

Metode iterative pentru rezolvarea sistemelor de ecuații liniare: Jacobi, Gauss-Siedel, Suprarelaxare

Colaboratori: Andrei STAN, Bogdan Țigănoaia

February 17, 2025

Cuprins

1	Obiective laborator	1
2	Noțiuni teoretice	1
2.1	Metoda Jacobi	1
2.2	Metoda Gauss-Seidel	2
2.3	Metoda suprarelaxării	2
3	Probleme rezolvate	3
3.1	Problema 1	3
3.2	Problema 2	3
3.3	Problema 3	4
3.4	Problema 4	4
4	Probleme propuse	5
4.1	Problema 1	5
4.2	Problema 2	5
4.3	Problema 3	5
4.4	Problema 4	6

1 Obiective laborator

În urma parcurgerii acestui laborator, studentul va fi capabil să rezolve sisteme de ecuații liniare utilizând metode iterative.

2 Noțiuni teoretice

Metodele exacte de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare, având complexitate $O(n^3)$, au aplicabilitate limitată la ordine de sisteme ce nu depășesc 1000. Pentru sisteme de dimensiuni mai mari se utilizează metode cu complexitate $O(n^2)$ într-un singur pas de iterație. Acestea utilizează relații de recurență, care prin aplicare repetată furnizează aproximații, cu precizie controlată, a soluției sistemului.

Metodele iterative transformă sistemul $Ax = b$ în $x = Gx + c$. Pornindu-se cu o aproximație inițială $x^{(0)}$ a soluției, relația de recurență folosită are forma:

$$x^{(p+1)} = Gx^{(p)} + c$$

unde:

- $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(p)}, \dots$ sunt aproximațiile soluției;
- G reprezintă matricea de iterație;
- c reprezintă vectorul de iterație.

O metodă este convergentă dacă este stabilă și consistentă. Condiția necesară și suficientă de convergență este:

$$\rho(G) < 1$$

unde $\rho(G) = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|)$ reprezintă raza spectrală a matricei de iterație G și $\lambda_i, i = 1 : n$ reprezintă valorile proprii ale matricei.

Metodele iterative se bazează pe descompunerea matricei A sub forma $A = N - P$. Atunci sistemul devine:

$$(N - P)x = b, \text{ adică } x = N^{-1}Px + N^{-1}b.$$

Astfel, rezultă relația de recurență:

$$x^{(p+1)} = N^{-1}Px^{(p)} + N^{-1}b$$

de unde putem identifica $G = N^{-1}P$ și $c = N^{-1}b$.

Se partiționează matricea A punând în evidență o matrice diagonală D , o matrice strict triunghiular inferioară L și o matrice strict triunghiular superioară U :

$$A = D - L - U.$$

2.1 Metoda Jacobi

În metoda Jacobi se alege:

$$N = D$$

$$P = L + U$$

$$G_J = D^{-1}(L + U)$$

Soluția sistemului este:

$$x_i^{(p+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(p)}}{a_{ii}}$$

2.2 Metoda Gauss-Seidel

La această metodă se aleg:

$$N = D - L$$

$$P = U$$

$$G_{GS} = (D - L)^{-1}U$$

Soluția sistemului este:

$$x_i^{(p+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(p+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(p)}}{a_{ii}}$$

Observații:

1. Dacă matricea sistemului este diagonal dominantă pe linii, metoda Gauss Seidel este convergentă. Reciproca nu este adevărată.
2. O matrice A este diagonal dominantă pe linii dacă și numai dacă are următoarea proprietate: pentru fiecare linie i , modulul elementului de pe diagonala principală, $A(i, i)$ este strict mai mare decât suma modulelor elementelor de pe aceeași linie i .

2.3 Metoda suprarelaxării

Pentru găsirea unei descompunerii cât mai rapid convergente, se introduce parametrul de relaxare ω :

$$A = N - P = N - \omega N - P + \omega N = (1 - \omega)N - (P - \omega N) = N(\omega) - P(\omega)$$

de unde obținem:

$$N(\omega) = (1 - \omega)N$$

$$P(\omega) = P - \omega N$$

$$G(\omega) = N^{-1}(\omega)P(\omega) = \frac{N^{-1}}{1-\omega}(P - \omega N) = \frac{N^{-1}P - \omega I_n}{1-\omega}$$

Condiția de stabilitate impune $\omega \in (0, 2)$. În practică se face o altă alegere, astfel:

$$N(\omega) = \frac{1}{\omega}D - L, \quad P(\omega) = \left(\frac{1}{\omega} - 1\right)D + U, \quad G_\omega = (D - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)D + \omega U]$$

Soluția sistemului se poate scrie sub forma:

$$x_i^{(p+1)} = \omega \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(p+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(p)}}{a_{ii}} + (1 - \omega)x_i^{(p)}$$

Dacă se alege $\omega = 1 \Rightarrow$ metoda Gauss-Seidel.

3 Probleme rezolvate

3.1 Problema 1

Să se rezolve sistemul folosind metoda Gauss-Seidel:

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 7 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 15 \\ 2x_1 - 5x_2 + 8x_3 = 28 \end{cases}$$

Soluție:

Scriem formulele de recurență

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -2/7x_2^{(k)} + 4/7x_3^{(k)} + 7/7 \\ x_2^{(k+1)} = -3/6x_1^{(k)} - 2/6x_3^{(k)} + 15/6 \\ x_3^{(k+1)} = -2/8x_1^{(k)} + 5/8x_2^{(k)} + 28/8 \end{cases}$$

Dacă alegem $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$ obținem următoarele rezultate:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	1	2	4.5
2	3.00	-0.5	2.43
3	2.53	0.41	3.12
4	2.66	0.12	2.91
5	2.62	0.21	2.97

Soluția exactă este: $x_1 = 2.63$, $x_2 = 0.19$, $x_3 = 2.96$.

