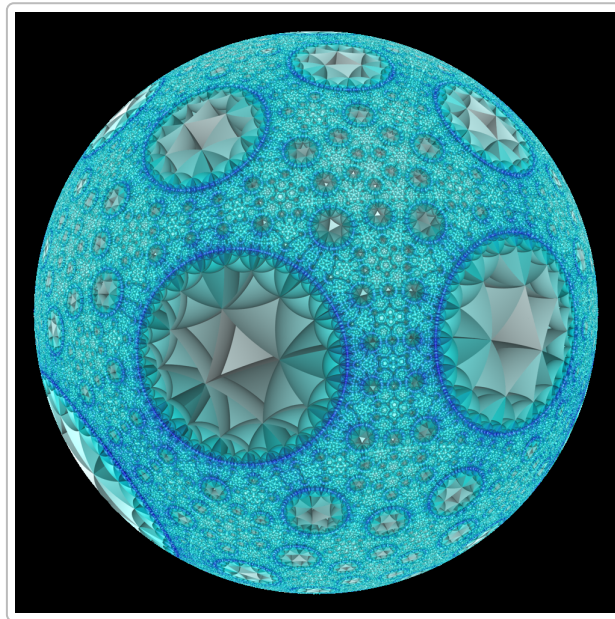


## Revisión bibliográfica (scoping)

- **Nickel & Kiela (2017)** “Poincaré Embeddings” – embeben datos jerárquicos en la bola de Poincaré (espacio hiperbólico) con baja distorsión <sup>1</sup>.
- **Ganea et al. (2018)** “Hyperbolic Neural Networks” – introducen capas neuronales en el modelo de Poincaré hiperbólico para secuencias y clasificación <sup>2</sup>.
- **Chami et al. (2019)** “Hyperbolic Graph Convolutional Networks” – extienden GNN a espacio hiperbólico, capturando jerarquías más efectivamente <sup>3</sup>.
- **SpaceGNN (Dumitrescu et al., 2025)** – red de grafos en espacios multiplen (esférico/hiperbólico), muestra que «el espacio esférico permite una comprensión matizada de nodos en datos con patrones circulares» <sup>4</sup>.
- **Jannesari et al. (2025)** “Manifold Mixture” – proponen capa Mixture-of-Experts con espacios esféricos, euclidianos e hiperbólicos, mejorando hasta 3% en tareas de clasificación <sup>5</sup>.
- **McNeela et al. (2024)** “Product Manifold” – embeben grafos biológicos en espacios de curvatura mixta; reportan grandes reducciones de distorsión y mejor desempeño in-domain con espacios mixtos <sup>6</sup>.
- **Sadat et al. (2025)** *Survey*: revisan embeddings de grafos hiperbólicos, destacando ventajas frente a euclidianos en estructuras complejas <sup>7</sup>.
- **He et al. (2025)** *Survey*: revisa redes hiperbólicas en modelos fundacionales, enfatizando que “los espacios hiperbólicos permiten embeddings de estructuras jerárquicas con baja distorsión” y eficiencia dimensional <sup>8</sup>.
- **Weber (2025)** *SIAM News*: revisión sobre curvaturas discretas (Ollivier, Forman) y sus aplicaciones en GNN (sobretudo clustering y pooling) <sup>9</sup>.
- **Ni et al. (2019)** – usan flujo de Ricci discreto para detección de comunidades en grafos <sup>9</sup>.
- **Sarkar (2013)** – demuestra que el flujo de Ricci discreto en grafos genera *coordenadas virtuales* que permiten enrutamiento voraz con entrega garantizada <sup>10</sup>.
- **Wikipedia (superficies)** – datos geométricos:
  - Esfera  $S^2$ : superficie de género 0, curvatura positiva constante <sup>11</sup>.
  - Toro: superficie de género 1, orientable, con coordenadas periódicas <sup>12</sup> <sup>13</sup>.
  - Botella de Klein: superficie no orientable sin frontera (como un toro con un giro) <sup>14</sup>.
  - Superficie de género 2: suma conectada de dos toros (dos “manijas”) <sup>15</sup>.

