и перенеся число 24 в левую часть уравнения, поменяв при этом знак на противоположный, получим следующее:

$$x^2+10x-24=0.$$

Левую часть уравнения по свойству группировки разложим на множители:

$$x^2+10x-24=x^2+12x-2x-24=$$
$$=x(x+12)-2(x+12)=(x+12)(x-2).$$

Следовательно, уравнение можно записать так:

$$(x+12)(x-2)=0.$$

Это уравнение имеет два корня $x_1=-12$ и $x_2=2$.

Так как длина отрезка не может быть отрицательным числом, искомая высота равна 2 см. ▲

При решении этой задачи мы получили уравнение

$$x^2+10x-24=0,$$

называемое квадратным.

! ***Квадратным уравнением*** *называют уравнение вида*

$$ax^2+bx+c=0, \qquad (1)$$

где a, b, c – заданные числа, $a\neq0$; x неизвестное.

Коэффициенты *a, b, c* квадратного уравнения обычно называют так: *a – первый или старший коэффициент*, *b – второй коэффициент*, *c – свободный член.*

Например, 3 старший коэффициент уравнения $3x^2-x+2=0$, -1 – второй коэффициент, 2 – свободный член.

Многие задачи математики, физики, техники сводятся к решению квадратного уравнения.

Приведем еще примеры квадратных уравнений:

$$2x^2+x-1=0, \quad 5t^2-10t+3=0,$$
$$x^2-25=0, \quad 2x^2=0.$$

При решении многих задач получаются уравнения, которые при помощи алгебраических преобразований сводятся к квадратным.

Например, уравнение

$$2x^2+3x=x^2+2x+2$$

после переноса всех его членов в левую часть и приведения подобных членов сводится к квадратному уравнению

$$x^2+x-2=0.$$

Задача 2. Решите уравнение:

$$x^2=64.$$

△ Перенесем 64 в левую часть, получим квадратное уравнение:

$$x^2-64=0.$$

Левую часть разложим на множители:

$$(x-8)(x+8)=0.$$

Следовательно, уравнение имеет два корня: $x_1=8$, $x_2=-8$. ▲

Заметим, что первый корень уравнения $x^2=64$ является арифметическим квадратным корнем числа 64, а второй корень – противоположным ему числом:

$$x_1=\sqrt{64}, x_2=-\sqrt{64}.$$

Эти две формулы обычно объединяют в одну:

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{64}.$$

Ответ к задаче 2 можно записать так $x_{1,2} = \pm 8$.

Уравнение $x^2 = 64$ является частным случаем уравнения $x^2 = d$, к которому сводится любое квадратное уравнение.

Теорема. ***Уравнение $x^2 = d$, где $d > 0$, имеет два корня:***

$$x_1 = \sqrt{d},\ x_2 = -\sqrt{d}.$$

○ Перенесем d в левую часть уравнения:

$$x^2 - d = 0.$$

Так как $d > 0$, то по определению арифметичекого квадратного корня $d = \left(\sqrt{d}\right)^2$. Поэтому уравнение можно переписать в виде:

$$x^2 - (\sqrt{d})^2 = 0.$$

Разложив левую часть уравнения на множители, получим:

$$\left(x - \sqrt{d}\right)\left(x + \sqrt{d}\right) = 0,$$

откуда, $x_1 = \sqrt{d}$, $x_2 = -\sqrt{d}$. ●

Например, уравнение $x^2 = \frac{4}{9}$ имеет корни $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{4}{9}} = \pm\frac{2}{3}$; уравнение $x^2 = 3$ имеет корни $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$; а уравнение $x^2 = 8$ имеет корни $x_{1,2} = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$.

Если правая часть уравнения $x^2 = d$ равна нулю, то *уравнение $x^2 = 0$ имеет один корень*: $x = 0$. Так как уравнение $x^2 = 0$ можно записать в виде $x \cdot x = 0$, то иногда говорят, что *уравнение имеет два равных корня*: $x_{1,2} = 0$.

Если $d < 0$, то уравнение $x^2 = d$ не имеет действительных корней, так как квадрат действительного числа не может быть отрицательным. Например, уравнение $x^2 = -25$ не имеет действительных корней.

Упражнения

343. (Устно.) Какие из следующих уравнений являются квадратными?

1) $5x^2-14x+17=0$; 2) $\frac{2}{3}x^2+4=0$;

3) $-7x^2-13x+8=0$; 4) $17x+24=0$;

5) $-13x^4+26=0$; 6) $x^2-x=0$.

344. (Устно.) Назовите коэффициенты и свободный член квадратного уравнения:

1) $5x^2-14x+17=0$; 2) $-7x^2-13x+8=0$;

3) $\frac{2}{3}x^2+4=0$; 4) $x^2+25x=0$;

5) $-x^2+x+\frac{1}{3}=0$; 6) $-x^2-x=0$.

345. Запишите квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$, если известны его коэффициенты:

1) $a=2, b=3, c=4$; 2) $a=-1, b=0, c=9$;

3) $a=1, b=-5, c=0$; 4) $a=1, b=0, c=0$.

346. Приведите данные уравнения к квадратным:

1) $x(x-3)=4$; 2) $(x-3)(x-1)=12$;

3) $3x(x-5)=x(x+1)-x^2$; 4) $7(x^2-1)=2(x+2)(x-2)$.

347. Какие из чисел –3, –2, 0, 1 являются корнями уравнения?

1) $x^2-9=0$; 2) $x^2-x=0$;

3) $x^2+x-6=0$; 4) $x^2-5x+4=0$;

5) $(x-1)(x+2)=0$; 6) $(x+1)(x-3)=x$.

348. (Устно.) Сколько корней имеет уравнение $x^2=36$? Найдите их. Какой из них является арифметическим корнем из 36?

349. (Устно.) Решите уравнение:

1) $x^2 = 1$; 2) $x^2 = 9$; 3) $x^2 = 16$; 4) $x^2 = 25$;

5) $x^2 = 100$; 6) $x^2 = 0$; 7) $x^2 = 49$; 8) $x^2 = 64$.

350. Найдите корни уравнения:

1) $x^2 = \frac{9}{16}$; 2) $x^2 = \frac{16}{49}$; 3) $x^2 = 1\frac{7}{9}$; 4) $x^2 = 2\frac{1}{4}$;

5) $x^2 = 5$; 6) $x^2 = 13$; 7) $x^2 = \frac{25}{49}$; 8) $x^2 = 10$.

351. Решите уравнение:

1) $x^2 - 49 = 0$; 2) $x^2 - 121 = 0$; 3) $\frac{1}{3}x^2 = 0$;

4) $\frac{x^2}{5} = 0$; 5) $x^2 + 9 = 0$; 6) $x^2 + 12 = 0$.

352. Решите квадратное уравнение, разложив его левую часть на множители:

1) $x^2 - x = 0$; 2) $x^2 + 2x = 0$; 3) $3x^2 + 5x = 0$;

4) $5x^2 - 3x = 0$; 5) $x^2 - 4x + 4 = 0$; 6) $x^2 + 6x + 9 = 0$.

§23. НЕПОЛНЫЕ КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ РЕШЕНИЕ

Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ называют *неполным*, если хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю.

Следовательно, оно может иметь один из следующих видов:

$$ax^2 = 0, \tag{1}$$

$$ax^2 + c = 0, c \neq 0, \tag{2}$$

$$ax^2 + bx = 0, b \neq 0. \tag{3}$$

Напомним, что в уравнениях (1), (2), (3) *коэффициент a не может равняться нулю*.

Покажем, как решаются неполные квадратные уравнения.

З а д а ч а 1. Решите уравнение:

$$5x^2=0.$$

△ Разделив обе части уравнения на 5, получим

$$x^2=0,$$

откуда $x=0$. ▲

З а д а ч а 2. Решите уравнение:

$$3x^2-27=0.$$

△ Разделив обе части уравнения на 3, получим:

$$x^2-9=0.$$

Это уравнение можно записать так:

$$x^2=9,$$

откуда $x_{1,2}=\pm 3$. ▲

З а д а ч а 3. Решите уравнение:

$$2x^2+7=0.$$

△ Уравнение можно записать так:

$$x^2=-\frac{7}{2}.$$

Это уравнение не имеет действительных корней, так как $x^2 \geq 0$ для любого действительного числа x. ▲

З а д а ч а 4. Решите уравнение:

$$-3x^2+5x=0.$$

△ Разложив левую часть уравнения на множители, получим:

$$x\ (-3x+5)=0$$

откуда: $x_1=0, x_2=\frac{5}{3}$.

О т в е т: $x_1=0,\ x_2=\frac{5}{3}$. ▲

Упражнения

Решите уравнение (**353–357**):

353. 1) $x^2=0$; 2) $3x^2=0$; 3) $5x^2=125$;

4) $9x^2=81$; 5) $4x^2-64=0$; 6) $x^2-27=0$;

7) $4x^2=81$; 8) $0{,}01x^2=4$; 9) $0{,}04x^2=16$.

354. 1) $x^2-7x=0$; 2) $x^2+5x=0$; 3) $5x^2=3x$;

4) $4x^2=0{,}16x$; 5) $9x^2-x=0$; 6) $9x^2+1=0$;

7) $x^2-3x=0$; 8) $0{,}1x^2-x=0$; 9) $16x^2+3=0$.

355. 1) $4x^2-169=0$; 2) $25-16x^2=0$; 3) $2x^2-16=0$;

4) $3x^2=15$; 5) $2x^2=\frac{1}{8}$; 6) $3x^2=5\frac{1}{3}$;

7) $3x^2=27$; 8) $4x^2=64$; 9) $1\frac{9}{16}x^2=4$.

356. 1) $\frac{x^2-1}{3}=5$; 2) $\frac{9-x^2}{5}=1$; 3) $4=\frac{x^2-5}{5}$;

4) $3=\frac{9x^2-4}{4}$; 5) $\frac{16-x^2}{4}=3$; 6) $5=\frac{x^2-6}{2}$.

357. 1) $3x^2+6x=8x^2-15x$; 2) $17x^2-5x=14x^2+7x$;

3) $10x+7x^2=2x^2+8x$; 4) $15x+9x^2=7x^2+10x$.

358. При каких значениях x данные дроби будут равны:

1) $\frac{4x^2-3x}{3}$ и $\frac{x^2+5x}{2}$; 2) $\frac{3x^2+7x}{4}$ и $\frac{7x^2-5x}{3}$?

§24. ФОРМУЛЫ НАХОЖДЕНИЯ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ. ДИСКРИМИНАНТ

Для решения квадратных уравнений применяется *метод выделения полного квадрата*. Поясним это на примерах.

Задача 1. Решите квадратное уравнение:

$$x^2+2x-3=0.$$

△ Преобразуем это уравнение так:

$$x^2+2x=3,$$
$$x^2+2x+1=3+1,$$
$$(x+1)^2=4.$$

Следовательно, $x+1=2$ или $x+1=-2$, откуда $x_1=1$, $x_2=-3$. ▲

Решая уравнение $x^2+2x-3=0$ мы преобразовали его так, что в левой части получился *квадрат двучлена, то есть полный квадрат* $(x+1)^2$, а его правая часть *не содержит неизвестного*.

Задача 2. Решите уравнение:

$$x^2+6x-7=0.$$

△ Преобразуем это уравнение так, чтобы в его левой части получился полный квадрат:

$$x^2+6x=7,$$
$$x^2+2\cdot 3x=7,$$
$$x^2+2\cdot 3x+3^2=7+3^2,$$
$$(x+3)^2=16.$$

Поясним эти преобразования. В выражении x^2+6x первое слагаемое – квадрат числа x, а второе слагаемое – удвоенное произведение чисел x и 3. Поэтому для получения в левой части уравнения квадрата двучлена, нужно прибавить к обеим его частям 3^2.

Решив уравнение $(x+3)^2=16$, получим $x+3=4$ или $x+3=-4$, откуда $x_1=1$, $x_2=-7$. ▲

Задача 3. Решите уравнение $4x^2-8x+3=0$.

△ $$4x^2-8x=-3,$$

$$(2x)^2-2\cdot 2\cdot 2x=-3,\ (2x)^2-2\cdot 2\cdot 2x+4=-3+4,$$
$$(2x-2)^2=1,\ 2x-2=1 \text{ или } 2x-2=-1,$$

$$x_1=\frac{3}{2},\ x_2=\frac{1}{2}.$$ ▲

Задача 4. Решите уравнение $x^2+5x-14=0$.

$$\triangle\ x^2+5x=14, \quad x^2+2\cdot\frac{5}{2}x+\frac{25}{4}=14+\frac{25}{4},$$

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{81}{4}, \quad x+\frac{5}{2}=\pm\frac{9}{2},$$

$$x_1=\frac{9}{2}-\frac{5}{2}=2, \ x_2=-\frac{9}{2}-\frac{5}{2}=-7. \ \blacktriangle$$

Выше для решения квадратных уравнений был применен метод выделения полного квадрата. Применим этот метод для выведения формулы для решения квадратного уравнения в общем виде.

Рассмотрим квадратное уравнение в общем виде:

$$ax^2+bx+c=0, \text{ где } a\neq 0.$$

Разделив обе части уравнения на a, получим квадратное уравнение

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Преобразуем это уравнение так, чтобы в его левой части получился *полный квадрат*:

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}, \qquad x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}. \tag{1}$$

Если $b^2-4ac\geq 0$, то

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2.$$

Откуда

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad x_{1,2}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

или

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.} \qquad (2)$$

Формулу (2) называют *формулой корней квадратного уравнения общего вида*.

Выражение $D = b^2 - 4ac$ называют *дискриминантом* квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Из формулы (2) следует, что квадратное уравнение:

1) имеет два различных корня x_1 и x_2, $x_1 \neq x_2$, если $D > 0$;
2) имеет два равных корня $x_1 = x_2$, если $D = 0$;
3) не имеет действительных корней, если $D < 0$.

Задача 5. Решите уравнение:

$$6x^2 + x - 2 = 0.$$

△ Здесь $a = 6$, $b = 1$, $c = -2$ и $D > 0$, то есть уравнение имеет два корня. По формуле (2) найдем эти корни:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 6(-2)}}{2 \cdot 6} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{-1 \pm 7}{12},$$

откуда

$$x_1 = \frac{-1+7}{12} = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{-1-7}{12} = -\frac{2}{3}.$$

Ответ: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{2}{3}$. ▲

Задача 6. Решите уравнение $4x^2 - 4x + 1 = 0$.

△ Здесь $a = 4$, $b = -4$, $c = 1$ и $D = 0$, то есть уравнение имеет два равных корня. По формуле (2) находим:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{4 \pm 0}{8} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $x = \frac{1}{2}$. ▲

Если правая часть равенства (1) отрицательное число, то есть $D = b^2 - 4ac < 0$, то равенство (1) не может быть верным ни при каком действительном x, так как его левая часть неотрицательна. Поэтому, *если* $D=b^2-4ac<0$, *то квадратное уравнение*

$$ax^2+bx+c=0$$

не имеет действительных корней.

Задача 7. Докажите, что уравнение $x^2-4x+5=0$ не имеет действительных корней.

△ Здесь $a=1$, $b=-4$, $c=5$,

$$D=b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot1\cdot5=-4<0.$$

Следовательно, данное уравнение не имеет действительных корней. ▲

Задача 8. Решите уравнение $2x^2+3x+4=0$:

△ По формуле (2) получим следующее:

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-4\cdot2\cdot4}}{4}.$$

Число, стоящее под знаком квадратного корня, отрицательно:

$$9-4\cdot2\cdot4=9-32<0.$$

Ответ: уравнение не имеет действительных корней. ▲

Чтобы убедиться, что уравнение не имеет действительных корней, достаточно было бы вычислить дискриминант $D=b^2-4ac=-23<0$.

Неполные квадратные уравнения также можно решать по формуле (2), однако удобнее пользаваться приемами, рассмотренными в §23.

Упражнения

359. Найдите такое положительное число m, чтобы данное выражение было квадратом суммы или разности:

1) x^2+4x+m; 2) x^2-6x+m; 3) $x^2-14x+m$;

4) $x^2+16x+m$; 5) x^2+mx+4; 6) x^2-mx+9.

360. Решите уравнение методом выделения полного квадрата:

1) $x^2+4x-5=0$; 2) $x^2+4x-12=0$;

3) $x^2+2x-15=0$; 4) $x^2-10x+16=0$;

5) $x^2-6x+3=0$; 6) $x^2+8x-7=0$.

Решите уравнение (**361–363**):

361. 1) $9x^2+6x-8=0$; 2) $25x^2-10x-3=0$.

362. 1) $x^2-5x+4=0$; 2) $x^2-3x-10=0$.

363. 1) $2x^2+3x-5=0$; 2) $5x^2-7x-6=0$.

364. Вычислите значение выражения $D=b^2-4ac$, если:

1) $a=3, b=1, c=-4$; 2) $a=3, b=-0{,}2, c=-0{,}01$;

3) $a=7, b=-6, c=-45$; 4) $a=-1, b=5, c=1800$.

365. Решите квадратное уравнение:

1) $2x^2+3x+1=0$; 2) $2x^2-3x+1=0$;

3) $2x^2+5x+2=0$; 4) $2x^2-7x+3=0$;

5) $3x^2+11x+6=0$; 6) $4x^2-11x+6=0$.

366. При каких значениях x значение выражения равно нулю:

1) $2x^2+5x-3$; 2) $2x^2-7x-4$; 3) $3x^2+x-4$;

4) $3x^2+2x-1$; 5) x^2+4x-3; 6) $3x^2+12x+10$;

7) $-2x^2+x+1$; 8) $-3x^2-x+4$; 9) $6x^2-5x+1$?

Решите квадратное уравнение (**367–368**):

367. 1) $9x^2-6x+1=0$; 2) $16x^2-8x+1=0$;

3) $49x^2+28x+4=0$; 4) $36x^2+12x+1=0$.

368. 1) $2x^2+x+1=0$; 2) $3x^2-x+2=0$;

3) $5x^2+2x+3=0$; 4) $x^2-2x+10=0$.

369. Не решая следующие уравнения, определите, сколько корней они имеют:

1) $2x^2+5x-7=0$; 2) $3x^2-7x-8=0$;

3) $4x^2+4x+1=0$; 4) $9x^2-6x+2=0$.

Решите уравнение (**370–372**):

370. 1) $7x^2-6x+2=0$; 2) $3x^2-5x+4=0$;

3) $9x^2+12x+4=0$; 4) $4x^2-20x+25=0$;

5) $4x^2+12x+9=0$; 6) $x^2-3x-4=0$.

371. 1) $6x^2=5x+1$; 2) $5x^2+1=6x$;

3) $x(x-1)=72$; 4) $x(x+1)=56$;

5) $2x(x+2)=8x+3$; 6) $3x(x-2)-1=x-0,5(8+x^2)$.

372. 1) $\frac{x^2+3x}{2}=\frac{x+7}{4}$; 2) $\frac{x^2-3x}{7}+x=11$;

3) $\frac{2x^2+x}{3}-\frac{2-3x}{4}=\frac{x^2-6}{6}$; 4) $\frac{x^2+x}{4}-\frac{3-7x}{20}=0,3$.

373. Решите уравнение:

1) $5x^2-8x-4=0$; 2) $4x^2+4x-3=0$;

3) $8x^2-6x+1=0$; 4) $5x^2-26x+5=0$.

374. Решите уравнение методом выделения полного квадрата:

1) $x^2-16x+48=0$; 2) $x^2-7x-18=0$;

3) $x^2-15x+56=0$; 4) $x^2+12x+27=0$;

5) $x^2-11x+28=0$; 6) $x^2-11x+18=0$;

7) $x^2+10x+21=0$; 8) $2x^2-5x+2=0$;

9) $x^2-21x+20=0$; 10) $x^2-6x-55=0$;

11) $3x^2-x-70=0$; 12) $x^2-100x+99=0$.

Уравнение $ax^2+bx+c=0$ также можно решить, выделив полный квадрат, умножая обе его части на $4a$:

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0,$$

$$(2ax)^2+2\cdot 2ax\cdot b+b^2+4ac-b^2=0,$$

$$(2ax+b)^2=b^2-4ac, \text{ откуда, } 2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}.$$

Тогда, $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Пример. Решите уравнение $10x^2+13x-3=0$, выделив полный квадрат приведенным выше способом:

△ $10x^2+13x-3=0,\ 40\cdot 10x^2+40\cdot 13x-3\cdot 40=0,$

$$(20x)^2+2\cdot 20x\cdot 13+13^2-13^2-3\cdot 40=0,$$

$$(20x+13)^2=169+120,\ (20x+13)^2=(17)^2;\quad 20x+13=\pm 17;$$

$$x_1=\frac{17-13}{20}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5};\qquad x_2=\frac{-17-13}{20}=\frac{-30}{20}=-\frac{3}{2}.$$

Ответ: $x=\frac{1}{5},\ x=-\frac{3}{2}$. ▲

375. Решите уравнение приведенным выше способом:

1) $12x^2-7x+1=0;$

2) $6x^2+5x+1=0;$

3) $8x^2+7x-1=0;$

4) $\frac{x^2}{12}-\frac{1}{12}x-1=0.$

№ 4

Куб, ребро которого равно 3 см, покрасили в красный цвет, затем его разрезали на кубики с ребром 1 см. Сколько кубиков имеют три красные грани? Две красные грани? Одну красную грань? Не имеют красной грани?

§25. ТЕОРЕМА ВИЕТА. РАЗЛОЖЕНИЕ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА НА ЛИНЕЙНЫЕ МНОЖИТЕЛИ

Уравнение вида

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (1)$$

называют ***приведенным квадратным уравнением***.

В этом уравнении старший коэффициент равен единице. Например, уравнение

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

является приведенным.

Разделив обе части любого квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

на $a \neq 0$, можно привести его к виду (1).

Например, делением уравнения $4x^2 + 4x - 3 = 0$ на 4, можно привести его к виду:

$$x^2 + x - \frac{3}{4} = 0.$$

Найдем корни приведенного квадратного уравнения (1). Для этого воспользуемся формулой корней квадратного уравнения общего вида $ax^2 + bx + c = 0$, то есть воспользуемся формулой

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (2)$$

Если в уравнении общего вида $a = 1$, $b = p$, $c = q$, то получим приведенное квадратное уравнение

$$x^2 + px + q = 0.$$

Поэтому для приведенного квадратного уравнения формула (2) принимает вид:

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

или

$$\boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}} \qquad (3)$$

Формулу (3) называют *формулой корней приведенного квадратного уравнения*.

Формулой (3) особенно удобно пользоваться, когда p – четное число. Например, решим уравнение $x^2 - 14x - 15 = 0$.

△ По формуле (3) находим:

$$x_{1,2} = 7 \pm \sqrt{49 + 15} = 7 \pm 8.$$

Ответ: $x_1 = 15$, $x_2 = -1$. ▲

Для приведенного квадратного уравнения имеет место теорема:

Теорема Виета. ***Если x_1 и x_2 корни уравнения***

$$x^2 + px + q = 0,$$

то имеют место равенства

$$x_1 + x_2 = -p,$$

$$x_1 \cdot x_2 = q,$$

то есть сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с обратным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

○ По формуле (3):

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Почленно складывая эти равенства, получим $x_1+x_2=-p$. Перемножив эти равенства по формуле разности квадратов, получим:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = q. \bullet$$

Например, уравнение $x^2-13x+30=0$ имеет корни $x_1=10$, $x_2=3$; сумма его корней $x_1+x_2=13$, а произведение корней $x_1 \cdot x_2=30$.

Отметим, что теорема Виета верна и в том случае, когда квадратное уравнение имеет два равных корня $x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$.

Например, уравнение $x^2-6x+9=0$ имеет два равных корня $x_1=x_2=3$; их сумма $x_1+x_2=6$, а произведение $x_1 \cdot x_2=9$.

Задача 1. Один из корней уравнения $x^2+px-12=0$ $x_1=4$. Найдите коэффициент p и второй корень x_2 этого уравнения.

△ По теореме Виета:

$$x_1 \cdot x_2 = -12, x_1 + x_2 = -p.$$

Так как $x_1=4$, то $4x_2=-12$, откуда $x_2=-3$,

$$p = -(x_1 + x_2) = -(4-3) = -1.$$

Ответ: $x_2=-3$, $p=-1$. ▲

Задача 2. Составьте приведенное квадратное уравнение с корнями $x_1=3$, $x_2=4$.

△ Так как числа $x_1=3$; $x_2=4$ – корни уравнения $x^2+px+q=0$, то по теореме Виета $p=-(x_1+x_2)=-7$, $q=x_1x_2=12$.

Ответ: $x^2-7x+12=0$. ▲

Задача 3. Один из корней уравнения $3x^2+8x-4=0$ положительный. Не решая уравнение, определите знак второго корня.

△ Разделив обе части уравнения на 3, получим:

$$x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{4}{3} = 0.$$

По теореме Виета $x_1x_2=-\frac{4}{3}<0$. По условию $x_1>0$, следовательно, $x_2<0$. ▲

При решении некоторых задач применяют следующую теорему, *обратную теореме Виета*.

