

Ortogonalitate. Transformări ortogonale. Polinoame ortogonale.

Colaboratori: Andrei STAN, Mihaela-Andreea Vasile, Florin Pop

February 17, 2025

Cuprins

| | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Obiective laborator | 1 |
| 2 | Noțiuni teoretice | 1 |
| 2.1 | Norme | 1 |
| 2.1.1 | Norme vectoriale | 1 |
| 2.1.2 | Norme matriceale | 1 |
| 2.2 | Produs scalar. Proiecții. | 3 |
| 2.2.1 | Proiecții | 3 |
| 2.3 | Vectori ortogonali. Matrice unitară/ortogonală. | 4 |
| 2.4 | Transformări ortogonale. Descompunerea QR. | 6 |
| 2.4.1 | Reflexii. Transformarea Householder. | 6 |
| 3 | Probleme | 7 |

1 Obiective laborator

În urma parcurgerii acestui laborator, studentul va fi capabil să:

- definească noțiunile de vectori ortogonali și matrice ortogonală;
- aplice metode de transformare ortogonală: Householder și Givens;
- implementeze procesul Gram-Schmidt;
- folosească polinoame ortogonale.

2 Noțiuni teoretice

2.1 Norme

Considerând un spațiu vectorial V peste un corp \mathbb{K} , o normă pe V este o funcție $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ care satisface următoarele proprietăți pentru orice $x, y \in V$ și $\alpha \in \mathbb{K}$:

- $\|x\| \geq 0$ și $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (pozitiv definită);
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$;
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inegalitatea triunghiului).

2.1.1 Norme vectoriale

- **Valoarea absolută.** Este o normă pe \mathbb{R} sau \mathbb{C} . Numerele complexe formează un spațiu uni-dimensional peste \mathbb{C} și unul bi-dimensional peste \mathbb{R} .
- **Distanța Manhattan.** $\|\mathbf{x}\|_1 := \sum_i |x_i|$.
- **Norma euclidiană.** Pe \mathbb{R}^n , norma euclidiană este definită ca $\|\mathbf{x}\|_2 := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$. Luând în considerare numerele complexe, acestea se identifică cu \mathbb{R}^2 .
- **Norma infinit.** $\|\mathbf{x}\|_\infty := \max_i |x_i|$.
- **Norma p .** $\|\mathbf{x}\|_p := (\sum_i |x_i|^p)^{1/p}$. Normele de mai sus sunt particularizări ale normei p pentru diferite valori ale lui p .

2.1.2 Norme matriceale

Multe norme matriceale mai au proprietatea de a fi *submultiplicative*:

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

- **Norma p matriceală.** Ea este indusă de norma p a vectorilor.
 $\|A\|_p := \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p$.
 – **$p = 1$.** $\|A\|_1 := \max_j \sum_i |a_{ij}|$. Este suma maximă a valorilor absolute de pe coloane.

- **p = 2. Norma/Raza spectrală.** $\|A\|_2 := \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)}$. Este rădăcina patrată a celei mai mari valori proprii a matricei A^*A . Este egală cu cea mai mare valoare singulară a matricei A .
Demonstrație. Fie $B = A^*A$. Atunci B este simetrică și din teorema spectrală avem o bază ortonormată de vectori proprii v_i și valori proprii λ_i . Fie $v = \sum_i \alpha_i v_i$ și $\|v\| = 1$. Atunci:

$$\|Av\|_2^2 = \langle Av, Av \rangle = \langle v, A^*Av \rangle = \langle \sum_i \alpha_i v_i, \sum_i \alpha_i \lambda_i v_i \rangle = \sum_i \lambda_i \alpha_i^2$$

Având constrângerea $\|v\| = 1$, $\sum_i \alpha_i^2 = 1 \implies \|A\|_2 = \lambda_{\max}(A)$. ■

- **p = ∞.** $\|A\|_\infty := \max_i \sum_j |a_{ij}|$. Este suma maximă a valorilor absolute de pe rânduri.

- **Norma Frobenius.** $\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} = \sqrt{\text{trace}(A^*A)}$.

Teorema Gelfand. Pentru orice normă matriceală avem:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A)$$

Mai mult, $\rho(A) \leq \|A\|$ pentru orice normă matriceală.

Demonstrație. Fie λ valoarea proprie cea mai mare a lui A și v un vector propriu asociat. Atunci:

$$\|A\| \geq \frac{\|Av\|}{\|v\|} (\forall v) = \frac{\|\lambda v\|}{\|v\|} = |\lambda| \Rightarrow \rho(A) \leq \|A\|$$

Ce ne indică normele matriceale induse de vectori? Ele ne dau o măsură a cât de mult se dilată un vector atunci când este aplicată o anumită transformare liniară. În 1 avem o reprezentare a vectorilor unitari.