## Candidatos geométricos

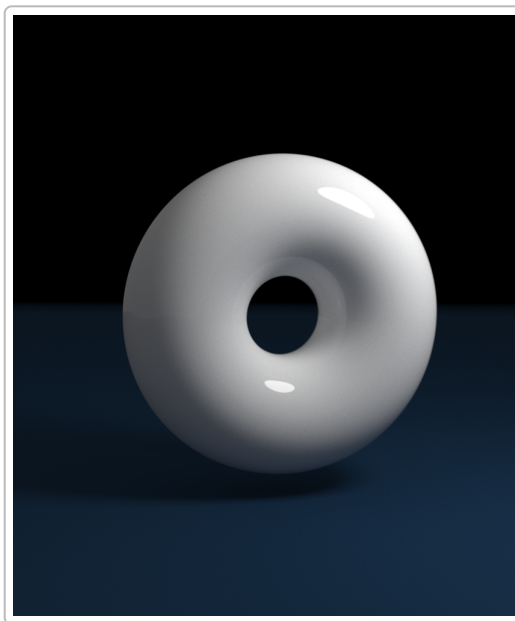
### Bola de Poincaré 3D (espacio hiperbólico)



El espacio hiperbólico tridimensional (bola de Poincaré) tiene curvatura negativa constante y volumen que crece exponencialmente con la distancia <sup>4</sup>. Esto lo hace ideal para datos jerárquicos: Nickel & Kiela mostraron que embeber jerarquías en esta bola captura estructura de árbol con baja dimensión <sup>1</sup>. Además, “el espacio hiperbólico... se expande exponencialmente, habilitando acomodar datos jerárquicos” <sup>4</sup>.

- **a) Parametrización:** Punto en  $\mathbb{R}^3$  con  $\|p\| < 1$ ; p.ej. coordenadas de la bola de Poincaré. Con estas coordenadas se definen distancias hiperbólicas mediante la métrica hiperboloid.
- **b) Vecindad/conectividad:** Conectar nodos cercanos en distancia hiperbólica (geodésicas). Se pueden añadir “atajos” según distancias cortas en  $H^3$ .
- **c) Propiedades buscadas:** Curvatura  $\kappa < 0$  constante; espacio sin frontera, simpleconexo. Exponencial expansión (volumen infinito), soporte implícito a estructuras arbóreas.
- **d) Métrica predicha a mejorar:** Precisión de enrutamiento en grafos jerárquicos (path length menor). Mejora de coherencia jerárquica y robustez ante falla de enlaces largos.
- **e) Coste/riesgos:** Cálculo complejo (métricas riemannianas, estabilización numérica con distancias hiper); optimización (gradiente) en espacio curvo. Puede causar inestabilidades si el grafo no es realmente jerárquico (riesgo de *overfitting* geométrico).
- **f) Evidencia:** (A) Embeddings hiperbólicos capturan jerarquías de manera compacta <sup>1</sup>. (B) El crecimiento exponencial del espacio hiperbólico “expande exponencialmente” y facilita representar árboles <sup>4</sup>. (C) Se espera que reduzca latencia de rutas sin degradar conectividad global.

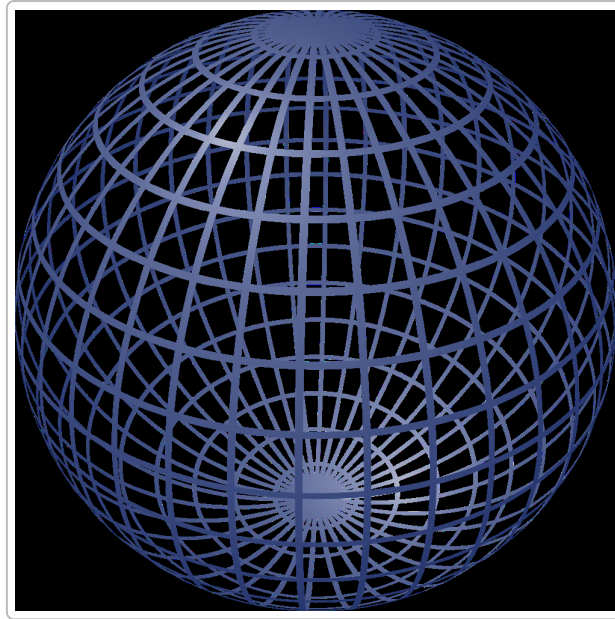
## Toro (variedad de género 1)