Если числа p, q, x_1, x_2 таковы, что

$$x_1+x_2=-p,\quad x_1\cdot x_2=q, \tag{4}$$

то числа x_1 и x_2 корни квадратного уравнения

$$x^2+px+q=0.$$

○ Подставим в левую часть уравнения

$$x^2+px+q$$

выражение $-(x_1+x_2)$ вместо p и произведение $x_1\cdot x_2$ вместо q. В результате получим следующее выражение:

$$x^2+px+q=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=$$
$$=x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2=x(x-x_1)-x_2(x-x_1)=$$
$$=(x-x_1)(x-x_2).$$

Таким образом, если числа p, q, x_1 и x_2 связаны соотношениями (4), то *для всех x* выполняется равенство

$$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2),$$

из которого следует, что x_1 и x_2 корни уравнения $x^2+px+q=0$. ●

Используя теорему, обратную теореме Виета, иногда можно *подбором* найти корни квадратного уравнения.

Задача 4. Подбором найдите корни уравнения

$$x^2-5x+6=0.$$

△ Здесь $p=-5$, $q=6$. Подберем два числа x_1 и x_2 так, чтобы

$$x_1+x_2=5,\ x_1x_2=6.$$

Заметим, что $6=2\cdot3$ и $2+3=5$, по теореме, обратной теореме Виета, получаем, что $x_1=2$, $x_2=3$ – корни уравнения

$$x^2-5x+6=0.$$ ▲

Задача 5. Сократите дробь $\frac{x^2-x-12}{x+3}$.

△ Разложим числитель дроби на множители:

$$x^2-x-12=x^2-4x+3x-12=$$
$$=x(x-4)+3(x-4)=(x-4)(x+3).$$

Следовательно,

$$\frac{x^2-x-12}{x+3}=\frac{(x-4)(x+3)}{x+3}=x-4.$$ ▲

Часто многочлен ax^2+bx+c называют *трехчленом*, здесь $a\neq0$.

При решении задачи 5 трехчлен x^2-x-12 был разложен на множители методом группировки. Его можно было разложить на множители, используя следующую теорему.

Теорема. ***Если x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, то при всех x:***

$$\boxed{ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).} \qquad (5)$$

○ Преобразуем правую часть равенства (5):

$$a(x-x_1)(x-x_2)=ax^2-ax\cdot x_1-ax\cdot x_2+ax_1x_2=$$
$$=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2. \qquad (6)$$

Так как x_1 и x_2 корни уравнения $ax^2+bx+c=0$, то есть уравнения, $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$, то по теореме Виета

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{c}{a},$$

откуда $a(x_1+x_2)=-b,\ ax_1x_2=c.$

Подставляя эти выражения в равенство (6), получим формулу (5). ●

Формула (5) *позволяет разложить квадратный трехчлен* ax^2+bx+c *на линейные множители.*

Задача 6. Упростите выражение $\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2-x-12}$.

△ Разложим на множители числитель и знаменатель дроби.

1) Уравнение $2x^2+5x-3=0$ имеет два корня:

$$x_1=\frac{1}{2},\ x_2=-3.$$

По доказанной теореме

$$2x^2+5x-3=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3)=(2x-1)(x+3).$$

2) Уравнение $x^2-x-12=0$ имеет корни $x_1=-3$, $x_2=4$. По доказанной теореме $x^2-x-12=(x+3)(x-4)$.

Таким образом,

$$\frac{2x^2+5x-3}{x^2-x-12}=\frac{(2x-1)(x+3)}{(x+3)(x-4)}=\frac{2x-1}{x-4}.\ ▲$$

Упражнения

376. Решите приведенное квадратное уравнение:

1) $x^2+4x-5=0$; 2) $x^2-6x-7=0$;

3) $x^2-8x-9=0$; 4) $x^2+6x-40=0$;

5) $x^2+x-6=0$; 6) $x^2-x-2=0$.

377. (Устно.) Назовите сумму и произведение корней приведенного квадратного уравнения:

1) $x^2 - x - 2 = 0$;
2) $x^2 - 5x - 6 = 0$;
3) $x^2 + 3x + 2 = 0$;
4) $x^2 + 3x - 4 = 0$;
5) $x^2 - 7x + 5 = 0$;
6) $x^2 + 9x - 6 = 0$.

378. (Устно.) Один из корней уравнения $x^2 - 19x + 18 = 0$ равен 1. Найдите его второй корень.

379. (Устно.) Один из корней уравнения $28x^2 + 23x - 5 = 0$ равен -1. Найдите его второй корень.

380. (Устно.) Не решая уравнение, определите знаки его корней:

1) $x^2 + 4x - 5 = 0$;
2) $x^2 + 5x + 3 = 0$;
3) $x^2 - 5x + 3 = 0$;
4) $x^2 - 8x - 7 = 0$.

381. Запишите приведенное квадратное уравнение, корни которого x_1 и x_2:

1) $x_1 = 3,\ x_2 = -1$;
2) $x_1 = 2,\ x_2 = 3$;
3) $x_1 = -4,\ x_2 = -5$;
4) $x_1 = -3,\ x_2 = 6$.

382. Подбором найдите корни уравнения:

1) $x^2 + 5x + 6 = 0$;
2) $x^2 - 7x + 12 = 0$;
3) $x^2 - 6x + 5 = 0$;
4) $x^2 + 8x + 7 = 0$;
5) $x^2 - 8x + 15 = 0$;
6) $x^2 + 2x - 15 = 0$.

383. Разложите квадратный трехчлен на множители:

1) $x^2 - 5x + 6$;
2) $x^2 + 4x - 5$;
3) $x^2 + 5x - 24$;
4) $x^2 + x - 42$;
5) $2x^2 - x - 1$;
6) $8x^2 + 10x + 3$;
7) $-6x^2 + 7x - 2$;
8) $-4x^2 - 7x + 2$.

384. Сократите дробь:

1) $\frac{x^2+x-2}{x-1}$; 2) $\frac{x^2+4x-12}{x-2}$; 3) $\frac{x+3}{x^2-6x-27}$;

4) $\frac{x-8}{x^2-x-56}$; 5) $\frac{2x^2-3x-2}{4x^2-1}$; 6) $\frac{3x^2+8x-3}{9x^2-1}$.

385. Решите приведенное квадратное уравнение:

1) $x^2-2\sqrt{3}x-1=0$; 2) $x^2-2\sqrt{5}x+1=0$;

3) $x^2+\sqrt{2}x-4=0$; 4) $x^2-4\sqrt{7}x+4=0$.

386. Разложите на множители:

1) x^3-3x^2+2x; 2) x^3+4x^2-21x; 3) x^3+5x^2-24x;

4) x^3-9x^2-22x; 5) x^3-8x^2+7x; 6) x^3-5x^2+6x.

387. Сократите дробь:

1) $\frac{x^2+6x-7}{x^2-7x+6}$; 2) $\frac{x^2-8x-9}{x^2+9x+8}$; 3) $\frac{x^2-8x+15}{-x^2+5x-6}$; 4) $\frac{36+5x-x^2}{x^2-x-20}$.

388. Упростите выражение:

1) $\frac{1}{x^2-7x+12}+\frac{1}{x-3}$; 2) $\frac{3}{x^2+6x+9}-\frac{1}{x+3}$;

3) $\frac{7}{5x^2+3x-2}-\frac{5}{5x-2}$; 4) $\frac{5x+1}{x^2+9x-10}:\frac{5x^2+x}{x^2-2x+1}$.

§26. БИКВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ. УРАВНЕНИЯ, СВОДЯЩИЕСЯ К КВАДРАТНЫМ

Задача 1. Решите уравнение:

$$x^4-7x^2+12=0.$$

△ Обозначим $x^2=t$. Тогда уравнение примет вид:

$$t^2-7t+12=0.$$

Решим это квадратное уравнение:

$$t_1 = 4, \ t_2 = 3.$$

Так как $x^2 = t$, то решение исходного уравнения сводится к решению следующих двух уравнений:

$$x^2 = 4, \ x^2 = 3,$$

откуда:

$$x_{1,2} = \pm 2, \ x_{3,4} = \pm\sqrt{3}.$$

Ответ: $x_{1,2} = \pm 2, \ x_{3,4} = \pm\sqrt{3}$. ▲

Уравнение вида

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

где $a \neq 0$, называется биквадратным уравнением.

Это уравнение сводится к квадратному *заменой* $x^2 = t$.

Задача 2. Решите биквадратное уравнение:

$$9x^4 + 5x^2 - 4 = 0.$$

△ Обозначим $x^2 = t$. Тогда

$$9t^2 + 5t - 4 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, находим:

$$t_1 = \frac{4}{9}, \ t_2 = -1.$$

Уравнение $x^2 = \frac{4}{9}$ имеет корни $x_{1,2} = \pm\frac{2}{3}$, а уравнение $x^2 = -1$ не имеет действительных корней.

Ответ: $x_{1,2} = \pm\frac{2}{3}$. ▲

Задача 3. Решите уравнение:

$$\frac{3}{x+2} - \frac{4}{x-3} = 3.$$

△ Общий знаменатель дробей, входящих в уравнение, $(x+2)(x-3)$. Если $x+2\neq 0$ и $x-3\neq 0$, то, умножая на $(x+2)(x-3)$ обе части уравнения, получим:

$$3(x-3)-4(x+2)=3(x+2)(x-3).$$

Преобразуем это уравнение:

$$3x-9-4x-8=3(x^2-x-6),$$
$$-x-17=3x^2-3x-18,$$
$$3x^2-2x-1=0.$$

Решая полученное квадратное уравнение, находим его корни:

$$x_1=1;\ x_2=-\frac{1}{3}.$$

Так как при $x=1$ и $x=-\frac{1}{3}$ знаменатели дробей исходного уравнения не обращаются в нуль, то числа 1 и $-\frac{1}{3}$ являются корнями этого уравнения.

Ответ: $x_1=1;\ x_2=-\frac{1}{3}$. ▲

Задача 4. Решите уравнение:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{3}{x-1}=\frac{3-x}{x-2},\ x\neq 1,\ x\neq 2. \qquad (1)$$

△ По условию $(x-1)(x-2)\neq 0$. Умножив на $(x-1)(x-2)$ обе части уравнения, получим:

$$1+3(x-2)=(3-x)(x-1).$$

Преобразуем это уравнение:

$$\begin{gathered}1+3x-6=-x^2+4x-3,\\ x^2-x-2=0.\end{gathered} \qquad (2)$$

Решив полученное уравнение, найдем его корни:

$$x_1=-1,\ x_2=2.$$

При $x=-1$ знаменатели дробей исходного уравнения не обращаются в нуль. Следовательно, число -1 – корень данного уравнения. При $x=2$ знаменатели двух дробей исходного уравнения обращаются в нуль. Поэтому число 2 не является корнем данного уравнения.

Ответ: $x=-1$. ▲

В задаче 4 исходное уравнение (1) сведено к квадратному уравнению (2), имеющему два корня. Один из них $x_1=-1$ является корнем уравнения (1). Другой $x_2=2$ не является корнем уравнения (1). В этом случае его называют *посторонним корнем.*

Таким образом, при умножении уравнения на выражение, содержащее неизвестное, могут появиться посторонние корни. Поэтому *при решении уравнения, содержащего неизвестное в знаменателе дроби, необходима проверка.*

Задача 5. Решите уравнение:

$$\frac{x+7}{x+4}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x^2+7x+12}=0.$$

Это пример дробно-рационального уравнения.

△ Разложим квадратный трехчлен $x^2+7x+12$ на множители. Решая уравнение $x^2+7x+12=0$, находим его корни $x_1=-3$, $x_2=-4$. Поэтому

$$x^2+7x+12=(x+3)(x+4).$$

Умножим обе части данного уравнения на общий знаменатель дробей, то есть на $(x+3)(x+4)$. В результате получим:

$$(x+7)(x+3)-(x+4)+1=0.$$

Преобразуем это уравнение:

$$x^2+10x+21-x-4+1=0,$$

$$x^2+9x+18=0.$$

Решая это уравнение, находим его корни:

$$x_1=-3,\quad x_2=-6.$$

Проверим эти корни. При $x=-3$ знаменатели второй и третьей дробей обращаются в нуль. Поэтому $x_1=-3$ – посторонний корень. При $x=-6$

знаменатели дробей исходного уравнения не равны нулю. Подстановкой $x=-6$ в исходное уравнение можно убедиться, что это число является корнем уравнения.

Ответ: $x=-6$. ▲

Упражнения

Решите уравнение (**389–392**):

389. 1) $x^4-10x^2+9=0$; 2) $x^4-5x^2+4=0$;

3) $x^4-13x^2+36=0$; 4) $x^4-50x^2+49=0$.

390. 1) $x^4-3x^2-4=0$; 2) $x^4+3x^2-4=0$;

3) $x^4+x^2-20=0$; 4) $x^4-4x^2-5=0$.

391. 1) $\frac{10}{x-3}-\frac{8}{x}=1$; 2) $\frac{2}{x-5}+\frac{14}{x}=3$;

3) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}=\frac{3}{20}$; 4) $\frac{40}{x-20}-\frac{40}{x}=1$;

5) $\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+3}=\frac{5}{8}$; 6) $\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x+2}=1,5$.

392. 1) $\frac{3x+4}{x-6}=\frac{x-2}{4x+3}$; 2) $\frac{x+2}{x-2}+\frac{x-2}{x+2}=\frac{13}{6}$;

3) $\frac{x+5}{x+2}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}$; 4) $\frac{x^2-2x-5}{(x-3)(x-1)}+\frac{1}{x-3}=1$;

5) $\frac{x^2}{x+3}-\frac{x}{-3-x}=\frac{6}{x+3}$; 6) $\frac{x^2}{x-1}-\frac{2x}{1-x}=\frac{3}{x-1}$.

393. Имеет ли действительные корни уравнение:

1) $x^4-5x^2+7=0$; 2) $x^4+3x^2+2=0$?

394. При каких значениях x равны значения выражений:

1) $\frac{6}{x^2-1}+\frac{2}{1-x}$ и $2-\frac{x+4}{x+1}$; 2) $\frac{6}{x+2}-\frac{3}{x-2}$ и $\frac{14}{4-x^2}+1$?

Решите уравнение, подобрав соответствующую *замену* (**395–399**):

395. 1) $x^4-5x^2+4=0$; 2) $x^4-8x^2-9=0$;

3) $9x^4+23x^2-12=0$; 4) $16x^4-409x^2+225=0$;

5) $4x^4-5x^2+1=0$; 6) $4x^4-17x^2+4=0$;

7) $4x^4-9x^2+2=0$; 8) $6x^4-5x^2+1=0$.

396. 1) $(x+3)^4-13(x+3)^2+36=0$; *Замена:* $(x+3)^2=t$

2) $(2x-1)^4-13(2x-1)^2-12=0$; $(2x-1)^2=t$

3) $(x-1)^4-x^2+2x-73=0$; $(x-1)^2=t$

4) $(x+2)^4-2x^2-8x-16=0$; $(x+2)^2=t$

5) $(x^2+6x)^2+8(x^2+6x)-9=0$; $(x^2+6x)=t$

6) $(x^2-16x)^2-2(x^2-16x)-63=0$. $(x^2-16x)=t$

397. 1) $(x+1)^2\cdot(x^2+2x)=12$;

2) $(x-2)^2\cdot(x^2-4x)+3=0$;

3) $(x^2+3x+1)(x^2+3x+3)+1=0$;

4) $(x^2-5x+2)(x^2-5x-1)=28$;

5) $x(x+1)(x+2)(x+3)=0,5625$;

6) $(x-2)(x-3)(x+2)(x-7)+36=0$.

398. 1) $\dfrac{x+4}{x-4}+\dfrac{x-4}{x+4}=3\dfrac{1}{3}$; 2) $\dfrac{x^2-2x}{4x-3}+5=\dfrac{16x-12}{2x-x^2}$;

3) $\dfrac{x^2+4x}{7x-2}-\dfrac{12-42x}{x^2+4x}=7$; 4) $\left(\dfrac{4x-5}{3x+2}\right)^2+\left(\dfrac{3x+2}{5-4x}\right)^2=4,25$;

5) $\left(\dfrac{5x+1}{2x-3}\right)^2+\left(\dfrac{3-2x}{5x+1}\right)^2=\dfrac{82}{9}$; 6) $\left(\dfrac{5x-2}{2x+1}\right)^2+\left(\dfrac{2x+3}{2-5x}\right)^2=3\dfrac{31}{225}$;

7) $\dfrac{x^2+1}{x}+\dfrac{x}{x^2+1}=-2,5$.

399. 1) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$; *Замена:* $(x+\frac{1}{x})=t$.

2) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$;

3) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0$;

4) $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+5=0$;

5) $(x^2+3x+2)(x^2+3x-4)=-5$;

6) $(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=120$.

400. Найдите: 1) сумму всех корней; 2) произведение всех корней; 3) сумму отрицательных корней; 4) произведение положительных корней; 5) разность между наибольшим и наименьшим корнями; 6) отношение наибольшего положительного корня к наименьшему положительному корню для каждого из следующих уравнений:

1) $x^4-26x^2+25=0$; 2) $x^4-13x^2+36=0$;

3) $x^4-10x^2+9=0$; 4) $x^4-5x^2+6=0$;

5) $x^4-19x^2+90=0$; 6) $x^4-11x^2+28=0$.

401. Решите уравнение:

1) $\left(x^2-8\right)^2+4\left(x^2-8\right)=5$;

2) $x^4-2x^3-13x^2+14x+24=0$;

3) $\left(x+5\right)^4-13\left(x+5\right)^2\cdot x^2+36x^4=0$;

4) $5x^4+20x^3-40x+17=0$;

5) $x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)x^2=8$.

§27. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Решим несколько задач с помощью квадратных уравнений.

Задача 1. В шахту брошен камень и звук от его удара был услышан спустя 9 секунд. Определите глубину шахты, считая скорость звука равной 320 м/с, а ускорение силы тяжести $g=10$ м/с^2.

△ Для нахождения глубины шахты достаточно найти время t падения камня, так как по закону свободного падения глубина шахты равна $\frac{gt^2}{2}$.

По условию $g=10$ м/с^2. Поэтому глубина шахты равна $5t^2$ метров.

С другой сторны, глубину шахты можно найти, умножив скорость звука 320 м/с на время его распространения от момента удара камня до момента когда был услышан звук, то есть на $(9-t)$ секунд. Следовательно, глубина шахты равна $320\ (9-t)$ метрам.

Приравнивая два найденных выражения для глубины шахты, получаем уравнение $5t^2=320(9—t)$. Решим это уравнение:

$$t^2-64(9-t)=0,$$
$$t^2+64t-64\cdot 9=0.$$

Найдем корни полученного квадратного уравнения:

$$t_{1,2}=-32\pm\sqrt{32^2+64\cdot 9}=-32\pm\sqrt{32(32+18)}=$$
$$=-32\pm\sqrt{32\cdot 50}=-32\pm\sqrt{16\cdot 100}=-32\pm 40,$$
$$t_1=8,\ t_2=-72.$$

Так как время падения камня положительно, то $t=8$ с,

Следовательно, глубина шахты равна:

$$5t^2=5\cdot 8^2=320 \text{ м.}$$

Ответ: 320 м. ▲

Задача 2. Автобус-экспресс отправился от автовокзала в аэропорт, находящийся на расстоянии 40 км. Через 10 минут вслед за автобусом выехал пассажир на такси. Скорость такси на 20 км/ч больше скорости автобуса. Найдите скорости такси и автобуса, если в аэропорт они прибыли одновременно.

△ Пусть скорость автобуса x км/ч, тогда скорость такси $(x+20)$ км/ч. Время движения автобуса равно $\frac{40}{x}$ ч, а время движения такси $\frac{40}{x+20}$ часам. По условию задачи разница между временем движения автобуса и такси равна 10 мин, то есть $\frac{1}{6}$ ч. Следовательно,

$$\frac{40}{x}-\frac{40}{x+20}=\frac{1}{6}. \qquad (1)$$

Решим полученное уравнение. Умножив обе части уравнения на $6x(x+20)$, получим:

$$40\cdot 6\cdot(x+20)-40\cdot 6x=x(x+20),$$
$$240x+4800-240x=x^2+20x,$$
$$x^2+20x-4800=0.$$

Корни этого уравнения:

$$x_1=60,\ x_2=-80.$$

При этих значениях x знаменатели дробей, входящих в уравнение (1), не обращаются в нуль. Поэтому $x_1=60$ и $x_2=-80$ являются корнями уравнения (1).

Так как скорость автобуса положительна, то условию задачи удовлетворяет только один корень: $x=60$. Поэтому скорость такси равна 80 км/ч.

Ответ: скорость автобуса 60 км/ч, скорость такси 80 км/ч. ▲

Задача 3. На перепечатку рукописи первая наборщица тратит на 3 часа меньше, чем вторая. Работая одновременно, они закончили перепечатку всей рукописи за 6 часов 40 минут. Сколько времени потребовалось бы каждой из них на перепечатку всей рукописи?

△ Примем работу по перепечатке всей рукописи за единицу. Пусть первая наборщица затратит на перепечатку рукописи x часов, тогда второй из них потребуется на эту работу $(x+3)$ часов. Первая наборщица за час выполняет $\frac{1}{x}$ часть работы, а вторая $\frac{1}{x+3}$ часть. Работая вместе, они за час выполняют $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}$ часть работы, а за 6 часов 40 минут, то есть за $6\frac{2}{3}$ часа, они выполняют всю работу. Поэтому

$$6\frac{2}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}\right)=1.$$

Это уравнение можно переписать так:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}=\frac{3}{20}. \qquad (2)$$

Умножая обе его части на $20x(x+3)$, получаем:

$$20(x+3)+20x=3x(x+3),$$
$$40x+60=3x^2+9x,$$
$$3x^2-31x-60=0.$$

Корни этого уравнения:

$$x_1=12,\ x_2=-\frac{5}{3}.$$

При этих значениях x знаменатели дробей, входящих в уравнение (2), не обращаются в нуль. Поэтому $x_1=12$ и $x_2=-\frac{5}{3}$ являются корнями уравнения (2).

Так как по смыслу задачи $x>0$, то $x=12$. Следовательно, первая наборщица затрачивает на работу 12 часов, а вторая 12 ч $+3$ ч $=15$ ч.

Ответ: 12 часов и 15 часов. ▲

Упражнения

402. Найдите два последовательных числа, произведение которых равно:
1) 156; 2) 210; 3) 342; 4) 600.

403. Найдите два последовательных нечетных числа, если их произведение равно: 1) 255; 2) 399.

404. Периметр прямоугольника равен 1 м, а его площадь 4 дм^2. Найдите длины его сторон.

405. Сад площадью 2,45 га обнесен изгородью длиной 630 м. Найдите длину и ширину сада, если он имеет прямоугольную форму.

406. Расстояние в 400 км скорый поезд прошел на 1 час быстрее товарного. Какова скорость каждого поезда, если скорость товарного поезда на 20 км/ч меньше скорости скорого поезда?

407. Теплоход отправился вниз по течению реки от пристани A до пристани B. После получасовой стоянки теплоход отправился обратно и через 8 часов после отплытия из A прибыл на ту же пристань. Какова скорость теплохода в стоячей воде, если расстояние между пристанями A и B 36 км, а скорость течения реки 2 км/ч.

408. Две группы специалистов, работая одновременно над монтажом и установкой современного медицинского оборудования, выполнили это задание за 12 дней. Сколько дней понадобилось бы каждой группе при условии, что они работали изолированно, если одна из групп выполнила задание на 10 дней быстрее, чем вторая?

409. От квадратного листа жести отрезали полоску шириной 6 см. Площадь оставшейся части равна 135 см^2. Найдите первоначальные размеры квадрата.

410. Площадь прямоугольнного треугольника равна 180 см^2. Найдите катеты этого треугольника, если один больше другого на 31 см.

411. Расстояние в 3 км один из велосипедистов проехал на 20 минут быстрее другого. Скорость первого велосипедиста была на 3 км/ч больше скорости другого. Найдите скорости каждого велосипедиста.

412. Две строительные бригады, работая вместе, построили кошару для овец за 6 дней. Сколько дней потребовалось бы для строительства такой же кошары каждой бригаде отдельно, если первой бригаде нужно было работать на 5 дней больше, чем второй?

№ 5

Разложите многочлен
$x^4+2006x^2+2005x+2006$
на множители.

Упражнения к главе III

Решите уравнение (**413–415**):

413. 1) $x^2-12=0$; 2) $x^2-50=0$; 3) $\frac{1}{3}x^2+2x=0$;

4) $3x-\frac{2}{5}x^2=0$; 5) $x^2-48=0$; 6) $2x-\frac{1}{2}x^2=0$.

414. 1) $x^2+4x-45=0$; 2) $x^2-9x-52=0$;

3) $3x^2-7x-40=0$; 4) $5x^2+17x-126=0$.

415. 1) $4x^2-2x-3=0$; 2) $9x^2-3x-4=0$;

3) $4x^2-8x-1=0$; 4) $3x^2+4x-1=0$.

416. Не решая уравнение, определите, сколько действительных корней оно имеет:

1) $x^2-5x+6=0$; 2) $5x^2+7x-8=0$;

3) $25x^2-10x+1=0$; 4) $9x^2+30x+25=0$.

417. Разложите квадратный трехчлен на множители:

1) $x^2+12x+30$; 2) $x^2-10x+16$; 3) $2x^2+x-1$;

4) $2x^2-3x-2$; 5) x^2+8x+7; 6) $2x^2-3x+1$.

