

Ortogonalitate. Transformări ortogonale. Polinoame ortogonale.

Colaboratori: Andrei STAN, Mihaela-Andreea Vasile, Florin Pop

February 16, 2025

Cuprins

1	Obiective laborator	1
2	Noțiuni teoretice	1
2.1	Norme	1
2.1.1	Norme vectoriale	1
2.1.2	Norme matriceale	1
2.2	Produs scalar. Proiecții ortogonale.	3
2.2.1	Proiecții ortogonale	3
2.3	Vectori ortogonali. Matrice unitară/ortogonală.	3
3	Probleme	4

1 Obiective laborator

În urma parcurgerii acestui laborator, studentul va fi capabil să:

- definească noțiunile de vectori ortogonali și matrice ortogonală;
- aplice metode de transformare ortogonală: Householder și Givens;
- implementeze procesul Gram-Schmidt;
- folosească polinoame ortogonale.

2 Noțiuni teoretice

2.1 Norme

Considerând un spațiu vectorial V peste un corp \mathbb{K} , o normă pe V este o funcție $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ care satisface următoarele proprietăți pentru orice $x, y \in V$ și $\alpha \in \mathbb{K}$:

- $\|x\| \geq 0$ și $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (pozitiv definită);
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$;
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inegalitatea triunghiului).

2.1.1 Norme vectoriale

- **Valoarea absolută.** Este o normă pe \mathbb{R} sau \mathbb{C} . Numerele complexe formează un spațiu uni-dimensional peste \mathbb{C} și unul bi-dimensional peste \mathbb{R} .
- **Distanța Manhattan.** $\|\mathbf{x}\|_1 := \sum_i |x_i|$.
- **Norma euclidiană.** Pe \mathbb{R}^n , norma euclidiană este definită ca $\|\mathbf{x}\|_2 := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$. Luând în considerare numerele complexe, acestea se identifică cu \mathbb{R}^2 .
- **Norma infinit.** $\|\mathbf{x}\|_\infty := \max_i |x_i|$.
- **Norma p .** $\|\mathbf{x}\|_p := (\sum_i |x_i|^p)^{1/p}$. Normele de mai sus sunt particularizări ale normei p pentru diferite valori ale lui p .

2.1.2 Norme matriceale

Multe norme matriceale mai au proprietatea de a fi *submultiplicative*:

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

- **Norma p matriceală.** Ea este indusă de norma p a vectorilor.
 $\|A\|_p := \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p$.
 – **$p = 1$.** $\|A\|_1 := \max_j \sum_i |a_{ij}|$. Este suma maximă a valorilor absolute de pe coloane.

- **p = 2. Norma/Raza spectrală.** $\|A\|_2 := \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)}$. Este rădăcina patrată a celei mai mari valori proprii a matricei A^*A . Este egală cu cea mai mare valoare singulară a matricei A .
Demonstrație. Fie $B = A^*A$. Atunci B este simetrică și din teorema spectrală avem o bază ortonormată de vectori proprii v_i și valori proprii λ_i . Fie $v = \sum_i \alpha_i v_i$ și $\|v\| = 1$. Atunci:

$$\|Av\|_2^2 = \langle Av, Av \rangle = \langle v, A^*Av \rangle = \left\langle \sum_i \alpha_i v_i, \sum_i \alpha_i \lambda_i v_i \right\rangle = \sum_i \lambda_i \alpha_i^2$$

Având constrângerea $\|v\| = 1$, $\sum_i \alpha_i^2 = 1 \implies \|A\|_2 = \lambda_{\max}(A)$. ■

- **p = ∞.** $\|A\|_\infty := \max_i \sum_j |a_{ij}|$. Este suma maximă a valorilor absolute de pe rânduri.

- **Norma Frobenius.** $\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} = \sqrt{\text{trace}(A^*A)}$.

Teorema Gelfand. Pentru orice normă matriceală avem:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A)$$

Mai mult, $\rho(A) \leq \|A\|$ pentru orice normă matriceală.

Demonstrație. Fie λ valoarea proprie cea mai mare a lui A și v un vector propriu asociat. Atunci:

$$\|A\| \geq \frac{\|Av\|}{\|v\|} (\forall v) = \frac{\|\lambda v\|}{\|v\|} = |\lambda| \Rightarrow \rho(A) \leq \|A\|$$

Ce ne indică normele matriceale induse de vectori? Ele ne dau o măsură a cât de mult se dilată un vector atunci când este aplicată o anumită transformare liniară. În 1 avem o reprezentare a vectorilor unitari.

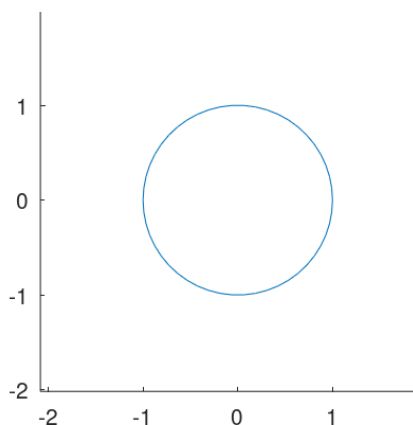


Figura 1: Vectori unitate

Ce se întâmplă dacă aplicăm transformarea $A1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$?

