

Laboratorium nr 5

Przetwarzanie Sygnałów Diagnostycznych

Analiza sygnałów w dziedzinie czasowo-częstotliwościowej: Ciągła Transformacja Falkowa CWT.

1. Wprowadzenie

Ciągła transformata falkowa sygnału $x(t)$ jest zdefiniowana w następujący sposób w dziedzinie czasu i częstotliwości:

$$\tilde{S}_{\psi}(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (1.1)$$

gdzie:

a – współczynnik skali,

b – współczynnik przesunięcia,

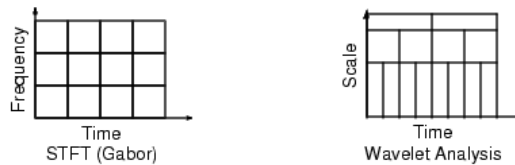
$s(t)$ – zależny od czasu t sygnał badany,

$\tilde{S}_{\psi}(a,b)$ – współczynnik falkowy zależny od a i b ,

ψ – funkcja falkowa

$\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ – jądro przekształcenia

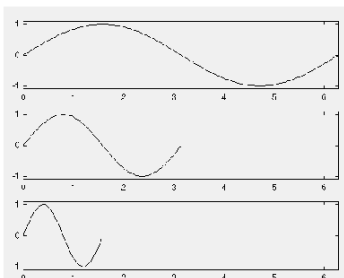
Transformata falkowa znalazła zastosowanie do analizy sygnałów niestacjonarnych. Często wymiennie wykorzystuje się ją z transformatą Fouriera. Powodem jest fakt, iż jako wynik transformacji falkowej nigdy nie otrzymamy precyzyjnej informacji o częstotliwościach zawartych w sygnale. Jądro przekształcenia (czyli funkcja falkowa) nie reprezentuje jednej częstotliwości lecz przeważnie przedział częstotliwości. W przypadku falek mówi się o pseudo-częstotliwości falki (w Matlabie sprowadza się do prostego wzoru wyznaczającego częstotliwość środkową falki).



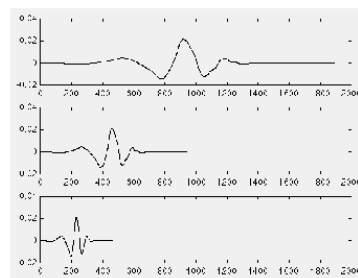
Rysunek 1 Krótkoczasowa Transformata Fouriera (STFT) a Ciągła Transformata Falkowa (CWT) [1]

1.1 Współczynnik skali

Współczynnik, który decyduje o tym jaką pseudo-częstotliwość reprezentuje falka. Przyjmuje wartości większe od zera. Jest odwrotnie proporcjonalny do pseudo-częstotliwości falki, czyli wraz ze wzrostem współczynnika a pseudo-częstotliwość falki maleje.



Rysunek 2. Współczynnik skali funkcji okresowej [1]

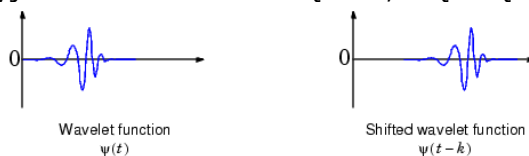


Rysunek 3. Współczynnik skali funkcji falkowej [1]

$\frac{1}{\sqrt{a}}$ – normalizacja mająca na celu zapewnienie stałej energii funkcji falkowej bez względu na stosowaną skalę.

1.2 Współczynnik przesunięcia

Wraz ze zmianą współczynnika b , funkcja falki jest „przesuwana” wzdłuż osi czasu. Współczynnik ten może przyjmować wartość równą zero, większą od zera, mniejszą od zera.

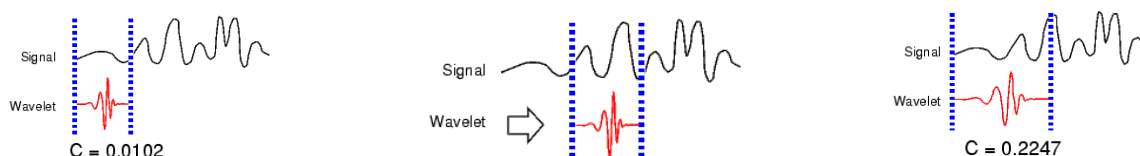


Rysunek 4. Współczynnik przesunięcia funkcji falkowej [1].

1.3 Współczynnik falkowy

Wartość tego współczynnika jest zależna od dwóch znanych już współczynników a i b oraz sygnału badanego $s(t)$. Jest ona niejako miarą podobieństwa pomiędzy naszą falką a wybranym fragmentem (oknem) sygnału $s(t)$.

