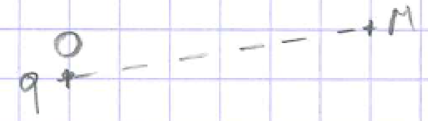
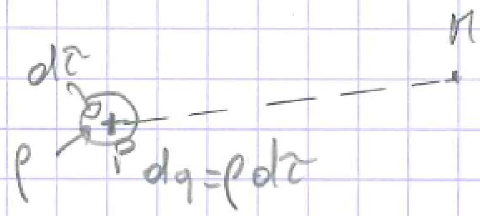
Les Postulats de l'électromagnétisme

Retour sur l'électrostatique et la magnétostatique :

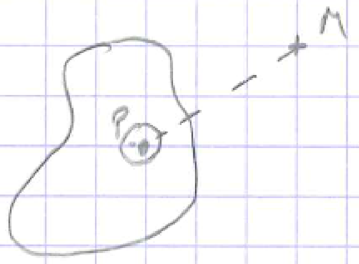
*



$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|^3}$$



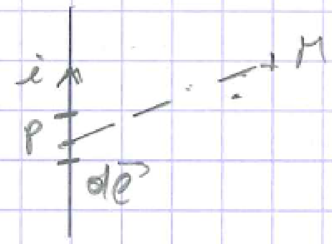
$$d\vec{E}(M) = \frac{\rho\, d\tau}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{PM}}{PM^3}$$



$$\vec{E}(M) = \iiint_V \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{PM}}{PM^3}\, d\tau$$

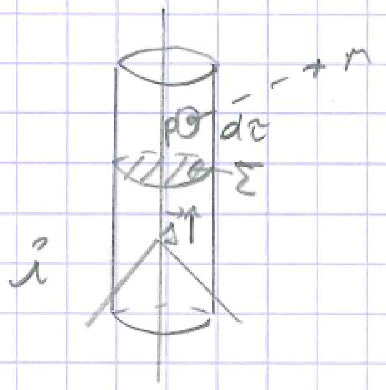
Théorème de Gauss : $\oiint_\Sigma \vec{E} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ ($\vec{E}$ à circulation conservative)

*



$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i\, d\vec{\ell} \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$

$$\vec{B}(M) = \int_{fil} \frac{\mu_0 i\, d\vec{\ell} \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$



$i = \iint_\Sigma \vec{j}\cdot d\vec{S}$ $\quad \vec{j}$: densité volumique de courant électrique

$$d\vec{B}(M) = \mu_0 \frac{\vec{j}\, d\tau \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$

$$\vec{B}(M) = \iiint_V \mu_0 \frac{\vec{j} \wedge \vec{PM}}{PM^3}\, d\tau$$

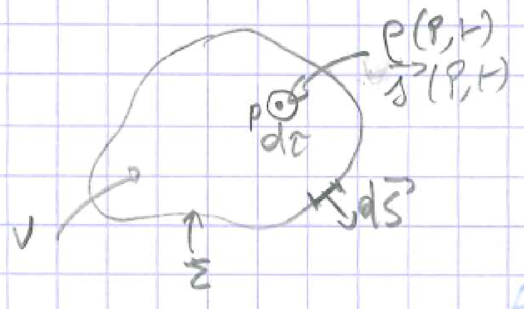
Théorème d'Ampère : $\oint_\mathcal{C} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0\, i_{enlacé}$

($\vec{B}$ est à flux conservatif)

$\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l}\text{Sources de } \vec{E} \text{ (statique)} \rightarrow \rho \text{ charge} \\ \text{Sources de } \vec{B} \text{ (statique)} \rightarrow \vec{j} \text{ courant}\end{array}}$

I Couplage de $\vec{E}$ et $\vec{B}$

1-1 Equation de continuité



Les sources des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont variables dans le temps

Equation de conservation de la charge.

