Aproksymacja profilu wysokościowego

Stanisław Grochowski

19 maja 2024

1 Wstęp

Interpolacja to estymacja wartości badanej wielkości w obszarach między dyskretnymi punktami. Wykorzystywana jest w wielu dziedzinach nauki np. grafice komputerowej, meteorologii, elektrostatyce. Punkty w których wartości są znane nazywane są węzłami interpolacji. Ten dokument opisuje dwie metody interpolacji - interpolacje Lagrange'a która wpasowuje w n+1 węzłów wielomian stopnia n, oraz interpolacje funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia (splajnami) która polega na interpolacji lokalnej z użyciem wielomianów niskiego stopnia. Dwa profile wysokościowe (profile topograficzne) zostaną użyte jako dane na których zostaną wykonane wszystkie operacje. Pierwszy o dwóch wzniesieniach w pierwszej połowie trasy oraz drugi o wzniesieniach na początku i końcu trasy. Zależnie od liczby węzłów trasy będą odpowiednio skracane aby przy podstawowej analizie pierwszy i ostatni węzeł wypadały na pierwszym i ostatnim punkcie trasy, a reszta węzłów była rozmieszczona równomiernie.

2 Interpolacja Lagrange'a

Dla n+1 węzłów interpolacja szuka wielomianu stopnia n przechodzącego przez każdy z nich. Baza Lagrnage do interpolacji składa się z funkcji określonych wzorem:

$$\varphi_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

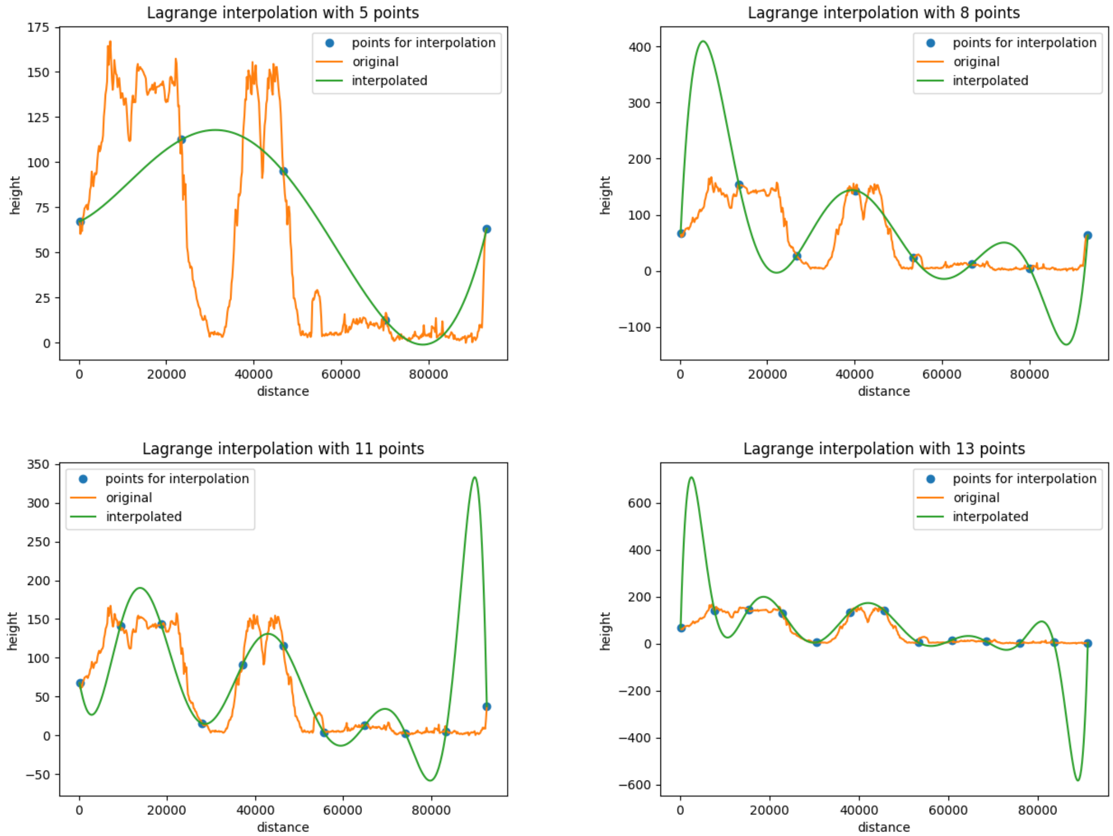
dla $i = 1, 2, ...n + 1$

Wzór końcowej funkcji stopnia n to:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \varphi_i(x)$$

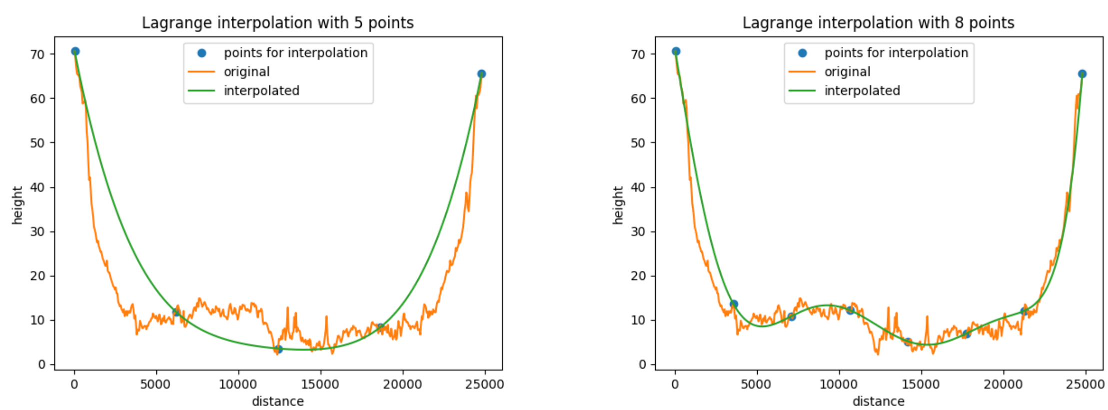
Analizę metody interpolacji Lagrange'a rozpoczniemy od interpolacji rezultatów interpolacji wcześniej wspomnianych tras dla 5,8,11 oraz 13 węzłów.

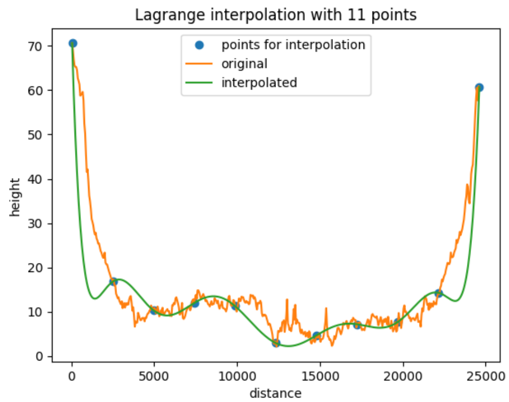
Trasa nr 1.

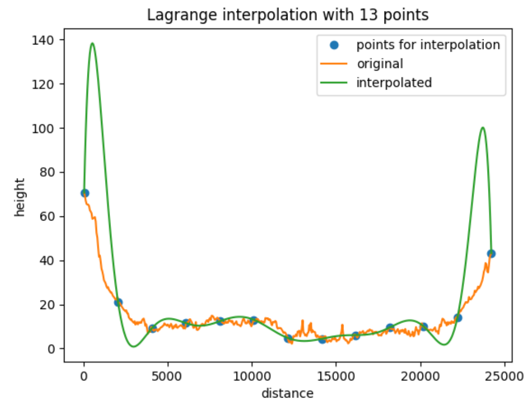


Interpolacja wielomianami stopnia 4 i 7 nie daje zadowalających wyników - profil wysokościowy nie jest poprawnie odwzorowany. Dla wielomianów stopnia 10 i 12 przybliżenie w środkowej części profilu jest znacznie lepsze, jednak przy tak wysokich stopniach zaczyna być wyraźnie widoczny efekt Rungego. Na końcach przedziału występują oscylacje a wartość funkcji oryginalnej i funkcji interpolującej znacznie się różnią.

