1. cho hàm số $f$ được xác định bởi

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{nếu } x^2+y^2\neq 0,\\ 0 & \text{nếu } x^2+y^2=0.\end{cases}$$

   (a) Chứng minh rằng hàm số đã cho liên tục theo mỗi biến, nhưng không liên tục tại điểm $(0,0)$.

   (b) Hàm số đã cho có khả vi tại điểm $(0,0)$ hay không?

*Chứng minh.* (a) Tại $(x_0,y_0)$ thỏa mãn $x_0y_0\neq 0$ thì $f(x,y_0)=\frac{2xy_0}{x^2+y_0^2}$ là hàm sơ cấp nên liên tục theo biến $x$. Tương tự $f(x_0,y)$ cũng là hàm liên tục theo $y$ khi cố định $x_0$.

Ta có $f(0,y)=0$, $\forall\, y\in\mathbb{R}$ và $f(x,0)=0$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$. Do đó $f(0,y)$ và $f(x,0)$ là các hàm liên tục.

Xét tính liên tục tại điểm $(0,0)$. Để $f$ liên tục tại $(0,0)$ thì ta cần

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=f(0,0)=0.$$

Mặt khác, ta có

$$\lim_{n\to 0} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to 0} 2=2\neq\frac{2}{5}=\lim_{n\to 0}\frac{2}{5}=\lim_{n\to 0} f\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)$$

nên theo định lý về mối liên hệ giữa giới hạn kép và giới hạn dãy số, ta nhận được $f$ không liên tục tại $(0,0)$.

(b)

□

2. (Bài 412) Khai triển Mac-Laurin của hàm sau $f(x,y)=e^x\sin y$.

*Chứng minh.* Áp dụng công thức khai triển Mac-Laurin

$$\begin{aligned}f(x,y)=&f(0,0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(0,0)+R_{n+1}(x,y)\\ =&f(0,0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\sum_{i=1}^{n}\frac{k!}{i!(k-i)!}x^{k-i}y^i\frac{\partial^k f}{\partial x^{k-i}\partial y^i}(0,0)+R_{n+1}(x,y)\end{aligned}$$

trong đó $R_{n+1}(x,y)$ là phần dư

$$\begin{aligned}R_{n+1}(x,y)=&\frac{1}{(n+1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(0+\theta_n(x-0),0+\theta_n(y-0))\\ =&\frac{1}{(n+1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(\theta_n x,\theta_n y),\ 0<\theta_n<1.\end{aligned}$$

Bằng quy nạp, ta chứng minh được

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^{k-i}\partial y^i}(x,y) = \frac{\partial^k (e^x \sin y)}{\partial x^{k-i}\partial y^i} = e^x \cdot \sin\left(y + \frac{i\pi}{2}\right)$$

Do đó,

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^{k-i}\partial y^i}(0,0) = e^0 \cdot \sin\left(0 + \frac{i\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{i\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^j & \text{nếu } i = 2j+1, \\ 0 & \text{nếu } i = 2j+1. \end{cases}$$

Từ đó, ta có công thức khai triển Mac-Laurin

$$\begin{aligned} f(x,y) =& f(0,0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{k!}{(2j+1)!(k-(2j+1))!} x^{k-(2j+1)} y^{(2j+1)} \\ &+ \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{n} \frac{k!}{i!(k-i)!} x^{k-i} y^i e^{\theta_n x} \cdot \sin\left(\theta_n y + \frac{i\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

□

3. (Bài 422 f) Tìm cực trị có điều kiện của $u(x,y,z) = xy + yz$ nếu $x^2 + y^2 = 2$, $y + z = 2$ ($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

*Chứng minh.* Bước 1: Lập hàm Lagrange. Lập hàm Lagrange

$$L(x,y,z,\lambda,\beta) = xy + yz + \lambda(x^2 + y^2 - 2) + \beta(y + z - 2), \ (x > 0, y > 0, z > 0).$$

