Ortogonalitate. Transformări ortogonale. Polinoame ortogonale.

Colaboratori: Andrei STAN, Mihaela-Andreea Vasile, Florin Pop

February 17, 2025

Cuprins

1 Obiective laborator

În urma parcurgerii acestui laborator, studentul va fi capabil să:

- definească noțiunile de vectori ortogonali și matrice ortogonală;
- aplice metode de transformare ortogonală: Householder și Givens;
- implementeze procesul Gram-Schmidt;
- folosească polinoame ortogonale.

2 Noțiuni teoretice

2.1 Norme

Considerând un spațiu vectorial V peste un corp $\mathbb{K}$, o normă pe V este o funcție $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$ care satisface următoarele proprietăți pentru orice $x, y \in V$ și $\alpha \in \mathbb{K}$:

- $||x|| \geq 0$ și $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (pozitiv definită);
- $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$;
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (inegalitatea triunghiului).

2.1.1 Norme vectoriale

- **Valoarea absolută.** Este o normă pe $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$. Numerele complexe formează un spațiu uni-dimensional peste $\mathbb{C}$ și unul bi-dimensional peste $\mathbb{R}$.
- **Distanța Manhatten.** $||\mathbf{x}||_1 \coloneqq \sum_i |x_i|$.
- **Norma euclidiană.** Pe $\mathbb{R}^n$, norma euclidiană este definită ca $||\mathbf{x}||_2 \coloneqq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$. Luând în considerare numerele complexe, acestea se identifică cu $\mathbb{R}^2$.
- **Norma infinit.** $||\mathbf{x}||_\infty \coloneqq \max_i |x_i|$.
- **Norma *p*.** $||\mathbf{x}||_p \coloneqq \left(\sum_i |x_i|^p\right)^{1/p}$. Normele de mai sus sunt particularizări ale normei p pentru diferite valori ale lui p.

2.1.2 Norme matriceale

Multe norme matriceale mai au proprietatea de a fi *submultiplicative*:

$$||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$$

- **Norma *p* matriceală.** Ea este indusă de norma p a vectorilor.
  $||A||_p \coloneqq \max_{x \neq 0} \frac{||Ax||_p}{||x||_p} = \max_{||x||=1} ||Ax||_p$.
  - **p = 1.** $||A||_1 \coloneqq \max_j \sum_i |a_{ij}|$. Este suma maximă a valorilor absolute de pe coloane.

- **p = 2. Norma/Raza spectrală.** $||A||_2 := \sqrt{\lambda_{max}(A^*A)}$. Este rădăcina patrată a celei mai mari valori proprii a matricei A^*A. Este egala cu cea mai mare valoare singulară a matricei A.
  Demonstrație. Fie $B = A^*A$. Atunci B este simetrică și din teorema spectrală avem o bază ortonormată de vectori proprii v_i și valori proprii λ_i. Fie $v = \sum_i \alpha_i v_i$ și $||v|| = 1$. Atunci:

  $$||Av||_2^2 = \langle Av, Av\rangle = \langle v, A^*Av\rangle = \langle \sum_i \alpha_i v_i, \sum_i \alpha_i \lambda_i v_i\rangle = \sum_i \lambda_i \alpha_i^2$$

  Având constrângerea $||v|| = 1$, $\sum_i \alpha_i^2 = 1 \implies ||A||_2 = \lambda_{max}(A)$. ■
- **p = ∞.** $||A||_\infty := \max_i \sum_j |a_{ij}|$. Este suma maximă a valorilor absolute de pe rânduri.

- **Norma Frobenius.** $||A||_F := \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} = \sqrt{trace(A^*A)}$.

Teorema Gelfand. Pentru orice normă matriceală avem:

$$\lim_{k\to\infty} ||A^k||^{1/k} = \rho(A)$$

Mai mult, $\rho(A) \leq ||A||$ pentru orice normă matriceală.

