KHOA TOÁN - CƠ - TIN HỌC
CÂU LẠC BỘ TOÁN TIN HAMIC

HƯỚNG DẪN ÔN TẬP GIẢI TÍCH I

Dành cho sinh viên toàn trường tham gia lớp Chinh phục A+

Tác giả: Nguyễn Hoàng Đạt

Tài liệu được xây dựng dựa trên các dạng bài được tổng hợp cùng với các lý thuyết, phương pháp liên quan cũng như một số bài tập cụ thể (chưa có lời giải). Tài liệu chỉ mang tính chất tham khảo để hỗ trợ trong việc định hình kiến thức cũng như tư duy cho việc ôn tập môn Giải tích I.

MỤC LỤC

Chương I) GIỚI HẠN VÀ TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN

Dạng 1: Chứng minh sự hội tụ với một giới hạn cho trước / sự liên tục

Phương pháp chủ yếu:

- Áp dụng định nghĩa giới hạn để chứng minh sự hội tụ
    - Cho dãy số $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$. Số L được gọi là giới hạn của dãy $\{u_n\}$ nếu với $\forall \varepsilon > 0$ bé tùy ý, luôn $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N^*$ sao cho $\forall n > n_0$ ta có:

$$|u_n - L| < \varepsilon$$

    - Ta nói rằng hàm số f được gọi là hội tụ đến b khi x dần tới x_0 (hay b được gọi là giới hạn của hàm số f tại x_0) nếu với $\forall \varepsilon > 0$ bé tùy ý, luôn $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ sao cho $\forall x \epsilon A$ thỏa mãn $0 < |x - x_0| < \delta$ ta đều có:

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

    - Ta nói rằng hàm $f: R \supset A \to R$ hội tụ tới b khi $x \to +\infty$ nếu với $\forall \varepsilon > 0$ bé tùy ý, luôn $\exists M = M(\varepsilon) > 0$ sao cho $\forall x \epsilon A$ thỏa mãn $x \geq M$ ta đều có:

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

    - Ta nói rằng hàm $f: R \supset A \to R$ hội tụ tới b khi $x \to -\infty$ nếu với $\forall \varepsilon > 0$ bé tùy ý, luôn $\exists M = M(\varepsilon) > 0$ sao cho $\forall x \epsilon A$ thỏa mãn $x \leq -M$ ta đều có:

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

- Áp dụng định nghĩa hàm liên tục để chứng minh sự liên tục của hàm số:
    - Ta nói rằng hàm số f liên tục tại $x = x_0$ nếu với $\forall \varepsilon > 0$ bé tùy ý, luôn $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ sao cho $\forall x \epsilon A$ thỏa mãn $|x - x_0| < \delta$ ta đều có:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

- Áp dụng định nghĩa giới hạn vô cực để chứng minh sự phân kỳ
    - Ta nói rằng dãy $\{u_n\}$ có giới hạn là dương vô cùng $(+\infty)$ nếu với $\forall M > 0$, luôn $\exists n_0$ sao cho $\forall n > n_0$ ta đều có:

$$u_n > M$$

    - Ta nói rằng dãy $\{u_n\}$ có giới hạn là âm vô cùng $(-\infty)$ nếu với $\forall M > 0$, luôn $\exists n_0$ sao cho $\forall n > n_0$ ta đều có:

$$u_n < -M$$

Các bài tập:

1) Chứng minh các giới hạn sau

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2+(-2)^n}{3^n} = 0$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n} = 0$

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \ (a > 1)$

d. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

e. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 0$

f. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2}.\frac{3}{4}\ldots\frac{2n-1}{2n} = 0$

2) Chứng minh $f(x) = \sin x$ liên tục trên R bằng định nghĩa
3) Chứng minh $f(x) = x^2$ liên tục tại $x = 2$ bằng định nghĩa