Bước 2: Tìm điểm dừng. Để tìm cực trị địa phương của hàm $u$ ta sẽ đi tìm cực trị địa phương của $L$. Giả sử $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \beta_0)$ là điểm dừng của $L$. Khi đó, ta có

$$\begin{cases} L'_x(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \beta_0) = 0, \\ L'_y(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \beta_0) = 0, \\ L'_z(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \beta_0) = 0, \\ L'_\lambda(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \beta_0) = 0, \\ L'_\beta(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \beta_0) = 0. \end{cases}$$

Ta có,

$$\begin{cases} L'_x(x,y,z,\lambda,\beta) = y + 2\lambda x, \\ L'_y(x,y,z,\lambda,\beta) = x + z + 2\lambda y + \beta, \\ L'_z(x,y,z,\lambda,\beta) = y + \beta, \\ L'_\lambda(x,y,z,\lambda,\beta) = x^2 + y^2 - 2, \\ L'_\beta(x,y,z,\lambda,\beta) = y + z - 2. \end{cases}$$

Từ đó ta có

$$\begin{cases} y_0 + 2\lambda_0 x_0 = 0, \\ x_0 + z_0 + 2\lambda y_0 + \beta_0 = 0, \\ y_0 + \beta_0 = 0, \\ x_0^2 y_0^2 - 2 = 0, \\ y_0 + z_0 - 2 = 0. \end{cases}$$

Giải hệ trên, ta nhận được

$$x_0 = y_0 = z_0 = 1,\ \lambda_0 = -\frac{1}{2},\ \beta_0 = -1.$$

Bước 3: Kiểm tra dạng toàn phương xác định dương hay âm. Ta kiểm tra dạng toàn phương

$$\begin{aligned} d^2L(1,1,1,-\frac{1}{2},-1) =& L''_{xx}(1,1,1,-\frac{1}{2},-1) + L''_{yy}(1,1,1,-\frac{1}{2},-1) + L''_{zz}(1,1,1,-\frac{1}{2},-1) \\ &+ 2L''_{xy}(1,1,1,-\frac{1}{2},-1) + 2L''_{xz}(1,1,1,-\frac{1}{2},-1) + 2L''_{yz}(1,1,1,-\frac{1}{2},-1) \end{aligned}$$

là dạng toàn phương xác định dương hay xác định âm.

Bằng tính toán, ta nhận được

$$\begin{cases} L''_{xx}(1,1,1,-\frac{1}{2},-1) = 2\lambda_0 = -1, \\ L''_{yy}(1,1,1,-\frac{1}{2},-1) = 2\lambda_0 = -1, \\ L''_{zz}(1,1,1,-\frac{1}{2},-1) = 0, \\ L''_{xy}(1,1,1,-\frac{1}{2},-1) = 1, \\ L''_{xz}(1,1,1,-\frac{1}{2},-1) = 0, \\ L''_{yz}(1,1,1,-\frac{1}{2},-1) = 1. \end{cases}$$

Từ đó, ta có

$$d^2L(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \beta_0) = -dx^2 - dy^2 + 2dxdy + 2dydz$$

Mặt khác, từ $y + z = 2$ và $x^2 + y^2 = 2$ ta nhận được $dy = -dz$ và $2xdx + 2ydy = 0$. Thay vào dạng toàn phương ở trên, ta nhận được

$$\begin{aligned} d^2L(1,1,1,-\frac{1}{2},-1) =& -dx^2 - dy^2 + 2dxdy + 2dydz = -dx^2 - dy^2 - 2dy^2 - 2dz^2 \\ =& -dx^2 - 3dy^2 - 2dz^2 < 0. \end{aligned}$$

Bước 4: Kết luận. Do dạng toàn phương $d^2L(1,1,1,-\frac{1}{2},-1)$ là xác định âm, nên điểm $(1,1,1,-\frac{1}{2},-1)$ là cực đại địa phương của hàm Lagrange $L$. Từ đó $u$ đạt cực đại địa phương tại điểm $(1,1,1)$, và giá trị cực đại là $U(1,1,1) = 2$.

□