

Metode predictor-corector pentru integrarea ecuațiilor diferențiale

Colaboratori: Andrei STAN, Dumitru-Clementin Cercel, Florin Pop

February 17, 2025

Cuprins

1	Obiective laborator	1
2	Noțiuni teoretice	1
3	Probleme rezolvate	2
3.1	Problema 1	2
3.2	Problema 2	3
3.3	Problema 3	4
4	Probleme propuse	5
4.1	Problema 1	5
4.2	Problema 2	5

1 Obiective laborator

În urma parcurgerii acestui laborator, studentul va fi capabil să:

- găsească soluția unei ecuații diferențiale utilizând metoda predictor-corector;
- compare metodele de rezolvare a ecuațiilor diferențiale, prezentând avantajele și dezavantajele acestor metode.

2 Noțiuni teoretice

Metodele cu pași separați sunt utilizate datorită simplității lor și a faptului că necesită puține informații inițiale. Ele au dezavantajul lipsei de precizie.

O altă categorie de metode folosite pentru rezolvarea ecuațiilor diferențiale și a sistemelor de ecuații diferențiale este reprezentată de *metodele cu pași legați* (numite și *metode multipas*). Metodele cu pași legați folosesc mai multe informații inițiale deci sunt mai precise decât metodele cu pași separați. Există două tipuri de metode cu pași legați: *metode explicite* și *metode implicite*. În cele ce urmează, folosim notația: $y_k = y(x_k)$ și $f_k = f(x_k, y_k)$.

O metodă explicită, cunoscută sub numele de metoda Adams-Bashforth, are forma:

$$y_{k+1} = y_k + h \sum_{j=0}^r c_j \nabla^j f_k$$

O metodă implicită, cunoscută sub numele de metoda Adams-Moulton, are forma:

$$y_{k+1} = y_k + h \sum_{j=0}^r d_j \nabla^j f_{k+1}$$

Numărul r definește ordinul metodei cu pași legați. Dezvoltând diferențele regresive se obține o recurență liniară, general valabilă pentru metodele cu pași legați, de forma:

$$y_{k+1} = \sum_{j=0}^{r-1} \alpha_j y_{k-j} + h \sum_{j=-1}^{r-1} \beta_j f_{k-j}$$

unde dacă $\beta_{-1} = 0$ se obține relația pentru metoda Adams-Bashforth, altfel se obține relația pentru metoda Adams-Moulton. Pentru a determina coeficienții α_j, β_j , vom impune condiția următoare: soluția exactă $y(x)$ a relației generale pentru metodele cu pași legați să fie adevărată pentru polinoamele $1, x, x^2, \dots$. Mai mult, se aleg punctele intermediare $x_{k-r+1}, \dots, x_{k+1}$ echidistante cu $h = 1$ și originea în x_{k-r+1} .

Prin îmbinarea unei metode explicite cu una implicită se obțin *metode predictor-corector*. Metodele predictor-corector presupun folosirea metodei explicite pentru predicția unei valori y_{k+1} iar aceasta valoare se corectează, ulterior, prin metoda implicită.

Astfel, putem aplica metoda Adams-Bashforth de ordin 3 pentru a calcula $y_{k+1}^{(p)}$ (y_{k+1} prezis, de unde provine și superscriptul (p)):

$$y_{k+1}^{(p)} = y_k + \frac{h}{12}(23f_k - 16f_{k-1} + 5f_{k-2})$$

Mai departe, putem corecta valoarea $y_{k+1}^{(p)}$ folosind metoda Adams-Moulton de ordin 2 și se obține $y_{k+1}^{(c)}$ (y_{k+1} corectat, de unde provine și superscriptul (c)):

$$y_{k+1}^{(c)} = y_k + \frac{h}{12}[5f(x_{k+1}, y_{k+1}^{(p)}) + 8f_k - f_{k-1}]$$

3 Probleme rezolvate

3.1 Problema 1

Determinați coeficienții formulelor explicite și implicite de tip Adams, de ordin 3.

Soluție:

Metoda Adams-Bashforth de ordin 3 are forma:

$$y_{k+1} = y_k + h(\beta_0 f_k + \beta_1 f_{k-1} + \beta_2 f_{k-2})$$

Pentru început, alegem punctele: $x_{k-2} = 0, x_{k-1} = 1, x_k = 2, x_{k+1} = 3$ cu $h = 1$. Dorim ca formula să fie exactă pentru polinoamele $1, x, x^2, x^3$. Prin urmare, obținem:

$$y = 1 \Rightarrow f = y' = 0 \Rightarrow 1 = 1$$

$$y = x \Rightarrow f = y' = 1 \Rightarrow 3 = 2 + (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2) \Rightarrow \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 1$$

$$y = x^2 \Rightarrow f = y' = 2x \Rightarrow 3^2 = 2^2 + (4\beta_0 + 2\beta_1) \Rightarrow 4\beta_0 + 2\beta_1 = 5$$

$$y = x^3 \Rightarrow f = y' = 3x^2 \Rightarrow 3^3 = 2^3 + (12\beta_0 + 3\beta_1) \Rightarrow 12\beta_0 + 3\beta_1 = 19$$

Se formează sistemul:

$$\begin{cases} \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 1 \\ 4\beta_0 + 2\beta_1 = 5 \\ 12\beta_0 + 3\beta_1 = 19 \end{cases}$$

cu soluția $\beta_0 = \frac{23}{12}, \beta_1 = \frac{-4}{3}, \beta_2 = \frac{5}{12}$.