Dạng 2: Xét sự hội tụ của một dãy số sơ cấp

Phương pháp chủ yếu: Sử dụng tiêu chuẩn Cauchy

- Dãy $\{u_n\}$ hội tụ nếu với $\forall\varepsilon > 0$ bé tùy ý, luôn $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N^*$ sao cho $\forall m, n > n_0$ ta đều có:

$$|u_m - u_n| < \varepsilon$$

Chú ý: Ta có thể đặt $m = n + p$ rồi xử lý biểu thức $|u_m - u_n|$ sao cho triệt tiêu được p và xác định được ε tương ứng

- Dãy $\{u_n\}$ phân kỳ nếu $\exists\varepsilon > 0$ bé tùy ý sao cho với $\forall n_0 = n_0(\varepsilon) \in N^*$, luôn $\exists m, n > n_0$ mà ở đó:

$$|u_m - u_n| \geq \varepsilon$$

Các bài tập: Xét sự hội tụ của các dãy số sau:

1) $u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$
2) $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$
3) $u_n = \frac{1}{\sqrt{1.2}} + \frac{1}{\sqrt{2.3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
4) $u_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}$
5) $u_n = \frac{\cos 1!}{1.2} + \frac{\cos 2!}{2.3} + \cdots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}$
6) $u_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \ldots + \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n}$
7) $u_n = \frac{\cos x - \cos 2x}{1} + \frac{\cos 2x - \cos 3x}{2} + \cdots + \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n}$
8) $u_n = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}$
9) $u_n = \frac{\cos 1!}{5.11.10} + \frac{\cos 2!}{8.16.19} + \cdots + \frac{\cos n!}{(3n+2)(5n+6)(9n+1)}$

Dạng 3: Chứng minh sự hội tụ của một dãy số truy hồi và tìm giới hạn của chúng

Phương pháp chủ yếu: Áp dụng định lý Weierstrass

- Nếu dãy $\{u_n\}$ tăng và bị chặn trên thì nó hội tụ.
- Nếu dãy $\{u_n\}$ giảm và bị chặn dưới thì nó hội tụ.

Các bước giải:

1) Chứng minh dãy $\{u_n\}$ đơn điệu
2) Chứng minh dãy $\{u_n\}$ bị chặn
3) Áp dụng tính chất **mỗi dãy hội tụ có một giới hạn duy nhất** để tìm ra được giới hạn

Các bài tập:

1) Chứng minh các dãy số sau đây hội tụ và tìm giới hạn của chúng
   a. $u_1 = 0, u_n = \frac{u_{n-1}+3}{4} (n \geq 2)$
   b. $u_1 = 2, u_n = 2 + \frac{1}{u_{n-1}} (n \geq 2)$
   c. $u_1 = \sqrt{2}, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} (n \geq 1)$
   d. $u_1 = 3, u_{n+1} = \frac{{u_n}^2+u_n+4}{6} (n \geq 1)$
   e. $u_1 = 1, u_{n+1} = \sqrt{{u_n}^2 - 2u_n + 4} (n \geq 1)$
   f. $u_1 > 0, u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n-1} + \frac{1}{u_{n-1}}\right) (n \geq 2)$
   g. $u_1 = 1, u_2 = 2, u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}} (n \geq 1)$
2) Mở rộng: Chứng minh các dãy sau đây hội tụ bằng định lý Weierstrass
   a. $u_n = \frac{1}{2} . \frac{3}{4} \dots \frac{2n-1}{2n}$
   b. $u_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$

Dạng 4: Tìm giới hạn

Phương pháp chủ yếu: Linh hoạt biến đổi kết hợp cùng với:

- Các giới hạn cơ bản:
  - $\lim\limits_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$
  - $\lim\limits_{u \to 0} \frac{\log_a(1+u)}{u} = \frac{1}{\ln a}$ $(a > 0, a \neq 1)$
  - $\lim\limits_{u \to 0} \frac{a^u - 1}{u} = \ln a$ $(a > 0)$
  - $\lim\limits_{u \to 0} \frac{(1+u)^r - 1}{u} = r$
  - $\lim\limits_{u \to 0} (1 + u)^{\frac{1}{u}} = e$
  - $\lim\limits_{u \to \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e$
- Áp dụng các vô cùng bé, vô cùng lớn tương đương:
  - Cho $f: R \supset A \to R$
    - $f(x)$ là một **vô cùng bé** khi $x \to x_0$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$
    - $f(x)$ là một **vô cùng lớn** khi $x \to x_0$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$
  - Cho $f(x), g(x)$ là hai vô cùng bé khi $x \to x_0$

    Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

    - Nếu $L = 0$ thì $g(x)$ được gọi là vô cùng bé bậc thấp hơn $f(x)$ (hay $f(x)$ được gọi là vô cùng bé bậc cao hơn $g(x)$)
    - Nếu $L = C \neq \pm\infty$ thì $f(x), g(x)$ được gọi là hai vô cùng bé cùng bậc và được ký hiệu là $g = O(f)$ hay $f = O(g)$

- Nếu $L = 1$ thì $f(x), g(x)$ được gọi là hai vô cùng bé tương đương và được ký hiệu là $f \sim g$
- Nếu $L = \pm\infty$ thì $g(x)$ được gọi là vô cùng bé bậc cao hơn $f(x)$ và được ký hiệu là $g = o(f)$

- Sử dụng nguyên lý kẹp:
  - $\left.\begin{matrix} u_n < w_n < v_n\,(u_n \le w_n \le v_n) \text{ với } \forall n \text{ đủ lớn} \\ \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = L \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} w_n = L$
  - Nếu $f(x) \le h(x) \le g(x)$ $\big(f(x) < h(x) < g(x)\big)$ $\forall x \epsilon A$ thỏa mãn $0 < |x - x_0| < \delta$. Đồng thời $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$. Thì $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = a$
- Áp dụng quy tắc L'Hospital :

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ hoặc $\pm\infty$ và $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ thì ta có :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Áp dụng khai triển Taylor (chương II)

Mẹo: Xác định dạng vô định của biểu thức sẽ giúp bài toán dễ hình thành ý tưởng hơn. Các dạng vô định bao gồm $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0.\infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \ldots$

<u>Các bài tập:</u> Tính

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - (\cos x)^{\sqrt{2}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right)^x$

4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\tan^3 x - 3\tan x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$

6) $\lim\limits_{x\to 0} \left(2.e^{\frac{x}{x+1}} - 1\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin 5x} - e^{\sin x}}{\ln(1+2x)}$

8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-(\cos x)^{\sin x}}{\ln(1+x^3)}$

9) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)$

10) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2-\cos x}{1-\sin x}\right)^{\cot x}$

11) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

Dạng 5: Tìm giới hạn trên / giới hạn dưới của dãy số

<u>Phương pháp chủ yếu:</u> Đánh giá, chọn dãy và áp dụng lý thuyết

- Dãy $\{u_n\}$ có một dãy con $\{u_{n_k}\}$ hội tụ đến a thì a được gọi là giới hạn riêng của $\{u_n\}$
- Giới hạn trên của một dãy là giới hạn riêng lớn nhất của dãy đó. Kí hiệu $\overline{\lim}\, u_n$
- Giới hạn dưới của một dãy là giới hạn riêng nh nhất của dãy đó. Kí hiệu $\underline{\lim}\, u_n$

Các bài tập: tìm $\overline{\lim}\, u_n$ và $\underline{\lim}\, u_n$

1) $u_n = \frac{n-1}{n+1}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$

2) $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left[\frac{1}{2} + (-1)^n\right]$

Dạng 6: Xét sự liên tục và phân loại điểm gián đoạn của hàm số

Phương pháp chủ yếu:

- Đánh giá các điểm sau đó áp dụng định lý:

Hàm số f liên tục tại $x = a \in A$ **khi và chỉ khi** hàm số f liên tục **cả hai bên trái và bên phải** tại $x = a$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