418. Сократите дробь:

1) $\frac{x^2-9}{x+3}$; 2) $\frac{x^3+4x^2+4x}{x+2}$; 3) $\frac{16x^2-24x+9}{4x^2+5x-6}$;

4) $\frac{25x^2+10x+1}{5x^2-14x-3}$; 5) $\frac{x^2-25}{x-5}$; 6) $\frac{x^2+5x+6}{x+3}$.

Решите уравнение (**419–420**):

419. 1) $x^4-9x^2+20=0$; 2) $x^4-11x^2+18=0$;

3) $2x^4-5x^2+2=0$; 4) $5x^4-16x^2+3=0$.

420. 1) $\frac{x}{x-2}+\frac{3}{x}=\frac{3}{x-2}$; 2) $\frac{x^2}{x^2+3x}+\frac{2+x}{x+3}=\frac{5-x}{x}$;

3) $\frac{y+3}{y^2-y}+\frac{6-y}{1-y^2}=\frac{y+5}{y+y}$; 4) $\frac{y+4}{y-4}+\frac{y}{4-y}=-\frac{4}{y+2}$.

421. Скорость вертолета Ми-6 равна 300 км/ч. Расстояние в 224 км вертолет пролетел дважды: один раз – по ветру, другой раз – против ветра. Определите скорость ветра, если на полет против ветра вертолет затратил на 6 минут больше, чем на полет по ветру.

422. Скорость велосипедиста первую половину пути была на 3 км/ч больше, чем его скорость во второй половине пути. С какой скоростью велосипедист проехал вторую половину пути, если весь путь в 90 км он преодолел за 5,5 ч?

423. На посадке деревьев работали две бригады. Первая бригада ежедневно высаживала на 400 деревьев больше, чем вторая, и посадила 2700 деревьев. Вторая бригада работала на 2 дня больше первой и посадила 2500 деревьев. Сколько дней работала на посадке деревьев каждая бригада?

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Решите уравнение:

1) $3x^2=0$; 2) $(x+1)(x-2)=0$;

3) $4x^2-1=0$; 4) $3x^2=5x$;

5) $4x^2-4x+1=0$; 6) $x^2-16x-17=0$;

7) $3x^2+5x=2$; 8) $x^2-4x+5=0$.

2. Разложите на множители:

1) x^2+x-6; 2) $2x^2-x-3$; 3) x^2-6x+9.

3. Решите задачу.

Расстояние между двумя селами в 36 км один велосипедист проехал на 1 час быстрее второго. Найдите скорость каждого велосипедиста, если известно, что скорость одного велосипедиста на 3 км/ч больше другого.

Решите уравнение (**424–426**):

424. 1) $3x(x-2)=x-4$; 2) $\frac{x^2-2}{6}-\frac{1-x}{2}=\frac{x-5}{6}$.

425. 1) $2x(x-2)=(x+1)^2-9$; 2) $5x(x-4)=(x-8)^2-65$;

3) $\frac{(x+2)^2}{3}-\frac{(x+1)^2}{2}=1$; 4) $\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(x-2)^2}{5}=4$.

426. 1) $(x-5)(x-6)=30$; 2) $(x+2)(x+3)=6$;

3) $(x-1)(x-4)=3x$; 4) $(x-2)(x+8)=6x$.

427. При каких значениях x выражение $x^2+3x-88$ равно: 1) 0; 2) 20; 3) –18; 4) –70?

428. Сколько действительных корней имеет квадратное уравнение: $ax^2+bx+c=0$ если:

1) $a=3, b=1, c=-4$; 2) $a=5, b=2, c=3$;

3) $a=25, b=-10, c=1$; 4) $a=1, b=0, c=-25$

429. Решите уравнение:

1) $\frac{12x+4}{x^2+2x-3}=\frac{3x-2}{x-1}-\frac{2x+3}{x+3}$;

2) $\frac{5}{x^2-4}-\frac{8}{x^2-1}=\frac{2}{x^2-3x+2}-\frac{20}{x^2+3x+2}$.

3) $\frac{x+34}{x^2-8x+7}=\frac{2x-3}{x-7}-\frac{x+5}{x-1}$.

430. Фирма в определенный срок должна выпустить 5 400 пар обуви. Фактически она выпускала в день на 30 пар обуви больше, чем предполагалось, и выполнила заказ на 9 дней раньше срока. За сколько дней был выполнен заказ?

431. Два туриста на велосипедах выехали одновременно из села A и направились разными дорогами в село B. Первый должен был проехать 30 км, а второй 20 км. Скорость движения первого туриста была на 3 км/ч больше скорости второго. Однако второй турист прибыл в село B на 20 минут раньше первого. Сколько времени был в дороге каждый турист?

432. Две бригады рабочих закончили ремонт участка дороги за 4 часа. Если бы сначала одна из них отремонтировала половину всего участка, а затем другая – оставшуюся часть, то весь ремонт был бы закончен за 9 часов. За сколько времени каждая бригада по отдельности могла бы отремонтировать весь участок?

Тестовые задания к главе III

1. Решите уравнение: $x^2=64$.

A) $x_{1,2}=\pm 8$; C) $x=-8$;
B) $x=8$; D) $x=32$.

2. Решите уравнение: $x^2-11=0$.

A) $x=\sqrt{11}$; C) $x=-\sqrt{11}$;
B) $x_{1,2}=\pm\sqrt{11}$; D) $x=\frac{11}{2}$.

3. Решите уравнение: $3x^2=48$.

A) $x=4$; C) $x_{1,2}=\pm 4$;
B) $x=-4$; D) $x=8$.

4. Решите уравнение: $x^2=5x$.

A) $\varnothing$; C) $x=0$;
B) $x=2{,}5$; D) $x_1=0,\ x_2=5$.

5. Решите уравнение: $x^2+9x=0$.

A) $x_1=0,\ x_2=-9$;
C) $x_{1,2}=9$;
B) $x_{1,2}=\pm 3$;
D) $x_1=9,\ x_2=0$.

6. Решите квадратное уравнение: $x^2+x-6=0$.

A) $x_1=-3,\ x_2=2$;
C) $x_{1,2}=\pm 6$;
B) $x_1=3,\ x_2=-2$;
D) $x_1=-2;\ x_2=-3$.

7. Решите квадратное уравнение: $x^2+7x+6=0$.

A) $x_1=1, x_2=-1$;
C) $x_1=-7, x_2=-6$;
B) $x_1=-6, x_2=-1$;
D) $x_1=-1, x_2=-5$.

8. Решите квадратное уравнение: $x^2+x+1=0$.

A) $x_1=0, x_2=1$;
C) $\varnothing$;
B) $x_{1,2}=\frac{\sqrt{-3}}{2}$;
D) $x_{1,2}=\pm\sqrt{-3}$.

9. Решите квадратное уравнение: $x^2-7x+10=0$.

A) $x_1=-2, x_2=2$;
C) $x_1=5, x_2=1$;
B) $x_1=-5, x_2=2$;
D) $x_1=2, x_2=5$.

10. Решите квадратное уравнение: $6x^2-5x+1=0$.

A) $x_1=\frac{1}{3}, x_2=\frac{1}{2}$;
C) $x_1=-\frac{1}{2}, x_2=-\frac{1}{3}$;
B) $x=\frac{1}{6}$;
D) $x=-\frac{1}{3}$.

11. Решите квадратное уравнение: $12x^2+7x+1=0$.

A) $x_1=\frac{1}{3}, x_2=\frac{1}{4}$;
C) $x_1=\frac{1}{3}, x_2=-\frac{1}{4}$;
B) $x_1=-\frac{1}{3}, x_2=\frac{1}{4}$;
D) $x=\frac{1}{7}$.

12. Решите уравнение: $x^4-5x^2+4=0$.

A) $x_{1,2}=\pm 4, x_{3,4}=1$;
C) $x_1=1,\ x_2=4$;
B) $x_{1,2}=\pm 1, x_{3,4}=\pm 2$;
D) $x_{1,2}=\pm 1$.

13. Решите уравнение: $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$.

A) $x_{1,2} = -\sqrt{5}, x_{3,4} = 1$; B) $x_{1,2} = 5$; C) $x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$; D) $\varnothing$.

14. Путь 60 км один велосипедист проехал на 1 час быстрее второго. Найдите скорость каждого велосипедиста, если скорость одного из них была на 5 км/ч меньше второго.

A) 20 км/ч, 25 км/ч; B) 10 км/ч, 15 км/ч;
C) 15 км/ч, 20 км/ч; D) 12 км/ч, 17 км/ч.

Исторические задачи

Решите уравнения из трактата *ал-Хорезми* „Ал-джабр вал-мукабала“ **(1–31)**:

1. $x^2 + 10x = 39$.

2. $x^2 + 5x = 24$.

3. $x^2 + 10x = 56$.

4. $x^2 + (10 - x)^2 = 58$.

5. $\left(\frac{x}{3} + 1\right)\left(\frac{x}{4} + 1\right) = 20$.

6. $4x(10 - x) = x^2$.

7. $\frac{25}{9}x^2 = 100$.

8. $x^2 + 21 = 10x$.

9. $3x + 4 = x^2$.

10. $\frac{x}{3} \cdot \frac{x}{4} = x + 24$.

11. $\frac{10 - x}{x} + \frac{x}{10 - x} = 2\frac{1}{6}$.

12. $100 + x^2 - 20x = 81x$.

13. $30x = 100 + x^2$.

14. $4x \cdot 5x = 2x^2 + 36$.

15. $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{6}$.

16. $\sqrt{x^2 - x} + x = 2$.

17. $13^2 - x^2 = 15^2 - (14 - x)^2$.

18. $(10 - x)^2 - x^2 = 40$.

19. $(10 - x)^2 + x^2 + (10 - x) - x = 54$.

20. $\frac{1}{2} \cdot \frac{5x}{10 - x} + 5x = 50$.

21. $x^2 + 20 = 12x$.

22. $\left(\frac{x}{3} + 1\right)\left(\frac{x}{4} + 2\right) = x + 13$.

23. $x^2 + x = \frac{3}{4}$.

24. $\left(x-\frac{x}{3}-\frac{x}{4}-4\right)^2=x+12.$

25. $\left(x-\left(\frac{x}{3}+3\right)\right)^2=x.$

26. $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}x^2=\frac{1}{7}x.$

27. $\frac{x^2-4x}{3}=4x.$

28. $(x^2-3x)^2=x^2.$

29. $\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5}x^2=\frac{4}{5}x.$

30. $10x=(10-x)^2.$

31. $\begin{cases}x+y=10,\\ xy=21.\end{cases}$

Задача Абу Камиля. Решите уравнение:

$$\frac{x}{10-x}+\frac{10-x}{x}=\sqrt{5}\,.$$

Задача Евклида. Решите уравнение $(1-x):x=x:1$.

Задача из вавилонских клинописных табличек:

Сумма площадей двух квадратов равна $25\frac{5}{12}$. Сторона второго квадрата на 5 единиц больше $\frac{2}{3}$ стороны первого квадрата. Найдите стороны квадратов.

Задача Омара Хайяма (1048–1131).

Решите уравнение $\frac{1}{x^2}+2\cdot\frac{1}{x}=1\frac{1}{4}$.

Метод решения квадратных уравнений ал-Хорезми.

Рассмотрим задачу из трактата ал-Хорезми „Ал-джабр вал-мукабала“: „Если к квадрату некоторого числа прибавить удесятеренное число, то получится тридцать девять“. Чтобы решить эту задачу нужно решить (в современных обозначениях) уравнение $x^2 + 10x = 39$. Ал-Хорезми так описывает решение этого уравнения: „1) раздели число корней на два $(10 : 2 = 5)$; 2) умножь его на равное (число), получится двадцать пять $(5 \cdot 5 = 25)$; 3) прибавь его к тридцати девяти, получится шестьдесят четыре $(25 + 39 = 64)$; 4) извлеки из него корень, получится восемь $(\sqrt{64}=8)$; 5) вычти из него половину числа корней, то есть пять, останется три $(8 - 5 = 3)$. Это число и будет искомым квадратным корнем“.

В современной записи решение ал-Хорезми можно кратко записать так:

$$x=\sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2+39}-\frac{10}{2}=\sqrt{25+39}-5=\sqrt{64}-5=8-5=3.$$

Ответ: $x = 3$.

(Ал-Хорезми не рассматривает второй корень $x = -13$.)

В трактате „Ал-джабр вал-мукабала“ приведен также геометрический метод решения этого уравнения (рис. 38). Это следующий метод: Рассмотрим квадрат со стороной x (площадью x^2). Строим на его сторонах 4 прямоугольника шириной $\frac{10}{4}$. Построенная фигура соответствует выражению $x^2 + 10x$. „Дополним“ эту фигуру до квадрата со стороной $(x + 5)$, то есть добавим в „вершины“ фигуры 4 квадрата со стороной $\frac{10}{4}$. Полученная фигура соответствует выражению $x^2+10x+25=(x+5)^2$. Но, так как по условию $x^2+10x=39$, то площадь большого квадрата равна $39+4\cdot\left(\frac{10}{4}\right)^2=64$. Следовательно, $(x + 5)^2 = 64$, откуда $x+5=8$ и $x=3$. Итак, ал-Хорезми при решении квадратного уравнения применяет геометрический метод разложения полного квадрата. Метод ал-Хорезми для уравнения $x^2 + px = q$ можно записать следующим образом:

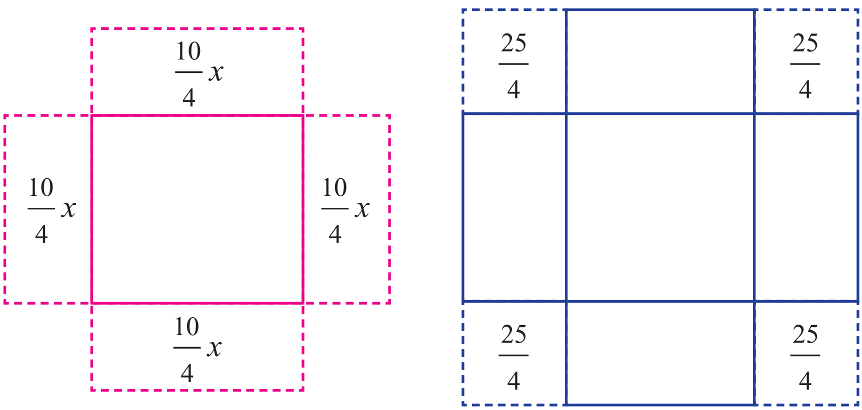


Рис. 38.

$$x^2+4\cdot\left(\frac{p}{4}\right)x+4\cdot\left(\frac{p}{4}\right)^2=q+4\cdot\left(\frac{p}{4}\right)^2; \quad \left(x+2\cdot\frac{p}{4}\right)^2=q+4\left(\frac{p}{4}\right)^2,$$

$$x_{1,2}+2\cdot\frac{p}{4}=\pm\sqrt{q+4\cdot\left(\frac{p}{4}\right)^2},$$

откуда: $x_{1,2}-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{4}\right)^2+q}.$

Исторические сведения

Абу Абдулла Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми (783—850) один из великих ученых средневековья. Он в своем сочинении „Книга ал-джабр вал-мукабала“ заложил основы алгебры. Арабская рукопись книги ал-Хорезми, переписанная в 1342 году, сохранилась в Бодленской библиотеке Оксфордского университета. Ал-Хорезми так говорит о целях написания своей книги: „... я написал книгу, в которой рассмотрены простые и сложные арифметические задачи, так как решение таких задач необходимо людям при разделе наследства и имущества, составлении завещания, в юридических вопросах, в торговле и всевозможных контактах, а также при разделе земельных угодий, прокладывании оросительных каналов, в инженерном деле и тому подобных вещах. В алгебре приходится иметь дело с „величинами трех родов“, — пишет ал-Хорезми. Это корни (неизвестное число x), квадраты (x^2) и обычные числа (свободные члены).

Ал-Хорезми изучал соотношения между этими тремя родами величин. Он делил уравнения на следующие классы:

1) $ax^2=bx$ — квадраты равны корням;
2) $ax^2=c$ — квадраты равны числу;
3) $bx=c$ — корни равны числу;
4) $ax^2+bx=c$ — квадраты и корни равны числу;
5) $ax^2+c=bx$ — квадраты и число равны корням;
6) $bx+c=ax^2$ — корни и число равны квадратам.

В своем трактате ал-Хорезми предлагает геометрические методы для решения уравнений вида 4), 5), 6). Методами алгебры ученый приводит любое уравнение к одному из шести видов уравнений, приведенных выше.

Практические и межпредметные задачи

433. 1) В колодец брошен камень. Звук от его удара был услышан через 4 секунды. Найдите глубину колодца, считая скорость звука равной 330 м/с, путь пройденный телом за $s=\frac{gt^2}{2}$, а ускорение свободного падения равным $g \approx 10$ м/с^2.

2) Через сколько секунд стрела, выпущенная со скоростью 300 м/с, окажется на высоте 2500 м над землей? (Сопротивление воздуха не учитывать).

△ 1) Камень упал на дно за t минут и преодолел расстояние $s=\frac{gt^2}{2}$. Звук со дна колодца был услышан через $(4-t)$ секунд, пройдя расстояние $330(4-t)$ м. $\frac{gt^2}{2}=330(4-t)$. Из этого уравнения получаем $t \approx 3{,}78$ с; $4-t \approx 0{,}22$ с; $s \approx 330 \cdot 0{,}22 = 72{,}6$ (м). **Ответ:** $\approx 72{,}6$м.

2) Через t секунд тело оказалось на высоте $300\,t$ м над землей. $300\,t-\frac{10t^2}{2}=2500$ или $t^2-60t+500=0$, где $t=10$ или $t=50$.

Ответ: 10 с и 50 с. ▲

434. В двух сосудах вместимостью по 30 литров было всего 30 л спирта. В первый сосуд доверху долили воду и долили этим раствором доверху второй сосуд. Затем 12 л раствора из второго сосуда перелили в первый. После этого оказалось, что во втором сосуде спирта на 2 л меньше, чем в первом. Сколько спирта было в каждом сосуде первоначально?

△ Пусть первоначально в первом сосуде было x *л* спирта, тогда во втором $(30-x)$ *л* спирта. В первый сосуд налили воду, тогда в нем $\frac{x}{30}$ *л* спирта. x *л* этого раствора налили во второй сосуд (так как во втором сосуде имеется x *л* „пустого места“), тогда во втором сосуде имеется $\frac{x}{30}\cdot x=\frac{x^2}{30}$ *л* спирта и вместе с $(30-x)$ *л* получаем, что в нем всего $\left(30-x+\frac{x^2}{30}\right)$ *л* спирта. Тогда содержание спирта во втором сосуде $\left(30-x+\frac{x^2}{30}\right):30=1-\frac{x}{30}+\left(\frac{x}{30}\right)^2$ *л*. Когда из второго сосуда в первый перелили 12 *л*, то в этом растворе содержится $12\cdot\left(1-\frac{x}{30}+\left(\frac{x}{30}\right)^2\right)$ *л* спирта и вместе с $\left(x-\frac{x^2}{30}\right)$ *л* спирта в первом сосуде всего $\left(x-\frac{x^2}{30}\right)+12\cdot\left(1-\frac{x}{30}+\left(\frac{x}{30}\right)^2\right)$ *л* спирта. После того как из второго сосуда в первый перелили 12 *л* раствора, то в нем осталось 18 *л* раствора, в котором $18\cdot\left(1-\frac{x}{30}+\left(\frac{x}{30}\right)^2\right)$ *л* спирта. По условию задачи это на 2 *л* меньше, чем в первом, получаем уравнение:

$18\cdot\left(1-\frac{x}{30}+\left(\frac{x}{30}\right)^2\right)+2=\left(x-\frac{x^2}{30}\right)+12\left(1-\frac{x}{30}+\left(\frac{x}{30}\right)^2\right)$, откуда

$6\cdot\left(1-\frac{x}{30}+\left(\frac{x}{30}\right)^2\right)+2=x-\frac{x^2}{30}$, наконец, $x^2-30x+200=0$.

Ответ: 20 *л* и 10 *л*. ▲

435. Найдите такое четырехзначное число, в котором равны цифры тысяч и десятков, число сотен на 1 больше числа единиц, и кроме того, искомое число является полным квадратом целого числа.

(Указание: приходим к уравнению $x^2=1010a+101b+100$, где x^2 – искомое число, a – число тысяч, b – число единиц).

436. Сосуд наполнен кислотой. Из него вылили 2 *л* кислоты и долили 2 *л* воды. Затем вылили 2 *л* раствора и опять налили 2 *л* воды. Затем еще раз вылили 2 *л* раствора и опять налили 2 *л* воды. В результате оказалось, что объём воды в растворе на 3 *л* больше объёма кислоты. Сколько воды и сколько кислоты в последнем растворе?

△ Пусть объём сосуда v *л*. Из сосуда вылили 2 *л* кислоты и налили 2 *л* воды. До того как долили воду кислота занимала $\frac{v-2}{v}$ часть сосуда. После того, как вылили 2 *л* раствора, в сосуде осталось $(v-2)\cdot\frac{v-2}{v}$ *л* кислоты. До того как долили 2 *л* воды, кислота занимала $\frac{(v-2)^2}{v^2}$ часть сосуда. После 3-го раза (еще раз вылили 2 *л* раствора, но еще не долили воду) кислота занимала $\left(\frac{v-2}{v}\right)^3$ часть сосуда. Таким образом, содержание кислоты в сосуде $v\cdot\left(\frac{v-2}{v}\right)^3$, а воды $v\cdot\left(\frac{v-2}{v}\right)^3+3$. Получаем следующее уравнение:

$$v\cdot\left(\frac{v-2}{v}\right)^3+v\cdot\left(\frac{v-2}{v}\right)^3+3=v, \text{ откуда}$$

$$v^3-9v^2+24v-16=0, \quad (v-1)(v-4)^2=0.$$

Так как по условию $v>2$, то $v=4$.

Следовательно $v\cdot\left(\frac{v-2}{v}\right)^3=4\cdot\left(\frac{4-2}{4}\right)^3=\frac{1}{2}\ (l)$,

Ответ: 0,5 *л* кислоты и 3,5 *л* воды. ▲

437. Из села *A* в село *B* выехал грузовик. Через час из села *A* в том же направлении выехал автомобиль и прибыл в *B* одновременно с грузовиком. Если бы эти машины выехали одновременно навстречу друг другу из сел *A* и *B*, то они встретились бы в пути через 1 час 12 минут. Сколько времени нужно грузовику на путь из *A* в *B*?

438. Две бригады рабочих разгружали вагон. Сумма времени на разгрузку вагона только первой бригадой и времени на разгрузку того же груза только второй бригадой равна 12 часам. А разность этих времен составляет 45% времени, которое потратили бы обе бригады, работая одновременно. Сколько времени потребуется каждой бригаде для разгрузки, если они будут работать отдельно?

△ Пусть первая бригада разгружает груз самостоятельно за x часов, а вторая – за y часов. По условию задачи $x + y=12$ (ч.)

Первая бригада за 1 час выполняет $\frac{1}{x}$ часть работы, а вторая – $\frac{1}{y}$

часть. За 1 час, работая одновременно, они выполняют $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ часть работы. Тогда для выполнения всей работы им потребуется $\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ ч.

Для определенности будем считать, что, например, первая бригада работает медленнее, то есть $x > y$. Тогда по условию $(x - y)$ часов составляют 45% от $\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ часов:

$$x-y=\frac{45}{100}\cdot\frac{xy}{x+y}.$$

Подставив в это уравнение вместо y значение $y=12-x$, получим квадратное уравнение относительно x:

$$x-12+x=\frac{9}{20}\cdot\frac{x(12-x)}{12},$$

откуда, $3x^2+124x-960=0$.

$x_1=-48$, $x_2=\frac{20}{3}$ – корни этого уравнения. По смыслу задачи $x > 0$. Следовательно,

$$x=\frac{20}{3}=6\frac{2}{3}\ (\text{ч}),$$

$$y=12-x=12-6\frac{2}{3}=5\frac{1}{3}\ (\text{ч}).$$

Ответ: $6\frac{2}{3}$ ч, $5\frac{1}{3}$ ч. ▲

439. Две хлопкоуборочные машины, работая одновременно, могут собрать урожай с поля на 8 дней быстрее, чем одна первая машина, и на 2 дня быстрее, чем одна вторая машина. За сколько дней может собрать урожай каждая машина, работая отдельно?

440. Два мастера получили заказ на выполнение некоторого задания.

Сначала 1 час работал первый мастер, затем 4 часа работали оба мастера одновременно, и было выполнено 40% заказа. За сколько времени может выполнить заказ каждый мастер в отдельности, если для этого первому мастеру потребуется на 5 часов больше времени, чем второму?

441. Поезд, следующий из города *A* в город *B*, останавливался на 20 минут на этом пути. После остановки, машинист увеличил первоначальную скорость поезда на 12 км/ч, чтобы прибыть в город *B* по расписанию. Найдите первоначальную скорость поезда, если расстояние между городами *A* и *B* равно 240 км.

442. Два трактора разной мощности, работая вместе, за 3 дня вспахали $\frac{5}{8}$ частей поля. За сколько дней может вспахать все поле каждый трактор, работая отдельно, если первый трактор может сделать это на 4 дня быстрее?

443. Поезд должен был проехать 840 км. На полпути он сделал остановку на 30 минут. Чтобы не опоздать, он должен был увеличить скорость на 2 км/ч. Какова была первоначальная скорость поезда?