$Q(t)$ charge de V_Σ t

$Q(t+dt)$ charge de V_Σ $t+dt$

$$Q(t+dt) = Q(t) - \Phi_s \, dt$$

et $\Phi_s = I(t)$ courant électrique sortant

$$\frac{dQ}{dt} + I(t) = 0 \quad \text{et} \quad Q(t) = \iiint_V \rho \, d\tau$$

$$I(t) = \oiint_\Sigma \vec{j} \cdot \vec{dS}$$

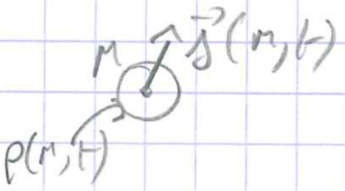
$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\tau + \oiint \vec{j} \cdot \vec{dS} = 0$$ on applique Ostrogradsky

$$\Rightarrow \iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{j}) \right) d\tau = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$ Équation locale de conservation de la charge (équation de continuité)

$\Rightarrow$ en régime variable dans le temps $\boxed{\vec{E} \text{ et } \vec{B} \text{ sont couplés}}$

1.2 Les équations de Maxwell



$$\boxed{\begin{array}{ll}
(1)\ \operatorname{div}(\vec{E}(M,t)) = \dfrac{\rho(M,t)}{\varepsilon_0} & \text{Maxwell-Gauss} \\
(2)\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{E}(M,t)) = -\dfrac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t} & \text{Maxwell-Faraday} \\
(3)\ \operatorname{div} \vec{B}(M,t) = 0 & \\
(4)\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}(M,t) + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \text{Maxwell-Ampère}
\end{array}}$$

(Ces équations sont toujours vraie quelque soit le milieu)

$\varepsilon_0 \rightarrow$ permittivité du vide (absolue)

$\mu_0 \rightarrow$ perméabilité du vide

Remarque : $\dfrac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$ SI ; $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ où $c = 3 \times 10^8 \, m.s^{-1}$

1.3 Les potentiels $\vec{A}$ et V

On déduit de (3) $\operatorname{div}(\vec{B}) = 0$

$\Rightarrow \exists \vec{A}$ tel que $\boxed{\vec{B} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{A})}$ où $\vec{A}$ potentiel vecteur

(car $\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\ldots)) = \vec{0}$)

$\Rightarrow$ Dans l'équation (2) : $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{A}))$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{E}) = -\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0} \quad \text{car} \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}(\ldots)) = 0$$

donc $\exists\, V$ tel que $\vec{E} + \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$

où V potentiel scalaire

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

$\left(\vec{E}_m = -\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right.$ champ électromoteur$\left.\right)$

Remarque : $\vec{A}$ et V ne sont pas uniques mais ils sont couplés

$\text{div}(\vec{A}) + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial V}{\partial t} = 0$ (Jauge de Lorentz)

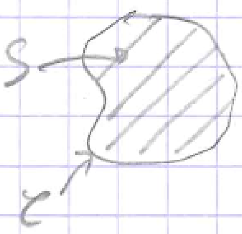
1.4 Écriture intégrée (interprétation physique)

(1) $\text{div}(\vec{E}) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ d'où $\iiint_V \text{div}(\vec{E})\, d\tau = \dfrac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho\, d\tau$

$\oiint_\Sigma \vec{E} \cdot d\vec{S} = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ donc $\phi(\vec{E}) = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ (Théorème de Gauss)

(3) $\text{div}\, \vec{B} = 0 \Rightarrow \oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ donc $\vec{B}$ est à Flux conservatif

(2) $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ d'où $\iint_S \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) \cdot d\vec{S} = -\dfrac{\partial}{\partial t} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$



l'application du théorème de Stokes entraine :

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi(\vec{B})\right)}$$ Loi de Faraday

(4) $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$\iint_S \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_S \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \cdot d\vec{S}$

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \left(i_{enlacé} + \iint_S \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S} \right)}$$ Théorème d'Ampère généralisé

$\Rightarrow \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ c'est une densité volumique de courant

$\vec{j}_D = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ courant de déplacement

1.5 Retour sur la statique

* $\text{div}(\vec{E}) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$: théorème de Gauss
* $\text{div}(\vec{B}) = 0$: $\vec{B}$ est à Flux conservatif
* $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = \vec{0}$: $\vec{E}$ est à circulation conservative et il existe V tel que $\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)}$
* $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$: théorème d'Ampère

Remarque : il existe $\vec{A}$ tel que $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A})$

$\text{div}(\vec{j}) + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \text{div}(\vec{j}) = 0$