Demonstrație. Fie λ valoarea proprie cea mai mare a lui A și v un vector propriu asociat. Atunci:

$$||A|| \geq \frac{||Av||}{||v||}(\forall v) = \frac{||\lambda v||}{||v||} = |\lambda| \Rightarrow \rho(A) \leq ||A||$$

Ce ne indică normele matriceale induse de vectori? Ele ne dau o măsură a cât de mult se dilată un vector atunci când este aplicată o anumită transformare liniară. În 1 avem o reprezentare a vectorilor unitari.

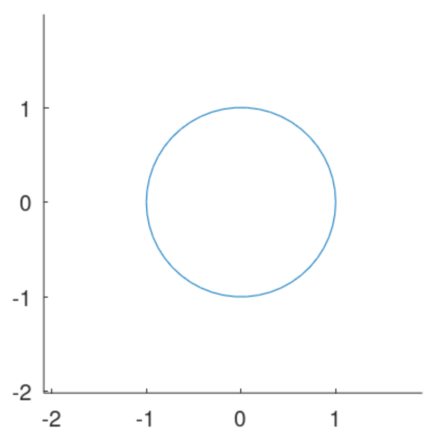


Figura 1: Vectori unitate

Ce se întâmplă dacă aplicăm transformarea $A1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$?

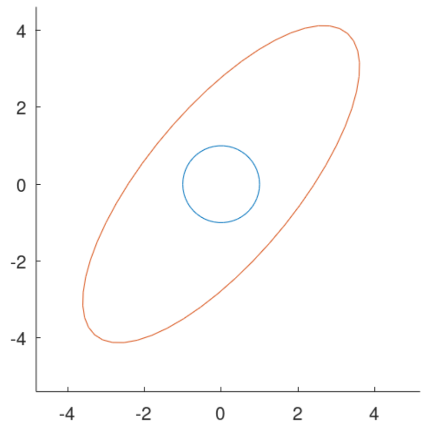


Figura 2: Transformarea $A1$

2.2 Produs scalar. Proiecții.

Produsul scalar al unui spațiu vectorial V peste F este o funcție $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to F$ care satisface următoarele proprietăți pentru orice $x, y, z \in V$ și $\alpha \in F$:

- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (conjugare simetrică);
- $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ (liniaritate);
- $\langle x, x \rangle \geq 0$ și $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (pozitivitate).

Din aceastea rezultă și altele:

- $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, z \rangle$;
- $\langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\Re(\langle x, y \rangle) + \langle y, y \rangle$;

Orice produs scalar induce o normă pe spațiul vectorial V prin $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Într-un spațiu euclidian, produsul scalar este definit ca $\langle x, y \rangle = x^T y$.

2.2.1 Proiecții

Teoremă. $\langle x, y \rangle = u^T v = ||u|| ||v|| \cos(\theta)$, unde θ este unghiul dintre cei doi vectori.

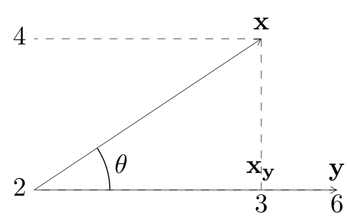
Demonstrație. Fie $\mathbf{r} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$. Atunci, din teorema cosinusului avem:

$$
\begin{aligned}
||\mathbf{r}||^2 &= ||\mathbf{u}||^2 + ||\mathbf{v}||^2 - 2||\mathbf{u}||||\mathbf{v}||\cos(\theta) \\
||\mathbf{u}-\mathbf{v}||^2 - ||\mathbf{u}||^2 - ||\mathbf{v}||^2 &= -2||\mathbf{u}||||\mathbf{v}||\cos(\theta) \\
-2\sum_i u_i v_i &= -2||\mathbf{u}||||\mathbf{v}||\cos(\theta) \\
\sum_i u_i v_i &= ||\mathbf{u}||||\mathbf{v}||\cos(\theta)
\end{aligned}
$$