△ *1-й способ.* Пусть на весь путь отводилось x часов; половину пути поезд ехал со скоростью $\frac{840}{x}$ км/ч; а вторую половину со скоростью $\left(\frac{840}{x}+2\right)$ км/ч за $\frac{420}{\frac{840}{x}+2}=\frac{210x}{420+x}$ часов. Первую половину пути он проехал за $\frac{x}{2}$ часов. По условию $\frac{210x}{420+x}=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$. Решив уравнение, получим x=21(ч).

2-й способ. Пусть первоначальная скорость поезда x км/ч, последующая $(x + 2)$ км/ч, 420 км поезд прошел за $\frac{420}{x}$ часов, остальные 420 км за $\frac{420}{x+2}$ часов. По условию: $\frac{420}{x}-\frac{420}{x+2}=\frac{1}{2}$. Решив уравнение, получим $x=40$ км/ч; на весь путь поезд должен был потратить $\frac{840}{40}=21$ час.

3-й способ. Поезд первую половину пути прошел за x часов, а вторую за $\left(x-\frac{1}{2}\right)$ часов. Скорость поезда на первой половине пути $\frac{420}{x}$ км/ч, а на второй – $\frac{420}{x-\frac{1}{2}}=\frac{840}{2x-1}$ км/ч. $\frac{840}{2x-1}-\frac{420}{x}=2$. Решив уравнение, находим, что $x = 10{,}5$ ч, $2x = 21$ ч.

Ответ: 21 час. ▲

444. Некоторое число равно произведению трех последовательных целых чисел. Сумма чисел, полученных делением этого числа на каждое из последовательных чисел, равна 74. Найдите это число.

445. Сумма числа сторон и числа диагоналей выпуклого многоугольника равна 15. Найдите число сторон многоугольника.

446. Могут ли длины сторон прямоугольного треугольника выражаться: a) последовательными натуральными числами; b) последовательными четными натуральными числами; c) последовательными нечетными натуральными числами?

△ a) Пусть стороны равны целым последовательным числам: x, $x+1$, $x+2$. Тогда x и $x+1$ катеты, а $(x+2)$ гипотенуза, и $x^2+(x+1)^2=(x+2)^2$; откуда $x=3$ или $x=-1$ ($x=-1<0$ не удовлетворяет смыслу задачи). $x=3$; $x+1=4$; $x+2=5$. Длины сторон прямоугольного треугольника равны целым последовательным числам: 3, 4, 5.; b) пусть стороны равны целым четным последовательным числам: $2x$, $2x+2$, $2x+4$. Тогда: $(2x)^2+(2x+2)^2=(2x+4)^2$; $x=3$; $2x=6$; $2x+2=8$; $2x+4=10$. Получаем, что тогда стороны прямоугольного треугольника равны: 6, 8, 10; c) пусть стороны равны целым нечетным последовательным числам: $2x+1$; $2x+3$; $2x+5$. Тогда $(2x+1)^2+(2x+3)^2=(2x+5)^2$; $x=\frac{5}{2}$ или $x=-\frac{3}{2}\cdot$ Но x не является натуральным числом. Следовательно, не существует прямоугольного треугольника, стороны которого равны целым нечетным последовательным числам.▲

447. Один из растворов содержит 800 г соли, а другой 600 г. Из двух растворов получили 10 кг нового раствора. Сколько килограммов каждого раствора было, если процентное содержание соли в первом растворе на 10 больше процентного содержания второго раствора?

△ Если масса первого раствора x кг, то второго – $(10-x)$ кг.

Процентное содержание соли в первом растворе $\frac{0{,}8 \cdot 100}{x}=\frac{80}{x}$ процентов, а во втором – $\frac{0{,}6 \cdot 100}{10-x}=\frac{60}{10-x}$ процентов. По условию задачи:

$$\frac{80}{x}-\frac{60}{10-x}=10.$$

Решив это уравнение, получим: $x=20$ или $x=4$. Но по условию задачи $x<10$, поэтому остается корень $x=4$. $10-x=10-4=6$.

Ответ: масса первого раствора 4 кг, масса второго раствора 6 кг.

Проверка ответа: 800 г соли в 4 кг раствора составляют $\frac{0{,}8 \cdot 100\%}{4}=20\ \%$, 600 г соли в 6 кг раствора – $\frac{0{,}6 \cdot 100\%}{6}=10\ \%$: $20\%-10\%=10\%$.▲

448. Имеются два куска металла: массой 800 г и 880 г. Объём первого куска на 10 см^3 меньше объёма второго. Найдите удельный вес каждого куска металла, если удельный вес первого куска на 1 г/см^3 больше удельного веса второго.

△ Пусть удельный вес второго куска металла – d г/см^3, а удельный вес первого куска – $(d+1)$ г/см^3. Тогда объем первого куска $\frac{880}{d+1}$ см^3, а второго – $\frac{858}{d}$ см^3. По условию задачи:

$$\frac{880}{d+1}+10=\frac{858}{d} \quad \text{или} \quad 5d^2+16d-429=0,$$

$d=7{,}8$ или $d=-11$ (не рассматриваем, так как $d=-11<0$).

Ответ: удельный вес второго куска 7,8 г/см^3, а удельный вес первого куска $7{,}8+1=8{,}8$ (г/см^3).

Проверка ответа. Объем первого куска $\frac{880}{8{,}8}=100$ (см^3), а второго – $\frac{858}{7{,}8}=110$ (см^3); 110 см^3 –100 см^3=10 см^3. ▲

449. В двух сосудах находится вода с разностью масс в 1 кг. Воде в сосудах придали по 88 калорий тепла. Найдите массу воды в каждом сосуде, если вода в сосуде с большей массой по сравнению с водой в другом сосуде нагрелась на $\frac{4}{5}$ градуса меньше.

△1) Пусть масса воды x кг и $(x+1)$ кг. Вода с меньшей массой нагрелась на $\frac{88}{x}$ градусов, а вода с большей массой на $\frac{88}{x+1}$ градусов. Так как разность между этими величинами равна $\frac{4}{5}$, то получим уравнение:

$$\frac{88}{x}-\frac{88}{x+1}=\frac{4}{5}.$$

Решив это уравнение, найдем: $x=10$ или $x=-11$. Но $x=-11<0$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 10 кг и 11 кг.

Проверка ответа. 10 кг воды при повышении тепла на 88 нагрелась на $\frac{88}{10}=8{,}8$ градусов, 11 воды при повышении тепла на 88 нагрелась на $\frac{88}{11}=8$ градусов. $8{,}8-8=0{,}8=\frac{4}{5}$ (градусов). ▲

450. Расстояние между городами A и B по железной дороге равно 66 км, а по водному пути 80,5 км. Поезд, выехавший из города A на 4 часа позже катера, прибыл в город B на 15 минут раньше. Найдите скорости поезда и катера, если скорость поезда на 30 км/ч больше скорости катера.

△ Пусть поезд проходит за час x км, тогда катер за час проходит $(x-30)$ км. Поезд находится в пути $\frac{66}{x}$ часов, а катер $\frac{80,5}{x-30}$ часов. 4 часа + 15 минут $=4\frac{1}{4}$ часа $=\frac{17}{4}$ часа. По условию задачи:

$$\frac{80,5}{x-30}-\frac{66}{x}=\frac{17}{4}.$$

Решив это уравнение, получим следующий ответ: скорость поезда 44 км/ч, скорость катера 14 км/ч.

Проверка ответа. Катер проходит 80,5 км за $\frac{80,5}{14}=5\frac{3}{4}$ часов, а поезд проходит 66 км за $\frac{66}{44}=1\frac{1}{2}$ часа. Тогда $5\frac{3}{4}-1\frac{1}{2}=4\frac{1}{4}$. ▲

451. Два трактора разной мощности, работая вместе, за 4 дня обработали $\frac{2}{3}$ части посевной площади. За сколько дней обработает всю посевную площадь каждый тактор, работая отдельно, если известно, что первый трактор это сделает на 5 дней быстрее второго?

△ *1-й способ.* Примем всю работу за единицу. Пусть второй трактор обрабатывает землю за x дней. Тогда первый, работая отдельно, обрабатывает землю за $x-5$ дней. Первый трактор за 1 день обрабатывает $\frac{1}{x-5}$ часть площади, второй – $\frac{1}{x}$ часть, оба трактора вместе обработают $\frac{2}{3}:4=\frac{1}{6}$ часть площади.

Оба трактора, работая одновременно, обработают $\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x}$ или $\frac{1}{6}$ часть площади. Следовательно:

$$\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x}=\frac{1}{6}.$$

$x=15$ или $x=2$ – корни этого уравнения. Но, по условию $x>5$. Поэтому $x_2=2$ не является ответом задачи.

2-й способ. Оба трактора, работая одновременно обрабатывают все поле за $4:\frac{2}{3}=6$ дней. Если второй трактор, работая самостоятельно, обработает поле за x дней, то он за 1 день обрабатывает $\frac{1}{x}$ часть площади. А за 6 дней $\frac{6}{x}$ части. Если первый трактор, работая самостоятельно, обработает поле за x – 5 дней, то за 1 день он обработает $\frac{1}{x-5}$ часть поля, а за 6 дней – $\frac{6}{x-5}$ части. Тогда оба трактора за 6 дней обработают все поле, то есть:

$$\frac{6}{x}+\frac{6}{x-5}=1.$$

Ответ: Первый трактор, работая самостоятельно, обработает поле за 10 дней, а второй за 15 дней.

Проверка ответа. 1) Первый трактор, работая самостоятельно, обрабатывает землю на 15 дн. – 10 дн. = 5 дн. быстрее второго.

2) Первый трактор за 1 день обрабатывает $\frac{1}{10}$ часть, за 4 дня $\frac{4}{10}$ части, а второй за 1 день – $\frac{1}{15}$ часть, за 4 дня – $\frac{4}{15}$ частей площади.

Оба трактора за 4 дня обработают $\frac{4}{10}+\frac{4}{15}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$ части поля.▲

452. Первая бригада работала над заданием 3,5 дня. Оставшуюся работу вторая бригада закончила за 6 дней. Вторая бригада, работая самостоятельно, выполняет всю работу на 5 дней позже первой. За сколько дней выполняет задание каждая бригада, работая самостоятельно?

453. Катер проплыл по течению реки 69 км, а на 34 км обратного пути он затратил 5 часов. Найдите скорость катера в стоячей воде, если скорость течения реки 3 км/ч.

454. Из села *A* по течению реки отправился плот. Через 4 часа после этого из этого же села по течению выехала моторная лодка, которая догнала плот через 15 км. Найдите скорость плота (течения реки), если скорость моторной лодки на 12 км/ч больше скорости плота.

455. На 200 га фермерского хозяйства планировали посеять картофель. Однако хозяйство ежедневно засеивало картофель на площади на 5 га больше планируемого и закончило работу на 2 дня раньше. Сколько дней сажали картофель?

456. Число десятков двузначного числа на 4 меньше числа его единиц. Произведение двузначного числа, в котором цифры записаны в обратном порядке, и числа, которое меньше его на 2 единицы, равно 2627. Найдите это двузначное число.

457. Число десятков двузначного числа в 4 раза больше числа его единиц. Если из этого числа вычесть 2 и умножить его на число, в котором цифры записаны в обратном порядке, и которое увеличено на 2 единицы, то получим 2400. Найдите это двузначное число.

458. Три бригады рабочих, работая вместе, отремонтировали здание к некоторому сроку. Если бы работала только первая бригада, то ей потребовалось на 10 дней больше срока. Если бы работала только вторая бригада, то ей потребовалось бы на 20 дней больше срока, а если бы работала только третья бригада, то ей нужно было бы в 6 раза больше дней, чем по сроку. За сколько дней может выполнить задание каждая бригада, работая самостоятельно?

459. К бассейну подведены три трубы. Вторая труба, работая самостоятельно, наполняет пустой бассейн на 3 часа дольше, чем первая труба, работающая сомостоятельно. Для того, чтобы третья труба самостоятельно слила воду из наполненного бассейна, первая труба должна работать на 3 часа меньше запланированного. Если же вода будет поступать из двух труб одновременно, а третья работать на слив, то бассейн наполнится за 36 часов. За сколько часов наполнят пустой бассейн первая и вторая трубы, работая отдельно? За сколько часов опустошит заполненный бассейн третья труба?

460. Цена товара 12 000 сумов. После двух последовательных уценок на один и тот же процент, товар стал стоить 9 720 сумов. На сколько процентов каждый раз снижали цену товара?

461. За два года численность населения города выросла с 2 миллионов до 2 миллионов 205 тысяч человек. Найдите на сколько процентов приближенно увеличивалась численность населения города ежегодно.

462. Из двух сел A и B вышли навстречу друг другу два пешехода. При встрече оказалось, что один из них прошел на 2 км больше. Продолжая путь после встречи, первый пешеход через 40 минут прибыл в B. А еще через 1,5 часа второй пешеход прибыл в A. Найдите расстояние AB.

463. В шахматном соревновании каждый участник проводит одну игру со всеми остальными участниками. Сколько человек участвовало в соревновании, если всего было проведено 120 игр?

464. Выпускники 11 класса обменялись друг с другом фотографиями. Сколько учащихся в классе, если было обменено 1190 фотографий?

465. Из двух городов, расстояние между которыми 900 км, выехали навстречу друг другу два поезда. Поезда встретились в середине пути. Найдите скорость каждого поезда если первый поезд выехал на 1,5 часа позже второго и его скорость была на 10 км в час больше.

466. Поезд должен был проехать 220 км за определенное время. Через 2 часа пути поезд сделал 10 минутную остановку, затем, увеличив скорость на 5 км в час, он вовремя прибыл на место назначения. Найдите первоначальную скорость поезда.

ГЛАВА IV

АНАЛИЗ ДАННЫХ

§28. АНАЛИЗ ДАННЫХ. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДАННЫХ

Как мы узнаем, соответствуют ли качественные и количественные показатели (состав, масса, размер, цвет, вкус, ...) производимых разными фирмами и компаниями, товаров признанным стандартам?

Как контролируем, оцениваем?

Если количество изготовленных товаров (например: молока, зерновых и молочных продуктов, различных напитков, одежды, электрических приборов, и др.) очень велико, то контролировать и испытывать каждый товар отдельно нецелесообразно с экономической точки зрения. В таких случаях из общего числа товаров случайным образом выбираются несколько и только они проходят контроль.

Множество всех испытуемых объектов называется главным множеством. Выбранные из главного множества объекты, называются выборочным множеством (сокращенно: *выборка*). Под объектом понимают то, что нужно испытать.

Задача 1. Пусть фирма выпускает лампочки (для домашнего пользавания). Сколько процентов из них не горят? Как это проверить?

△ Невозможно проверить все сотни тысяч лампочек, которые выпускает фирма. Поэтому в таких случаях выбирают случайным образом (на удачу) нескоторое количество лампочек. Все выбранные лампочки проходят проверку. По результатам проверки фирма приходит к соответствующим выводам относительно выпускаемых изделий.

Например, если после проверки 1000 лампочек 10 из них не работали, то в этом случае приходят к выводу, что $\frac{10}{1000}=0{,}01$ часть всех лампочек (то есть 1 %) не будет гореть. ▲

В этом примере все выпускаемые фирмой лампочки это – *главное множество*. Выбранные случайным образом для проверни 1000 лампочек являются *подмножеством множества лампочек*.

Задача 2. Определите среднюю массу раскрытых коробочек на хлопковом поле.

△ Конечно же здесь не имеется ввиду, что нужно собрать все раскрытые коробочки и по одной определить их массу. Чтобы определить среднюю массу коробочки, нужно собрать случайным образом с разных частей поля некоторое количество коробочек. Измерить массу каждой коробочки и вычислить их среднее арифметическое. Это среднее арифметическое и будет принято за среднюю массу коробочки. ▲

Главным множеством в этом примере является множество всех коробочек хлопкового поля, а выборочным множеством будет множество коробочек, собранных случайным образом с разных участков хлопкового поля.

Результаты проверки (измерения, наблюдения) выбранных случайным образом n объектов $x_1, x_2, ..., x_n$ называют *объемом n чисел множества*. Члены множества обычно называют *вариантами*. Если записать варианты в порядке возрастания

$$x_1^* \le x_2^* \le x_3^* \le ... \le x_n^*., \qquad (1)$$

то соотношение (1) называют *вариационным рядом*.

Задача 3. При измерении длины коконов получили следующие результаты (в сантиметрах):

3,40; 3,34; 3,24; 3,40; 3,62; 3,45; 3,43; 3,35; 3,50; 3,56.

Постройте вариационный ряд для этих значений.

△ Наименьшее из этих значений – 3,24, а наибольшее – 3,62. Записав числа в порядке возрастания, получим вариационный ряд:

3,24; 3,34; 3,35; 3,40; 3,40; 3,43; 3,45; 3,50; 3,56; 3,62. ▲

Задача 4. Случайным образом выбрали 10 кустов хлопчатника. Подсчитав число бутонов на них, получили результат: 15, 11, 10, 15, 17, 15, 16, 16, 17, 18. Постройте вариационный ряд для этих значений.

△ Наименьшее из этих чисел – 10, а наибольшее – 18. Записав числа в порядке возрастания, получим следующий вариационный ряд:

10; 11; 15; 15; 15; 16; 16; 17; 17; 18. ▲

Если в выборке x_1, x_2,..., x_k варианта x_1 повторяется (встречается) n_1 раз ..., варианта x_k повторяется n_k раз, то числа n_1, n_2,... n_k называют *частотами*. Ясно, что $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.

Отношения $W_1 = \frac{n_1}{n}$, $W_2 = \frac{n_2}{n}$,..., $W_k = \frac{n_k}{n}$ называют *относительными частотами*.

Ясно, что $W_1+W_2+...+W_k=1$. Построим таблицы (таблица 1 и 2):

Таблица 1

Результаты проверки	x_1	x_2	...	x_k
Частота	n_1	n_2	...	n_k

Таблица 2

Результаты проверки	x_1	x_2	...	x_k
Относительная частота	W_1	W_2	...	W_k

Говорят, что выборка x_1, x_2,...,x_k в таблицах 1 и 2 *распределена* в соответствии с частотами.

Построим таблицу частот и относительных частот для задачи 4 (таблица 3 и 4 соответственно).

Таблица 3

Результаты проверки	10	11	15	16	17	18
Частота	1	1	3	2	2	1

Таблица 4

Результаты проверки	10	11	15	16	17	18
Относительная частота	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

Задача 5. Сотрудники ГАИ во время „Месячника безопасности" проверили скорости 30 автомобилей. Данные частот приведены в таблице:

Результаты измерения (км/ч)	60	62	65	66	68	71	73	75
Частоты	2	2	5	7	6	4	3	1

Изобразим эти данные на плоскости.

△ Отметим на координатной плоскости точки (60; 2),(62; 2), (65; 5),...,(75; 1) и соединим их отрезками (рис. 39).

Полученную ломаную называют *полигоном частот.*▲

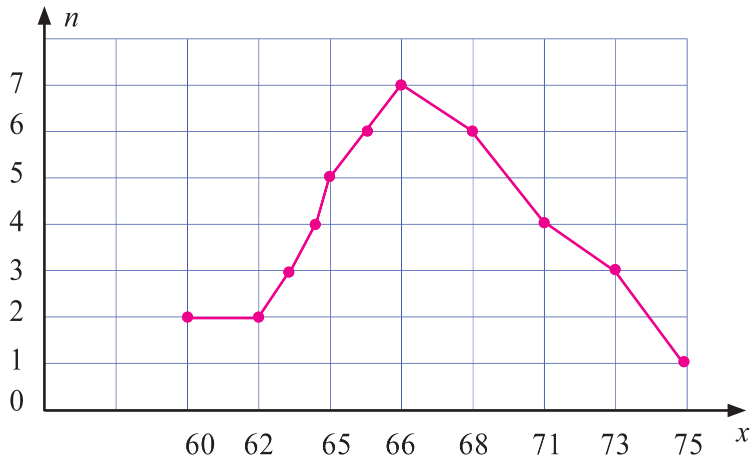


Рис.39.

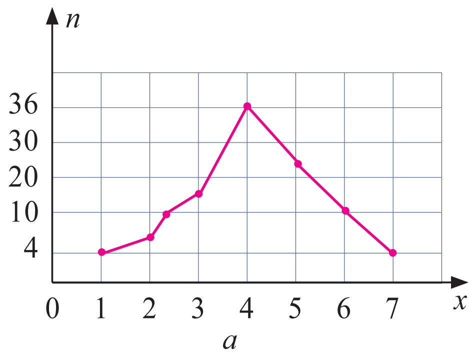
Если объем выборки очень большой, то для нахождения частот, выборку делят на *классы.* Измерения (величина, длина,...) классов должны быть одинаковыми.

Пример. Сотрудники ГАИ во время „Месячника безопасности" провели техническую проверку 100 автомобилей и зафиксировали сколько километров они проехали в течение 6 месяцев. Эти сведения вместе с их частотами приведены в таблице. Выборка разделена на 7 классов. Измерения (длина) классов одинаковы.

Классы	8001–9000	9001–10000	10001–11000	11001–12000	12001–13000	13001–14000	14001–15000
Номер класса	1	2	3	4	5	6	7
Частоты	4	6	18	36	22	10	4

Ясно, что $n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_6+n_7=100$.

Данные в таблице можно представить в виде полигона частоты или в виде столбчатой диаграммы (рис. 40 *a*, *b*).



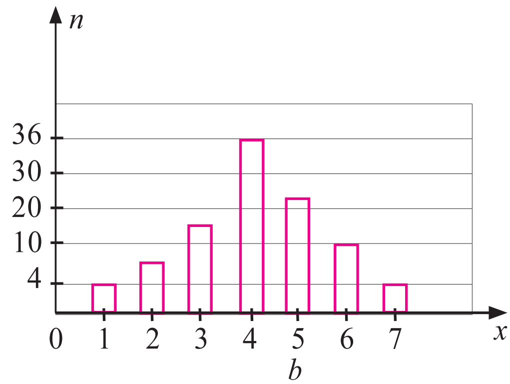


Рис. 40.

Упражнения

467. В таблице приведены сведения о числе бутонов, выросших на 30 выбранных случайным образом кустах хлопчатника:

15	17	15	10	18	11	15	17	16	16
17	10	14	15	16	15	14	13	15	13
16	17	16	14	12	14	15	14	17	13

(Сведения взяты из пособия М.Султановой „Вариационная статистика“ (издательство „O‘qituvchi: T., 1977.)

1) Постройте таблицу частот выборки.
2) Постройте полигон частот выборки.

468. Классный руководитель получил сведения о том сколько часов в воскресенье проводит за телевизором каждый из 30 учеников класса. Они отражены в таблице.

3	2	5	4	5	3	6	0	2	1	3	3	4	3	3
3	1	3	4	4	2	4	3	2	5	2	4	2	0	4

Используя данные: 1) постройте таблицу частот; 2) постройте полигон частот.

469. Приведена таблица размеров обуви с частотами призывников на военную службу:

Измерения	38	39	40	41	42	43	44	45
Частота	4	4	19	27	23	14	6	3

Используя данные: 1) постройте таблицу относительных частот 2) постройте полигон частот; 3) постройте полигон относительных частот.

470. Приведена таблица размеров обуви 50 восьмиклассниц:

Измерения	34	35	36	37	38	39	40
Частота	5	7	10	15	7	4	2

Используя данные: 1) постройте таблицу относительных частот; постройте полигон частот; 3) постройте полигон относительных частот.

471. Приведена таблица размеров одежды (пиджак и брюки) 20 восьмиклассников:

38	42	40	44	40	48	46	42	44	46
48	46	44	50	46	44	48	44	48	44

Используя данные: 1) постройте таблицу частот; 2) постройте таблицу относительных частот; 3) постройте полигон частот; 4) постройте полигон относительных частот.

472. Тест содержит 10 заданий. В таблице приведены результаты тестовых испытаний (правильные ответы) 30 учащихся:

5	8	2	6	5	9	7	6	10	9	8	7	9	3	7
7	3	7	8	9	10	5	7	7	5	5	7	5	4	5

Используя данные: 1) постройте таблицу частот; 2) постройте полигон частот.

473. Были собраны данные о числе приседаний за 1 минуту 30 секунд 150 участников спортивных кружков. Число приседаний колебалось от 40 до 74: [40;74]. Этот отрезок разбили на промежутки длиной 5. Были учтены все числа каждого промежутка и составлена таблица частот:

Число „приседаний“	Частота
От 40 до 44	11
От 45 до 49	20
От 50 до 54	28
От 55 до 59	36
От 60 до 64	24
От 65 до 69	19
От 70 до 74	12
Всего	150

В соответствии с приведенными данными: 1) постройте полигон частот; 2) постройте столбчатую диаграмму.

§29. СРЕДНЯЯ ВЕЛИЧИНА. МОДА. МЕДИАНА

Вы уже знакомы с понятием *средняя величина.* Если x_1, x_2,...,x_n варианты, то число

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

называют *средним значением* выборки.

Если в выборке варианта x_1 повторяется n_1 раз, варианта x_2 повторяется n_2 раз, ... , варианта x_k повторяется n_k раз, то число

$$\overline{x} = \frac{n_1 x_1 + \ldots + n_k x_k}{n_1 + \ldots + n_k}$$

называют *средне-взвешенным значением.* Напомним, что числа n_1, n_2, ..., n_k являются соответствующими частотами вариант.

