实验报告内容要求

一、实验题目名称

二、专业、班级、姓名

三、目的和意义

方法的理论意义和实用价值，如 Neville 插值算法利用逐次线性插值产生一个从低到高次的 Langrange 插值多项式序列，避免了当增加新节点时从头开始计算的问题。又如改进牛顿法，它适用于任意连续函数在大范围中求解，并且避免计算导数值，使其更具有实用性。

四、计算公式（算法）

五、结构程序设计

六、结果讨论和分析

如初值对结果的影响；不同方法的比较；该方法的特点和改进；整个实验过程中（包括程序编写，上机调试等）出现的问题及其处理等广泛的问题，以此扩大知识面和对实验环节的认识。

实验一 Hamming 级数求和

一、问题提出

Hamming 于 1962 年提出了一个级数求和问题：

$$\psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+x)}$$

取 3001 个 x 值，即 x = 0.0，0.1，0.2，…，300.00，计算所有关于 x 的级数，并要求误差控制在 1.0e−10 精度范围。

二、要求

1、给出合适的级数求和误差控制算法，考虑如何减少计算步骤和时间；
2、输出形式为：

0.10 1.644934066848
...
1.00 1.000000000000
...
2.00 0.750000000000
...
300.0 0.020923257923246或0.0209422129

3、考虑直接计算为什么会导致计算机计算速度很慢？

三、目的和意义

1、了解误差产生的原因；
2、明确合理算法构造的优点；
3、大致熟悉 C 语言程序编写过程。

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+x)}$$

x=1 时， 有$\varphi(1)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=1$，

则$\varphi(x)=\varphi(x)-\varphi(1)+\varphi(1)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-x)}{k(k+1)(k+x)}+1$

$=(1-x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+x)}+1$

另$\omega(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+x)}$

x=2 时，有 $\omega(2)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}(\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2})=\frac{1}{4}$

$\omega(x)=\omega(x)-\omega(2)+\omega(2)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2-x)}{k(k+1)(k+2)(k+x)}+\frac{1}{4}$

从而$\varphi(x)=(1-x)(2-x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+x)}+\frac{1-x}{4}+1$

又$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+x)}$的余项为：

$$\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+x)}<\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{k^4}<\int_N^{\infty}\frac{1}{x^4}dx=\frac{1}{3N^3}<1.0\text{e-}10$$

则有 $N>\sqrt[3]{\frac{1}{3*10^{-10}}}\approx 1483.801582$

从而取 N=1494 时，其余项的值小于 1.0e-10

$\boxed{\text{故只需求}\ \varphi(x)=(1-x)(2-x)\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+x)}+\frac{1-x}{4}+1}$