- Chú ý bổ sung: Mọi hàm số sơ cấp đều liên tục trên miền xác định của nó
- Phân loại điểm gián đoạn:
  - Nếu $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ cùng tồn tại thì $x = x_0$ được gọi là điểm gián đoạn loại 1
    - Nếu $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$ thì $x = x_0$ được gọi là điểm gián đoạn bỏ được
    - Nếu $\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)$ thì $x = x_0$ được gọi là điểm gián đoạn có bước nhảy. Khi đó giá trị $\left|\lim_{x\to x_0^+} f(x) - \lim_{x\to x_0^-} f(x)\right|$ được gọi là bước nhảy của x_0
  - Nếu có ít nhất một trong hai giá trị $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ không tồn tại thì $x = x_0$ được gọi là điểm gián đoạn loại 2
- Có thể áp dụng mệnh đề phản đảo để chứng minh giới hạn hàm số không tồn tại Chứng minh $\nexists \lim_{x\to x_0} f(x)$ bằng cách chỉ ra sự tồn tại của 2 dãy $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ thỏa mãn $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = x_0$ nhưng $\lim_{n\to\infty} f(u_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(v_n)$

Các bài tập: Xét tính liên tục và phân loại điểm gián đoạn của hàm số

1) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} \cos\frac{\pi x}{2}, |x| \leq 1 \\ |x-1|, |x| > 1 \end{cases}$

5) $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x}, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$

Dạng 7: Tìm tham số để hàm số liên tục tại một điểm / đoạn

Phương pháp chủ yếu: Đánh giá xác định điểm sau đó áp dụng định lý:

Hàm số f liên tục tại $x = a \in A$ **khi và chỉ khi** Hàm số f liên tục **cả hai bên trái và bên phải** tại $x = a$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

Cách làm: Lập phương trình từ các điều kiện sau:

- $\exists \lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to a^-} f(x)$
- $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

Các bài tập: Tìm các tham số (a, b) để hàm số sau liên tục trên R

1) $f(x) = \begin{cases} 2e^x, x < 0 \\ a + 2x, x \geq 0 \end{cases}$
2) $f(x) = \begin{cases} 2x + a, x < 1 \\ ax^2 + 2, x \geq 1 \end{cases}$
3) $f(x) = \begin{cases} x^2, x \leq m \\ ax + b, x > m \end{cases} (m \in R)$
4) $f(x) = \begin{cases} (x-2)\sin\frac{1}{x-2}, x < 2 \\ ax^2 - bx - 1, 2 \leq x < 3 \\ x - a + b - 1, x \geq 3 \end{cases}$

Dạng 8: Chứng minh hàm số liên tục đều / không liên tục đều

Phương pháp chủ yếu:

- Áp dụng **định nghĩa** để chứng minh liên tục đều (hoặc sử dụng **ản đảo** để chứng minh không liên tục đều)

Định nghĩa: Hàm số $f: A \to R$ được gọi là liên tục đều trên A nếu $\forall \varepsilon > 0$ bé tùy ý, luôn $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$sao cho $\forall x_1, x_2 \epsilon A$ thỏa mãn $|x_1 - x_2| < \delta$ ta đều có:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

- Có thể sử dụng phản chứng như sau:

Chứng minh hàm f không liên tục đều tại $x = x_0$ bằng cách chỉ ra sự tồn tại của 2 dãy $\{u_n\}, \{v_n\}$ và $\varepsilon > 0$ thỏa mãn $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n$ nhưng $|f(u_n) - f(v_n)| \geq \varepsilon$ với $\forall n$ đủ lớn

Các bài tập:

1) Chứng minh các hàm số sau đây liên tục đều trên miền chỉ ra tương ứng
   a. $f(x) = 2\sin x - \cos x, x \in (-\infty; +\infty)$
   b. $f(x) = \sqrt{x}, x \in [0; +\infty)$
   c. $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}, x \in [0; \pi]$
   d. $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}, x \in (0; 1]$
2) Chứng minh hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ không liên tục đều trên khoảng $(0; 1)$ bằng hai cách

Chương II) PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM MỘT BIẾN

Dạng 9: Tính đạo hàm cấp 1

Phương pháp chủ yếu:

