ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KỲ

NĂM HỌC 2020-2021

—oOo—

Môn thi: Giải tích I

Mã môn học: MAT2302 1→6 Số tín chỉ: 5 Thời gian: 120 phút

Dành cho sinh viên khoá: 2020-2024 Ngành học: Toán học, Toán tin, SP Toán

## I. LÝ THUYẾT: Chọn 2 trong số 3 câu sau để làm bài.

1. Phát biểu và chứng minh nguyên lý Cauchy về sự hội tụ của một dãy cơ bản.
2. Cho hàm số $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $x_0$ là một điểm tụ của $A$. Nêu định nghĩa $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$ khi và chỉ khi với mọi dãy $\{x_n\} \subset A\setminus\{x_0\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ ta có $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.
3. Chứng minh rằng ảnh của một tập compact qua một ánh xạ liên tục cũng là tập compact.

## II. BÀI TẬP:

1. Chứng minh giới hạn dãy số bằng định nghĩa
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2+\cos n}{n^2-n+1} = 2$$
2. Tìm giới hạn

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin x^2 - \ln(1+x^2)}{x(e^x-1)}$ 1  (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\ln(\cos x)+x^2}{x^3 \sin x}$ $-\frac{1}{6}$
3. Cho hàm số
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\sin\frac{1}{y} - y^2\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{nếu } xy \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } xy = 0 \end{cases}$$
   (a) Khảo sát sự hội tụ của các giới hạn lặp $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$

   (b) Chứng minh rằng hàm số liên tục tại $(0,0)$ nhưng không liên tục tại $(0,y_0)$ với mọi $y_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

   (c) Hàm số $f(x,y)$ có khả vi tại $(0,0)$ hay không?.
4. Tìm cực trị của hàm số
$$u = 2x^4 + 12x^2y^2 + 2y^4 - x^2.$$
5. (*Câu hỏi cộng điểm*) Cho hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử rằng tồn tại giới hạn hữu hạn $a = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x), b = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Chứng minh rằng [redacted] với mọi $c$ nằm giữa $a$ và $b$ ($c \notin \{a,b\}$). phương trình $f(x) = c$ có ít nhất một nghiệm.

**HẾT**

*Sinh viên không được sử dụng tài liệu*

/ 1

**ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI**
**ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN**

**ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KÌ I**
**NĂM HỌC 2019-2020**
—oOo—

**Môn thi: Giải tích 1**

Mã môn học: **MAT2302** 1->6 Số tín chỉ: **5** Đề số: **1**

Dành cho sinh viên khoá: **K64** Ngành học: **Toán học, Toán tin ứng dụng, Toán sư phạm**

Thời gian làm bài **120 phút** (không kể thời gian phát đề)

**Câu 1** (2.5đ). Nêu định nghĩa hàm số một biến thực liên tục tại một điểm và định nghĩa hàm số một biến thực liên tục đều trên một tập. Chứng minh rằng nếu hàm số $f$ xác định và liên tục trên đoạn $[a,b]$ thì $f$ liên tục đều trên đoạn đó. Xét tính liên tục đều của hàm $f(x) = \sqrt{x}$ trên $[0,+\infty)$. 0,5 0,5 1 0,5

**Câu 2** (2đ). a) Phát biểu tiêu chuẩn Cauchy về điều kiện cần và đủ để một dãy số thực hội tụ. Áp dụng tiêu chuẩn Cauchy để xét sự hội tụ của dãy số 0,5

$$a_n = \frac{\sin^2(1)}{1^2} + \frac{\sin^2(2)}{2^2} + \cdots + \frac{\sin^2(n)}{n^2},\ n = 1,2,\ldots.$$ 0,5

b) Tìm $a, b \in \mathbb{R}$ sao cho hàm số $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{nếu } x > 0 \\ a\cos(x) + b\sin(x) & \text{nếu } x \le 0, \end{cases}$$ 1đ

khả vi tại $x = 0$. lt 0,5 + khả vi 0,5

**Câu 3** (2.5đ). Cho hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{nếu } (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & \text{nếu } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng hàm $f$ liên tục trên $\mathbb{R}^2$. 1

b) Chứng minh rằng hàm $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \ne \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. 1

c) Xét tính khả vi của hàm $f$ tại điểm $(0,0)$. 0,5

**Câu 4** (2đ). Tìm cực trị địa phương của hàm số sau đây:

$$u(x,y) = 16x^4 + y^4 - (2x+y)^2.$$ 2đ

**Câu 5** (1đ). Cho hàm số $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $y = f(x) := x + \cos(x),\ x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho hàm $f$ đơn điệu tăng thực sự trên $(-\epsilon, +\epsilon)$. Từ đó, hãy chứng tỏ rằng tồn tại hàm ngược $x = g(y), 1-\delta < y < 1+\delta$, với $\delta > 0$ nào đó, của hàm $f$. Hãy tính đạo hàm $g'(y)$. 1đ

—*Hết*—

**Chú ý:** Đề thi gồm 1 trang. Sinh viên không được phép sử dụng tài liệu.

/

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KỲ I
NĂM HỌC 2018 - 2019

*Môn thi:* **GIẢI TÍCH 1**

Mã môn học: **MAT2302** . 1->4 Số tín chỉ: 5 Đề số: 1
*Dành cho sinh viên khóa:* K63 *Ngành:* Toán học, Toán tin
*Thời gian làm bài:* **120 phút** (*không kể thời gian phát đề*)