O ile wygodnie dla nas by było gdyby wartości otrzymane w wyniku "falkowania" zawierały się w przedziale $<0,1>$ (0 - sygnał krańcowo różny, niepodobny; 1 - sygnały identyczne), to w wyniku ciągłej transformaty falkowej (np. w pakiecie Matlab) otrzymujemy szereg współczynników, które wykraczają poza ten zakres przyjmując wartości np. z zakresu $(-4, 4)$.



Rysunek 5 Graficzna prezentacja CWT.

Falka przy pewnej skali a i wsp. przesunięcia b jest porównywana z sygnałem $s(t)$, w wyniku czego uzyskujemy współczynnik falkowy równy 0,0102. Następną operacją jest przesunięcie funkcji falkowej o parametr b , w wyniku czego zostanie ona porównana z innym fragmentem sygnału $s(t)$. W momencie gdy wszystkie fragmenty sygnału zostaną porównane z funkcją falkową przy zadanej skali a , zostaje ona przeskalowana do nowej wartości. W wyniku czego uzyskujemy inne wartości współczynnika falkowego (0,2247).

1.4 Funkcja falkowa

Transformacja falkowa może być zdefiniowana za pomocą dowolnej funkcji $\psi(t)$, która spełnia pewne warunki:

a) Całka z funkcji $\psi(t)$ wynosi zero
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$$

b) Jej całka kwadratu jest skończona
$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty$$

Najczęściej stosowane funkcje falkowe: *Daubechies*, *Coiflets*, *Symlets*, *Meyr*, *Morlet*, *Mexican Hat*, *Biortogonalne*.

2. Pomocne funkcje MATLAB'a

FREQ = centfrq('wname',ITER) – oblicza częstotliwość środkową funkcji falkowej,

F = scal2frq(A,'wname',DELTA) – oblicza pseudo- częstotliwość odniesioną do zadanej skali A , nazwy falki 'wname' i $DELTA=1/f_p$,

[PHI,PSI,XVAL] = wavefun('wname',ITER, 'plot') – generuje wykres funkcji falkowej, gdzie 'wname' - funkcja falkowa (np 'db6'), ITER - numer iteracji, PHI, PSI, XVAL - odpowiednio: funkcja skalująca, funkcja falkowa, wartości osi odciętych,

COEFS = cwt(S,SCALES,'wname','plot') – generuje wykres analizy falkowej, gdzie s – sygnał badany, SCALES – wektor skali.

WAVEMENU – interfejs graficzny pakietu WAVELET Toolbox

3. Zadania do wykonania:

- a) Zapoznać się z dostępnymi funkcjami falkowymi w pakiecie MATLAB (WAVEMENU/WAVELET DISPLAY TOOL)
- b) Przy wykorzystaniu (WAVEMENU/CONTINUOUS WAVELET 1-D) porównać zaobserwowane różnice reprezentacji czasowo-częstotliwościowych:
- Dla sygnału *mfrqbrk.mat* dokonać analizy falka 'Haar', 'db1' i 'db' wyższych rzędów (użyć skalowania „Step by Step”, „Power 2” w zakresie $1 \div 64$),
 - Dla sygnału *freqbrk.mat* dokonać analizy z użyciem falki 'meyr', 'bior5.5', 'db7' (użyć skalowania „Step by Step”, „Power 2” w zakresie $1 \div 64$),
 - Dla sygnału *qdchirp.mat* dokonać analizy z użyciem falki 'haar', 'db3', 'db5', 'db7', 'morl' (użyć skalowania „Step by Step”, „Power 2” w zakresie $1 \div 64$),
 - Dla sygnału *noischir.mat* dokonać analizy:

morl	Step by Step	1...32
mexh	Step by Step	1...32
db7	Power 2	8
bior5.5	Power 2	8
meyr	Power 2	8

Która z otrzymanych reprezentacji czasowo-częstotliwościowych najlepiej nadaje się do analizy sygnału? Która z dekompozycji umożliwia bardziej precyzyjne określenie pseudo-częstotliwości, a która czasu?

- c) Dla wybranego sygnału i dobranych parametrów analizy falkowej napisać m-plik (wykorzystujący wbudowane funkcje Matlaba) wykreślający wynik CWT.

4. Sprawozdanie

Na końcu zajęć laboratoryjnych zostanie sprawdzone wykonanie pkt 3c.

Odniesienia:

[1] Wavelet Toolbox™ 4 User's Guide, The Mathworks INC