- Áp dụng các công thức đạo hàm (đối với hàm sơ cấp)
- Đối với điểm cụ thể $x = x_0$ thì áp dụng công thức

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- Đối với hàm ẩn $(F(x, y))$ thì đặt $y = f(x)$ rồi đạo hàm như bình thường
- Đối với hàm ngược $y = f^{-1}(x)$, ta có thể đặt $y = g(x)$ và biến đổi để được $f(g(x)) = x$ rồi đạo hàm

Chú ý: Đạo hàm hàm hợp $\left[f\left(g(x)\right)\right]' = g'(x)f'(g(x))$

- Đối với hàm có dạng phương trình tham số:

$$\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases} \Leftrightarrow y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

- Đối với hàm có dạng biến chồng biến, ta có thể sử dụng phương pháp đẩy e:

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln(f(x)^{g(x)})} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

Các bài tập: Tìm đạo hàm của các hàm số sau

1) $y = |(x-1)^2(x+1)^3|$
2) $y = \begin{cases} (x-a)^2(x+b)^2, x \in [a; b] \\ 0, x \notin [a; b] \end{cases}$
3) $y = \begin{cases} \arctan x, x \in [a; b] \\ \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} x + \frac{x-1}{2}, x \notin [a; b] \end{cases}$
4) $y = (\sin x)^{\cos x}$
5) $y = x^{x^x}$

Dạng 10: Tìm tham số để hàm số khả vi (có đạo hàm)

Phương pháp chủ yếu:

Đánh giá xác định điểm sau đó áp dụng định lý: Hàm số f có đạo hàm tại $x = a \in A$ **khi và chỉ khi** hàm số f có đạo **cả hai bên trái và bên phải** tại $x = a$ và chúng bằng nhau

$$f'_+(a) = f'_-(a)$$

Cách làm: Lập phương trình từ các điều kiện sau

- $\exists f'_+(a)$, $f'_-(a)$
- $f'_+(a) = f'_-(a)$

Các bài tập: Tìm các tham số (a, b) để hàm số sau khả vi trên R

1) $f(x) = \begin{cases} x^2, x \le m \\ ax + b, x > m \end{cases} (m \in R)$

2) $f(x) = \begin{cases} (x + a)e^{-bx}, x < 0 \\ ax^2 + bx + 1, x \ge 0 \end{cases}$

Dạng 11:Tính đạo hàm cấp n

Phương pháp chủ yếu: Đạo hàm một vài cấp đầu tiên (làm như dạng 1) từ đó có thể suy ra công thức tổng quát (có thể chứng minh công thức đó bằng quy nạp nếu cần thiết)

Chú ý: Đối với đạo hàm cấp n của một tích thì ta áp dụng công thức Leibniz:

$$(f.g)^{(n)} = C_n^0 f.g^{(n)} + C_n^1 f^{(1)}.g^{(n-1)} + \cdots + C_n^{n-1} f^{(n-1)}.g^{(1)} + C_n^n f^{(n)}.g$$

Các bài tập: Tìm đạo hàm cấp n (tổng quát) của các hàm số sau

1) $y = x \sin x$
2) $y = x^2 e^{2x+3}$
3) $y = (5x^2 - 4x + 1)\cos 5x$
4) $y = (x^2 + x + 1)e^{3x}$

Dạng 12:Khai triển hàm số

Phương pháp chủ yếu: Áp dụng khai triển Taylor

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{x!} + o((x - x_0)^n)$$

(số dư dạng Peano)

Các bước tính toán:

- Bước 1: Xác định x_0 theo nhị thức lũy thừa
- Bước 2: Tính các đạo hàm của hàm f tại x_0 đến cấp tương ứng với bậc lũy thừa đề bài yêu cầu
- Bước 3: Khai triển theo công thức

Các bài tập: Khai triển biểu thức f(x) theo lũy thừa của nhị thức g(x) (theo số dư dạng Peano)