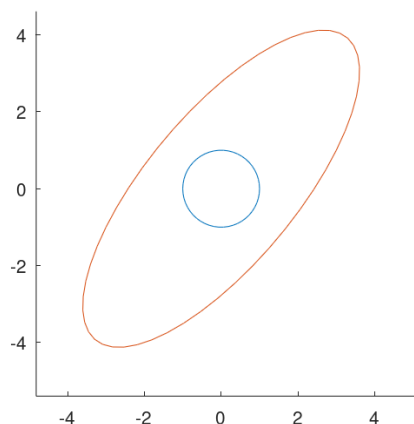


Figura 2: Transformarea $A1$

2.2 Produs scalar. Proiecții ortogonale.

Produsul scalar al unui spațiu vectorial V peste F este o funcție $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow F$ care satisface următoarele proprietăți pentru orice $x, y, z \in V$ și $\alpha \in F$:

- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (conjugare simetrică);
- $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ (liniaritate);
- $\langle x, x \rangle \geq 0$ și $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (pozitivitate).

Din acestea rezultă și altele:

- $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, z \rangle$;
- $\langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\Re(\langle x, y \rangle) + \langle y, y \rangle$;

Orice produs scalar induce o normă pe spațiul vectorial V prin $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Într-un spațiu euclidian, produsul scalar este definit ca $\langle x, y \rangle = x^T y$.

2.2.1 Proiecții ortogonale

2.3 Vectori ortogonali. Matrice unitară/ortogonală.

Doi vectori $x, y \in \mathbb{R}^n$ sunt ortogonali dacă produsul lor scalar este zero, adică $x^T y = 0$. Cu alte cuvinte, direcțiile lor sunt perpendiculare. În plus, dacă $\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$, atunci cei doi vectori sunt *ortonormați*.

O bază a unui spațiu vectorial se numește ortogonală, respectiv ortonormată, dacă vectorii acesteia sunt ortogonali, respectiv ortonormați.

O matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ se numește *unitară* dacă $A^H A = A A^H = I_n$, unde A^H este conjugata transpusă a lui A . Dacă A este reală, atunci matricea se numește *ortogonală* și putem scrie $A^T A = A A^T = I_n$. Ele sunt foarte utilizate în diverse aplicații, precum descompunerea QR sau descompunerea valorilor singulare.

O matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sau $\mathbb{R}^{n \times n}$ unitară/ortogonală are următoarele proprietăți:

- coloanele (rândurile) sale formează o bază ortonormată a spațiului vectorial \mathbb{C}^n sau \mathbb{R}^n ;
- norma vectorilor coloană (rând) este 1;
- $A^{-1} = A^H$ sau $A^{-1} = A^T$;
- este normală, adică $A^H A = A A^H$;
- este diagonalizabilă;
- valorile proprii se află pe cercul unitate;
- vectorii proprii sunt ortogonali;
- $\det(A) = \pm 1$;
- conservă norma vectorilor: $\|Ax\| = \|x\|$;
- $\|A\|_2 = 1$;
- conservă produsul scalar: $(Ax)^H(Ay) = x^H A^H A y = x^H y$;

Astfel, matricile ortogonale se pot interpreta geometric ca fiind rotații, reflecții, permutări, identități sau combinații ale acestora.

Ce se întâmplă dacă aplicăm o matrice ortogonală asupra vectorilor unitari?

Fie $A_2 = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{7}) & -\sin(\frac{\pi}{7}) \\ \sin(\frac{\pi}{7}) & \cos(\frac{\pi}{7}) \end{bmatrix}$.

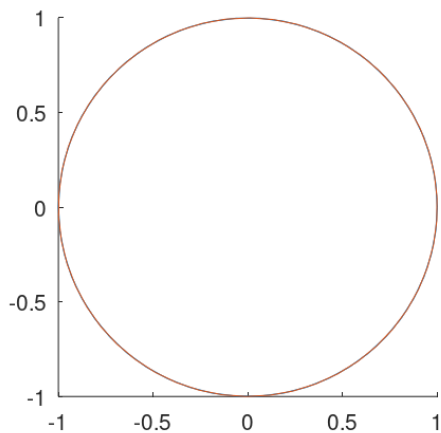
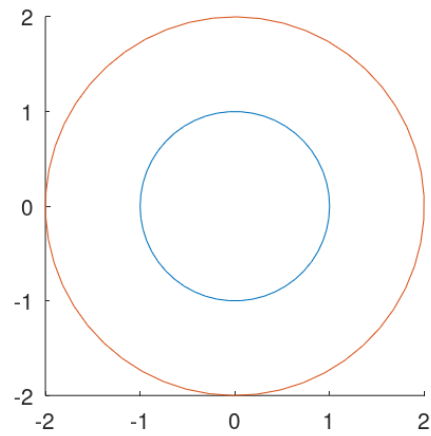


Figura 3: Transformarea A_2

Toți vectorii au fost roțiți cu un unghi de $\frac{\pi}{7}$. Nu s-a modificat nimic altceva! Norma vectorilor a rămas la fel și deci graficele coincid. În următoarea figură, aplicăm $A_3 = 2 * A_2$, matrice care nu mai este ortogonală.

3 Probleme

Figura 4: Transformarea A_2