Astfel, putem scrie produsul scalar ca $\langle x, y\rangle = u^T v = ||u||||v||\cos(\theta)$. ■

Fie doi vectori $\mathbf{x}$ și $\mathbf{y}$, iar proiecția lui $\mathbf{x}$ pe $\mathbf{y}$ este $\mathbf{x_y}$. Pentru a îl găsi pe $\mathbf{x_y}$, ne gândim astfel:

- În primul rând, ne trebuie norma lui $\mathbf{x_y}$: $||\mathbf{x}||\cos(\theta)$.
- Având norma, trebuie să avem și o direcție. Proiecția fiind pe $\mathbf{y}$, o putem găsi prin *normalizare*: $\frac{\mathbf{y}}{||\mathbf{y}||}$.



Avem și o interpretare geometrică a produsului scalar: produsul dintre norma proiecției pe un vector și norma vectorului pe care se proiectează.

Definim operatorul de proiecție astfel: $proj_y x = \frac{||x||\cos(\theta)}{||y||} y = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} y$.

$$
proj_y x = \frac{||x||\cos(\theta)}{||y||} y = \frac{||y||||x||\cos(\theta)}{||y||^2} y = \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y
$$

2.3 Vectori ortogonali. Matrice unitară/ortogonală.

Doi vectori $x, y \in \mathbb{R}^n$ sunt ortogonali dacă produsul lor scalar este zero, adică $x^T y = 0$. Cu alte cuvinte, direcțiile lor sunt perpendiculare. În plus, dacă $||x||_2 = ||y||_2 = 1$, atunci cei doi vectori sunt *ortonormați*.

O bază a unui spațiu vectorial se numește ortogonală, respectiv ortonormată, dacă vectorii acesteia sunt ortogonali, respectiv ortonormați.

O matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se numește *unitară* dacă $A^*A = AA^H = I_n$, unde A^* este conjugata transpusă a lui A. Dacă A este reală, atunci matricea se numește *ortogonală* și putem scrie $A^TA = AA^T = I_n$. Ele sunt foarte utilizate în diverse aplicații, precum descompunerea QR sau descompunerea valorilor singulare.

O matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sau $\mathbb{R}^{n\times n}$ unitară/ortogonală are următoarele proprietăți:

- coloanele (rândurile) sale formează o bază ortonormată a spațiului vectorial $\mathbb{C}^n$ sau $\mathbb{R}^n$;
- norma vectorilor coloană (rând) este 1;
- $A^{-1} = A^*$ sau $A^{-1} = A^*$;

- este normală, adică $A^*A = AA^*$;
- este diagonalizabilă;
- valorile proprii se află pe cercul unitate;
- vectorii proprii sunt ortogonali;
- $det(A) = \pm 1$;
- conservă norma vectorilor: $||Ax|| = ||x||$;
- $||A||_2 = 1$;
- conservă produsul scalar: $(Ax)^*(Ay) = x^*A^*Ay = x^*y$;

Astfel, matricile ortogonale se pot interpreta geometric ca fiind rotații, reflecții, permutări, identități sau combinații ale acestora.

Ce se întâmplă dacă aplicăm o matrice ortogonală asupra vectorilor unitari?
Fie $A2 = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{7}) & -sin(\frac{\pi}{7}) \\ sin(\frac{\pi}{7}) & cos(\frac{\pi}{7}) \end{bmatrix}$.

