TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
Khoa Toán - Cơ - Tin học

CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM
Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

CÂU HỎI ÔN TẬP

GIẢI TÍCH 1

-Mã học phần: MAT2302
-Số tín chỉ: 05
-Ngôn ngữ giảng dạy: Tiếng Việt
-Lớp: K68 các ngành Toán học, Toán tin

I. Hàm một biến

Câu 1 (*). *Định nghĩa giới hạn của dãy số thực. Chứng minh rằng mọi dãy hội tụ đều có giới hạn duy nhất.*

Câu 2. *Định nghĩa dãy số bị chặn. Chứng minh rằng mọi dãy hội tụ đều bị chặn.*

Câu 3 (*). *Cho $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ là hai dãy số thực hội tụ. Giả sử tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $a_n \leq b_n$ với mọi $n \geq n_0$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.*

Câu 4. *Hãy phát biểu và chứng minh nguyên lý Cantor về dãy đoạn lồng nhau và thắt lại.*

Câu 5. *Hãy phát biểu và chứng minh nguyên lý Bolzano-Weierstrass về dãy bị chặn.*

Câu 6. *Hãy phát biểu và chứng minh nguyên lý hội tụ Cauchy về dãy cơ bản.*

Câu 7 (*). *Định nghĩa dãy đơn điệu. Chứng minh rằng nếu dãy $\{a_n\}$ đơn điệu tăng và bị chặn trên thì nó hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\limits_{n\geq 1} a_n$.*

Câu 8. *Định nghĩa giới hạn riêng, giới hạn trên và giới hạn dưới của một dãy số bị chặn. Chứng minh rằng giới hạn trên là giới hạn riêng lớn nhất.*

Câu 9 (*). *Nêu định nghĩa dãy số thực có giới hạn bằng $+\infty$, bằng $-\infty$. Chứng minh rằng một dãy không bị chặn trên thì có một dãy con có giới hạn bằng $+\infty$.*

Câu 10 (*). *Cho hàm số $f : A \to \mathbb{R}$ và x_0 là một điểm tụ của A. Hãy nêu định nghĩa $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$ khi và chỉ khi với mọi dãy $\{x_n\} \subset A\backslash\{x_0\}$, $x_n \to x_0$ thì ta có $f(x_n) \to b$ khi $n \to \infty$.*

Câu 11. *Phát biểu tiêu chuẩn Cauchy đối với sự tồn tại giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm.*

Câu 12 (*). *Cho hàm số f xác định và đơn điệu tăng trên (a, b). Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để giới hạn $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ tồn tại hữu hạn là f bị chặn trên.*

Câu 13. *Nêu khái niệm lân cận của điểm $a \in \mathbb{R}$, điểm $+\infty$, điểm $-\infty$. Phát biểu định nghĩa giới hạn hàm số tổng quát theo ngôn ngữ lân cận. Từ đó phát biểu các giới hạn sau theo ngôn ngữ $\epsilon - \delta$:*

$$\lim_{x\to b^+} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = b; \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty; \ldots$$

Câu 14. *Định nghĩa hàm liên tục, liên tục phải, liên tục trái tại một điểm. Chứng minh rằng hàm số f liên tục tại điểm x_0 khi và chỉ khi f liên tục phải và liên tục trái tại x_0.*

Câu 15 (*). *Chứng minh rằng nếu f liên tục trên khoảng đóng $[a, b]$ thì f bị chặn trên khoảng đó.*

Câu 16. *Chứng minh rằng nếu f liên tục trên khoảng đóng $[a, b]$ thì f đạt được cận trên đúng và cận dưới đúng trên khoảng đó.*

Câu 17. *Cho hàm số f xác định và liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $f(a)f(b) < 0$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = 0$.*

Câu 18 (*). *Nêu định nghĩa hàm liên tục đều trên một tập, hàm không liên tục đều trên một tập. Chứng minh rằng nếu hàm số f xác định và liên tục trên khoảng đóng $[a, b]$ thì f liên tục đều trên đó.*