Astfel, obținem forma finală pentru metoda Adams-Bashforth de ordin 3:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{12}(23f_k - 16f_{k-1} + 5f_{k-2})$$

Metoda implicită Adams-Moulton de ordin 3 are forma:

$$y_{k+1} = y_k + h(\beta_{-1}f_{k+1} + \beta_0f_k + \beta_1f_{k-1} + \beta_2f_{k-2})$$

Alegem punctele: $x_{k-2} = 0, x_{k-1} = 1, x_k = 2, x_{k+1} = 3$ cu $h = 1$. Dorim ca formula să fie exactă pentru polinoamele $1, x, x^2, x^3, x^4$. Prin urmare, obținem:

$$y = 1 \Rightarrow f = y' = 0 \Rightarrow 1 = 1$$

$$y = x \Rightarrow f = y' = 1 \Rightarrow 3 = 2 + (\beta_{-1} + \beta_0 + \beta_1 + \beta_2) \Rightarrow \beta_{-1} + \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 1$$

$$y = x^2 \Rightarrow f = y' = 2x \Rightarrow 3^2 = 2^2 + (6\beta_{-1} + 4\beta_0 + 2\beta_1) \Rightarrow 6\beta_{-1} + 4\beta_0 + 2\beta_1 = 5$$

$$y = x^3 \Rightarrow f = y' = 3x^2 \Rightarrow 3^3 = 2^3 + (27\beta_{-1} + 12\beta_0 + 3\beta_1) \Rightarrow 27\beta_{-1} + 12\beta_0 + 3\beta_1 = 19$$

$$y = x^4 \Rightarrow f = y' = 4x^3 \Rightarrow 3^4 = 2^4 + (108\beta_{-1} + 32\beta_0 + 4\beta_1) \Rightarrow 108\beta_{-1} + 32\beta_0 + 4\beta_1 = 65$$

Se formează sistemul:

$$\begin{cases} \beta_{-1} + \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 1 \\ 6\beta_{-1} + 4\beta_0 + 2\beta_1 = 5 \\ 27\beta_{-1} + 12\beta_0 + 3\beta_1 = 19 \\ 108\beta_{-1} + 32\beta_0 + 4\beta_1 = 65 \end{cases}$$

cu soluția $\beta_{-1} = \frac{9}{24}, \beta_0 = \frac{19}{24}, \beta_1 = \frac{-5}{24}, \beta_2 = \frac{1}{24}$.

Atunci, forma finală pentru metoda Adams-Moulton de ordin 3 este:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(9f_{k+1} + 19f_k - 5f_{k-1} - f_{k-2})$$

3.2 Problema 2

Pentru rezolvarea problemei diferențiale cu condiții inițiale: $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$, se folosește următoarea formulă explicită, respectiv implicită:

$$y_{k+1} = y_{k-1} + h \sum_{j=0}^2 \beta_j f_{k-j}$$

$$y_{k+1} = y_{k-1} + h \sum_{j=0}^2 \beta_j f_{k+1-j}$$

a) Determinați coeficienții β astfel încât formulele să aibă gradul de valabilitate maxim.

b) Definiți o metodă predictor-corector folosind aceste formule.

Soluție:

a) Pentru formula:

$$y_{k+1} = y_{k-1} + h(\beta_0 f_k + \beta_1 f_{k-1} + \beta_2 f_{k-2})$$

alegem punctele: $x_{k-2} = 0, x_{k-1} = 1, x_k = 2, x_{k+1} = 3$ cu $h = 1$. Dorim ca formula să fie exactă pentru polinoamele $1, x, x^2, x^3$. Avem:

$$y = 1 \Rightarrow f = y' = 0 \Rightarrow 1 = 1$$

$$y = x \Rightarrow f = y' = 1 \Rightarrow 3 = 1 + (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2) \Rightarrow \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 2$$

$$y = x^2 \Rightarrow f = y' = 2x \Rightarrow 3^2 = 1^2 + (4\beta_0 + 2\beta_1) \Rightarrow 4\beta_0 + 2\beta_1 = 8$$

$$y = x^3 \Rightarrow f = y' = 3x^2 \Rightarrow 3^3 = 1^3 + (12\beta_0 + 3\beta_1) \Rightarrow 12\beta_0 + 3\beta_1 = 26$$