Trasa nr 2.

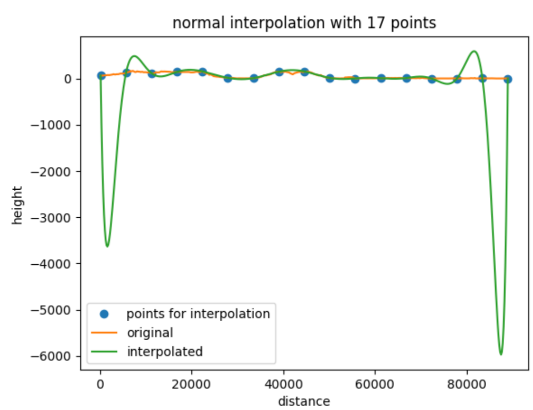


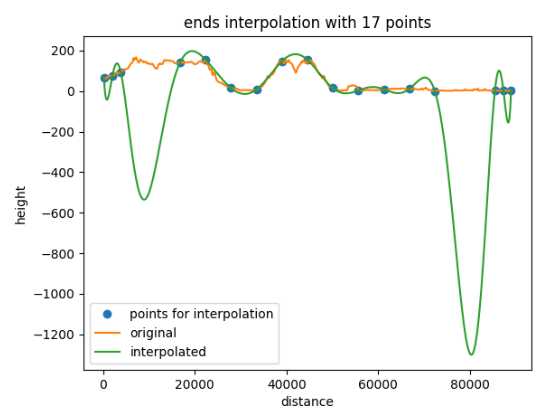


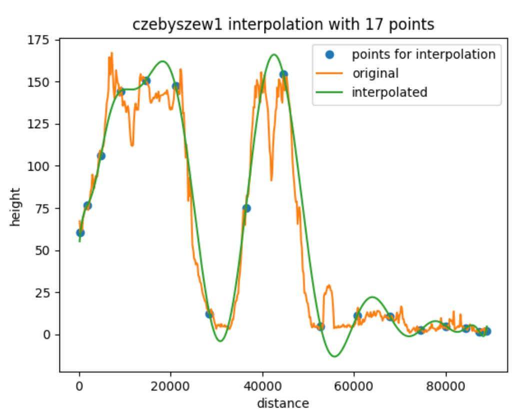


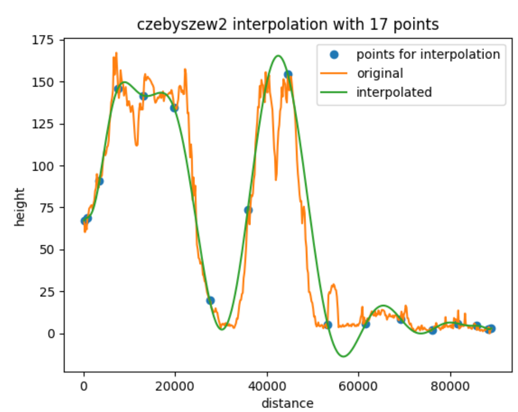
W przypadku tej trasy ze względu na kształt (wyraźne wzniesienie na początku oraz na końcu) interpolacja wielomianem stopnia już 4 w miarę dobrze przybliża ogólny wygląd profilu. Interpolacja wielomianami wyższymi daje coraz lepsze rezultaty, jednak efekt Rungego nadal pojawia się przy wielomianie stopnia 12. Jest on mniej intensywny niż w przypadku pierwszego profilu.