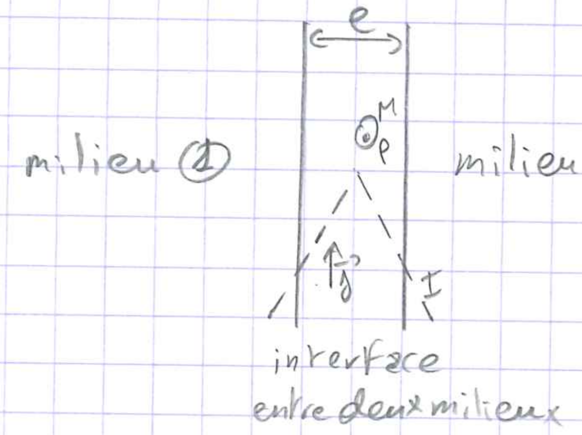
$\Rightarrow \vec{j}$ est à Flux conservatif

$\oiint_\Sigma \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow$ loi des nœuds

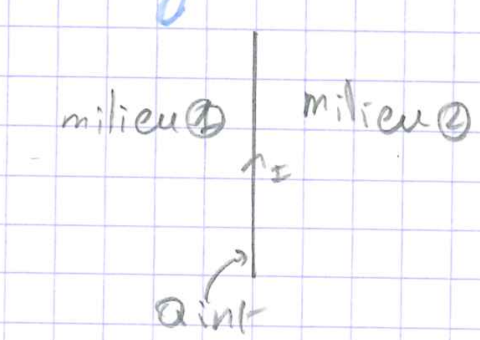
II Les relations de passage

2.1 Charge surfacique - Courant surfacique

En général les interfaces sont sans épaisseur



⇒

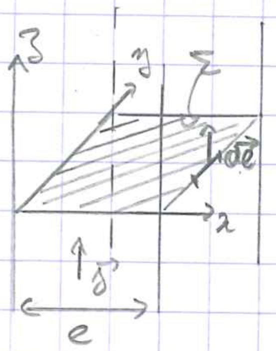


l'interface est toujours chargée (Qint) et parcourue par un courant électrique I.

Soit la charge surfacique σ telle que $Q_{int} = \sigma \times S = \rho \times e \times S$

⇒ $\boxed{\sigma = \rho e}$

Et soit le courant surfacique tel que $\boxed{\vec{j_s} = \vec{j} \times e}$



$I = \iint_\Sigma \vec{j}\cdot d\vec{S}$ où $dS = dx\,dy$ et $dx = e$

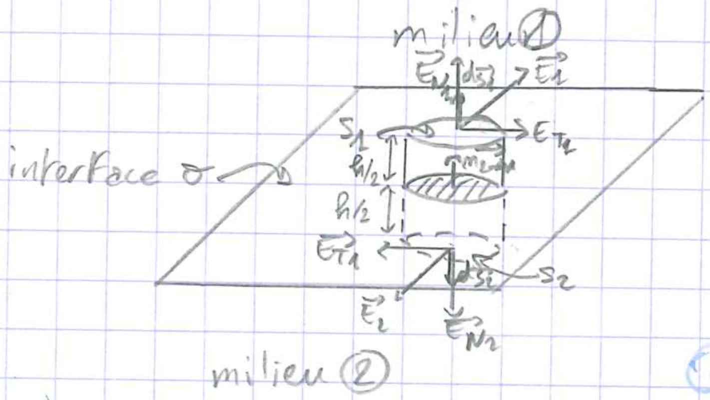
donc $I = \iint_\Sigma \vec{j}\cdot d\vec{S} = \int \vec{j_s}\cdot d\vec{e}$

Remarque: dimension de l'interface $e \sim 10^{-10}$ m (dimension d'un atome)

⇒ Ceci est une surface tant que $\boxed{\lambda \gg e}$

donc $\lambda_{max} \sim 10^{-8}$ m (UV)

2.2 Cas du champ électrique



$\Sigma = S_1 \cup S_2 \cup S_{lat}$

$div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ → théorème de Gauss

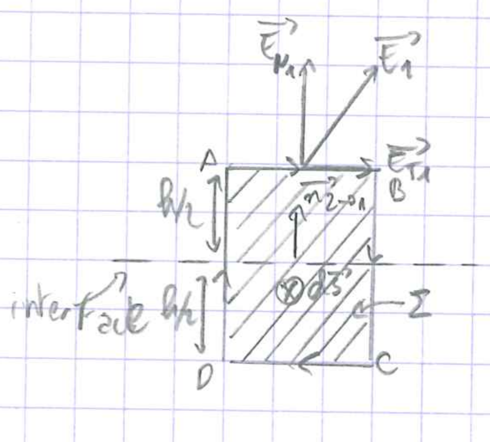
théorème de Gauss: $\oiint_\Sigma \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