1. (*1.5 điểm*) Chứng minh rằng nếu $f$ liên tục trên khoảng đóng $[a, b]$ thì $f$ bị chặn trên khoảng đó.
2. (*1.0 điểm*) Nêu khái niệm khả vi và khái niệm đạo hàm của hàm vectơ.
3. (*1.5 điểm*) Nêu định nghĩa đạo hàm riêng của hàm số nhiều biến số. Chứng minh rằng nếu hàm số $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ khả vi tại $a \in \mathbb{R}^n$ thì $f$ có đạo hàm riêng theo tất cả các biến tại $a$.
4. (*1.0 điểm*) Tính các giới hạn sau đây:

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1-2x^2} - \sqrt{1+3x^2}}{\sqrt[4]{1-x^2} - 1}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^{\frac{1}{x}} + \dfrac{1}{x}\right)^{x+\cos x}$.

5. (*1.0 điểm*) Cho hàm số $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+x^2}$. Hãy khai triển $f(x)$:

   a) tại điểm $x = 0$ đến số hạng chứa $x^3$.
   b) tại điểm $x = -1$ đến số hạng chứa $(x+1)^3$.

6. (*1.0 điểm*) Cho hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2y^2 + |2x+y|} & \text{nếu} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{nếu} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   Xét tính liên tục theo từng biến và tính liên tục (theo tập các biến) của hàm số $f$ tại điểm $(0,0)$.

7. (*1.5 điểm*) Cho hàm số

$$f(x,y) = \sqrt[3]{2x^3 - 3y^3}.$$

   a) Tính các đạo hàm riêng $f'_x(0,0)$ và $f'_y(0,0)$.
   b) Xét tính khả vi của $f$ tại điểm $(0,0)$.

8. (*1.5 điểm*) Tìm cực trị địa phương của hàm số

$$f(x,y) = x^2y - x^3 - y^4.$$

———————*Hết*———————

**Ghi chú:** *Thí sinh không được sử dụng bất cứ tài liệu nào.*

5

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

**ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KÌ**
**NĂM HỌC 2018-2019**

—oOo—

Môn thi: **Giải tích 1**

Mã môn học: **MAT2302 2**, 1 Số tín chỉ: **5** Đề số: **1**

Thời gian làm bài **120 phút** (không kể thời gian phát đề)

---

**Câu 1.** (1.0 điểm) Định nghĩa giới hạn của dãy số. Phát biểu nguyên lý hội tụ Cauchy về dãy cơ bản.

**Câu 2.** (1.5 điểm) Nêu định nghĩa cực trị địa phương của hàm một biến. Phát biểu và chứng minh định lý Fermat đối với điều kiện cần của cực trị địa phương.

**Câu 3.** (1.0 điểm) Nêu định nghĩa hàm vector khả vi và đạo hàm của hàm vector.

**Câu 4.** (1.0 điểm) Cho dãy số $u_n = \frac{1}{2}.\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}$ và $v_n = \frac{2}{3}.\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1}$ với $n \geq 1$.

a) Chứng minh rằng $\frac{2n-1}{2n} < \frac{2n}{2n+1}$ với mọi $n \geq 1$. Từ đó suy ra $u_n < v_n$ với mọi $n \geq 1$.

b) Chứng minh rằng $u_n < \sqrt{\frac{1}{2n+1}}$ với mọi $n \geq 1$ (hướng dẫn: tính $u_n v_n$ và sử dụng phần a). Từ đó suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

**Câu 5.** (1.5 điểm) Tính các giới hạn sau:

a) (0.5 điểm)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{tg}^3 x - \mathrm{tg} x}{\cos(x+\frac{\pi}{6})}.$$

b) (1.0 điểm)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\mathrm{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}.$$

**Câu 6.** (1.0 điểm) Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{nếu } x < 0, \\ ax+b & \text{nếu } x \geq 0. \end{cases}$$

Khảo sát tính liên tục và tính khả vi của hàm $f$ tại $x = 0$ theo tham số $a$ và $b$.

**Câu 7.** (0.5 điểm) Khai triển hàm $f(x) = e^{2x-x^2}$ tại $x = 0$ tới cấp $x^3$.

**Câu 8.** (1.5 điểm) Cho hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3} & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{nếu } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Tính các giới hạn lặp

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y), \quad \text{và} \quad \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y).$$

b) Hàm $f$ có liên tục tại điểm $(0,0)$ không?

**Câu 9.** (1.0 điểm) Cho hàm số $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$. Tính các đạo hàm riêng của hàm $f$ tại điểm $(0.0)$. Hàm $f$ có khả vi tại điểm $(0,0)$ không?

**Câu 10.** (1.5 điểm) Tìm cực trị địa phương của hàm số

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$$

trong $\mathbb{R}^2$.

**Câu 11.** (0.5 điểm) Chứng minh rằng nếu hàm số $f$ liên tục trên $[0,\infty)$ và tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{x\to\infty} f(x)$ thì $f$ liên tục đều trên $[0,\infty)$. (Hướng dẫn: Chứng minh với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại số $M$ phụ thuộc $\epsilon$ sao cho $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$ với mọi $x, y \geq M$. Chứng minh hàm số $f$ liên tục đều trên $[0,M]$. Từ đó suy ra điều cần chứng minh)

———————*Hết*———————

**Chú ý:** Đề thi gồm 2 trang. Đề thi 12 điểm, chấm điểm 10. Sinh viên không được phép sử dụng tài liệu.