3.2 Problema 2

Folosiți metoda Jacobi pentru a aproxima soluția sistemului:

$$\begin{cases} 10x_1 - 5x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \\ 4x_1 - 3x_2 - 9x_3 = 6 \end{cases}$$

Soluție:

Scriem formulele de recurență

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 5/10x_2^{(k)} - 1/10x_3^{(k)} + 1/10 \\ x_2^{(k+1)} = -1/4x_1^{(k)} - 3/4x_3^{(k)} + 4/4 \\ x_3^{(k+1)} = 4/9x_1^{(k)} - 3/9x_2^{(k)} - 6/9 \end{cases}$$

Alegând $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0 \Rightarrow$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	0.1	1.00	-0.66
2	0.66	1.47	-1.95
3	0.93	1.55	-0.86
4	0.96	1.41	-0.76
5	0.88	1.33	-0.71

Soluția exactă este: $x_1 = 0.84$, $x_2 = 1.34$, $x_3 = -0.73$.

3.3 Problema 3

Fie sistemul $Ax = b$, $A \in R^{2 \times 2}$, $x, b \in R^2$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Matricea A nu este diagonal dominantă pe linii.

În aceste condiții este convergentă metoda Gauss-Seidel?

Soluție:

Se determină matricea de iterație a sistemului pentru metoda Gauss-Seidel, G_{GS} .

$$A = D - L - U \Rightarrow D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Atunci:

$$G_{GS} = (D - L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

$$\det(\lambda I - G_{GS}) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda - \frac{1}{3} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda(G_{GS}) = \{0, \frac{1}{3}\} \text{ și } \rho(G_{GS}) = \frac{1}{3} < 1.$$

\Rightarrow metoda Gauss-Seidel este convergentă.

3.4 Problema 4

Să se implementeze o funcție OCTAVE care rezolvă un sistem de ecuații liniare folosind metoda iterativă Gauss-Seidel. Date de intrare: A - matricea sistemului; b - vectorul termenilor liberi; x_0 - aproximația inițială a soluției; tol - precizia determinării soluției; $maxiter$ - numărul maxim de iterații. Date de ieșire: x - soluția sistemului; $succes$ - variabilă care indică convergența metodei.

Soluție:

```
function [x succes] = GaussSeidel(A, b, x0, tol, maxiter)
[m n] = size(A);
x = x0;
succes = 0;

while maxiter > 0
    maxiter--;
    xp = zeros(1, n);

    for i = 1 : m
        suma1 = 0;
        suma2 = 0;

        for j = 1 : i - 1
```

```

        suma1 += A(i, j)*xp(j);
    endfor

    for j = i + 1 : n
        suma1 += A(i, j)*x(j);
    endfor

    xp(i) = (b(i)-suma1-suma2)/A(i, i);
endfor

x = xp;
if norm(xp-x, 2) < tol
    succes = 1;
    break;
endif
endwhile
endfunction

```

Date de intrare:	Date de ieșire:
$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $tol = 0.0001$, $maxiter = 100$	$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

4 Probleme propuse

4.1 Problema 1

Fie sistemul $Ax = b$, $A \in R^{2 \times 2}$, $b \in R^2$, cu $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Determinați raza spectrală a matricei de iterație Jacobi. Stabiliți convergența metodei Jacobi.

4.2 Problema 2

Fie sistemul liniar:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x + 2y + z = 4 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$$

Stabiliți:

- dacă matricea sistemului este diagonal dominantă pe linii;
- convergența metodei Jacobi;
- convergența metodei Gauss-Seidel.

În caz de convergență, calculați soluția iterativă după trei pași. Alegeți voi aproximația inițială.

4.3 Problema 3

Fie o matrice $A \in R^{n \times n}$ tridiagonală¹ și sistemul de ecuații $Ax = b$, cu $b, x \in R^n$. Scrieți o funcție OCTAVE care rezolvă sistemul de ecuații prin metoda iterativă Jacobi.

¹<http://mathworld.wolfram.com/TridiagonalMatrix.html>

```
function x = solJacobi(A, b, x0, tol, maxiter)
% Rezolvarea sistemului Ax=b folosind metoda Jacobi
% Intrari:
%   A - matricea sistemului
%   b - vectorul termenilor liberi
%   x0 - aproximatia initiala a solutiei
%   tol - precizia determinarii solutiei
%   maxiter - numarul maxim de iteratii permis
% Iesiri:
%   x - solutia sistemului
```

Listing 1: Algoritmul Jacobi

4.4 Problema 4

Să se implementeze o funcție OCTAVE care rezolvă un sistem liniar de ecuații folosind metoda suprarelaxării.

```
function [x, flag] = sor(A, x, b, w, max_it, tol)
% Metoda Suprarelaxarii
% Functia rezolva sisteme liniare Ax=b folosind metoda suprarelaxarii
% Input:
%   A - matricea sistemului
%   x - aproximarea initiala a sistemului
%   b - vectorul termenilor liberi
%   w - factorul de relaxare
%   max_it - numarul maxim de iteratii
%   tol - toleranta
% Output:
%   x - solutia sistemului
%   flag - 0 = a fost gasita o solutie / 1 = metoda nu converge pentru max_it
```

Listing 2: Suprarelaxare

Să se testeze funcția folosind diferite valori pentru ω .