W celu lepszego przybliżenia faktycznego profilu używając interpolacji Lagrnage'a potrzebna jest większa liczba węzłów, przy której jednak problemem staje się efekt Rungego. Aby go zniwelować i otrzymywać poprawne przybliżenie również na końcach przedziału należy zrezygnować z równomiernego rozmieszczenia punktów. Poniższe wykresy pokazują wpływ rozmieszczenia węzłów na funkcje interpolującą.









Pierwszy wykres przedstawia interpolacje z równo rozmieszczonymi węzłami. Na drugim wykresie węzły są zagęszczone na końcach co znacząco zmniejsza efekt Rungego, jednak nadal go nie niweluje kompletnie - rezultat nie jest zadowalający. Trzeci wykres przedstawia interpolacje z wykorzystaniem węzłów Czebyszewa pierwszego rodzaju czyli rozmieszczeniem węzłów wg formuły:

$$x_k = \cos(\frac{2k+1}{2N}\pi)$$

gdzie $k = 0, 1, 2, ..., N-1$ a N to liczba węzłów. Daje to węzły o $x \in (-1, 1)$ które następnie należy przeskalować odpowiednio do zadanego profilu wysokościowego. Czwarty wykres przedstawia interpolacje z wykorzystaniem węzłów Czebyszewa drugiego rodzaju czyli rozmieszczeniem węzłów wg formuły:

$$x_k = \cos(\frac{k\pi}{N-1})$$

gdzie $k = 0, 1, 2, ..., N-1$ a N to liczba węzłów. Daje to węzły o $x \in [-1, 1]$ które następnie należy przeskalować odpowiednio do zadanego profilu wysokościowego. Użycie węzłów zarówno pierwszego jak i drugiego rodzaju niweluje efekt Rungego. Zależnie od specyfiki problemu można stosować obie metody np jeśli istotne jest aby węzły pierwszy i ostatni były jednocześnie granicami przedziału funkji należy wybrać węzły Czebyszewa drugiego rodzaju. Warto też zwrócić uwagę, że przy takiej samej liczbie węzłów istnieje prawdopodobieństwo na gorsze przybliżenie na środku przedziału ze względu na mniejsze zagęszczenie punktów niż przy rozkładzie równomiernym.