Задача 1. Хозяйство посеяло на 100 га земли хлопчатник известного сорта и с каждого гектара получило 33 ц урожая. А с 50 га другой земли, посеяв хлопчатник такого же сорта, с каждого гектара получило 30 ц урожая. Какой средний урожай с гектара получило хозяйство?

△ Здесь $x_1 = 33$, $n_1 = 100$; $x_2 = 30$, $n_2 = 50$.

$$\overline{x} = \frac{100 \cdot 33 + 50 \cdot 30}{100 + 50} = \frac{3300 + 1500}{150} = \frac{4800}{150} = 32 \text{ (ц)}.$$

Ответ: 32(ц).▲

Задача 2. Спортсмен прыгал в высоту 7 раз и показал следующие результаты (в метрах):

2,1; 1,97; 2,44; 1,85; 1,97; 1,96; 2,06.

На сколько метров в среднем прыгнул в высоту спортсмен?

△ Здесь варианта 1,97 была получена 2 раза, остальные варианты были по одному разу. Следовательно, $\overline{x} = (2{,}1 + 2 \cdot 1{,}97 + 2{,}44 + 1{,}85 + 1{,}96 + 2{,}06) : 7 = 14{,}35 : 7 = 2{,}05$ (м).

Ответ: 2,05 м. ▲

Число, являющееся средним значением, называют *центром* ряда данных.

Мода. Рассмотрим задачу, приводящую к понятию моды.

Задача 3. Школьная медсестра измерила рост 10 учащихся 8 класса и получила следующие результаты (в сантиметрах):

166; 168; 170; 165; 164; 168; 169; 163; 168; 162.

Какая из вариант встречается большее число раз?

△ Построим вариационный ряд:

162; 163; 164; 165; 166; <u>168</u>; <u>168</u>; <u>168</u>; 169; 170.

В этом вариационном ряду подчеркнутые числа - 168 см – встречаются 3 раза, остальные варианты 1 или 2 раза. Число 168 является **модой** этого вариационного ряда. ▲

> ❗ Значение, которое встречается в данном вариационном ряду наибольшее число раз, называют *модой* и обозначают M_0

Мода и среднее значение могут совпадать, но и могут отличаться друг от друга. В этой задаче средний рост учащихся равен $\overline{x} = (2 \cdot 163 + 164 + 165 + 166 + 3 \cdot 168 + 169 + 170) : 10 = 1664 : 10 = 166{,}4$ (см).

То есть мода и среднее значение не совпадают: 168≠166,4.

Задача 4. У Али в журнале по „алгебре“ стоят оценки: 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5.

Найдите моду и среднее значение этой выборки.

△ Ясно, что M_0 = 4, так как 4 встречается наибольшее число раз:

$$\overline{x} = \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 5}{2 + 3 + 2} = \frac{28}{7} = 4.$$

В этой задаче $M_0 = \overline{x} = 4.$

Выборка может не иметь моды. Например, масса дынь, сорванных на бахче, равнялась (в кг): 3,8; 4; 4,5; 5,2; 4,9. Эта выборка не имеет моды. ▲

Медиана.

> ❗ Если вариационный ряд имеет нечетное число членов, то средний член называют *медианой* и обозначают. M_e.

Например, для ряда 20, 23, 24, 27, 29, 31, 34 число 27 является медианой, так как оно расположено в середине ряда. Справа и слева от него имеется по 3 члена. Рассмотрим случай, когда имеется четное число вариантов.

Ряд 12, 14, 17, <u>21</u>, <u>23</u>, 29, 32, 37 имеет 8 членов, в этом случае за медиану принимают среднее арифметическое двух средних членов ряда:

$$M_e = \frac{21+23}{2} = \frac{44}{2} = 22.$$

Размах.

Разность между наибольшим x_n^* и наименьшим x_1^* членами вариационного ряда $x_1, x_2, ..., x_n$, то есть $x_n^* - x_1^*$ называют *размахом* выборки.

Обычно его обозначают буквой r.

Размах выборки чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ является одной из величин, указывающей насколько разбросаны эти числа. Например, для ряда

$$5,\ 6,\ 8,\ 16,\ 18,\ 19 \qquad (1)$$

размах равен $r = 19 - 5 = 14$.

Для ряда 10, 10, 12, 13, 13, 14 (2)

размах равен $r = 14 - 10 = 4$. Между тем, число членов каждого ряда равно 6, а их средние значения равны между собой $(\overline{x} = 12)$.

Неравенство $14 > 4$ означает, что члены ряда (1) более разбросаны, чем члены ряда (2), это означает, что ряд (1) более *изменчив.*

Упражнения

474. В таблице зафиксировано число попаданий мяча в ворота соперников за 10 игр школьной футбольной команды:

x – число мячей	0	1	2	3
n – частота	4	2	3	1

Опираясь на эти сведения: 1) постройте вариационный ряд; 2) найдите среднее значение выборки; ее моду; медиану; размах; 3) постройте полигон частот; 4) постройте таблицу относительных частот; 5) постройте диаграмму относительных частот.

Найдите: 1) среднее значение; 2) моду; 3) медиану; 4) размах для выборки (**475–477**):

475. 1) 12, 14, 9, 13, 15;
2) 16, 14, 13, 17;
3) 15,13,13,14,16,14;
4) 5, 8, 13, 12, 12.

476. 1) 6, 8, 10, 11, 10;
2) 3, 6, 8, 4, 9;
3) 8, 10, 12, 11, 14;
4) 6, 3, 2, 7, 5, 7.

477. 1) –3, 4, 5, – 4, 1, 2, 4, –3, –2, 3, –3, 2;
2) –3, –3, 4, 4, 4, 6, 6, –3, –2, 4, 5, –4.

478. 9 человек судейской команды оценивает по 10-балльной шкале танец двух танцоров. Их оценки приведены в таблице:

Порядковый номер танцора	Номера судей и их оценки								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8,8	9,6	8,9	9,2	8,7	8,9	8,9	8,8	8,7
2	9,1	8,2	9,0	8,9	9,0	9,1	9,0	9,1	9,0

Для каждого танцора найдите: 1) среднее значение; 2) моду; 3) медиану; 4) размах их оценок.

479. В таблице приведены сведения о рабочем стаже и его частоте 40 школьных учителей:

Рабочий стаж	1	2	4	5	7	9	10	12	15	18	20	22	23	25
Число учителей	3	1	4	3	4	2	3	1	2	6	3	3	3	2

Для этой выборки найдите: 1) среднее значение; 2) моду; 3) медиану; 4) размах; 5) постройте полигон частот.

480. Камеры слежения наблюдают за 50 случайным образом выбранными автомобилями и определяют их скорость (в км/ч). Результаты приведены в таблице:

62	54	56	73	78	63	68	70	66	54
58	65	55	57	69	67	61	64	53	56
58	76	57	48	57	68	82	78	72	75
65	67	64	54	58	62	67	80	87	69
74	78	70	76	46	60	63	68	74	67

Для этой выборки:
1) определите размах;
2) разбейте выборку на классы, приняв длину отрезка за 5 (45–49; 50–54; 55–59;...) и постройте таблицу частот;
3) вычислите среднее значение, моду и медиану выборки;
4) постройте полигон частот;
5) постройте таблицу относительных частот;
6) постройте диаграмму, соответствующую таблице относительных частот;
7) сколько процентов автомобилей имели скорость более 70 км/ч?

481. В таблице приведены результаты (в метрах) 40 участников соревнований по метанию копья:

28	31	31	38	43	38	34	52	36	38
35	48	34	45	41	35	42	42	42	41
27	32	29	33	49	37	48	40	47	39
26	25	37	40	28	37	37	44	44	43

1) Разбейте сведения на классы (группы) (25–29; 30–34; ...) и постройте таблицу частот;
2) постройте полигон частот;
3) найдите среднее значение, моду и медиану выборки.

§30. РЕШЕНИЕ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ПЕРЕБОРА

Решения многих бытовых задач могут быть различными. Мы можем выбрать из них наиболее приемлимый. Чтобы при подсчете числа решений учесть все варианты (методы, возможности), „не пропустить“, „не потерять“ ни один из них, используют метод перебора (подсчета). Сущность этого метода разъясним на примерах.

Задача 1. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 2, 3, 5?

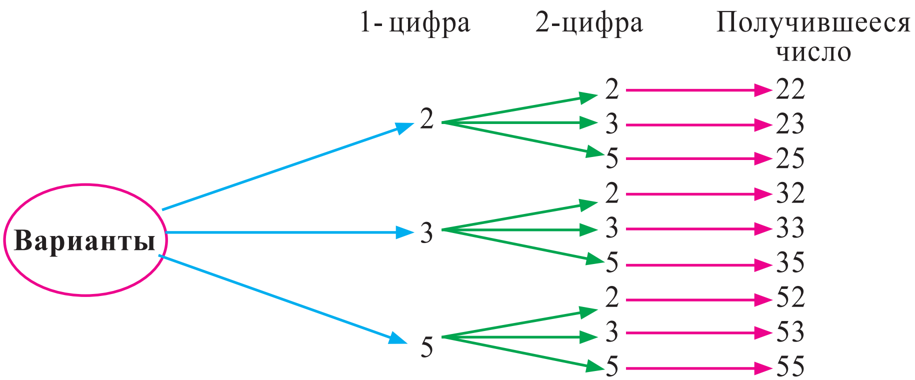
△ Чтобы не пропустить ни одно из чисел и не повториться, запишем их, например, в порядке возрастания: сначала числа, начинающиеся с 2, затем с 3, и наконец с 5, *перебрав* те, которые удовлетворяют условию задачи:

22, 23, 25; 32, 33; 35, 52, 53, 55.

Ответ: Можно составить 9 двузначных чисел. ▲

Рассмотрим еще один способ решения задачи 1.

△ Построим следующий схему:

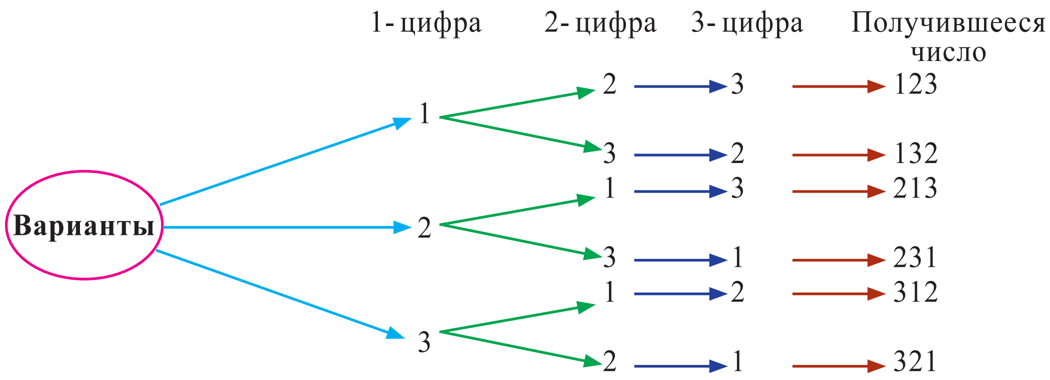


Ответ: всего 9 чисел. ▲

Эта схема похожа на дерево, поэтому ее называют *древом* всех возможных *вариантов* (способов, наборов). Чтобы составить из заданных цифр 2, 3, 5 двузначные числа, сначала выбираем первую цифру, таких вриантов 3, поэтому из „корня“ дерева выходят 3 ветви. потом, перебирая 2 цифру, получаем еще 3 варианта. Поэтому из каждого из 3 цифр исходит еще по 3 веточки. В результате получаем 9 различных двузначных чисел.

Задача 2. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, не повторяя их?

△ Построим древо вариантов:

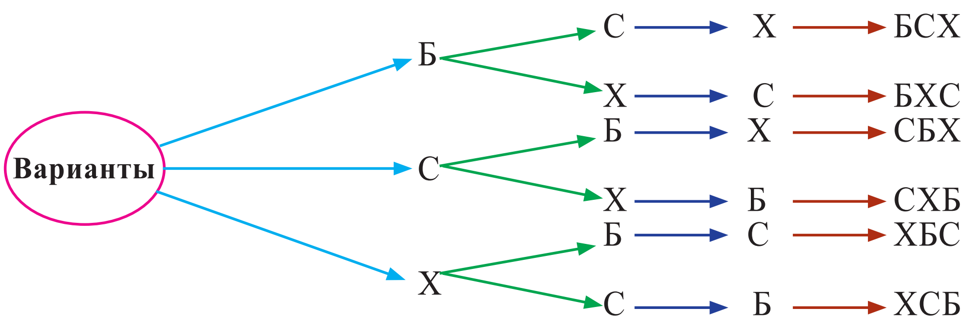


Ответ: 6 чисел.▲

Задача 3. Туристическая фирма осуществляет поездки в города Бухара, Самарканд и Хива. Сколько всевозможных машрутов можно построить?

△ Введем обозначения: Бухара – Б, Самарканд – С, Хива – Х.

Построим древо вариантов:



Ответ: всего 6 маршрутов.▲

Задача 4. Выпишите все возможные двузначные числа, которые можно составить из цифр: 1) 1, 2 и 3; 2) 0, 1, 2 и 3. Найдите, чему равно их число N?

△ Одним из методов решения комбинаторных задач является *построение таблицы*. При решении этим способом невозможно „потерять" элементы комбинаций. Рассмотрим решение задачи, построив таблицу вариантов. Построим такие таблицы:

1-ая цифра	2- ая цифра		
	1	2	3
1	11	12	13
2	21	22	23
3	31	32	33

$N = 3 \cdot 3 = 9.$

Ответ: 1) $N = 9.$

1-ая цифра	2-ая цифра			
	0	1	2	3
1	10	11	12	13
2	20	21	22	23
3	30	31	32	33

$N = 3 \cdot 4 = 12.$

Ответ: 2) $N = 12.$ ▲

Упражнения

482. Алишер, Бахром и Салим купили 3 билета на футбол. В соответствии с билетами они должны занимать 1; 2; 3 места первого ряда. Как они могут использовать эти места? Постройте древо вариантов соответствующее задаче.

483. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 4, 5, если можно эти цифры повторять? Постройте древо вариантов соответствующее задаче.

484. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 4, 5, 8, если можно эти цифры повторять?

485. В магазине продаются яблоки, груши и виноград. Тетя Ирода и Тетя Насиба выбирают один вид этих фруктов. Сколько всего вариантов такого выбора существуют? Постройте древо вариантов.

486. Составьте различные четырехзначные числа из цифр 2, 4, 6, 8, не повторяя их. Сколько из них делятся: 1) на 4; 2) на 8?

487. Азам хочет купить для мамы и сестры два букета цветов. В магазине букеты составлены из белых роз, красных роз и гвоздик. Сколько способов выбора двух букетов имеет Азам? Постройте древо вариантов.

488. Али кормит своего кролика морковью, капустой и свеклой. Ему нужно выбрать два из этих овощей. Сколькими способами Али может это сделать?

489.. Шифр сейфа содержит 3 буквы – *А, Б, В*. Сколько всего шифров можно составить из этих букв? Рассмотрите два случая: 1) буквы не повторяются; 2) буквы повторяются.

490. На блюдце лежат 2 яблока, 2 груши и 2 персика. Надира и Назима хотят выбрать по 3 фрукта. Сколько способов (вариантов) такого выбора возможны?

491. Шесть детей хотят прокатиться на 3 двухместных лодках. Сколько различных способов рассадки детей возможны? Постройте древо вариантов.

§31. ОСНОВНОЙ ЗАКОН КОМБИНАТОРИКИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

Дорогой ученик! В 6 классе ты уже познакомился с первыми правилами сложения и умножения в комбинаторике.

Задача 1. Из Самарканда в Ташкент можно приехать 4 способами: самолетом, поездом, автобусом и такси. А из Ташкента в Ходжекент 3 способами: поездом, автобусом и такси. Сколько существует способов поездки из Самарканда в Ходжекент (рис. 41)?

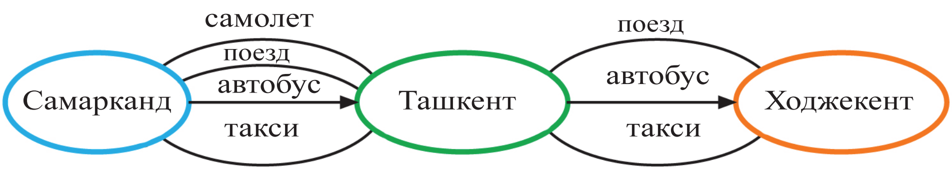


Рис. 41.

△ Из Самарканда в Ташкент можно попасть 4 способами. Пусть мы прибыли в Ташкент одним из этих вариантов. Теперь, чтобы попасть в Ходжекент имеются 3 варианта – возможности. Таким образом, имеется $4 \cdot 3 = 12$ различных вариантов как попасть из Самарканда в Ходжекент через Ташкент.

Все эти варианты также можно записать. Введем обозначения: самолет (с), поезд (п), автобус (а), такси (т). Например, запись сп означает, что из Самарканда в Ташкент прилетают на самолете, а из Ташкента в Ходжекент едут на поезде. Получаем следующие варианты (возможности) попасть из Самарканда в Ходжекент через Ташкент:

сп	пп	ап	тп
са	па	аа	та
ст	пт	ат	тт

Число способов: $4 \cdot 3 = 12$.

Ответ: 12 способов. ▲

Вообще, если *имеется* ***m вариантов*** *приезда из города А в город В,* ***и для каждого из них имеется n вариантов*** *приезда из В в С, то из города А в город С можно попасть всего* $m \cdot n$ *способами, то есть* $m \cdot n$ *различными вариантами.*

Это *правило умножения* и оно считается основным правилом комбинаторики.

Задача 2. В отделе „Все для дома“ супермаркета „Макро“ имеется 5 разных пиал, 6 разных блюдец и 4 разные чайные ложечки. Тетя Наргиза хочет купить по 2 каждого вида посуды. Сколькими способами она может это сделать?

△ 1) Имеется 5 вариантов выбора пиал. Для выбора блюдец существует 6 вариантов. Для каждой выбранной пиалы имеется 6 вариантов выбора блюдца. Следовательно, по правилу умножения существует $5 \cdot 6 = 30$ вариантов выбора пары: пиала и блюдца. Рассуждая точно также найдем, что пару: 2) пиала и ложечка можно выбрать $5 \cdot 4 = 20$ способами; 3) блюдце и ложечка можно выбрать $6 \cdot 4 = 24$ различными способами. Итак, 2 вида посуды можно выбрать $30 + 20 + 24 = 74$ различными способами.

Ответ: 74 способа.▲

Задача 3. Сколько имеется трехзначных чисел с одной цифрой 7?

△ Цифра 7 может занимать 1-, 2-, 3-е место (классы сотен, десятков, единиц).

Если цифра 7 стоит на 1-ом месте, то на 2-ом и 3-ем месте могут стоять 9 цифр (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9), всего $9 \cdot 9 = 81$ вариант.

Если цифра 7 стоит на 2-ом месте, то на 1-ом месте могут быть любые цифры, кроме 0 и 7. То есть имеется $10-2=8$ вариантов записи цифры на 1-ом месте. В этом случае на 3-ем месте может стоять любая цифра кроме 7; следовательно, таких вариантов $8 \cdot 9 = 72$.

Если цифра 7 стоит на 3-ем месте, то на 1-ом месте могут стоять 8 цифр, а на 2-ом месте 9 цифр. Таким образом, трехзначных чисел с одной цифрой 7 имеется $81 + 72 + 72 = 225$.

Ответ: 225. ▲

Задача 4. На окружности отметим 5 точек и обозначим их A, B, C, D, E. Каждую из точек соединим с другими точками отрезком. Сколько отрезков получилось (рис. 42)?

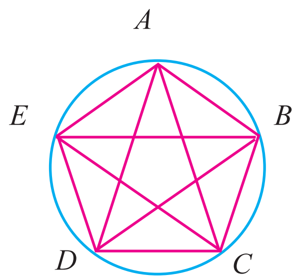


Рис. 42.

△ ***1-способ.*** Так как точек немного, то можно построив соответствующий задаче чертеж, подсчитать число отрезков, их всего 10. Но если число точек увеличить (например, 100 точек, ...), то сложно построить соответствующий чертеж и подсчитать число отрезков. Тогда можно применить другой способ.

2-способ. Из каждой из 5 отмеченных точек можно провести по 4 отрезка. Таких отрезков $5 \cdot 4 = 20$, но при этом каждый отрезок отмечен и подсчитан дважды. Следовательно, нужно число этих отрезков 20 разделить на 2: $20 : 2 = 10$.

3-способ. Если соединить точку A с остальными 4 точками, то получим 4 отрезка: AB, AC, AD, AE. Из точки B также можно провести 4 отрезка, но один из отрезков, проведенных из точки B ($BA = AB$) мы уже считали. Следовательно из точки B можно провести 3 новых (не учтенных ранее) отрезка. Аналогично из точки C можно провести 2 отрезка, а из точки D только один новый отрезок. 4 отрезка, проведенных из точки E, уже учитывались ранее ($EA = AE$; $EB = BE$;

$EC = CE$; $ED = DE$). Следовательно, число всех отрезков, соединяющих 5 данных точек окружности равно $4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 10$.▲

Задача 5. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 3, 4, 5, 6, 8, 9, если 1) цифры не повторяются; 2) цифры могут повторяться?

△ 1) Имеется 6 цифр. Любая из них может быть первой цифрой трехзначного числа. Следовательно, имеется 6 *возможностей выбора* первой цифры. Тогда вторую цифру можно выбрать из 5 оставшихся цифр, то есть имеется 5 *возможностей выбора.* Аналогично этому имеется 4 *возможности выбора* 3 цифры.

Следовательно, если цифры не повторяются, то общее число трехзначных чисел равно $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

Ответ: 120. ▲

△ 2) Если цифры повторяются, то *возможностей выбора* 1-, 2-, 3-ей цифры трехзначного числа равно 6 так как заданы 6 цифр. Тогда в этом случае общее число трехзначных чисел равно

$$6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216.$$

Ответ: 216. ▲

Упражнения

492. Мама попросила Наргизу купить в супермаркете „Корзинка. Уз“ 3 сорта фруктов. В „Корзинке. Уз“ имеется 6 сортов яблок, 4 сорта груш и 5 сортов винограда. Наргиза купила по 1 кг каждого сорта фруктов. Сколько различных вариантов она может выбрать?

493. Сколько имеется четырехзначных чисел с одной цифрой 5?

494. На окружности отмечены: a) 10; b) 100; c) n точек. Сколько отрезков получится, если соединить каждую из точек с остальными точками?

495. 1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6; 5) 8; 6) 15 друзей обменялись друг с другом рукопожатиями. Найдите число рукопожатий в каждом случае.

496. 10 друзей проводят между собой шахматный турнир. При этом каждый из участников с каждым из остальных участников играет одну партию. Сколько партий разыгрывается в этом турнире?

Скажи–ка, в чем схожесть задач ***494–496****?*

497. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, если 1) цифры не повторяются; 2) цифры могут повторяться?

498. Сколько a) двузначных; b) трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5?
Рассмотреть по отдельности варианты, когда цифры не повторяются; когда цифры повторяются.

499. В чемпионате по футболу за золотую, серебряную и бронзовую медали участвуют 16 команд. Сколькими способами можно распределить эти медали среди команд?

500. В некотором государстве есть четыре города: A, B, C и D. Из города A в город B ведут 6 дорог, из города B в город C – 4 дороги, из города A в город D – 2 дороги, из D в C – 3 дороги. Сколькими способами можно добраться из города A в город C?

501. Число, в записи которого участвуют только нечетные цифры, называют „счастливым" числом. Сколько существует: 1) трехзначных; 2) четырехзначных „счастливых" чисел?

502. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых имеется хотя бы одна четная цифра?

Указание: Число шестизначных чисел, которые состоят только из нечетных цифр $5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5=5^6=15\,625$. А всего существует 900 000 шестизначных чисел. Тогда чисел, удовлетворяющих условию задачи $900\,000-15\,625=884\,375$.

503. Сколькими способами можно разложить 4 письма в 4 конверта?

504. Из 5 учащихся нужно выбрать 2 для участия в конкурсе „Знатоков". Сколькими способами можно это сделать?

505. На доске написаны 12 существительных, 8 глаголов и 7 прилагательных. Для составления предложения из каждой группы нужно взять одно слово. Сколькими способами можно это сделать?

506. Сколько существует различных позиций на шахматной доске, когда белая и черная ладьи не могут бить друг друга (рис. 43)?

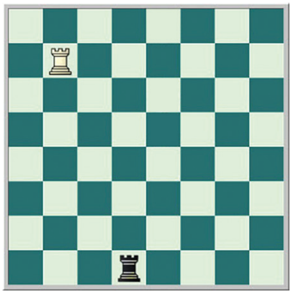


Рис. 43.

507. Сколько существует различных позиций на шахматной доске, когда белый и черный ферзи не могут бить друг друга?

508. Сколько существует различных вариантов на шахматной доске для белого и черного короля, не противоречащих правилам игры?
Указание: рассмотрите три случая:
1) белый король стоит в углу;
2) белый король стоит с краю (но не в углу);
3) белый король не стоит на краю доски.