1) $f(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3, g(x) = x + 1$
2) $f(x) = \cos x - e^{-\frac{x}{2}}, g(x) = x$ (khai triển đến lũy thừa bậc 4 của g(x))
3) $f(x) = \ln(2x^2 + 9x + 4), g(x) = x$ (khai triển đến lũy thừa bậc 3 của g(x))
4) $f(x) = \sin^2(x - 1)\ln(1 + x), g(x) = x - 1$ (khai triển đến lũy thừa bậc 5 của g(x))
5) $f(x) = \ln(2 - \cos x), g(x) = x$ (khai triển đến lũy thừa bậc 4 của g(x))
6) $f(x) = \frac{7}{2x^2-5x-3}, g(x) = x$ (khai triển đến lũy thừa bậc n của g(x))

Mở rộng: Sử dụng khai triển Taylor để tính giới hạn của các hàm số

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x(1-\cos x)}$
2) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin x}{\tan x - x}$

Dạng 13:Tính xấp xỉ

<u>Phương pháp chủ yếu:</u>

- Sử dụng tuyến tính hóa của hàm f tại $x = a$:

$$L(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$$

- Sử dụng vi phân:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(\Delta x) \text{ với } \Delta x \ll x_0$$

<u>Các bài tập:</u> Tính

1) $\sin(31°)$
2) $\sqrt{3{,}98}$; $\sqrt{4{,}05}$ (sử dụng tuyến tính hóa của $y = \sqrt{x+3}$ tại $x = 1$)

Chương III) TÍCH PHÂN

Dạng 14:Tính tích phân không xác định / tích phân xác định

Phương pháp chủ yếu:

1) Đối với tích phân không xác định: Áp dụng công thức tích phân cơ bản kết hợp một số phương pháp:

- Đổi biến:

$$\int g'(x)f\big(g(x)\big)dx = \int f(g(x))d(g(x) = \int f(u)du$$

- Đồng nhất hệ số:

$$\int \frac{P(x)}{f(x)g(x)h(x)}dx = \int \frac{A}{f(x)}dx + \int \frac{B}{g(x)}dx + \int \frac{C}{h(x)}dx$$

(A, B, C là các hằng số)

- Tích phân từng phần:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

- Lượng giác hóa:
    - Đặt $x = \sin t \Longrightarrow \sqrt{1 - x^2} = \cos t$
    - Đặt $x = \cos t \Longrightarrow \sqrt{1 - x^2} = \sin t$
    - Đặt $x = \tan t \Longrightarrow \frac{1}{1+x^2} = \cos t$
- Phép thế Euler cho $\int R\big(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\big)$
    - Nếu $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
    - Thì có thể đặt $t = \sqrt{\frac{x-x_1}{x-x_2}}$
    - Nếu $a > 0$
    - Thì có thể đặt $t = \sqrt{ax^2 + bx + c} \pm x\sqrt{a}$
    - Nếu $c > 0$
    - Thì có thể đặt $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$
- Đối với biểu thức vi phân chứa căn thức $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$

Thì đặt $t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

- Đối với biểu thức vi phân nhị thức $\int x^m(a + bx^n)^p\,dx$
    - Nếu p nguyên thì đặt $x = t^N$ (N là mẫu số chung của m và n)
    - Nếu $\frac{m+1}{n}$ nguyên thì đặt $a + bx^n = t^N$ (N là mẫu của p)
    - Nếu $\frac{m+1}{n} + p$ nguyên thì đặt $ax^{-n} + b = t^N$ (N là mẫu của p)
- Đối với hàm lượng giác thì có thể đặt $t = \tan\frac{x}{2}$

2) Đối với tích phân xác định: Áp dụng công thức Newton – Leibniz và tính như tích phân không xác định

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ ($F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$)

Các bài tập: Tính

1) $\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}dx$
2) $\int \frac{dx}{(x+a)^n}$ $(n \in N^*)$
3) $\int e^x \sin x\, dx$
4) $\int \frac{x^3}{x^8-2}dx$
5) $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$
6) $\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{x^2+x+1}$
7) $\int_0^{\pi} e^x \cos^2 x\, dx$
8) $\int_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}dx$
9) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$