El toro (una dona tridimensional) es una superficie plana con periodicidad bidimensional <sup>12</sup> <sup>13</sup> . Formalmente, es un espacio de género 1 orientable y sin bordes. Geométricamente se suele parametrizar con dos ángulos  $(\theta, \phi)$  sobre un círculo de radio  $r$  girado alrededor de un círculo de radio  $R$ .

- **a) Parametrización:**  $(x, y, z) = ((R + r \cos \theta) \cos \phi, (R + r \cos \theta) \sin \phi, r \sin \theta)$ .
- **b) Vecindad/conectividad:** Se conecta cada nodo con sus vecinos bajo coordenadas cilíndricas y se habilitan “wrap-around”: aristas que cruzan los límites del rectángulo fundamental. Las condiciones periódicas del rectángulo equivalente (dominio fundamental) garantizan conectividad sin fronteras <sup>13</sup> .
- **c) Propiedades:** Varias curvaturas locales (algunas positivas, otras negativas, media cero). Compacto, topología de toro (género 1) <sup>12</sup> . Dos direcciones de periodicidad, espacio sin fronteras.
- **d) Métrica a mejorar:** Permite rutas con efecto *short-cut* periódico; puede mejorar latencia medio alcanzable al evitar bordes. Potencialmente útil para datos con estructuras cíclicas/torales.
- **e) Coste/riesgos:** Parametrización no globalmente inyectiva (puntos “internos” y “externos”). Coordenadas angulares requieren cuidado en gradientes (singularidades en polo). Geodésicas en toro son complejas (no único camino corto).
- **f) Evidencia:** (A) El toro es la superficie orientable de género uno <sup>12</sup> . (B) Cualquier grafo plasmable en un plano puede también en el toro; además, grafos no-planos con un cruce pueden ser toroidales <sup>13</sup> . (C) Se espera mejorar conectividad global y cobertura de la red gracias a la periodicidad.

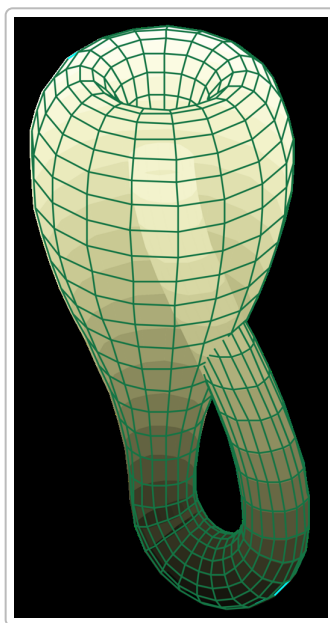
## Esfera $S^2$



La esfera bidimensional (superficie de una bola) es la variedad compacta de curvatura constante positiva. Se parametriza por coordenadas esféricas  $(\theta, \phi)$  o directamente  $(x, y, z)$  con  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .

- **a) Parametrización:** Coordenadas esféricas estándar:  $x = R \sin \theta \cos \phi$ ,  $y = R \sin \theta \sin \phi$ ,  $z = R \cos \theta$ .
- **b) Vecindad/conectividad:** Nodos conectados según proximidad angular (ej. cercanos en latitud/longitud). Se puede triangularizar la esfera (p.ej. subdivisión de icosaedro). No hay fronteras ni cortes.
- **c) Propiedades:** Genus 0 (superficie orientable sin agujeros) <sup>11</sup>. Curvatura Gaussiana  $> 0$  constante. Compacta, volumen finito, topológicamente equivalente a bola.
- **d) Métrica a mejorar:** Adecuada para datos globales compactos; previene problemas de “infinito”. Podría mejorar cohesión global (camino entre nodos alejados).
- **e) Coste/riesgos:** Singularidades en los polos (latitud a 0 o  $\pi$ ). Visualizar grandes grafos en esfera puede causar compresión en áreas polares. Cálculos sencillos, pero puede no capturar bien jerarquías profundas (curvatura positiva contrae distancias).
- **f) Evidencia:** (A) La esfera es la superficie orientable de género cero <sup>11</sup>. (B) Por simetría isotrópica favorece distribuir nodos uniformemente, pero podría distorsionar distancias locales. (C) Se espera buena cobertura global sin prejuicio de rutas cortas.