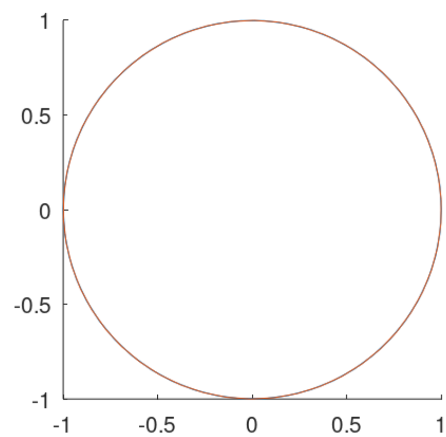


Figura 3: Transformarea $A2$

Toți vectorii au fost rotiți cu un unghi de $\frac{\pi}{7}$. Nu s-a modificat nimic altceva! Norma vectorilor a rămas la fel și deci graficele coincid. În următoarea figură, aplicăm $A3 = 2 * A2$, matrice care nu mai este ortogonală.

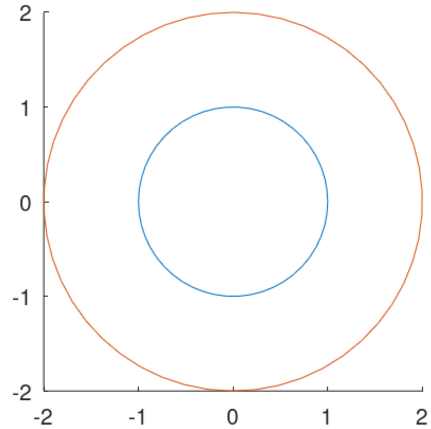


Figura 4: Transformarea $A2$

2.4 Transformări ortogonale. Descompunerea QR.

Definiție. Fie $T : V \to V$ o transformare liniară.

$$T \text{ - ortogonală} \equiv \langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

Utilitatea transformărilor ortogonale în cazul sistemelor liniare constă în faptul că putem aplica o serie de astfel transformări pentru a introduce 0-uri în matricea sistemului. La final, aflarea soluției va consta în rezolvarea unui sistem triunghiular. Matricea va avea forma $A = QR$, unde Q este o matrice ortogonală și R este o matrice superior triunghiulară.

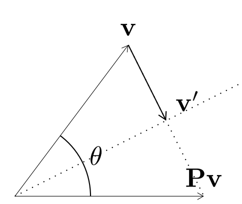
$$Ax = b \Leftrightarrow QRx = b \Leftrightarrow Rx = Q^*b$$

Cu aceste transformări, ne dorim să aducem vectori de la forma $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ la forma $\begin{bmatrix} x' \\ 0 \end{bmatrix}$.

2.4.1 Reflexii. Transformarea Householder.

Căutăm o transformare P astfel încât $Pv = ||v||e$, unde e este un vector din baza canonică.

Pentru reflexie, ne alegem un vector d care ne va da *direcția de reflexie*, $||d||_2 = 1$



$$v' = proj_d(-v) = \frac{\langle v, d\rangle}{\langle d, d\rangle} d$$
$$v' = -v^* dd = -dd^* v \implies$$

$$Pv = v - 2v' = v - 2dd^* v$$
$$P = I - 2dd^*$$

Iar în cazul în care d nu are norma 1, ajungem la forma generală a reflectorului Householder, prin normalizare:

$$P = I - 2\frac{dd^T}{d^T d}$$

Cum găsim d pentru a introduce 0-uri?

Ne dorim să găsim o matrice P astfel încât $Pv = \pm||v||e_1$. Mai mult, $v + d = \pm Pv$. Astfel, considerăm $d = v \pm ||v||e_1$.

Exemplu. Fie matricea $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 10^{-8} & 4 \end{bmatrix}$. Ne dorim să o aducem la o formă superior triunghiulară, deci am avea nevoie de un 0 în colțul din stânga jos. Alegem $d = \begin{bmatrix} 1 \\ 10^{-8} \end{bmatrix} - || \begin{bmatrix} 1 \\ 10^{-8} \end{bmatrix} ||e_1 \approxeq \begin{bmatrix} 0 \\ 10^{-8} \end{bmatrix}$. Astfel,

$$P = I - 2\frac{dd^T}{d^T d} = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{bmatrix}$$

3 Probleme