Dạng 15:Ứng dụng

Phương pháp chủ yếu: Áp dụng các công thức kết hợp tính tích phân xác định

Tham khảo 9 công thức ở trang 65-67/ Bài tập giải tích tập II – Trần Đức Long, Nguyễn Đình Sang, Hoàng Quốc Toàn – NXB Đại học Quốc gia Hà Nội

Các bài tập:

1) Tính độ dài của đồ thị hàm số $y = \ln(\sin x)$ trên $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$
2) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số

$$y = 6 - x^2 \text{ và } y = |x|$$

3) Tính diện tích các mặt tròn xoay cũng như thể tích của vật thể được tạo thành khi quay đường cong có phương trình $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

Dạng 16:Xét hoặc chứng minh sự hội tụ / hội tụ tuyệt đối / bán hội tụ của tích phân suy rộng

Phương pháp chủ yếu:

1) So sánh: Cho hai hàm $f, g: [a; b) \to R$ $(a < b \le +\infty)$
   - Nếu $0 \le f(x) \le g(x)$ thì
     - $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ $\Longrightarrow \int_a^b f(x)dx$ hội tụ
     - $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ $\Longrightarrow \int_a^b f(x)dx$ phân kỳ
   - $L = \lim\limits_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$ $\left(L = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}\right)$
     - Nếu $L = 0$, $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ $\Longrightarrow \int_a^b f(x)dx$ hội tụ
     - Nếu $L = +\infty$, $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ $\Longrightarrow \int_a^b g(x)dx$ phân kỳ
     - Nếu $0 < L < +\infty \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b g(x)dx$ cùng hội tụ / phân kỳ
2) Dấu hiệu Dirichlet, Dấu hiệu Abel

Nếu $f(x), g(x)$ là các hàm xác định, liên tục trong $[a;+\infty)$

- Dấu hiệu Dirichlet
  - $\exists M > 0$ sao cho $\left|\int_a^A f(x)dx\right| \le M, \forall A \ge a$
  - $g(x)$ đơn điệu giảm về 0

⇨ $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ hội tụ

- Dấu hiệu Abel
  - $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ
  - $g'(x)$ liên tục trong $[a;+\infty)$ và $|g(x)| < L$

⇨ $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ hội tụ

3) Sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ
- <u>Định lý:</u> nếu $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ
- Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ và
  - $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối
  - $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ bán hội tụ

<u>Chú ý:</u>

- Với $x \to \infty$ thì $\log_a x \ll x^a \ll a^x$
- $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$
  - Hội tụ khi $\alpha > 1$
  - Phân kỳ khi $\alpha \le 1$
- $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$
  - Hội tụ khi $\alpha < 1$
  - Phân kỳ khi $\alpha \ge 1$
- Nếu $f(x) = g(x) + h(x)$
  - $\int_a^{+\infty} g(x)dx, \int_a^{+\infty} h(x)dx$ hội tụ $\Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ
  - $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ, $\int_a^{+\infty} h(x)dx$ phân kỳ $\Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ

<u>Các bài tập:</u>

1) Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng
   a. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}dx$
   b. $\int_0^1 \frac{\ln(1+\sin x)}{e^{x\sqrt{x}}-1}dx$
   c. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$
2) Xét sự hội tụ, hội tụ tuyệt đối / bán hội tụ của $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx \ (\alpha > 0)$

Dạng 17:Tính tích phân suy rộng

<u>Phương pháp chủ yếu:</u> Áp dụng công thức

- Loại 1: $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)d(x)$
- Loại 2: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{A\to b^-} \int_a^A f(x)d(x)$ $\left(\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty\right)$

<u>Các bài tập:</u> Tính

1) $\int_1^{+\infty} (x^2 + 1)e^{-x}dx$
2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} dx$
3) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} dx$
4) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax-\cos bx}{x} dx$
5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\, dx$