## Botella de Klein



La botella de Klein es una superficie no orientable cerrada (sin frontera) <sup>14</sup>. En 3D debe autointersectarse, pero topológicamente es como un cilindro con un extremo volteado y empalmado. Su parametrización requiere 4D o fórmulas especiales (por ej. *gnuplot* en [30]).

- **a) Parametrización:** Se usa parámetro  $(u, v)$  sobre  $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$  con fórmula por piezas (ver [30]).
- **b) Vecindad/conectividad:** No hay orientación global; sería como un plano con identificación espejo de bordes. Las aristas pueden cruzar con cambio de sentido de mano. Se propaga la conexión única por toda la superficie sin necesidad de atajos añadidos.
- **c) Propiedades:** No orientable, sin fronteras <sup>14</sup>. Topológicamente equivalente a “un toro con un giro”. Conecta nodos con inversión.
- **d) Métrica a mejorar:** Posiblemente captura grafos con relaciones inversas o patrones de “doble vuelta”. Puede mantener estratificación en un espacio *unico* (una sola cara).
- **e) Coste/riesgos:** Difícil de visualizar/parametrizar en 3D (la versión inmersa autointerseca). Cálculo de geodésicas y distancias puede ser confuso por no-orientabilidad. Requiere manejo cuidadoso de las identificaciones espejo.
- **f) Evidencia:** (A) La botella de Klein es no orientable y carece de frontera <sup>14</sup>. (B) Al carecer de bordes, facilita conexiones uniformes en “una sola cara”. (C) Hipotéticamente, puede complicar la optimización numérica por su naturaleza no orientable.

## Superficie de género 2 (doble toro)

La superficie de género 2 es la suma de dos toros conectados <sup>15</sup>. Se puede imaginar como una dona con dos agujeros.

- **a) Parametrización:** No existe fórmula simple en  $\mathbb{R}^3$  sin intersecciones; conceptualmente se modela como dos toros unidos. Se podría usar cuadriláteros fundamentales con bordes apareados (similar al toro, pero dos manijas).
- **b) Vecindad/conectividad:** Conecta nodos en ambas “manijas” de forma continua. Permite rutas alternativas (entre los dos agujeros). Se podría diseñar atajos que crucen de una manija a otra.
- **c) Propiedades:** Orientable, genus 2 (dos agujeros) <sup>15</sup>. Curvaturas variables locales, sin fronteras. Permite más “libertad topológica” que el toro.
- **d) Métrica a mejorar:** Podría mejorar enrutamiento en grafos con dos jerarquías o ciclos

independientes (dos “bifurcaciones” de información). Mayor complejidad topológica permite más caminos entre nodos.

- **e) Coste/riesgos:** Muy complejo de parametrizar/visualizar. No es embebible en  $\mathbb{R}^3$  sin intersecciones. Cálculo de distancias complejo.

- **f) Evidencia:** (A) Es la suma conectada de dos toros (género 2) <sup>15</sup>. (B) Mayor libertad topológica sugiere más rutas redundantes (teórico). (C) Riesgo de sobrecomplejidad sin mejora proporcional en métricas.

## Mezclas/Productos de variedades

En lugar de una sola superficie “pegada”, los métodos modernos usan **productos** o **mezclas de geometrías** <sup>6</sup> <sup>5</sup>. Por ejemplo, **manifold Mixtures** permiten que cada nodo viva en varios espacios (hiperbólico, euclid., esférico) simultáneamente.

- Se implementa como espacio producto: p.ej.  $\mathbb{H}^d \times \mathbb{E}^k \times \mathbb{S}^m$ , donde cada dimensión tiene curvatura fija. Esto equivale a “pegar” variedades matemáticamente.