$Q_{int} = \sigma \times S$ $(S = S_1 = S_2)$

$\Rightarrow \iint_{S_1} \vec{E_{N_1}}\cdot\vec{n}_{2\to1}\, dS + \iint_{S_2} \vec{E_{N_2}}\cdot(-\vec{n}_{2\to1})\, dS + \iint_{S_{lat}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$

$h \to 0$ et $S_{lat} \to 0$ donc $\iint_S (\vec{E_{N_1}} - \vec{E_{N_2}})\cdot\vec{n}_{2\to1}\, dS = \iint_S \frac{\sigma\, dS}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E_{N_1}} - \vec{E_{N_2}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{2\to1}}$



$\vec{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\phi(\vec{B})$

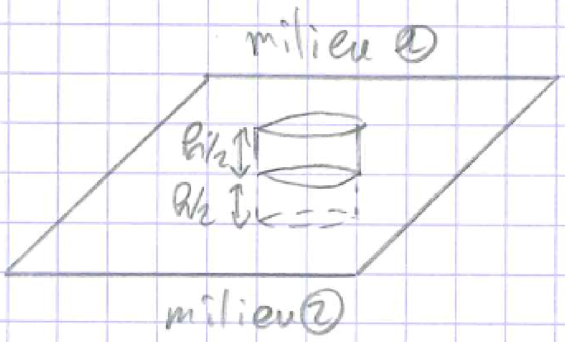
$\oint_{ABCDA} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E_1}\cdot d\vec{l_1} + \int_C^D \vec{E_{T_2}}\cdot d\vec{l_2} + \cancel{\int_B^C \vec{E}\cdot d\vec{l}} + \cancel{\int_D^A \vec{E}\cdot d\vec{l}}$

$h \to 0 \Rightarrow A \to D$ et $B \to C$

$\Rightarrow \Sigma \to 0$ et $\phi(\vec{B}) = 0$

$$\int_A^B (\vec{E}_{T_1} - \vec{E}_{T_2}) \cdot d\vec{l}_2 = 0$$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_{T_1} = \vec{E}_{T_2}}$ il y a continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$



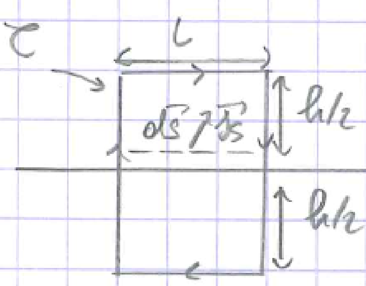
2.3 Cas du champ Magnétique

* $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ donc $\iint_\Sigma \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\vec{B}_{N_1} = \vec{B}_{N_2}}$ continuité de la composante normale de $\vec{B}$

* $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

le théorème de Stokes donne :



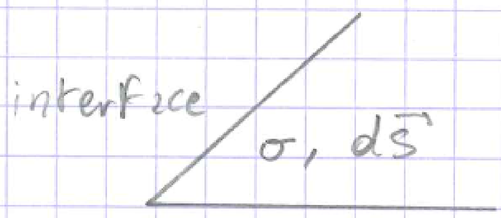
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_\Sigma \vec{j} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\iint_\Sigma \vec{E} \cdot d\vec{S}\right)$$

$h \to 0$ et $\Sigma \to 0$ nous amène à :

$$\iint_\Sigma \vec{j} \cdot d\vec{S} = j_S \times L \quad \text{et} \quad \iint_\Sigma \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{0}$$

d'où $\boxed{\vec{B}_{T_1} - \vec{B}_{T_2} = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{2\to 1}}$

2.4 Conclusion



$\boxed{\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{2\to 1}}$

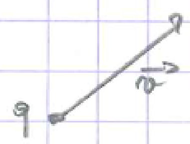
$\boxed{\vec{B}_1 - \vec{B}_2 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{2\to 1}}$

Si $\sigma = 0$ et $\vec{j}_S = \vec{0} \Rightarrow \vec{E}$ et $\vec{B}$ sont continus

Remarque $\vec{A}$ et V sont toujours continus

III Énergie électromagnétique :

3.1 Interaction matière-rayonnement



$\vec{f} = q(\vec{E} + \underbrace{\vec{v} \wedge \vec{B}}_{\text{ne travaille pas}})$ Force de Lorentz

$P = \vec{f} \cdot \vec{v} = (q\vec{v}) \cdot \vec{E}$

A l'échelle mésoscopique :