Câu 19. *Nêu khái niện điểm gián đoạn loại một, điểm gián đoạn loại hai. Chứng minh rằng mọi điểm gián đoạn của hàm đơn điệu đều là điểm gián đoạn loại một.*

Câu 20 (*). *Nêu định nghĩa đạo hàm, đạo hàm phải, đạo hàm trái của hàm số tại một điểm. Phát biểu công thức đạo hàm của hàm hợp và đạo hàm của hàm ngược.*

Câu 21 (*). *Nêu định nghĩa cực trị địa phương. Phát biểu và chứng minh định lý Fermat đối với điều kiện cần của cực trị địa phương.*

Câu 22. *Phát biểu và chứng minh định lý Rolle.*

Câu 23. *Phát biểu công thức Taylor với số dư dạng Lagrange và số dư dạng Cauchy.*

Câu 24. *Phát biểu và chứng minh công thức L'Hospital cho trường hợp giới hạn dạng $\frac{0}{0}$ tại điểm $x_0 \in \mathbb{R}$.*

II. Hàm nhiều biến

Câu 25 (*). *Nêu định nghĩa chuẩn Euclid trong $\mathbb{R}^n$. Chứng minh rằng sự hội tụ trong $\mathbb{R}^n$ là hội tụ theo tọa độ.*

Câu 26. *Nêu khái niệm chuẩn tương đương. Chứng minh rằng hai chuẩn bất kỳ trong không gian $\mathbb{R}^n$ đều tương đương.*

Câu 27. *Nêu định nghĩa tập compac. Chứng minh rằng một tập A trong $\mathbb{R}^n$ là compac khi và chỉ khi A đóng và bị chặn.*

Câu 28 (*). *Nêu định nghĩa giới hạn của hàm vectơ. Phát biểu và chứng minh định lý về mối quan hệ giữa giới hạn hàm vectơ và giới hạn các hàm thành phần.*

Câu 29. *Nêu định nghĩa giới hạn lặp của hàm hai biến số. Phát biểu và chứng minh định lý về mối quan hệ giữa giới hạn lặp và giới hạn kép.*

Câu 30 (*). *Nêu định nghĩa hàm liên tục, liên tục theo từng biến.*

Câu 31 (*). *Nêu định nghĩa tập compact. Chứng minh rằng ảnh của một tập compact qua ánh xạ liên tục cũng là một tập compact.*

Câu 32. *Chứng minh rằng ánh xạ liên tục trên một tập compact thì liên tục đều trên đó.*

Câu 33 (*). *Nêu khái niệm khả vi và khái niệm đạo hàm của hàm số nhiều biến số.*

Câu 34. *Phát biểu và chứng minh công thức đạo hàm hàm hợp của hai hàm vectơ.*

Câu 35. *Phát biểu và chứng minh định lý về mối quan hệ giữa tính khả vi của hàm vectơ và tính khả vi của các hàm thành phần. Nêu định nghĩa ma trận Jacôbi.*

Câu 36 (*). *Nêu định nghĩa đạo hàm riêng của hàm số nhiều biến số. Phát biểu và chứng minh định lý về sự tồn tại các đạo hàm riêng của một hàm số nhiều biến khả vi.*

Câu 37. *Phát biểu và chứng minh định lý về sự khả vi của hàm số nhiều biến số có các đạo hàm riêng tồn tại và liên tục tại một điểm.*

Câu 38 (*). *Nêu định nghĩa đạo hàm theo hướng. Chứng minh rằng nếu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ khả vi tại $a \in \mathbb{R}^n$ thì f có đạo hàm riêng theo mọi hướng tại a.*

Câu 39. *Phát biểu và chứng minh công thức số gia hữu hạn.*

Câu 40 (*). *Nêu định nghĩa đạo hàm riêng cấp cao. Phát biểu định lý Schwarz về mối quan hệ giữa các đạo hàm riêng.*

Câu 41. *Phát biểu công thức Taylor đối với hàm số nhiều biến.*

Câu 42. *Phát biểu định lý hàm ngược và định lý hàm ẩn.*