Instrukcja do laboratorium nr 4
Przetwarzanie Sygnałów Diagnostycznych

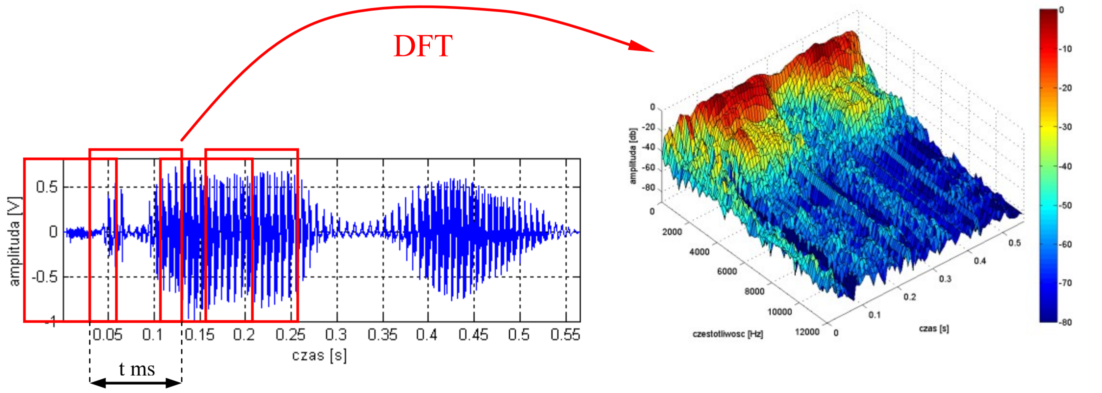
Analiza sygnałów w dziedzinie czasowo-częstotliwościowej - krótkoczasowa transformacja Fouriera STFT. Dobór okien czasowych.

1. Wiadomości wstępne.
   Ciągła, krótkoczasowa transformacja Fouriera STFT (**S**hort-**T**ime **F**ourier **T**ransform) w dziedzinie czasu i częstotliwości definiuję się jako:

$$STFT_x^T(t,f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot\gamma^*(\tau - t)\cdot e^{-j2\pi f t} d\tau$$

$$STFT_x^F(t,f) = e^{-j2\pi f t}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\cdot\Gamma^*(\nu - f)\cdot e^{j2\pi\nu t} d\nu$$

   Funkcja $\gamma(t)$ oznacza czasowe okno obserwacji, $\Gamma(f)$ jest zaś jej widmem Fouriera. W dziedzinie czasowej STFT polega na wykonaniu prostego przekształcenia Fouriera na kolejnych fragmentach sygnału, „wycinanych" przez przesuwające się okno $\gamma(t)$. W dziedzinie częstotliwości STFT jest natomiast równoważne: 1) odwrotnemu przekształceniu Fouriera fragmentu widma sygnału $X(\nu)$ wyciętemu przez przesunięte w częstotliwości widmo okna $\Gamma(\nu\text{-}f)$ [jest to filtracja sygnału filtrem pasmowoprzepustowym o częstotliwości środkowej równej *f*] oraz 2) przesunięciu w częstotliwości sygnału czasowego otrzymanego z 1) do częstotliwości zerowej poprzez jego wymnożenie z $exp(-j2\pi ft)$. Na rysunku 1 przedstawiono działanie krótkotrwałej transformaty Fouriera.



Rysunek 1. STFT – krótkotrwała transformata Fouriera sygnału mowy, multispektrum słowa *igła*.