Sistemul obținut are soluția $\beta_0 = \frac{7}{3}, \beta_1 = \frac{-2}{3}, \beta_2 = \frac{1}{3}$. Prin urmare, prima formulă are forma:

$$y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{h}{3}(7f_k - 2f_{k-1} + f_{k-2})$$

Pentru formula:

$$y_{k+1} = y_{k-1} + h(\beta_0 f_{k+1} + \beta_1 f_k + \beta_2 f_{k-1})$$

alegem punctele: $x_{k-2} = 0, x_{k-1} = 1, x_k = 2, x_{k+1} = 3$ cu $h = 1$. Dorim ca formula să fie exactă pentru polinoamele $1, x, x^2, x^3$. Avem:

$$y = 1 \Rightarrow f = y' = 0 \Rightarrow 1 = 1$$

$$y = x \Rightarrow f = y' = 1 \Rightarrow 3 = 1 + (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2) \Rightarrow \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 2$$

$$y = x^2 \Rightarrow f = y' = 2x \Rightarrow 3^2 = 1^2 + (6\beta_0 + 4\beta_1 + 2\beta_2) \Rightarrow 6\beta_0 + 4\beta_1 + 2\beta_2 = 8$$

$$y = x^3 \Rightarrow f = y' = 3x^2 \Rightarrow 3^3 = 1^3 + (27\beta_0 + 12\beta_1 + 3\beta_2) \Rightarrow 27\beta_0 + 12\beta_1 + 3\beta_2 = 26$$

Sistemul obținut are soluția $\beta_0 = \frac{1}{3}, \beta_1 = \frac{4}{3}, \beta_2 = \frac{1}{3}$. Prin urmare, a doua formulă are forma:

$$y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{h}{3}(f_{k+1} + 4f_k + f_{k-1})$$

b) Formula explicită furnizează predicția:

$$y_{k+1}^{(p)} = y_{k-1} + \frac{h}{3}(7f_k - 2f_{k-1} + f_{k-2})$$

iar formula implicită corectează această valoare, astfel:

$$y_{k+1}^{(c)} = y_{k-1} + \frac{h}{3}[f(x_{k+1}, y_{k+1}^{(p)}) + 4f_k + f_{k-1}]$$

3.3 Problema 3

Scrieți o funcție OCTAVE care să rezolve o ecuație diferențială de ordin 1 folosind metoda predictor-corector obținută prin îmbinarea unei metode Adams-Bashforth de ordin 3 cu o metoda Adams-Moulton de ordin 2 (vezi secțiunea *Noțiuni teoretice*). Valorile inițiale ale soluției se vor aproxima folosind metoda Runge-Kutta de ordin 4. Funcția va avea următorii parametri de intrare: a, b - capătul superior, respectiv inferior al intervalului de integrare; n - numărul de puncte; y_0 - condiția inițială; f - funcția de integrat $f(x, y)$. Rezultatul funcției va fi y , reprezentând vectorul aproximațiilor soluției ecuației diferențiale.

Soluție:

```
function y = pred_corector3(a, b, n, y0, f)
    y = Runge_Kutta4(a, b, n, y0, f);
    h = (b-a)/n;
    x(1:n+1) = a+h*[0:n];

    for i = 3 : n
        aux1 = feval(f, x(i), y(i));
        aux2 = feval(f, x(i-1), y(i-1));
        aux3 = feval(f, x(i-2), y(i-2));
        ypr = y(i)+h/12*(23*aux1-16*aux2+5*aux3);
        ycor = y(i)+h/12*(5*feval(f, x(i+1), ypr)+8*aux1-aux2);
        y(i+1) = ycor;
    endfor
endfunction
```

Listing 1: Metoda predictor-corector.

Date de intrare:	Date de ieșire:
$a = 0, b = 3, n = 10, y_0 = 0.5, @funcție$	0.5
	0.213770
	-0.079085
	-0.431703
	-0.903119
	-1.557205
	-2.445785
	-3.571678
	-4.841284
	-6.043362
	-6.899990

unde am considerat funcția $f(x, y)$ definită astfel:

```
function rez = functie(x, y)
    rez = y*sin(x)-1;
```

```
endfunction
```

Listing 2: Exemplu de funcție de integrat.

4 Probleme propuse

4.1 Problema 1

Pentru problema diferențială cu condiții inițiale: $y' = f(y, t)$, $y(t_0) = y_0$, se consideră formula aproximativă de integrare:

$$y_{k+1} = y_k + h(\alpha_1 y'_{k+1} + \alpha_0 y'_k) + h^2(\beta_1 y''_{k+1} + \beta_0 y''_k)$$

Determinați $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0$ și β_1 astfel încât formula să aibă gradul de valabilitate cât mai mare.

4.2 Problema 2

Pentru problema diferențială cu condiții inițiale: $y' = f(y, t)$, $y(t_0) = y_0$:

- Calculați coeficienții formulelor explicite și implicite de tip Adams, de ordin 2.
- Definiți cu cele două formule o metodă predictor-corector și scrieți o funcție în OCTAVE care implementează această metodă.