3 Interpolacja funkcjami sklejanymi

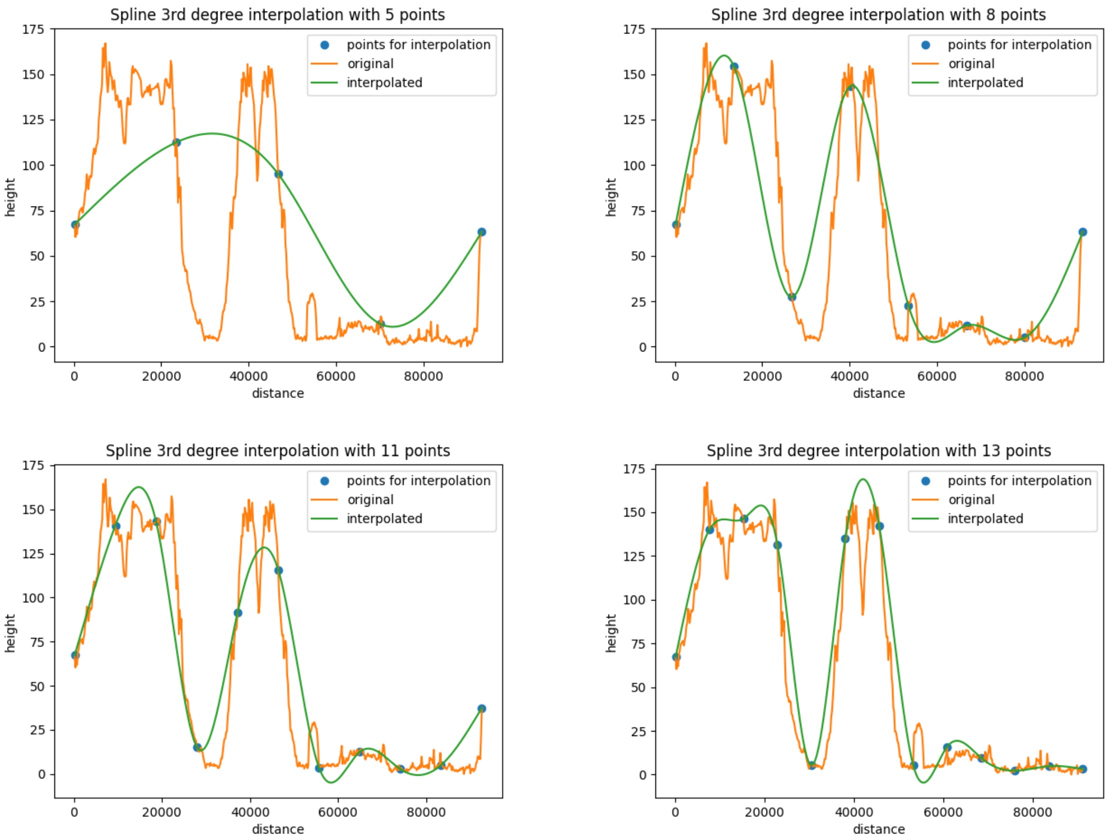
Interpolacja splajnami czyli funkcjami sklejanymi polega na interpolacji lokalnej z użyciem wielomianów niskiego stopnia. W tym przypadku są to wielomiany stopnia trzeciego. Interpolacje przeprowadzamy dla n+1 równo oddalonych od siebie węzłów. Interpolacje realizuje się w następujący sposób:

- Stworzenie równań dla każdego n: $S_k(x) = a_k + b_k(x-x_k) + c_k(x-x_k)^2 + d_k(x-x_k)^3$ dla przedziałów $[x_k, x_{k+1}]$
- Wartość w węzłach jest ustalona: $S_k(x_k) = f(x_k)$
- Dla każdego węzła zachowana jest ciągłość pierwszej pochodnej: $S'_k(x_{k+1}) = S'_{k+1}(x_{k+1})$
- Dla każdego węzła zachowana ciągłość drugiej pochodnej: $S''_k(x_{k+1}) = S''_{k+1}(x_{k+1})$
- Na krańcach zerowanie drugiej pochodnej: $S''_1(x_1) = S''_n(x_{n+1}) = 0$

gdzie $k = 1, 2, ..n+1$

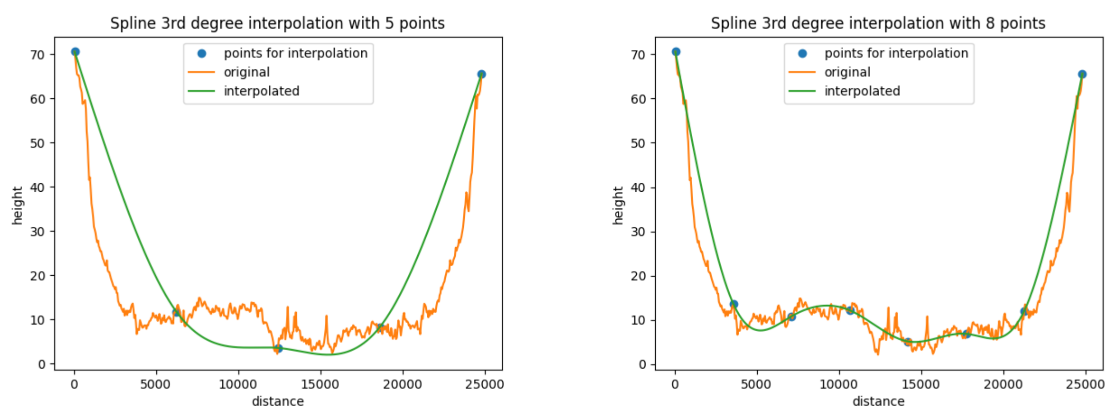
Po ułożeniu układu równań spełniającego powyższe warunki zapisujemy je w postaci macierzowej $Mx = b$ gdzie x to wektor współczynników kolejnych wielomianów $(a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, ...)$.