509. В школьной столовой имеется белый и черный хлеб и три вида колбасы. Сколько различных бутербродов можно из этого составить? Выпишите все варианты.

510. Флаги многих государств состоят из 3 горизонтальных или 3 вертикальных полос разного цвета. Сколько различных флагов можно сшить из тканей белого, зеленого и синего цветов?

511. Сколько решений имеет „уравнение" $\bigcirc + \square + \triangle = 10$, если пустые места можно заполнить одной из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8? Цифры могут повторяться. Рассмотрите два случая (например: 1) решения 1, 1, 8; 1, 8, 1; 8, 1, 1 разные; 2) когда они считаются равными).

512. Кейс Надира можно открыть при помощи кода. Этот код состоит из 3 различных цифр, и каждая цифра не больше 3. В коде не участвует число 13 (например, в коде нет последовательности 013, 213...). Найдите наибольшее число попыток открыть кейс, если Надир забыл код.

513. Дверь подъезда многоквартирного дома открывается с помощью кода. Кодом является 4-х значное число, состоящее из цифр 0 и 1 (числа 0000 и 1111 не считаются кодом). Каково наибольшее число попыток открыть дверь подъезда, если вы забыли код?
Указание: Сначала нужно рассмотреть код с одной 1, затем с двумя 1, наконец с тремя 1.

514. Сколькими способами можно взвесить на рычажных весах 20 кг риса, если имеются гири массой 1 кг, 2 кг, 5 кг?
△ Эту работу можно сделать следующим способом:
1) только гирей 1 кг это 1 способ;

2) только гирей 2 кг это 1 способ;
3) только гирей 5 кг это 1 способ;
4) гирями 1 кг и 2 кг 9 способов:

Гиря 1 кг	18	16	14	12	10	8	6	4	2
Гиря 2 кг	1	2	3	4	5	6	7	8	9

5) гирями 1 кг и 5 кг 3 способа:

Гиря 1 кг	15	10	5
Гиря 5 кг	1	2	3

6) гирями 2 кг и 5 кг это 1 способ: 5 по 2 кг и 2 по 5 кг;
7) гирями 1 кг, 2 кг и 5 кг 13 способов:

	Число способов												
Гири, кг	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1 кг	1	3	5	7	9	11	13	8	6	4	2	3	1
2 кг	7	6	5	4	3	2	1	1	2	3	4	1	2
5 кг	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3

Следовательно, всего $1+1+1+9+3+1+13=29$ способов.
Ответ: 29 способов.▲

515. Фирма связана с 4 магазинами. Инкассатор (сотрудник, собирающий деньги из магазина и сдающий их в банк) обходит все магазины. начиная с 1-го, и опять возвращается в первый. Найдите наиболее короткий из всех возможных маршрутов (рис. 44).

Указание: Составьте для каждого маршрута 5-значный код. Первая и последня цифра кода 1. Например, длина маршрута 12431: $5+2{,}4+4{,}3+4{,}8=16{,}5$ (км).

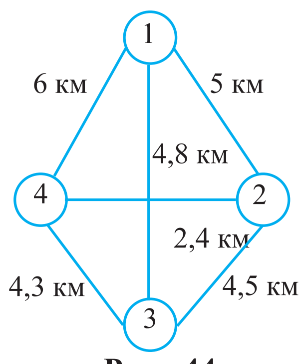


Рис. 44.

Упражнения к главе IV

516. Заданы следующие выборки:
18, 19, 17, 18, 14, 13, 17, 19, 18, 18, 20, 22, 19, 15, 24,
14, 18, 15, 13, 17, 20, 22, 21, 19, 18, 16, 13, 13, 15, 14.
Для выборок: 1) постройте таблицу частот; 2) найдите среднее значение; 3) моду; 4) медиану; 5) размах; 6) постройте полигон частот.

517. 1) Составьте вариационный ряд; 2) найдите среднее значение; 3) моду; 4) медиану; 5) размах для выборки:
–5, –4, –3, –2, 0, 3, 6, 6, 5, 5, 5, 7, 8, 8, 6, 7.

518. Найдите для выборки в соответствии с данными таблицы: 1) среднее значение; 2) моду; 3) медиану; 4) размах; 5) постройте полигон частот; 6) составьте таблицу относительных частот и постройте соответствующую диаграмму:

Результаты наблюдений	7	8	9	10	12	14	15
Частота	6	7	8	9	10	6	4

519. 20 учащихся 8-го класса на 100 метровке показали следующие результаты (в секундах):

14,3	16,1	14,7	16,9	24,1	22,4	19,8	14,2	17,4	14,5
20,8	19,9	15,4	18,4	20,2	18,3	20,1	18,4	18,3	16,2

Для выборки: 1) постройте вариационный ряд; 2) составьте таблицу частот; 3) вычислите среднее значение; 4) моду; 5) медиану; 6) размах; 7) постройте полигон частот.

520. Один из учащихся 8-го класса за две четверти получил такие оценки по математике:
4, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 4, 4, 3, 2, 3, 4.
Для выборки: 1) найдите среднее значение; 2) моду; 3) медиану; 4) составьте таблицу частот; 5) постройте полигон частот.

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ!

1. В чемпионате по футболу участвуют 18 команд. Сколько всего матчей будет сыграно на чемпионате, если каждая команда должна сыграть на своем поле и на поле соперника?

2. В 8-ом классе проводят уроки по 12 предметам. В расписании на понедельник написано 5 уроков по одному из предметов. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник?

3. Сколькими способами можно рассадить 3 человек на 5 стульях?

4. Сколькими способами можно расставить на полке 5 различных книг по математике?

5. Найдите: 1) среднее значение; 2) моду; 3) медиану; 4) размах; 5) составьте таблицу частот; 6) постройте полигон частот для выборки:

$$-3,\ -5,\ -3,\ -6,\ 1,\ 4,\ 7,\ 4,\ 9,\ 4.$$

6. Приведена таблица частот выборки:

Результаты наблюдений	2	1	5	4	0	–2	3	–1
Частота	3	2	1	5	1	2	4	2

Найдите для выборки: 1) среднее значение; 2) моду; 3) медиану; 4) постройте полигон частот; 6) составьте таблицу относительных частот.

521. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если: 1) цифры не повторяются; 2) цифры могут повторяться?

522. Сколько четырехзначных нечетных чисел можно составить из цифр 0, 3, 4, 5, 6, 7?

523. Обычно вершины треугольника обозначают большими буквами латинского алфавита. В латинском алфавите 26 букв. Сколькими способами можно обозначить вершины треугольника?

524. Сколькими способами можно рассадить 3 человек на 8 стульях?

525. Номера домашних телефонов абонентов состоят из 7 цифр и начинаются с 218. Сколько абонентов может обслуживать эта телефонная станция?

526. Сколькими способами можно выбрать 2 из 5 саблистов для участия в соревнованиях?

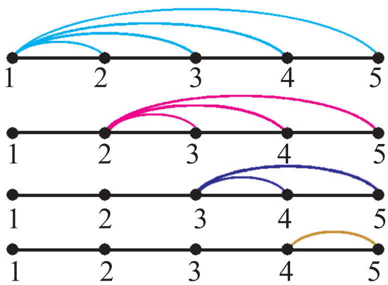
Решение Али: Имеется 5 возможностей выбора одного саблиста из 5. Остается 4 саблиста. Одного из них можно выбрать 4 способами. Следовательно, $5 \cdot 4 = 20$.

Ответ: $5 \cdot 4 = 20$ различных способов.

Решение Назимы: „Пронумеруем" каждого из 5 саблистов и построим группы по 2 человека: 12; 13; 14; 15; 23; 24; 25; 34; 35; 45.

Ответ: 10 различных способов.

Решение Мубинобону:



4 пары: 12; 13; 14; 15;

3 пары: 23; 24; 25;

2 пары: 34; 35;

1 пара: 45.

Всего $4 + 3 + 2 + 1 = 10$. **Ответ:** 10 различных способов.

Чье решение правильное? Чье решение вам понравилось? Чем понравилось?

527. Один из ваших одноклассников пишет стих и мечтает: „Пока я любитель, но когда вырасту стану хорошим поэтом". Одно из стихотворений он назвал „Тюльпан". В первой строке было написано „Весной на холме расцвели тюльпаны". Остальные строки отличались от первой только различным расположением слов в строке. Каково наибольшее число строк в этом „стихотворении"?

528. На прямой отмечены: 1) 4; 2) 6 точек. Сколько отрезков получилось в каждом из случаев?

529. В меню кафе „Райхон“ имеется 3 вида сомсы, 4 вида первого блюда и 5 видов второго блюда. Сколько различных сочетаний состоящих из трех блюд можно составить?

530. Имеется 2 яблока, 2 груши, 2 персика. Три друга хотят выбрать по два фрукта. Сколькими способами они могут это сделать.?

Тестовые задания к главе IV

1. Найдите среднее значение выборки: –3, –2, –1, 0, 1, 4, 5, 7, 8, 6.

A) 2,5; B) 11; C) $2\frac{7}{9}$; D) невозможно определить.

2. Найдите медиану выборки: –1, 0, 2, 6, 6, 5, 10.

A) 6; B) 5; C) 5,5; D) 4,5.

3. Найдите медиану выборки: 10, 7, 6, 5, 4, 9.

A) B) 7; C) 6,5; D) 6,25.

4. Найдите размах выборки: 120, 100, 140, 170, 95.

A) 120; B) 312,5; C) 70; D) 75.

5. Найдите моду выборки: –1, 0, 2, 2, 4, 5, 5, 7.

A) 2 и 5; B) 2 C) 5; D) 3.

6. По данным таблицы найдите среднее значение выборки:

Результаты наблюдений	5	6	11	7	13	12
Частота	3	4	3	5	3	2

A) 9,5; B) 8,5; C) 10; D) 7.

7. Сколько шестизначных чисел делится на 5?

A) $18 \cdot 10^4$; B) $9 \cdot 10^4$; C) $5 \cdot 6!$; D) $6 \cdot 5^4$.

8. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, если они могут повторяться?

A) 8^5; B) 5^8; C) $8^2 \cdot 5^3$; D) $5^4 \cdot 8$.

9. Даны две прямые, на одной из них отмечено 4 точки, а на второй 3. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

A) 30; B) 33; C) 40; D) 32.

10. Сколькими способами можно рассадить 3 человек на 6 стульях?

A) 120; B) 130; C) 100; D) 480.

11. Сколькими способами можно выбрать из 11 членов футбольной команды капитана и его помощника?

A) 110; B) 55; C) 22; D) 121.

12. Из села Богистон в Ташкент ведут 2 дороги, а из Ташкента в Ургенч – 4 дороги. Сколькими путями можно добраться из села Богистон в Ургенч?

A) 8; B) 10; C) 6; D) 12.

13. У одного ученика 7 занимательных книг по математике, а у другого – 9. Сколькими способами они могут поменять каждую книгу на каждую?

A) 63; B) 49; C) 81; D) 126.

14. В День Рождения Отабека к нему в гости пришли 9 друзей. Все они вместе с ним обменялись рукопожатиями. Сколько было сделано рукопожатий?

A) 45; B) 90; C) 10; D) 50.

Практические и межпредметные задачи

531. У 50 юношей, которых призывают на службу в армию измерили рост в сантиметрах. Результаты измерения приведены в таблице:

159	156	160	154	155	154	158	163	158	180
156	157	155	158	159	158	159	154	167	158
158	156	175	156	164	162	168	157	159	162
164	169	158	167	172	166	175	177	183	182
172	170	172	166	171	174	162	167	169	173

1) Разбейте данные на классы (группы): 154–158, 159–163, 164–168, 169–173, 174–178, 179–183.
Определите сколько данных содержится в каждой группе;
2) постройте столбчатую диаграмму;
3) постройте полигон частот.

532. В таблице приведены сведения о числе бутонов на 30 выбранных случайным образом кустах хлопчатника:

7	4	7	6	4	4	4	4	3	5	7	4	3	3	4
3	6	5	4	7	6	4	4	3	4	3	4	4	3	5

Основываясь на данные:
1) составьте таблицу частот;
2) постройте полигон частот.

533. Выберите одно из произведений узбекского писателя на узбекском языке. (Например: „Sariq devni minib“ Х. Тухтобаева; „O‘tkan kunlar“ А. Кодири). Посчитайте число букв на двух произвольным образом выбранных страницах. Сколько раз встречается буква русского алфавита на выбранных вами страницах? Составьте таблицу распределения букв: 1) по частотам; 2) по относительным частотам; 3) постройте полигон частот.

534. Среди учащихся 8 классов провели турнир чтецов газелей А.Навои. В нем принимали участие 10 девочек и 9 мальчиков. Пусть: x – число выученных наизусть газелей, которые читали девочки, y – число выученных наизусть газелей, которые читали мальчики. Распределение чисел x и y по частотам представлено в следующих таблицах:

x – число газелей	4	5	6	8	12
n – частота	3	2	3	1	1

y – число газелей	4	5	6	8	9
n – частота	2	4	1	1	1

По данным таблиц для x и y:
1) найдите моду; 2) медиану; 3) постройте полигон частот, соответствующих таблицам.

△ Величины x и y, заданные в виде таблицы, можно также записать в виде рядов вариант:

$$x: 4,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 6,\ 6,\ 6,\ 8,\ 12 \qquad (1)$$
$$y: 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9 \qquad (2)$$

Распределение (1) имеет 2 моды: $M_{0_1} = 4$ и $M_{0_2} = 6$. А распределение (2) только одну моду: $M_0 = 5$.
Ряд (1) содержит 10 членов (четное число). В этом случае медиана равна среднему арифметическому двух средних членов:

$$M_e = \frac{5+6}{2} = \frac{11}{2} = 5{,}5$$

Ряд (2) состоит из 9 членов (нечетное число). Поэтому значение его медианы равно среднему члену ряда: $M_e = 5$.
Медиана делит вариационный ряд на две равные части: число членов слева от медианы вариационного ряда такое же, как число членов справа от нее: они равны между собой.

Ответ: 1) Для ряда (1) $M_{0_1} = 4$; $M_{0_2} = 6$; для ряда (2) $M_0 = 5$;
2) для ряда (1) $M_e = 5{,}5$; для ряда (2) $M_e = 5$;
3) полигон для величин x и y представлен на рисунках 45-*a*, и 45-*b*. ▲

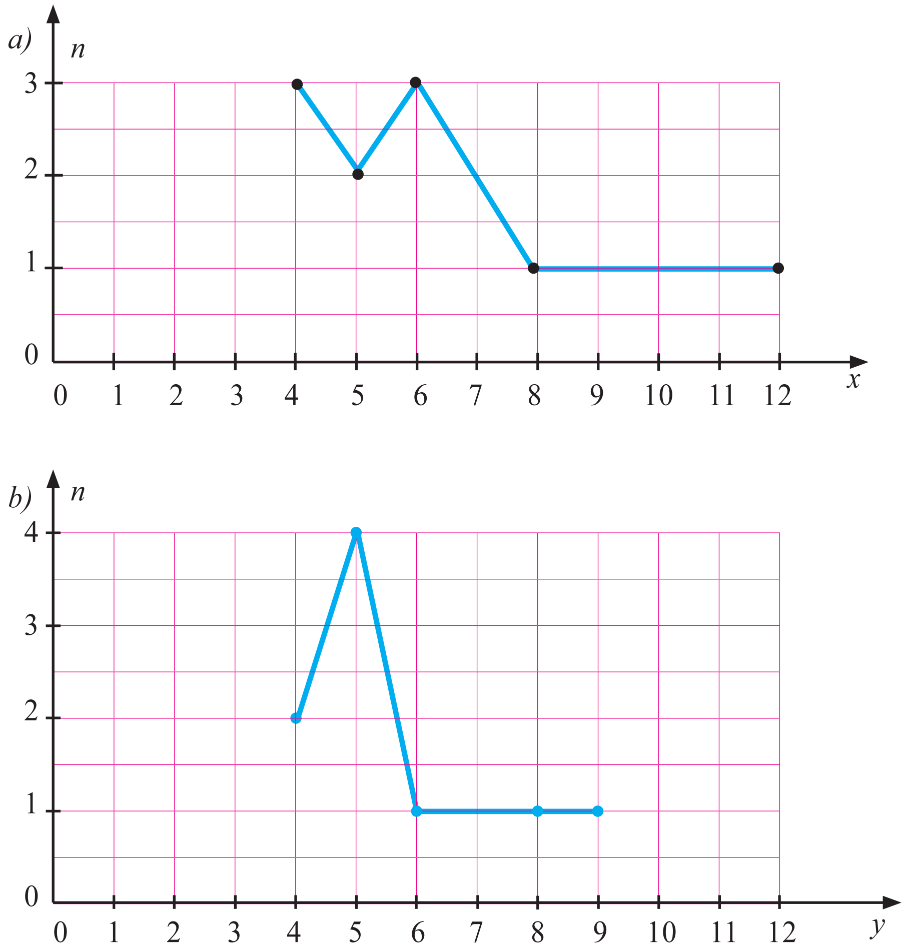


Рис. 45.

535. Для каждого 8 класса, например по результатам I и II четвертей: 1) составьте таблицу частот; 2) постройте полигон частот; 3) сравните полигоны и сделайте выводы. Данные возьмите в классном журнале, попросив учителя.

Поясните, как вы решили задачу.

536. Для учеников каждого из: 1) 5-; 2) 8-; 3) 11-классов: a) найдите средний рост; b) среднюю массу.

Сведения возьмите у школьной медсестры. Постройте соответствующий полигон частот.

537. Определите по результатам наблюдения сколько граммов мела расходуется в вашем классе за 1 день. Прикиньте сколько тонн мела расходуют все школы нашей республики за 1 день, за 1 месяц. Примите число высших учебных заведений, лицеев и школ республики за 10000 (для удобства вычисления).

538. На 3 гектарах земли посеяли дыни. Они уже поспели. Оцените сколько тонн урожая собрали в среднем с 1 гектара. Объясните пошагово, как вы будете решать эту задачу.

539. Автомашины после государственной регистрации получают код, состоящий из 3 цифр, 3 букв и обозначения города или области. Например, код 01 означает, что машина прошла регистрацию в Ташкенте. Как вы думаете, каково наибольшее число машин, прошедших регистрацию в Ташкенте?

△ Предположим, что в номере машины используют 24 буквы. Номер состоит из 6 знаков. Первый знак может быть любой из 10 цифр. Второй знак также может быть любой из 10 цифр. Третий знак может быть любой из 9 цифр, так как номера с тремя одинаковыми цифрами не выдаются, их разыгрывают на аукционе. Каждый из остальных трех знаков госномера может быть любой из 24 букв. Таким образом, машин, зарегистрированных в Ташкенте может быть $10 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 = 24^3 \cdot 900 = 12\ 441\ 600$.

В данном подсчете мы не различали госномера, вида „одна буква – три цифры – две буквы“ и вида „три цифры – три буквы“.

Ответ: 12 441 600.▲

540. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 2, 4, 7, 9? Сколько из них делятся на: 2, 4, 11?

541. Сколькими способами вы можете рассадить на 4 стульях 4 друзей, приглашенных на празднование вашего дня рождения?

542. На тарелке лежат 8 орехов. Аббос хочет взять 3 из них. Сколькими способами он может это сделать?

543. В зале имеется 2 пустых места. Сколькими способами можно посадить на эти места 2 из 3 человек?

ГЛАВА V

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА "АЛГЕБРЫ" 8-КЛАССА

544. Вычислите:

1) $\frac{27}{32}\cdot\frac{8}{162}\cdot\frac{72}{69}$;

2) $\frac{38}{147}\cdot\frac{91}{152}:\frac{65}{264}$;

3) $\left(\frac{5}{8}+\frac{7}{12}\right)\cdot\left(3\frac{23}{58}-2\frac{9}{58}\right)$;

4) $\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{9}\right)\cdot\left(2\frac{23}{56}-3\frac{15}{56}\right)$;

5) $34{,}17:1{,}7+(2\frac{3}{4}+0{,}15):\frac{4}{5}-23\frac{3}{8}$;

6) $5{,}86-3\frac{5}{6}\cdot\frac{15}{23}+\frac{15}{28}:4\frac{2}{7}$;

7) $\dfrac{12\frac{4}{5}\cdot 3\frac{3}{4}-4\frac{4}{11}\cdot 4\frac{1}{8}}{11\frac{2}{3}\cdot 2\frac{4}{7}}$;

8) $\dfrac{5\frac{1}{7}\cdot 5\frac{1}{4}+5\frac{5}{8}\cdot 3\frac{1}{5}}{10\frac{5}{13}:1\frac{1}{26}}$.

545. Одно из чисел равно a, а второе на 7 больше него. Найдите удвоенное произведение этих чисел. Вычислите значение этого произведения при $a=\frac{1}{2}$; 2.

546. Сумма двух чисел равна 30. Одно из чисел равно a. Запишите удвоенное произведение этих чисел. Вычислите значение этого произведения при a = –2.

547. Составьте формулу подсчета числа единиц натурального числа, в котором a сотен, b десятков и c единиц. Сколько единиц в числе, записанном теми же цифрами, но в обратном порядке?

548. Сколько граммов содержится в a килограммах и c граммах? Запишите ответ формулой, обозначив число граммов буквой x.

Выполните действия (**549–552**):

549. 1) $\left(\frac{c-d}{c^2+dc}-\frac{c}{d^2+cd}\right):\left(\frac{d^2}{c^3-cd^2}+\frac{1}{c+d}\right)$;

2) $\left(\frac{2n}{k+2n}-\frac{4n^2}{k^2+4nk+4n^2}\right):\left(\frac{2n}{k^2-4n^2}+\frac{1}{2n-k}\right)$;

3) $\left(\frac{b^2}{b+x}-\frac{b^3}{b^2+x^2+2bx}\right):\left(\frac{b}{b+x}-\frac{b^2}{b^2-x^2}\right)$;

4) $\left(\frac{2q}{2q+m}-\frac{4q^2}{4q^2+4mq+m^2}\right):\left(\frac{2q}{4q^2-m^2}+\frac{1}{m-2q}\right)$.

550. 1) 1) $1+a-\frac{a-1}{a}+\frac{a-1}{2a}-\frac{3a}{2}$;

2) $\frac{m+1}{m^2+m+1}-\frac{2}{1-m}+\frac{3m^2+2m+4}{1-m^3}$;

3) $\frac{m+n}{3}-m+2n$;

4) $m+n-\frac{2m-n}{5}-\frac{m+n}{2}$.

551. 1) $\frac{a^3+2a^2}{a^2-1}\cdot\frac{(a+1)^3(a-1)}{a^2(a+2)}$; 2) $\frac{(a^2+ab)^2}{a^2-b^2}:\frac{(a+b)^2}{(ab-b^2)^2}$.

552. 1) $1{,}5\cdot\left(2b-\frac{3b}{7}\right)-1\frac{5}{7}\cdot(3b-5)+\frac{9b^2-16}{4-3b}$;

2) $\frac{x+3a}{x+a}-\frac{x}{x-a}+\frac{2a^2-ax+x^2}{a^2x^2}:\frac{x^2-a^2}{a^2x^2}$.

553. Докажите, что

1) $4x+3y>14$; 2) $2xy-3>1$; 3) $x^2y>1$; 4) $x^3+y^2>16$,

если $x>\frac{1}{2}$ и $y>4$.

554. (Устно.) Найдите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству:

1) $n \le -7$; 2) $n < -3{,}6$; 3) $n \le 4{,}8$; 4) $n \le -5{,}6$.

555. (Устно.) Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству:

1) $n > -12$; 2) $n \ge -5{,}2$; 3) $n \ge 8{,}1$; 4) $n \ge -8{,}1$.

556. Решите неравенство:

1) $x + 4 > 3 - 2x$; 2) $5(y+2) \ge 8-(2-3y)$;

3) $2(0{,}4+x)-2{,}8 \ge 2{,}3+3x$; 4) $7(x+5)+10>17$;

5) $\dfrac{3-x}{2}+\dfrac{x}{4}>7$; 6) $\dfrac{x}{6}-\dfrac{2-x}{3}\le 5$.

557. Какие целые значения принимает x, если

1) $0 \le x \le 7{,}2$; 2) $-5\frac{1}{3} \le x \le 0$; 3) $4 < \frac{1}{3}x < 5$;

4) $11 < 3x < 13$; 5) $-3{,}1 < x \le 4$; 6) $12 < 5x < 21$?

558. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 5x-2 \ge 6x-1, \\ 4-3x > 2x-6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7(x+1)-2x > 9-4x, \\ 3(5-2x)-1 \ge 4-5x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 12x-3(x+2) \ge 7x-5, \\ 13x+6 \le (x-5)\cdot 2+3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{4x-5}{7} < \dfrac{3x-8}{4}, \\ \dfrac{6-x}{5}-1 < \dfrac{14x-3}{2}. \end{cases}$

559. Найдите все целые числа, удовлетворяющие системе неравенств:

1) $\begin{cases} \dfrac{2x-5}{4}-2 \le \dfrac{3-x}{4}, \\ \dfrac{5x+1}{5} > \dfrac{4-x}{4}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{10x-1}{3}-\dfrac{2-5x}{4} < \dfrac{5-3x}{6}, \\ \dfrac{2x+1}{2} \ge \dfrac{3+7x}{4}-\dfrac{5+4x}{5}. \end{cases}$

560. Решите уравнение:

1) $|x-2|=3{,}4$; 2) $|3-x|=5{,}1$; 3) $|2x+1|=5$;

4) $|1-2x|=7$; 5) $|3x+2|=5$; 6) $|7x-3|=3$.