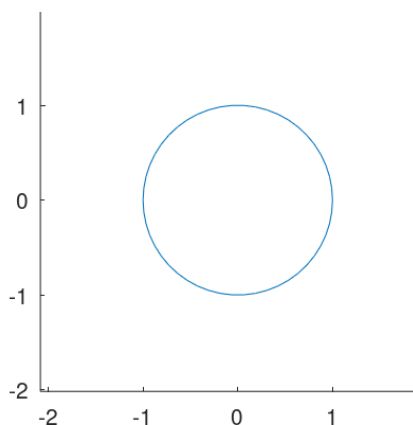


Figura 1: Vectori unitate

Ce se întâmplă dacă aplicăm transformarea $A1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$?

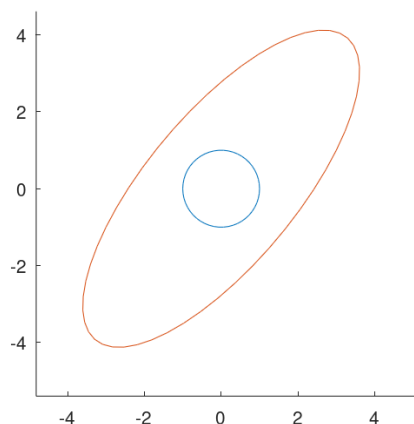


Figura 2: Transformarea $A1$

2.2 Produs scalar. Proiecții.

Produsul scalar al unui spațiu vectorial V peste F este o funcție $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow F$ care satisface următoarele proprietăți pentru orice $x, y, z \in V$ și $\alpha \in F$:

- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (conjugare simetrică);
- $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ (liniaritate);
- $\langle x, x \rangle \geq 0$ și $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (pozitivitate).

Din acestea rezultă și altele:

- $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, z \rangle$;
- $\langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\Re(\langle x, y \rangle) + \langle y, y \rangle$;

Orice produs scalar induce o normă pe spațiul vectorial V prin $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Într-un spațiu euclidian, produsul scalar este definit ca $\langle x, y \rangle = x^T y$.

2.2.1 Proiecții

Teoremă. $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos(\theta)$, unde θ este unghiul dintre cei doi vectori.

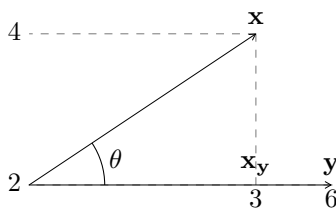
Demonstrație. Fie $\mathbf{r} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$. Atunci, din teorema cosinusului avem:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{r}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos(\theta) \\
\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 &= -2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos(\theta) \\
-2 \sum_i u_i v_i &= -2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos(\theta) \\
\sum_i u_i v_i &= \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos(\theta)
\end{aligned}$$

Astfel, putem scrie produsul scalar ca $\langle x, y \rangle = u^T v = \|u\|\|v\|\cos(\theta)$. ■

Fie doi vectori \mathbf{x} și \mathbf{y} , iar proiecția lui \mathbf{x} pe \mathbf{y} este \mathbf{x}_y . Pentru a îl găsi pe \mathbf{x}_y , ne gândim astfel:

- În primul rând, ne trebuie norma lui \mathbf{x}_y : $\|\mathbf{x}\|\cos(\theta)$.
- Având norma, trebuie să avem și o direcție. Proiecția fiind pe \mathbf{y} , o putem găsi prin *normalizare*: $\frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|}$.



Avem și o interpretare geometrică a produsului scalar: produsul dintre norma proiecției pe un vector și norma vectorului pe care se proiectează.

Definim operatorul de proiecție astfel: $proj_y x = \frac{\|x\|\cos(\theta)}{\|y\|} y = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y$.

$$proj_y x = \frac{\|x\|\cos(\theta)}{\|y\|} y = \frac{\|y\|\|x\|\cos(\theta)}{\|y\|^2} y = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y$$

2.3 Vectori ortogonali. Matrice unitară/ortogonală.

Doi vectori $x, y \in \mathbb{R}^n$ sunt ortogonali dacă produsul lor scalar este zero, adică $x^T y = 0$. Cu alte cuvinte, direcțiile lor sunt perpendiculare. În plus, dacă $\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$, atunci cei doi vectori sunt *ortonormați*.

O bază a unui spațiu vectorial se numește ortogonală, respectiv ortonormată, dacă vectorii acesteia sunt ortogonali, respectiv ortonormați.

O matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ se numește *unitară* dacă $A^* A = A A^H = I_n$, unde A^* este conjugata transpusă a lui A . Dacă A este reală, atunci matricea se numește *ortogonală* și putem scrie $A^T A = A A^T = I_n$. Ele sunt foarte utilizate în diverse aplicații, precum descompunerea QR sau descompunerea valorilor singulare.

O matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sau $\mathbb{R}^{n \times n}$ unitară/ortogonală are următoarele proprietăți:

- coloanele (rândurile) sale formează o bază ortonormată a spațiului vectorial \mathbb{C}^n sau \mathbb{R}^n ;
- norma vectorilor coloană (rând) este 1;
- $A^{-1} = A^*$ sau $A^{-1} = A^T$;

- este normală, adică $A^*A = AA^*$;
- este diagonalizabilă;
- valorile proprii se află pe cercul unitate;
- vectorii proprii sunt ortogonali;
- $\det(A) = \pm 1$;
- conservă norma vectorilor: $\|Ax\| = \|x\|$;
- $\|A\|_2 = 1$;
- conservă produsul scalar: $(Ax)^*(Ay) = x^*A^*Ay = x^*y$;

Astfel, matricile ortogonale se pot interpreta geometric ca fiind rotații, reflecții, permutări, identități sau combinații ale acestora.

Ce se întâmplă dacă aplicăm o matrice ortogonală asupra vectorilor unitari?

Fie $A_2 = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{7}) & -\sin(\frac{\pi}{7}) \\ \sin(\frac{\pi}{7}) & \cos(\frac{\pi}{7}) \end{bmatrix}$.

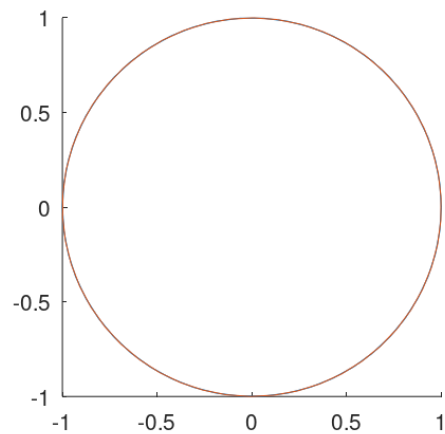


Figura 3: Transformarea A_2

Toți vectorii au fost roțiți cu un unghi de $\frac{\pi}{7}$. Nu s-a modificat nimic altceva! Norma vectorilor a rămas la fel și deci graficele coincid. În următoarea figură, aplicăm $A3 = 2 * A2$, matrice care nu mai este ortogonală.

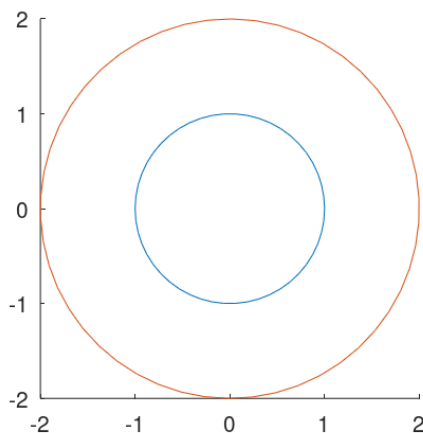


Figura 4: Transformarea A2

2.4 Transformări ortogonale. Descompunerea QR.

Definiție. Fie $T : V \rightarrow V$ o transformare liniară.

$$T \text{ - ortogonală} \equiv \langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

Utilitatea transformărilor ortogonale în cazul sistemelor liniare constă în faptul că putem aplica o serie de astfel transformări pentru a introduce 0-uri în matricea sistemului. La final, aflarea soluției va consta în rezolvarea unui sistem triunghiular. Matricea va avea forma $A = QR$, unde Q este o matrice ortogonală și R este o matrice superior triunghiulară.

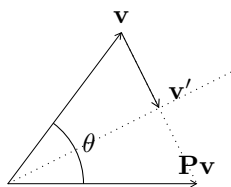
$$Ax = b \Leftrightarrow QRx = b \Leftrightarrow Rx = Q^*b$$

Cu aceste transformări, ne dorim să aducem vectori de la forma $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ la forma $\begin{bmatrix} x' \\ 0 \end{bmatrix}$.

2.4.1 Reflexii. Transformarea Householder.

Căutăm o transformare P astfel încât $Pv = \|v\|e$, unde e este un vector din baza canonică.

Pentru reflexie, ne alegem un vector d care ne va da *direcția de reflexie*, $\|d\|_2 = 1$



$$v' = \text{proj}_d(-v) = \frac{\langle v, d \rangle}{\langle d, d \rangle} d$$

$$v' = -v^* d d = -d d^* v \implies$$

$$Pv = v - 2v' = v - 2dd^*v$$

$$P = I - 2dd^*$$

Iar în cazul în care d nu are norma 1, ajungem la forma generală a reflectorului Householder, prin normalizare:

$$P = I - 2 \frac{dd^T}{d^T d}$$

Cum găsim d pentru a introduce 0-uri?

Ne dorim să găsim o matrice P astfel încât $Pv = \pm \|v\| e_1$. Mai mult, $v + d = \pm Pv$. Astfel, considerăm $d = v \pm \|v\| e_1$.

Exemplu. Fie matricea $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 10^{-8} & 4 \end{bmatrix}$. Ne dorim să o aducem la o formă superior triunghiulară, deci am avea nevoie de un 0 în colțul din stânga jos. Alegem $d = \begin{bmatrix} 1 \\ 10^{-8} \end{bmatrix} - \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 10^{-8} \end{bmatrix} \right\| e_1 \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 10^{-8} \end{bmatrix}$. Astfel,

$$P = I - 2 \frac{dd^T}{d^T d} = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{bmatrix}$$

3 Probleme