2. Dyskretna, krótkoczasowa transformacja Fouriera STFT.

$$STFT(n,k) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\gamma^*(n-m)\cdot e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}k\right)m}$$ *, k=0,1,2,...,N-1*

Parametr N, związany z dyskretyzacja częstotliwości powinien być równy lub większy od liczby próbek M okna $\gamma(m)$. Kiedy okno to przyjmuje wartości niezerowe tylko dla m=0,1,2,...,M-1, można je uzupełnić zerami o długości $N=2^p$ oraz wyznaczyć STFT wg:

$$STFT(n,k) = \sum_{m=0}^{N-1} \gamma^*(m)x(n-m)\cdot e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}k\right)m}$$ *, k=0,1,2,...,N-1*

Z krótkoczasową transformatą Fouriera związany jest tzw. spektrogram, który definiuje się jako kwadrat jej modułu: $G_x(t,f) = \left|STFT_x(t,f)\right|^2$.

W praktyce spektrogram prezentuje się jako $20\cdot\log_{10}(\left|STFT_x(t,f)\right|^2)$

3. Okna czasowe

Dyskretne okna czasowe są stosowane podczas analizy częstotliwościowej sygnałów. Ponieważ kształt ich widma w sposób zdecydowany wpływa na własności przeprowadzanej analizy, są one często nazywane „oknami widmowymi”. Okna te przyjmują wartości niezerowe wyłącznie dla n=0,1,2,...,N-1, gdzie parametr N oznacza dowolną długość okna, parzystą lub nieparzystą.

Nazwa okna	Definicja okna *w(n)*, *0≤n≤N-1*
Prostokątne	1
Trójkątne (Bartletta)	$1-\frac{2\left\|n-(N-1)/2\right\|}{N-1}$
Hanninga (Hanna)	$\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right)$
Hamminga	$0{,}54-0{,}46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$
Blackmana	$0{,}42-0{,}50\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)+0{,}08\cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)$
Kaisera	$\frac{I_0\left(\beta\sqrt{1-\left(\frac{n-(N-1)/2}{(N-1)/2}\right)^2}\right)}{I_0(\beta)}$, $0\le n\le N-1$ $I_0(\beta)$ - funkcja Bessela zerowego rzędu: $I_0(x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(x/2)^k}{k!}\right]^2$

4. Pomocne funkcje programu MATLAB:

fft – dyskretna transformata Fouriera (DFT) liczona przy wykorzystaniu algorytmu szybkiej transformaty Fouriera (FFT),
specgram (x,nfft,fs,window,noverlap) – funkcja realizująca STFT (starsze wersje matlaba),
spectrogram(x,window,noverlap,nfft,fs) - funkcja realizująca STFT (nowe wersje matlaba),
chirp(t,f0,t1,f1,'method') – sygnał cosinusowy modulowany częstotliwościowo,
surf – wykres funkcji 3-D,
imagesc – wykres funkcji 3-D w układzie 2-D,
wintool – toolbox wizualizacji i analizy okien czasowych,
rectwin – okno prostokątne, bartlett – okno trójkątne, blackman – okno Blackmana,
hann – okno hanninga, hamming – okno hamminga, kaiser – okno Kaisera.

5. Zadania do wykonania:

a) zapoznać się z funkcją specgram/spectrogram, wyznaczyć multispektrum dla sygnału zawierającego harmoniczną/harmoniczne zmieniające się w czasie,
b) opracować algorytm (m-plik) realizujący krótkoczasową transformatę Fouriera (STFT) bez efektu nakładkowania,
b) przy użyciu opracowanego algorytmu wyznaczyć multispektrum dla sygnału zawierającego harmoniczną/harmoniczne zmieniające się w czasie. Wynik i przedstawić graficznie i porównać z wbudowaną funkcją w MATLAB’ie realizującą STFT,
c) zapoznać się z charakterystykami czasowymi i częstotliwościowymi okien z pkt 3,
d) w opracowanym algorytmie STFT wprowadzić możliwość nakładkowania i stosowania okien czasowych,

6. Sprawozdanie

Sprawozdanie z laboratorium obejmuje kod źródłowy oraz wykresy z wykonanych zadań z punktu 5. Sprawozdanie (jedno na osobę) wyłącznie w wersji PDF przesłanej przez stronę kursu Platformy e-Learningowej AGH.