561. Решите неравенство:

1) $|x-2|\le 5{,}4$; 2) $|x-2| \ge 5{,}4$; 3) $|2-x|<5{,}4$;
4) $|3x+2|\ge 5$; 5) $|2x+3|<5$; 6) $|3x-2{,}8| \ge 3$.

562. Извлеките корень:

1) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$; 2) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$; 3) $\sqrt[3]{\frac{8b^6}{343a^9}}$, $a\ne 0$; 4) $\sqrt[4]{\frac{16x^8}{81y^4}}$, $y>0$.

563. Упростите:

1) $\left(3\sqrt{20}+7\sqrt{15}-\sqrt{5}\right):\sqrt{5}$; 2) $\left(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{56}\right):\sqrt[3]{7}$;

3) $2\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{6}-3\sqrt{\frac{2}{3}}$; 4) $7\sqrt{1\frac{3}{4}}-\sqrt{7}+0{,}5\sqrt{343}$.

564. Сравните значения выражений:

1) $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{-1/3}$ и $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{-1/2}$; 2) $(2\sqrt{0{,}5})^{0,3}$ и $(2\sqrt{0{,}5})^{0,37}$.

565. Упростите выражение:

1) $\frac{\sqrt[6]{a\sqrt[3]{a^{-1}}}}{a^{-\frac{2}{9}}}$; 2) $\frac{\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x}}}{x^{\frac{1}{3}}}$; 3) $(16a^{-4})^{-\frac{3}{4}}$; 4) $(27b^{-6})^{\frac{2}{3}}$.

566. Извлеките множитель из под корня:

1) $\sqrt{9a^2b}$, где $a<0$, 2) $\sqrt{25a^2b^3}$, где $a>0, b>0$;

3) $\sqrt{8a^3b^5}$, где $a<0$, $b<0$; 4) $\sqrt{12a^3b^3}$, где $a<0$, $b<0$.

567. Внесите множитель под корень:

1) $x\sqrt{5}$, где $x\ge 0$; 2) $x\sqrt{3}$, где $x<0$;

3) $-a\sqrt{3}$, где $a\ge 0$; 4) $-a\sqrt{5}$, где $a<0$.

568. Вычислите:

1) $\sqrt[3]{1000}\cdot(0{,}0001)^{0{,}25}+(0{,}027)^{\frac{1}{3}}\cdot 7{,}1^{0}-\left(\frac{10}{13}\right)^{-1}$;

2) $\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}:\frac{1}{\sqrt{11\frac{1}{9}}}+(6{,}25)^{\frac{1}{2}}:(-4)^{-1}$;

3) $\left(1\frac{61}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot(0{,}008)^{\frac{1}{3}}:(-2)^{-2}$.

569. Найдите значение выражения:

1) $\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\frac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{a-b}\right)\cdot\frac{a-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}{a}$, где $a=3, b=12$.

2) $\frac{m+2\sqrt{mn}+n}{n}\cdot\frac{\sqrt{mn}+n}{m-n}-\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$, где $m=5, n=20$.

570. Решите уравнение:

$x^{\frac{1}{2}}=2$; 2) $x^{-\frac{1}{2}}=3$; 3) $x^{-3}=8$; 4) $x^{\frac{5}{2}}=0$; 5) $x^{-\frac{1}{3}}=27$.

571. Определите, принадлежит или не принадлежит графику функции $y=-\frac{25}{x}$ точка:

1) $A(\sqrt{5};-5\sqrt{5})$; 2) $B(-5\sqrt{2};5\sqrt{2})$; 3) $C(0{,}1;\ 250)$.

572. Постройте график функции:

1) $y=\frac{4}{x}$; 2) $y=-\frac{6}{x}$;.

По графику определите промежутки возрастания, убывания функции; четность или нечетность функции.

573. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\sqrt{ab}\,\sqrt[4]{a}}{(a+2)\sqrt[4]{a^{-1}b^{2}}}-\dfrac{a^{2}+4}{a^{2}-4}$; 2) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{b+\sqrt{ab}}-\dfrac{\sqrt{a}}{b-\sqrt{ab}}\right)\cdot\dfrac{b-a}{2\sqrt{ab}}$;

3) $\left(\dfrac{a-b}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}}-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+a^{\frac{1}{4}}}\right)\cdot\dfrac{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}{(a^{-1}b)^{\frac{1}{2}}}$; 4) $\left(\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a-b}-\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot\dfrac{a-b}{\sqrt{ab}}$.

Упростите выражение (**574–575**):

574. 1) $\sqrt{5+\sqrt{21}}$; 2) $\sqrt{4+\sqrt{7}}$; 3) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$; 4) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$.

575. 1) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[4(a+1)+(\sqrt[3]{a\sqrt{a}}-1)^{2}-\left(\dfrac{\sqrt[6]{ab^{2}}+\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}+\sqrt[3]{a}\right)^{3}\right]^{\frac{1}{2}}$, где $0<a\leq 1$;

2) $\dfrac{a^{-1}b^{-2}-a^{-2}b^{-1}}{a^{-\frac{5}{3}}b^{-2}-b^{-\frac{5}{3}}a^{-2}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$; 3) $\dfrac{a^{-2}\cdot b^{-3}-a^{-1}\cdot b^{-2}}{a^{-\frac{9}{2}}\cdot b^{-\frac{11}{2}}-a^{-\frac{11}{2}}\cdot b^{-\frac{9}{2}}}$.

Решите уравнение (**576–577**):

576. 1) $x^{2}=7$; 2) $x^{2}=11$; 3) $x^{2}+6x=0$;
4) $x^{2}+5x=0$; 5) $x^{2}=8x$; 6) $x^{2}=12x$.

577. 1) $1{,}5x-4x^{2}=6{,}3x-x^{2}$; 2) $11y-15=(y+5)(y-3)$;

3) $3x(x+2)=2x(x-2)$; 4) $\dfrac{1}{4}(3x^{2}+1)-\dfrac{40x+3}{6}=\dfrac{x-3}{12}$;

5) $\dfrac{y^{2}-5}{4}-\dfrac{15-y^{2}}{5}=\dfrac{y^{2}-4}{3}$; 6) $\dfrac{2x^{2}-1}{4}=\dfrac{1+1{,}5x^{2}}{5}$.

578. Докажите, что если
1) $(y-3)^{2}>(3+y)(y-3)$, то $y<3$;
2) $(3a+b)^{2}<(3a-b)^{2}$, то $ab<0$.

579. Докажите, что если $x<\dfrac{a+b}{2}$, $y<\dfrac{a+c}{2}$, $z<\dfrac{b+c}{2}$, то $x+y+z<a+b+c$.

580. Высота прямоугольного параллелепипеда больше 15 см, ширина больше 2 см, а длина больше 0,3 м. Докажите, что его объём больше 0,9 дм^3.

581. Докажите, что выражение

1) $(y-3)(y-1)+5$; 2) $(y-4)(y-6)+3$

положительно для любого значения y.

582. Найдите множество значений k, при которых уравнение $4y^2-3y+k=0$ имеет действительные корни.

583. Для каких значений k число -2 является корнем уравнения $(k-2)x^2-7x-2k^2=0$?

584. Решите уравнение:

1) $3x^2+8x+5=0$; 2) $5x^2+4x-12=0$;

3) $\frac{6}{4x^2-1}-\frac{x}{2x-1}=\frac{5}{2x+1}$; 4) $\frac{5}{x-1}+\frac{3x-3}{2x+2}=\frac{2x^2+8}{x^2-1}$;

5) $\frac{30}{x^2-1}-\frac{13}{x^2+x+1}=\frac{7+18x}{x^3-1}$; 6) $\frac{2}{x^2-x+1}=\frac{1}{x+1}+\frac{2x-1}{x^3+1}$.

585. Решите неравенство:

1) $(x+2)^2<(x-3)^2-8(x-5)$;

2) $\frac{2+x}{9}-x\leq\frac{2x-5}{3}-(4-x)$;

3) $\frac{(x-3)(x+2)}{4}-\frac{(x-7)}{3}>\frac{(x-6)^2}{4}+x$;

4) $6x+\frac{(3+x)^2}{2}>\frac{8-2x}{5}+\frac{(x+3)(x+7)}{2}$.

586. Найдите погрешность приближения:

1) числа 0,2781 числом 0,278; 2) числа $-2{,}154$ числом $-2{,}15$;

3) числа $-\frac{7}{18}$ числом $-\frac{1}{3}$; 4) числа $\frac{3}{11}$ числом 0,272.

587. Докажите, что число 3,5 есть приближенное значение числа 3,5478 с точностью до 0,05.

15—Алгебра, для 8 классов

588. Найдите относительную погрешность приближения числа $\frac{7}{9}$ к числу 0,777.

589. В таблице приведены данные о числе коробочек на основной ветке 60 выбранных кустов хлопчатника случайным образом:

10	11	10	10	10	9	9	11	9	9
11	11	11	7	9	10	10	10	10	10
10	10	11	11	11	10	10	11	10	10
9	10	9	9	9	9	10	9	10	10
10	10	10	10	11	9	11	9	9	12
9	10	8	11	10	10	9	10	10	11

Для выборки: 1) составьте таблицу частот; 2) найдите среднее значение; 3) моду; 4) медиану; 5) вычислите размах; 6) постройте полигон частот.

590. Сколько четырехзначных чисел имеют в записи только одну цифру 0?

591. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 5, 8, не повторяя их?

592. Сколькими способами можно рассадить 6 гостей на 6 стульях?

593. Выберите какой-либо текст из вашего учебника литературы. Подсчитайте все буквы на двух его страницах. Определите частоты всех гласных букв. Составьте таблицу частот. Постройте полигон частот. Сделайте вывод и запишите его в тетрадь.

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ

Глава I

1. 2) 0; 4) 5. **2.** 2) -2; 4) 0. **3.** $(7m)$т; 168 t. **4.** 1) $(60m)$ мин; 2) $\frac{p}{60}$min; 3) $\left(60m+l+\frac{p}{60}\right)$мин. **5.** $3(x-y)$; 2) 4,5; 4) 2,5. **6.** $(x+y)$ $(x-y)$; 2) $-\frac{11}{64}$; 4) 0,104. **7.** 2) $-1\frac{2}{3}$. **8.** 2) 4. **9.** 1, 3, 15, 21. **10.** 2) $(m-1)m$; 4) $(2p+1)\times$ $(2p+3)(2p+5)$. **12.** $(p-q)$t; 1) 5t; 2) число q не может быть больше числа p; число q может равняться числу p. **13.** $400n+500m$; 155000; 155000. **15.** 187200 м^3, $(37440m)$м^3. **16.** $s=3\frac{1}{6}c+1\frac{2}{3}a+2\frac{1}{2}b$, 53 км. **23.** $\frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}$. **25.** 2) 5; 4) 1,9; 6) -4. **26.** 2) $V=\frac{m}{p}$; 4) $a=\frac{p}{2}-b$. **27.** $x=\frac{np}{1000a}$, $x=3$. **28.** $t=\frac{a}{cn}$, $t=15$. **30.** 2) $\frac{4}{5}$; 4) -2. **31.** 2) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{b}{2c}$. **32.** 2) $\frac{1}{b^4}$; 4) b^2. **33.** 2) $\frac{2}{7}$; 4) $\frac{b}{3a}$; 6) $\frac{a^2b}{5c}$. **34.** 2) $\frac{7a}{5}$; 4) $\frac{1}{3(a-b)}$; 6) $-\frac{1}{3}$. **35.** 2) $\frac{1}{(m+n)^3}$; 4) $3y-2x$; 6) $\frac{2}{a(a-b)}$. **36.** 2) $\frac{2a}{m-n}$; 4) $\frac{4a-1}{2a+3}$; 6) $\frac{1+b}{1-b}$. **37.** 2) $\frac{q^2}{p-q}$; 4) $\frac{m}{n}$; 6) $-\frac{x}{y}$. **38.** 2) $\frac{3a+2b}{2a+3b}$; 4) $-\frac{1}{ab}$. **39.** 2) $\frac{1}{a+b}$; 4) $5+x$; 6) $-\frac{c+2}{2a}$. **40.** 2) $10-7b$; 4) $\frac{y}{5+y}$; 6) $\frac{5ab}{a^2-b^2}$. **41.** 2) $\frac{1}{b+7}$; 4) $\frac{1}{1-2p}$. **42.** 2) $\frac{4a+1}{4a-1}$; 4) $\frac{10(m+n)}{3(m-n)}$. **43.** 2) $n-m$; 4) $\frac{1}{5-2x}$. **44.** 2) $\frac{3y-4x}{3y+4x}$; 4) $\frac{6-c}{6+c}$; 6) $\frac{3c-2b}{a}$. **45.** 2) $a+1$; 4) $\frac{1}{2}$. **46.** 2) $\frac{b}{ab}$ и $\frac{2a}{ab}$; 4) $\frac{2a}{2b}$ и $\frac{a}{2b}$; 6) $\frac{32}{60}$ и $\frac{25}{60}$. **47.** 2) $\frac{9x^2}{12xy}$, $\frac{72}{12xy}$ va $\frac{16y^2}{12xy}$; 4) $\frac{2ax^2}{4x^3}$ и $\frac{b}{4x^3}$. **48.** 2) $\frac{6b^2}{2b}$ и $\frac{a^2}{2b}$; 4) $\frac{2b^2}{6ab}$, $\frac{9ac}{6ab}$, $\frac{6a^2b^2}{6ab}$.

49. 2) $\frac{3a^2}{18a^2b^2}$, $\frac{2(a^2+b^2)}{18a^2b^2}$ и $\frac{a(3-a^2)}{18a^2b^2}$; 4) $\frac{21y^3}{60x^4y^4}$, $\frac{310x^3y}{60x^4y^4}$ и $\frac{80x^2}{60x^4y^4}$. **50.** 2) $\frac{6a}{(a-1)a}$ и $\frac{2(a-1)}{(a-1)a}$; 4) $\frac{8a^2}{12(a+1)}$ и $\frac{15a^2}{12(a+1)}$. **51.** 2) $\frac{7a(3x+y)}{9x^2-y^2}$ и $\frac{6b(3x-y)}{9x^2-y^2}$; 4) $\frac{6x}{8x+8y}$ и $\frac{x}{8x+8y}$. **52.** 2) $\frac{7a}{x^2-9}$ и $\frac{a(x-3)}{x^2-9}$; 4) $\frac{6x(x+y)}{x^2-y^2}$, $\frac{7xy(x-y)}{x^2-y^2}$ и $\frac{3}{x^2-y^2}$.

53. 2) $\frac{28c(b+c)}{70(b^2-c^2)}$, $\frac{6a^2}{70(b^2-c^2)}$ и $\frac{35b(b-c)}{70(b^2-c^2)}$; 4) $\frac{15x(x+1)}{12x(x^2-1)}$, $\frac{-48x^2}{12x(x^2-1)}$ va $\frac{4(x-1)}{12x(x^2-1)}$.

54. 2) $\frac{5a}{b^3}$; 4) $\frac{x-y}{n+a}$. **55.** 2) $\frac{2a}{c^2}$; 4) $\frac{7}{a^2}$; 6) $\frac{8}{ab}$. **56.** 2) $\frac{11}{28}$; 4) $\frac{3}{5b}$; 6) $\frac{3ad-b}{12d}$.

57. $\frac{15+ab}{5a}$; 4) $\frac{2+7b}{b}$. **58.** 2) $\frac{2c+4c^2-3}{c^2}$; 4) $\frac{mn-kn^2+m^2}{n^2}$. **59.** 2) $\frac{k-n}{mnk}$; 4) $\frac{bd+ba}{acd}$; 6) $\frac{2n^2-3m}{mn^3}$. **60.** 2) $\frac{4a^4-21cb^3}{18a^3b^4}$; 4) $\frac{20y-21x+22}{28x^2y^2}$; 6) $\frac{b(cd^2+d+c)}{(cd)^2}$. **61.** 2) $\frac{3x}{2(1-x)}$; 4) $\frac{8y-25x}{10(y-3)}$. **62.** 2) $\frac{11}{10(b+1)}$; 4) $\frac{5x}{8(x+y)}$. **63.** 2) $\frac{5b^2-2a^2}{ab(x+y)}$; 4) $\frac{a+b-y}{ab}$. **64.** 2) $\frac{2(2a+3)}{a(1-a)}$; 4) $\frac{67b-3a}{40(a^2-b^2)}$. **65.** 2) $\frac{x-1}{x^2-9}$; 4) $\frac{2x^2+3x+2}{x^2-16}$. **66.** 2) $\frac{6n-47}{n^2-49}$; 4) $\frac{24y^2+y+1}{1-9y^2}$. **67.** 2) $\frac{13a+4}{(3a+1)^2}$. **68.** 2) $\frac{2-11x}{(3x+1)^2}$; 4) $\frac{4-7n+7m}{(n-m)^2}$; 6) $\frac{2x^2+18}{(x^2-9)^2}$. **69.** 2) $\frac{b^2-3b}{b-2}$; 4) $\frac{1}{a+1}$. **70.** 2) $-\frac{1}{x+y}$; 4) $\frac{2(24-a)}{4a^2-9}$. **71.** 2) $\frac{b-3b^2-14}{6(b^2-1)}$; 4) $\frac{28n^2-4m^2+9mn}{m(4n^2-m^2)}$; 6) $\frac{4a^2-4a-b}{a^2+2a}$. **72.** 2) $\frac{2a}{a^3+8}$; 4) $-\frac{6m}{m^3-27}$. **73.** 2) $-\frac{12}{19}$. **74.** 2) $\frac{4}{13}$; 4) $\frac{15}{2}$. **75.** 2) $\frac{k^2}{mn}$; 4) $\frac{3mk}{4nd}$; 6) $\frac{2a^2b^2}{c^3}$. **78.** 2) 2; 4) $\frac{a}{bc}$; 6) $\frac{ac}{b}$. **79.** 2) $\frac{k^2}{mn}$; 4) $\frac{3md}{2nk}$; 6) $\frac{15a^2c^2}{d}$. **80.** 2) $\frac{18a^2}{7}$; 4) $\frac{1}{a}$; 6) $\frac{a^3b^3}{d^2}$. **81.** 2) $\frac{2y}{5c^3}$; 4) $\frac{2d^2a^2}{3c}$; 6) $\frac{22p^3n}{m^4}$. **82.** 2) $10a^2b$; 4) $\frac{1}{4a^2b}$. **83.** 2) $\frac{2b}{a}$;

4) $3b$; 6) $a-b$. **84.** 2) $\frac{b}{3(1+a)}$; 4) $\frac{1}{3m^2(m+n)}$; 6) $\frac{5}{3(a-b)}$. **85.** 2) $\frac{-3x^2(x+y)}{2(x^2+y^2)}$; 4) $\frac{-18(n-m)^2(n+m)}{n(n+p)^2}$; 6) $\frac{1}{a^2-b^2}$. **86.** 2) $b-3$; 4) $(a-1)(2a-1)$. **87.** 2) $\frac{2(a+1)}{3}$; 4) 1; 6) $\frac{b^2}{b^2+1}$. **88.** 2) $\frac{a^2(b^2-1)}{b^2}$; 4) $\frac{2(m+n)}{n}$. **89.** 2) $\frac{4ab}{a^2-b^2}$; 4) $\frac{1}{6(c+d)}$. **90.** 2) $\frac{9z}{z+2}$; 4) $\frac{m+5}{m-2}$. **91.** 2) $\frac{b}{a+b}$; 4) $\frac{1}{c}$. **92.** 2) $\frac{4}{a-b}$; 4) $\frac{1}{c(a+b)}$. **95.** $\frac{v-v_1}{v+v_1}s$ км. **96.** 6. **97.** 2) $y\le 1$ при $x=-4$ $y=-\frac{1}{2}$; 4) $y\le 1$, при $x<0$ или $x\ge 2$.**99.** 2) (–2;4) и (2;–4); 4) (–4; –2) и (1;3). **106.** 2) 2; 4) 15.**107.** 2) 81; 4) $\frac{1}{81}$. **108.** 2) –1; 4) –4; 6) –8. **109.** 2) $x=-\frac{1}{2}$; 4) $x_1=-2$; $x_2=2$. **110.** 2) x – любое число; 4) $\frac{2}{3}\le x<2$. **111.** 2) 5; 4) –11; 6) $\frac{1}{30}$. **112.** 2) 2; 4) $4\sqrt{6}$. **113.** 1) $x-2$; 2) $(3-x)^3$, при $x\le 3$, $(x-3)^3$, при $x>3$. **114.** 3974. **117.** 2) 3; 4) 27; 6) $\frac{1}{27}$. **118.** 2) 5; 4) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{2}$. **119.** 2) 49; 4)125. **120.** 2) 121; 4) 150. **121.** 2) 3; 4) 2,7. **122.** 2) b; 4) a; 6) 1. **123.** 2) a^2b. **124.** 2) 1. **125**. 2) 3. **126**. 2) $b^{\frac{1}{2}}$; 4) $a+b$; 6) $a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}$; 8) $\sqrt{c}-1$. **127.** 2) $\frac{a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$; 4) $2\sqrt{b}$. **128.** 2) $2y$; 4) $2\sqrt[3]{b}$. **129.** 2) $2\sqrt[3]{b}$; 4) $\frac{2\sqrt[3]{a}}{a+b}$. **130**. $3\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}$. **131.** 27 **132.** $9a$. **133.** $2b(a-b)$. **135.** $\sqrt[3]{(a-b)^2}$. **136.** $-4\sqrt{x}$. **137.** $\sqrt{a}\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{x})$. **138.** $-\sqrt{ab}$. **139.** $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$. **140.** 0. **141.** 3. **142.** 1. **143.** a. **144.** a^2x. **145.** $-x^3$. **146.** $\sqrt[6]{a}$. **147.** 2) $\frac{3(x^2-2x+4)}{x^3+8}$, $\frac{x+1}{x^3+8}$ и $\frac{(x+2)^2}{x^3+8}$. **148.** 2) $\frac{55b-61}{24}$; 4) $\frac{5-27b}{36}$. **149.** 2) $\frac{7q-p}{3p-q}$; 4) $\frac{8a+8b-70}{2b-5}$. **150.** 2) $\frac{a^2-b^2}{7}$. **151.** 2) $\frac{x(x+2)(x-3)}{(x-2)(x+3)(x^2+2)}$;

4) 1. **152.** 2) $-2(a-1)^2$; 4) $\frac{a^2+4}{4a}$. **153.** 2) 1,8; 4) $\frac{1}{16}$. **154.** 2) 51; 4) 0,04; 6) –0,1. **155.** 2) 1000. **156.** 2) $\sqrt[4]{x}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$. **157.** 2) $\frac{95}{16}$; 4) $-609\frac{8}{27}$. **158**. 2) x – любое число; 4) $x \le 2$, $x \ge 3$; 6) $0 \le x \le 2$, $x \ge 3$. **159.** 2) $a+1$; 4) $a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}$; 6) $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$.