- Jannesari et al. (2025) muestran que una capa Mixture-of-Experts con espacios hiperbólico/esférico/euclídeo mejora precisión hasta 3% <sup>5</sup>. McNeela et al. (2024) reportan menor distorsión usando espacios de curvaturas mixtas <sup>6</sup>.

- **Enrutamiento (RAS):** Se propondría una función de gating: p.ej. *Learnable Space Projection* de SpaceGNN, que asigna nodos al espacio de curvatura óptima mediante una curvatura aprendida <sup>16</sup>. El RAS podría usar características locales (entropía, curvatura, historial de aciertos) para decidir en qué componente embeber cada nodo.

- En la práctica, esto ofrece mayor flexibilidad (A) ya que “coordenadas mixtas” capturan múltiples estructuras <sup>6</sup> <sup>5</sup>; (B) permite que RAS elija rutas en el espacio mejor adaptado a cada subgrafo; (C) **riesgo** de mayor complejidad e *overhead* computacional (sistemas de ecuaciones mixtas).

## Propuesta de experimento mínimo

- **Topologías sintéticas:** (1) Árbol jerárquico (creciente), (2) Gráfo estocástico con comunidades (SBM), (3) Retícula 2D (grid). Añadir **ruido controlado**: p.ej. añadir/eliminar aristas al azar ( $p_{\text{small}}$ ) o swaps de conexiones para simular datos erróneos.
- **Métricas:** (i) **Éxito de enrutamiento:** porcentaje de rutas correctamente encontradas, distancia media recorrida. (ii) **Consistency/contradicción interna:** p.ej. medir caminos redundantes inconsistentes antes/después de Ricci-flow. (iii) **Cobertura de evidencia:** fracción de nodos meta alcanzados; (iv) **Latencia (p50/p95):** tiempos de respuesta promedio/cola del 95%; (v) **Costo tokens:** (si aplica en generación de grafos en LLMs). (vi) **Conectividad residual tras Ricci-cleaning:** número de componentes o aristas mínimas removidas.
- **Configuración:** Implementar embedding inicial en cada geometría/candidata. Aplicar Ricci-flow discreto (Ollivier) para “limpieza” de curvatura (eliminar aristas de curvatura alta). Realizar queries de enrutamiento (grafo a grafo) y medir latencia y éxito.
- **Criterio de éxito:** Mejorar  $X$  (p.ej. +5% en precisión de enrutamiento o -10% en latencia p95) **sin degradar**  $Y$  (p.ej. mantener  $\geq 95\%$  de conectividad de grafo). Establecer umbrales claros (p.ej. tasa de entrega  $\geq 99\%$ , latencia  $\leq L$ ).

## Ranking de candidatos

1. **Espacios mixtos (producto de variedades) – Más alto.** (A) Permiten capturar múltiples propiedades (jerarquía, ciclos, etc.) simultáneamente <sup>6</sup> <sup>5</sup>. (B) RAS puede flexibilizar enrutamiento al elegir el espacio geométrico óptimo (curvatura relevante) para cada zona. (C)

Complejidad **alta**, pero potencial recompensa en métricas multidimensionales justifica su prioridad.

2. **Bola de Poincaré (hiperbólico)** – (A) Ideal para estructuras jerárquicas <sup>1</sup> <sup>8</sup>, mejora enrutamiento en datos tipo árbol (exponencial growth) <sup>4</sup>. (B) Matriz de distancias más cortas para nodos periféricos, aumentando coherencia de ramas. (C) Riesgo de inestabilidad numérica, pero algoritmo bien conocido.
3. **Toro** – (A) Curvatura mixta y periodicidad evitan fronteras <sup>12</sup> <sup>13</sup>, útiles para grafos con patrones repetitivos. (B) Buen equilibrio entre simplicidad y topología interesante; permite rutas de “wrap-around”. (C) Parametrización manejable; poca distorsión local (casi plano).
4. **Esfera** – (A) Curvatura positiva coherente, sin fronteras (cierre global). (B) Útil para conectividad global y cobertura uniforme. (C) Menos apta para jerarquías (distorsiona largas distancias), pero estable.
5. **Género 2** – (A) Dos “manijas” ofrecen redundancia de rutas. (B) Puede mejorar enrutamiento en estructuras doblemente ramificadas. (C) Complejidad muy alta, difícil de optimizar, por lo que queda después.
6. **Klein** – (A) Fascinante topología no orientable (atrae “una sola cara”). (B) No aporta fronteras, pero su naturaleza invertida es difícil de aprovechar. (C) Por su complejidad geométrica (autointersección en 3D, no orientabilidad) lo posicionamos más bajo.