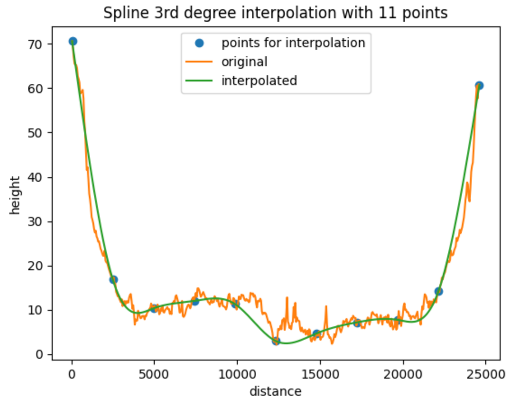
Trasa nr 1.

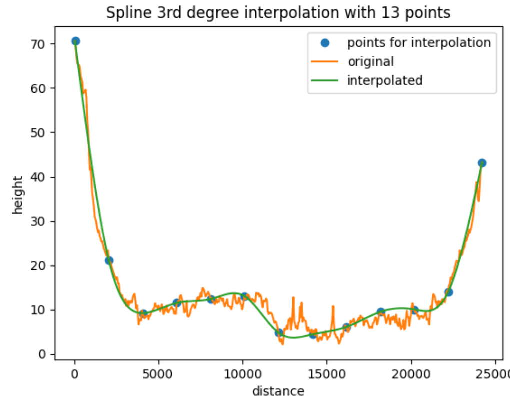


Interpolacja przy 5 węzłach nie daje zadowalających wyników przy profilu wysokościowym pierwszej trasy. W przypadku 8 węzłów wynik jest zdecydowanie bardziej zadowalający, jednak nadal minima i maksima lokalne funkcji interpolującej są przesunięte względem funkcji oryginalnej. Wraz ze wzrostem liczby węzłów otrzymujemy coraz lepsze wyniki.

Trasa nr 2.







W przypadku tej trasy, tak samo jak przy użyciu metody Lagrnage'a, ze względu na kształt funkcji interpolacja przy użyciu 5 węzłów daje w miarę dobre przybliżenie ogólnego wyglądu profilu. Interpolacja z wykorzystaniem większej liczby węzłów tak jak w przypadku poprzedniej trasy coraz wierniej odwzorowuje trasę oryginalną.

4 Wnioski

Interpolacja Lagrange'a w porównaniu do interpolacji splajnami jest znacznie prostsza w implementacji i nie wymaga rozwiązywania układu równań co może okazać się czasochłonne przy dużych macierzach. Ponadto implementacja interpolacji Lagrange'a nie jest zależna od rozłożenia punktów co trzeba uwzględnić w interpolacji funkcjami sklejanymi w przypadku nierównomiernego rozkładu. Interpolacja splanjami daje jednak znacznie lepsze wyniki i nie jest podatna na efekt Rungego. W przypadku interpolacja Lagrnage'a rónież da się go zniwelować używając węzłów Czebyszewa.

Literatura

- Instrukcja do projektu nr 3 z przedmiotu Metody Numeryczne Informatyka PG 2024
- Instrukcja do labolatorium nr 5 z przedmiotu Metody Numeryczne Informatyka PG 2024
- Prezentacjie wykładowe z przedmiotu Metody Numeryczne Informatyka PG 2024