Глава II

178. 2) $\frac{1}{3} > 0,3$; 4) $-\frac{5}{8} > -0,7$. **179.** 2) $b > a$; 4) $a < b$. **183.** Первый. **185.** 2) $a < 0$; 4) $a > 0$. **186.** $-9 < -3$. **187.** 2) $a + 3b < -2b$. **188.** 2) $8 > 6$. **189.** 2) $a - 3b < 3a$. **190.** 2) $a - 5 < b - 5$. **191.** 2) $19 > 12$; 4) $-12 > -14$. **192.** 2) $a < -0,25$; 4) $a < 2$. **193.** 2) $0,9 > -2$; 4) $5 > 3$. **194.** 2) $a < -2$; 4) $x < -\frac{4}{9}$. **196.** 2) $-5 < 7$; 4) $7y > 1$. **197.** 2) $25 < 58$; 4) $12 < 4x^2 - 1$. **204.** 2) $n = 3$; 4) $n = -6$; 6) $n = -1$. **205.** 2) $n = 6$; 4) $n = -3$; 6) $n = 4$. **206.** 2) $x = -9$. **207.** 2) $h \ge 5$; 4) $v \le 70$. **208.** 2) Верно; 4) неверно. **209.** 2) Верно; 4) неверно. **211.** 2) $\left(\frac{5}{12}\right)^{-\frac{1}{4}} < (0,41)^{-\frac{1}{4}}$; 4) $\left(\frac{11}{12}\right)^{-\sqrt{5}} > \left(\frac{12}{13}\right)^{-\sqrt{5}}$. **212.** 2) $x = 3$; 4) $x = 2$; 6) $x = \frac{1}{2}$. **213.** $\sqrt{\left(1\frac{1}{4}-1\frac{1}{5}\right)^3} > \sqrt{\left(1\frac{1}{6}-1\frac{1}{7}\right)^3}$. **214.** 2) $x = \frac{5}{2}$; 4) $y = 5$. **215.** 2) $x = 2,6$; 4) $x = 4$. **216.** 2) $x = -\frac{1}{3}$; 4) $x = 1$. **217.** 2) 6; 4) -3. **218.** 2) $x = -1$; 4) $x = 1$. **219.** 2) $13 - x < 2$; 4) $2(x - 3) \le 2$; 6) $2x(-4) \ge x - (-4)$. **220.** 2) Ни одно из данных чисел не является решением; 4) $\frac{1}{2}$; 0; -1. **221**. 2) $y > 0$; 4) ни при каком значении; 6)

$y \neq -2$. **222.** 2) $y < 2$; 4) $y \leq 0$. **223.** 2) $x \leq -3$; 4) $x > 0$; 6) $x < 0$. **225.** 2) $x < 14$; 4) $y > 9$; 6) $z \leq 4$. **226.** 2) $x \geq -8$; 4) $z > -15$; 6) $x \leq -2$. **227.** 2) $x < 6$; 4) $x > 5$; 6) $x \leq -2$. **228.** 2) $x \geq 3$; 4) $x > 0$; 6) $x \geq 2$. **229.** 2) $x < \frac{5}{8}$; 4) $x < -3$; 6) $x < 5\frac{1}{6}$. **230.** 2) $y > \frac{3}{8}$; 4) $y < \frac{5}{8}$; 6) $y > \frac{2}{3}$. **231.** 2) $y = 3$; 4) $x = 0$. **232.** 2) $x = -1$; 4) $x = -4$. **233.** 2) $b < -5\frac{2}{3}$; 4) $x > -1\frac{3}{7}$.
234. 2) x – любое число; 4) x – любое число. **235.** 2) Нет решений; 4) нет решений. **236.** 2) $x > 2$; 4) $x > -20$; 6) $x > 0{,}5$. **237.** 2) $x < 1{,}6$; 4) $x < 0$. **238.** 2) $x \leq 7$; 4) $x \leq 5$. **239.** 2) $x < 0{,}5$; 4) $x > -0{,}5$. **240.** Не менее 45. **241**. 2) Ни одно из данных чисел не является решением. **242**. 2) 1. **243.** 2) 0; 1; 2; 3; 4) –5; –4; –3; –2; –1; 0; 1; 2; 3; 4; 5. **244.** 2) $[-1; 3]$; 4) $(1;2)$; 6) $(-4; -2]$. **245.** 2) $-3 \leq x \leq -1$; 4) $0 < x < 3$; 6) $-2 \leq x < 2$. **246.** 2) $-1 < x < 2$, $(1;2)$; 4) $-4 < x \leq 0$, $(-4; 0]$. **247.** Да. **248.** Да. **249.** b) $-3 < x < 1$; Ни при каком значении; e) $-5 < x < 0$; ни при каком значении.
251. 1) $x \geq 0{,}6$; 2) $x \leq -\frac{1}{3}$; 3) $x \geq -3{,}5$; 4) $x \geq -4{,}5$. **252.** 2) $x > 0$; 4) $x \geq -2$. **253.** 2) $x < -1$; 4) $x \leq 0$. **254.** 2) $3 < x < 6$; 4) $0 \leq x < \frac{1}{2}$. **255.** 2) $-1{,}5 \leq x < 1{,}5$; 4) $-0{,}5 \leq x \leq 7{,}5$. **256.** 2) $x \geq 4$; 4) $x > -3$. **257.** 2) $x \leq -2$; 4) $x < 4$. **258.** 2) $x \leq -2{,}5$; 4) $2 \leq x \leq 5$. **259.** 2) $-5 < x \leq -1$; 4) $0 < x \leq \frac{4}{3}$. **260.** 2) 1; 2; 4) 4; 5. **261.** 2) Ни при каком x; 4) $0 < x < 2$. **262.** 2) $x \leq -2$; 4) $x \leq 6$. **263.** 2) больше 4 м, но меньше 13 м. **264.** 24. **265.** 36. **267.** 2) $x_{1,2} = \pm 1{,}5$; 4) $x = 0$, $x_2 = -6$. **268.** 2) $x = 2$; 4) $x = \frac{3}{4}$. **269.** 2) $x_1 = -0{,}25$, $x_2 = -1{,}25$; 4) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}$.
270. 2) $x_{1,2} = \pm 2{,}1$; 4) $x_1 = -5$, $x_2 = 11$. **272.** 2) $-2 < x < 2$. **273.** 2) $|x| \leq 0{,}3$. **274.** 2) $-2{,}2 < x < -1{,}8$; 4) $\frac{1}{4} < x < 1\frac{3}{4}$. **275.** 2) $-3 < x < 0$; 4) $1 \leq x < 1{,}5$. **276.** 2) $x \leq 0{,}9$, $x \geq 3{,}1$; 4) $x < 2\frac{3}{4}$, $x > 3\frac{2}{3}$. **277.** 2) $x < -1$, $x > -\frac{1}{3}$; 4) $x \leq 0$, $x \geq 1{,}6$.
278. 2) –1; 0; 4) 0; 1. **279.** 2) $-1 \leq x \leq 1\frac{2}{3}$; 4) $x \leq 0$, $x \geq 3$. **282.** 2) $\frac{1}{18}$; 4) $\frac{1}{225}$. **283.** 2) 0,004; 4) $\frac{1}{350}$. **284.** 2) 0,08; 4) 0,08. **285.** 3°. **286.** $\frac{1}{7}$.

287. Верно. **289.** 2) $141 \le x \le 143$; 4) $895 \le v \le 905$; 6) $m-n \le y \le m+n$. **290.** 2) 2,6 и 2,8; 4) –6,1 и –5,7. **291.** 2) Нет; 4) да. **292.** 2) Да; 4) нет. **293.** 2) 5,5; 4) 3,9; 6) 0,575. **298.** Нет. **301.** 2) 0,7; 4) 3,7. **302.** 2) 0,07; 4) 1,67; 6) 5,07. **303.** 2) 0,385; 4) 7,643. **304.** 3 и 7. **305.** 2) 0,41; ≈ 3,7%; 4) 0,108; 10,8%. **306.** 2) ≈2%. **307.** 2) Второй. **308.** ≈1%; 0,1%; 0,01%. **309.** Первый **310.** 2) 0,000398. **311.** Второй **312.** 2) $x_1=0$, $x_2=1\frac{1}{3}$; 4) $x_1=-4$, $x_2=0{,}5$. **313.** 2) $x=0{,}5$; 4) $x_1=3$, $x_2=-2$. **314.** 2) $2+b-a>0$; 4) $a-3-b<0$. **315.** 2) y–любое число; 4) $x>7$. **316.** 2) $x<2$. **317.** 2) $x_1=3{,}4$, $x_1=-1{,}4$; 4) $x_1=1$, $x_2=\frac{1}{3}$. **318.** 2) $x \le -2{,}4$, $x \ge 4{,}4$; 4) $x \le -2$, $x \ge 1$. **321.** 2) Ни при каком значении; 4) ни при каком значении. **322.** 34. **323.** 47. **326.** $3{,}5416 \cdot 10^{-5}\Omega$. **327.** 67J. **329.** 18800; 20400;13200; 4600.

Глава III

345. 2) $-x^2+9=0$; 4) $x^2=0$. **346.** 2) $x^2-4x-9=0$; 4) $5x^2+1=0$. **347.** 2) 0; 1; 4) 1; 6) ни одно из данных чисел не является корнем. **350.** 2) $x_{1,2}=\pm\frac{4}{7}$; 4) $x_{1,2}=\pm 1{,}5$; 6) $x_{1,2}=\pm\sqrt{13}$. **351.** 2) $x_{1,2}=\pm 11$; 4) $x=0$; 6) нет действительных корней. **352.** 2) $x_1=0$, $x_2=2$; 4) $x_1=0$, $x_2=0{,}6$; 6) $x=-3$. **353.** 2) $x=0$; 4) $x_{1,2}=\pm 3$; 6) $x_{1,2}=\pm 3\sqrt{3}$; 8) $x_{1,2}=\pm 20$. **354.** 2) $x_1=0$, $x_2=-5$; 4) $x_1=0$, $x_2=0{,}04$; 6) нет корней. **355.** 2) $x_{1,2}=\pm 1\frac{1}{4}$; 4) $x_{1,2}=\pm\sqrt{5}$; 6) $x_{1,2}=\pm 1\frac{1}{3}$. **356.** $x_{1,2}=\pm 2$; 4) $x_{1,2}=\pm 1\frac{1}{3}$. **357.** 2) $x_1=0$, $x_2=4$; 4) $x_1=0$, $x_2=-2{,}5$. **358.** 2) $x_1=0$, $x_2=2\frac{3}{19}$. **359.** 2) $m=9$; 4) $m=64$; 6) $m=6$. **360.** 2) $x_1=2$, $x_2=-6$; 4) $x_1=8$, $x_2=2$; 6) $x_{1,2}=-4\pm\sqrt{23}$. **361.**

$x_1=\frac{3}{5}$; $x_2=-\frac{1}{5}$. **362.** 1) $x_1=1$, $x_2=4$; 2) $x_1=5$, $x_2=-2$. **363.** 1) $x_1=1$, $x_2=-2{,}5$; 2) $x_2=2$, $x_1=-\frac{3}{5}$. **364.** 2) 0,4; 4) 85. **365.** 2) $x_1=1$, $x_2=0{,}5$; 4) $x_1=3$, $x_2=0{,}5$; 6) $x_1=2$, $x_2=\frac{3}{4}$. **366.** 2) $x_1=4$, $x_2=-0{,}5$; 4) $x_1=-1$, $x_2=\frac{1}{3}$; 6) $\frac{-6\pm\sqrt{6}}{3}$; 8) $x_1=1$, $x_2=-\frac{4}{3}$. **367.** 2) $x=\frac{1}{4}$; 4) $x=-\frac{1}{6}$. **368.** 1), 2), 3), 4) нет действительных корней. **369.** 2) Два; 4) ни одного. **370.** Нет действительных корней; 4) $x=2{,}5$; 6) $x_1=4$, $x_2=-1$. **371.** 2) $x_1=1$, $x_2=0{,}2$; 4) $x_1=7$, $x_2=-8$; 6) $x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{7}}{7}$. **372.** 2) $x_1=7$, $x_2=-11$; 4) $x_1=0{,}6$; $x_2=-3$. **373.** 2) $x_1=0{,}5$, $x_2=-1{,}5$; 4) $x_1=5$, $x_2=\frac{1}{5}$. **376.** 2) $x_1=7$, $x_2=-1$; 4) $x_1=4$, $x_2=-10$; 6) $x_1=2$, $x_2=-1$. **381.** 2) $x^2-5x+6=0$; 4) $x^2-3x-18=0$. **382.** 2) $x_1=3$, $x_2=4$; 4) $x_1=-1$, $x_2=-7$; 6) $x_1=3$, $x_2=-5$. **383.** 2) $(x-1)\ (x+5)$; 4) $(x+7)\ (x-6)$; 6) $(2x+1)(4x+3)$; 8) $(x+2)(1-4x)$. **384.** 2) $x+6$; 4) $\frac{1}{x+7}$; 6) $\frac{x+3}{3x+1}$. **385.** 2) $x_{1,2}=\sqrt{5}\pm 2$; 4) $x_{1,2}=2\left(\sqrt{7}\pm\sqrt{6}\right)$. **386.** 2) $x(x+7)(x-3)$; 4) $x(x-11)(x+2)$. **387.** 2) $\frac{x-9}{x+8}$; 4) $\frac{9-x}{x-5}$. **388.** 2) $-\frac{x}{(x+3)^2}$; 4) $\frac{x-1}{x(x+10)}$. **389.** 2) $x_{1,2}=\pm 1$, $x_{3,4}=\pm 2$; 4) $x_{1,2}=\pm 1$, $x_3=\pm 7$. **390.** 2) $x_{1,2}=\pm 1$; 4) $x_{1,2}=\pm\sqrt{5}$. **391.** 2) $x_1=7$, $x_2=3\frac{1}{3}$; 4) $x_1=40$, $x_2=-20$, 6) $x_1=6$, $x_2=-\frac{2}{3}$. **392.** 2) $x_{1,2}=\pm 10$; 4) нет решений; 6) $x=-3$. **393.** 2) Нет. **394.** 2) $x=0$. **402.** 2) 14 и 15. **403.** 2) 19 и 21. **404.** 10 см, 40 см. **405.** 140 м, 175 м. **406.** 100 км/ч, 80 км/ч. **407.** 10 км/ч. **408.** 20 дней, 30 дней. **409.** Сторона квадрата 15 см. **410.** 9 см, 40 см. **411.** 18 км/ч, 15 км/ч. **412.** 15 дней, 10 дней. **413.** 2) $x_{1,2}=\pm 5$; 4) $x_1=0$, $x_2=7{,}5$. **414.** 2) $x_1=13$, $x_2=-4$; 4) $x_1=3{,}6$, $x_2=-7$. **415.** 2) $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{6}$; 4) $x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{7}}{3}$. **416.** 2) Два; 4) один. **417.** 2) $(x-8)\ (x-2)$; 4) $(x-2)(2x+1)$. **418.** 2) $x(x+2)$; 4) $\frac{5x+1}{x-3}$. **419.** 2) $x_{1,2}=\pm 3$, $x_{3,4}=\pm 2$; 4) $x_{1,2}=\pm\sqrt{3}$, $x_{3,4}=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. **420.** 2) $x_2=\pm\sqrt{5}$; 4) $y=1$. **421.** 20 км/ч. **422.** 15 км/ч. **423.** 3 дня, 5 дней. **424.** 2) $x_1=0$, $x_2=2$. **425.** 2) $x_2=0{,}5$; 4) $x_1=7$, $x_2=-13$. **426.** 2) $x_1=0$, $x_2=-5$; 4) $x_{1,2}=\pm 4$. **427.** 2) $x_1=9$, $x_2=-12$; 4) $x_1=3$, $x_2=-6$. **428.** 2) Ни одного; 4) два. **429.** 2) $x_1=3$, $x_2=1{,}4$. **430.** За 36 дней. **431.** 1 час 40 мин и 1 час 20 мин или 2 часа и 1 час 40 мин. **432.** 12 часов, 6 часов. **437.** 3 часа **439.** 12 дней, 8 дней. **440.** 25 часов, 20 часов. **441.** 60 км/ч. **442.** 8 дней, 12 дней. **444.** 120; –120. **445.** 6. **452.** за 7 дней. **453.** 20 км/ч. **454.** 3 км/ч. **455.** 8 дней. **456.** 37. **457.** 82. **458.** 20 дней, 30 дней, 60 дней. **459.** 9 часов. **460.** 10%. **461.** 5%. **462.** 10 км. **463.** 16 человек. **464.** 35 человек. **465.** 60 км/ч, 50 км/ч. **466.** 55 км/ч.

Глава IV

482. 6. **483.** 18. **484.** 27. **485.** 9. **487.** 9. **491.** 15 **492.** 120. **494.** d) $n(n-1):2$. **496.** 45. **497.** 2) 900. **499.** $16\cdot 15\cdot 14=3360$. **500.** 30. **501.** 1) 125; 2) 625. **503.** 24. **504.** 10. **505.** $12\cdot 8\cdot 7=672$. **506.** $64\cdot 49=3136$. **508.** 1) $4\cdot 60$; 2) $24\cdot 58$; 3) $36\cdot 55$; всего 3612 способов. **509.** 6. **510.** 12. **512.** 20. **513.** 14. **521.** 1) $5\cdot 5\cdot 4\cdot 3=300$; 2) $5\cdot 6\cdot 6\cdot 6=1080$. **522.** $5\cdot 6\cdot 6\cdot 3=540$. **523.** $26\cdot 25\cdot 24=15600$. **524.** $8\cdot 7\cdot 5=280$. **525.** 10000. **527.** 24 ta. **528.** 1) 6; 2) 15; 3) 45; 4) $n\cdot(n-1):2$. **529.** $3\cdot 4\cdot 5=60$. **530.** 4.

Глава V

544. 2) $\frac{22}{35}$; 4) $-\frac{5}{6}$; 6) 3,485. **545.** $7\frac{1}{2}$; 36 **546.** $2a(30-a)$; –128. **547.** $a\cdot 100+b\cdot 10+c$, $c\cdot 100+b\cdot 10+a$; a ta. **548.** $x=1000a+c$. **549.** 2) $\frac{2n(2n-k)}{2n+k}$; 4)

$\frac{2q(m-2q)}{m+2q}$. **550.** 4) $\frac{m+7n}{10}$. **552.** 2) 1. **556.** 2) $y \geq -2$; 4) $x > -4$; 6) $x \leq 11\frac{1}{3}$. **557.** 2) $-5; -4; -3; -2; -1; 0$; 4) 4. **558.** 2) $\frac{2}{9} < x \leq 10$; 4) $x > 7{,}2$. **559.** 2) $-15; -14; ...; -1; 0$. **560.** 2) $x_1 = 8{,}1$, $x_2 = 2{,}1$; 4) $x_1 = 4$, $x_2 = -3$; 6) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{6}{7}$. **561.** 2) $x \leq -3{,}4$; $x \geq 7{,}4$; 4) $x \leq -2\frac{1}{3}$; $x \geq 1$; 6) $x \leq -0{,}4$; $x \geq 16$. **562.** 2) $2\frac{1}{3}$; 4) $\frac{2x^2}{3y}$. **563.** 2) $3-\sqrt[3]{2}$; 4) $6\sqrt{7}$. **564.** 2) $2(\sqrt{0{,}5})^{0{,}3} < (2\sqrt{0{,}5})^{0{,}37}$ **565.** 2) $\sqrt{x}$; 4) $9b^{-4}$. **566.** 2) $5ab\sqrt{b}$; **567.** 2) $-\sqrt{3x^2}$; 4) $\sqrt{5a^2}$. **568.** 2) $-8\frac{1}{8}$. **569.** 2) $-4\frac{5}{6}$. **570.** 2) $x = \frac{1}{9}$; 4) $x = 0$. **571.** 2) Нет. **573.** 2) $-\frac{\sqrt{a}}{b}$; 4) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. **574.** 1) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{1+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$. **575.** 2) $a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}$. **576.** 2) $x_{1,2} = \pm\sqrt{11}$; 4) $x_1 = 0$, $x_2 = -5$; 6) $x_1 = 0$, $x_2 = 12$. **577.** 2) $y_1 = 0$, $y_2 = 9$; 4) $x_1 = 0$, $x_2 = 9$; 6) $x_{1,2} = \pm 1{,}5$. **582.** $k > \frac{9}{16}$. **583.** $k_1 = 3$, $k_2 = -1$. **584.** 2) $x_1 = 1{,}2$, $x_2 = -2$; 4) $x = 3$; 6) $x = 2$. **586.** 2) 0,004; 4) $\frac{1}{1375}$. **588.** $\approx 0{,}1\%$.

Ответы к заданиям „Проверь себя“

Глава I. 1. $b \neq 0$, $c \neq 1$, $d \neq -2$. **2.** 1) $\frac{1}{a}$; 2) $\frac{4ab}{a^2-b^2}$; 3) 4; 4) $\frac{a-b}{b}$.
3. $\frac{1}{x-3}$; -3. **4.** 1) $8\frac{3}{8}$; 2) 16. **5.** 1) 6; 2) $(y+x)xy$. **6.** $a^{\frac{3}{4}}$; 27.

Глава II. 2. 1) $x < 2{,}4$; 2) $x \geq -15$; 3) $x < 5$. **3.** 1) $4\frac{1}{3} < x < 6\frac{1}{4}$; 2) $x \geq 3$; 3) $x < -5$.

Глава III. **1.** 1) $x = 0$; 2) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$; 3) $x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$; 4) $x_1 = 0$, $x_2 = 1\frac{2}{3}$; 5) $x_{1,2} = \frac{1}{2}$; 6) $x_1 = 17$, $x_2 = -1$; 7) $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{1}{3}$; 8) нет решений.

2. 1) $(x - 2)(x + 3)$; 2) $(x + 1)(2x - 3)$. **3.** 9 км/ч; 12 км/ч.

Глава IV. **1.** $18 \cdot 17 = 306$. **2.** $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 87\,480$. **3.** $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. **4.** $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. **5.** 1) 1,2; 2) 4; 3) 2,5; 4) 15.

Ответы к занимательным задачам

1. 10 метров. **2.** Нельзя. **3.** Прямоугольник со сторонами 3 и 6 единиц или квадрат со стороной 4 единицы. **4.** Соответственно 8; 12; 6; –1. **5.** $(x^2 + x + 1)(x^2 - x - 2006)$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Повторение курса „Алгебры“ 7 класса 3

ГЛАВА I
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

§1. Алгебраические выражения 7
§2. Алгебраическая дробь. Сокращение дробей. 12
§3. Приведение дробей к общему знаменателю 18
§4. Сложение и вычитание алгебраических дробей 22
§5. Умножение и деление алгебраических дробей 27
§6. Замена дробно-рациональных выражений тождественными 30
§7. Функция $y = \frac{k}{x}$. Ее свойства и график 34
§8. Арифмерический корень натуральной степени и его свойства 39
§9. Степень с рациональным показателем и его свойства 42
§10. Упрощение алгебраических выражений, содержащих степень с рациональным показателем 49
Упражнения к главе I 53
Тестовые задания к главе I 58
Исторические задачи 61
Практические и межпредметные задачи 62

ГЛАВА II
НЕРАВЕНСТВА

§11. Числовые неравенства 68
§12. Основые свойства числовых неравенств 71
§13. Сложение и умножение неравенств 75
§14. Возведение числовых неравенств в степень 80
§15. Неравенство с одним неизвестным 85
§16. Системы неравенств с одним неизвестным. Числовые промежутки 94
§17. Модуль числа. Уравнения и неравенства, содержащие модуль 105
§18. Приближенные вычисления, приближенные значения величин. Погрешность приближения 111
§19. Оценка погрешностей 114

§20. Округление чисел 117
§21. Относительная погрешность 119
Упражнения к главе II 121
Тестовые задания к главе II 124
Исторические задачи 127
Исторические сведения 128
Практические и межпредметные задачи 129

ГЛАВА III
КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§22. Квадратные уравнения и их корни 135
§23. Неполные квадратные уравнения и их решение 139
§24. Формулы нахождения корней квадратного уравнения. Дискриминант 141
§25. Теорема Виета. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители 149
§26. Биквадратные уравнения. Уравнения, сводящиеся к квадратным 156
§27. Решение задач с помощью квадратных уравнений 163
Упражнения к главе III 167
Тестовые задания к главе III 170
Исторические задачи 172
Исторические сведения 175
Практические и межпредметные задачи 176

ГЛАВА IV
АНАЛИЗ ДАННЫХ

§28. Анализ данных. Представление данных 188
§29. Среднее значение. Мода. Медиана 193
§30. Решение комбинаторных задач методом перебора 200
§31. Основной закон комбинаторики и его применение при решении задач 203
Упражнения к главе IV 210
Тестовые задания к главе IV 213
Практические и межпредметные задачи 215

ГЛАВА V

Упражнения для повторения курса „Алгебры“ 8 класса 219
Ответы к упражнениям 227

Алимов Ш.А.
А45 **Алгебра:** учебник для 8 классов общеобразовательных школ/ Ш.А. Алимов, А.Р. Халмухамедов, М.А. Мирзахмедов. – 4 издание – Ташкент: ИПТД «O‘qituvchi» 2019, – 240 с.

ISBN 978-9943-5749-8-4

УДК: 512(075.3)=161.1
ББК 22.14я72

Shavkat Arifdjanovich Alimov,
Alimdjan Raximovich Xalmuxamedov,
Mirfazil Abdilxakovich Mirzaxmedov

ALGEBRA

(Rus tilida)

Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining
8-sinfi uchun darslik

Qayta ishlangan 4-nashri

«O‘qituvchi» nashriyot-matbaa ijodiy uyi
Toshkent – 2019

Original-maket «Davr nashriyoti» MCHJ da tayyorlandi.

Перевод с узбекского Г.Э. Юсуповой
Редактор *Г. Юсупова*
Дизайнер-оформитель *Р. Запаров*
Компьютерная верстка *Х. Сафаралиев*
Корректор *Ф. Хамидова*
Набор текста *С. Ниязова*

Издательская лицензия AI № 012. 20.07.2018
Сдано в печать с оригинал-макета 24.07.2019. Формат $70 \times 90^{1}/_{16}$.
Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Условно-печатные л. 17,55.
Учетно-издательские л. 16,6. Тираж 69 086 экз. Заказ №

Агентство информации и массовых коммуникаций при Администрации Президента Республики Узбекистан. Издательско-полиграфический творческий дом “O‘qituvchi“ Ташкент – 206, массив Юнусабад, ул. Янгишахар, дом 1. Договор № 53-19.

Сведения о состоянии учебника, выданного на прокат

№	Имя, фамилия ученика	Учеб-ный год	Состояние учебника при получении	Подпись классного руководителя	Состояние учебника при сдаче	Подпись классного руководи-теля
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Таблица заполняется классным руководителем при передаче учебника в пользование и при возвращении назад в конце учебного года. При заполнении таблицы используются следующие оценочные критерии:

Новый учебник	Состояние учебника при первой передаче
Хорошо	Обложка цела, не оторвана от основной части книги. Все страницы в наличии, не порваны, на страницах нет записей и помарок.
Удовлетвори-тельно	Обложка не смята, слегка испачкана, края стерты. Удовлетворительно восстановлен пользователем. Вырванные страницы восстановлены, но некоторые страницы исчерчены.
Неудовлетво-рительно	Обложка испачкана, порвана, корешок оторван от основной части книги или совсем отсутствует. Страницы порваны, неко-торых вообще не хватает, имеющиеся исчерчены. Учебник к дальнейшему пользованию не пригоден, восстановить нельзя.