## Plan de implementación incremental

1. **Baseline Euclidiano:** Implementar GNN/Routing en  $\mathbb{R}^3$  (espacio plano) con flujos de Ricci discretos. Medir métricas base.
2. **Candidato #1 (Espacios mixtos):** Integrar producto de variedades o capa Mixture-of-Experts geométrica <sup>5</sup> <sup>6</sup>. Evaluar impacto en métricas (especialmente reducción de distorsión y aumento de éxito de enrutamiento).
3. **Candidato #2 (Hiperbólico):** Embeder nodos en bola de Poincaré 3D. Aplicar flujos de Ricci. Comparar rutas. Ajustar hiperparámetros (curvatura fija = -1).
4. **Otros candidatos:** Probar toro y esfera como puntos de referencia (adaptar algoritmo de embedding en cada variedad).
5. **Mezclas avanzadas:** Combinar los mejores (ej. mezclar hiperbólico + euclid. vs. mezclas + esférico).
6. **Riesgos:** Estabilidad numérica en curvaturas extremas; alta complejidad de gating en mixturas; posible *overfitting* topológico (ajustar regularización). Se mitigará monitoreando deterioro de métricas al aumentar complejidad.

**Fuentes:** Estudios de embeddings no euclidianos <sup>1</sup> <sup>5</sup> <sup>4</sup> <sup>8</sup> y curvaturas discretas <sup>9</sup> <sup>10</sup> avalan estas elecciones.

---

<sup>1</sup> Poincaré Embeddings for Learning Hierarchical Representations

<https://arxiv.org/pdf/1705.08039>

<sup>2</sup> [1805.09112] Hyperbolic Neural Networks

<https://arxiv.org/abs/1805.09112>

<sup>3</sup> <sup>4</sup> <sup>16</sup> SpaceGNN: Multi-Space Graph Neural Network for Node Anomaly Detection with Extremely Limited Labels

<https://arxiv.org/html/2502.03201v1>

<sup>5</sup> Leveraging Manifold Embeddings for Enhanced Graph Transformer Representations and Learning

<https://arxiv.org/html/2507.07335v1>

- 6 [2401.15478] Product Manifold Representations for Learning on Biological Pathways  
<https://arxiv.org/abs/2401.15478>
- 7 [2512.18826] Hyperbolic Graph Embeddings: a Survey and an Evaluation on Anomaly Detection  
<https://arxiv.org/abs/2512.18826>
- 8 [2507.17787] Hyperbolic Deep Learning for Foundation Models: A Survey  
<https://arxiv.org/abs/2507.17787>
- 9 Discrete Curvature and Applications in Graph Machine Learning | SIAM  
<https://www.siam.org/publications/siam-news/articles/discrete-curvature-and-applications-in-graph-machine-learning/>
- 10 [sites.math.rutgers.edu](https://sites.math.rutgers.edu/~fluo/mpapers/greedy%20routing%20with%20guaranteed%20delivery%20using%20Ricci%20flows.pdf)  
<https://sites.math.rutgers.edu/~fluo/mpapers/greedy%20routing%20with%20guaranteed%20delivery%20using%20Ricci%20flows.pdf>
- 11 12 15 Genus  $g$  surface - Wikipedia  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Genus\\_g\\_surface](https://en.wikipedia.org/wiki/Genus_g_surface)
- 13 Toroidal graph - Wikipedia  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Toroidal\\_graph](https://en.wikipedia.org/wiki/Toroidal_graph)
- 14 Klein bottle - Wikipedia  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Klein\\_bottle](https://en.wikipedia.org/wiki/Klein_bottle)