$dq_{mobile} = \rho_m \, d\tau_{mobile}$

Remarque : en général $d\tau$ n'est pas chargé ($\rho = \rho_{fixe} + \rho_{mobile} = 0$)

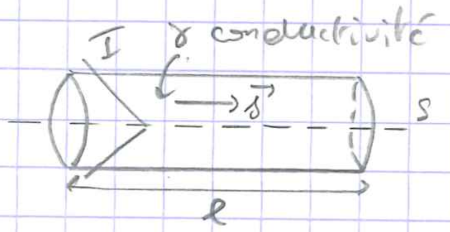
$d\vec{f} = \rho_m d\tau (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \Rightarrow dP = (\rho_m \vec{v} \, d\tau) \cdot \vec{E}$

et $\boxed{\rho_m \vec{v} = \vec{j}}$ densité volumique de courant

$\Rightarrow dP = (\vec{j} \cdot \vec{E}) d\tau$

$\boxed{\vec{j} \cdot \vec{E}}$ puissance volumique reçue par la matière lors du passage du champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$

Remarque : Cas d'un conducteur



Loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

$$P_{vol} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2 = \frac{j^2}{\gamma}$$

Volume $= l \times S$ donc $P_{tot} = \dfrac{j^2 \times l \times S}{\gamma}$ ($j \to$ constant)

$I = j \times S$ $\qquad R_{elec} = \dfrac{1}{\gamma} \dfrac{l}{S}$

$$P_{tot} = \frac{R_{elec} \times S}{l} \times j^2 \times l \times S \Rightarrow \boxed{P_{tot} = R I^2}$$ puissance dissipée par effet Joule

B.2 Équation locale de Poynting

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \vec{E} \cdot \left(\frac{\vec{rot} \vec{B}}{\mu_0} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \qquad \left(\vec{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\mathrm{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{rot}(\vec{E}) - \vec{E} \cdot \vec{rot} \vec{B}$$

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = -\varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \vec{rot}(\vec{E}) - \frac{1}{\mu_0} \mathrm{div}(\vec{E} \wedge \vec{B})$$

$$= -\varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \mathrm{div}(\vec{E} \wedge \vec{B})$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) - \mathrm{div}\left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \mathrm{div}\left(\frac{\vec{E}}{\mu_0} \wedge \vec{B} \right) = -\vec{j} \cdot \vec{E}}$$ Puissance volumique reçue par $(\vec{E}, \vec{B})$

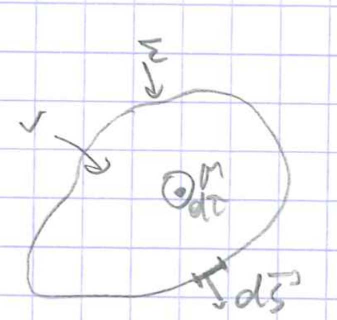
$\Rightarrow$ Équation de conservation de l'énergie (Équation locale de Poynting)

On définit alors $\boxed{\vec{\pi} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}}$ vecteur de Poynting

$\boxed{u_{em} = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \dfrac{B^2}{2\mu_0}}$ densité volumique d'énergie électromagnétique

Remarque : $u_e = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2}$ densité volumique d'énergie électrique

$u_m = \dfrac{B^2}{2\mu_0}$ densité volumique d'énergie magnétique



Bilan de Puissance : $\displaystyle \iiint_V \frac{\partial}{\partial t}(u_{em}) d\tau + \iiint_V \mathrm{div}(\vec{\pi}) d\tau = -\iiint_V (\vec{j} \cdot \vec{E}) d\tau$

$$\frac{d}{dt}(U_{em}) + \oint\!\!\oint \vec{\pi} \cdot d\vec{S} = -\iiint_V (\vec{j} \cdot \vec{E}) d\tau$$

$U_{em} = \iiint_V u_{em} \, d\tau$ énergie électromagnétique du volume V

$\iiint (-\vec{j} \cdot \vec{E}) d\tau$ puissance reçue (puissance absorbée)

$$U_{em}(t+dt) = U_{em}(t) + P_{reçue} dt + \underbrace{P_{ext}}_{-\oint\!\!\oint \vec{\pi} \cdot d\vec{S}} dt$$

$\dfrac{dU_{em}}{dt} + P_{rayonnée} = P_{reçue}$; $P_{rayonnée} = \oint\!\!\oint \vec{\pi} \cdot d\vec{S}$ puissance échangée à travers la surface en $W \cdot m^{-2}$