PHY 431 **X 2020**

Relativité et principes variationnels
Notes de cours, Thomas Leplumey

1 Bases de la relativité restreinte

Facteur de Lorentz

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

Transformation de Lorentz Si $\mathcal{R}'$ se déplace à vitesse v par rapport à $\mathcal{R}$, alors on a :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Dilatation du temps

$$\Delta t' = \gamma \Delta t$$

Contraction des longueurs

$$\Delta x' = \frac{1}{\gamma}\Delta x$$

2 Optique relativiste

Forme quadratique invariante $(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$

Rapidité

$$\gamma = \operatorname{ch}\alpha$$

$$\beta = \operatorname{th}\alpha$$

D'où la matrice de Lorentz :

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\alpha & -\operatorname{sh}\alpha \\ -\operatorname{sh}\alpha & \operatorname{ch}\alpha \end{pmatrix}$$

Composition de boosts

— Même axe : Les rapidités s'aditionnent i.e. $\alpha'' = \alpha + \alpha'$, soit :

$$\beta'' = \frac{\beta + \beta'}{1 + \beta\beta'}$$

— Axes différents : Donne aussi un boost à rotation près

Effet Doppler-Fizeau relativiste

— Si la vitesse de déplacement de la source est colinéaire à la droite source-récepteur :

$$\nu_r = \sqrt{\frac{1 \mp |\beta|}{1 \pm |\beta|}}\nu'_e$$

— Cas général :

$$\nu_r = \frac{\nu'_e}{\gamma(1+\beta\cos\theta)}$$

Aberration des angles

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta + \beta}{1+\beta\cos\theta}$$

$$\sin\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(1+\beta\cos\theta)}$$

$$\tan\frac{\theta'}{2} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\tan\frac{\theta}{2}$$

3 Espace-temps de Minkowski

Convention de sommation d'Einstein

$$\sum_i a^i b_i = a^i b_i$$

Composantes contravariantes $\vec{r} = r^i \vec{e}_i$

Composantes de $\vec{r}$ dans la base $(\vec{e}_i)$

Changement de base :

$$r^i \mapsto r'^i = M^i{}_j r^j$$

Composantes covariantes $r_i = \vec{e}_i \cdot \vec{r}$

Composantes de r^* dans la base (e_i^*)

Changement de base :

$$r_i \mapsto r'_i = r_j (M^{-1})^j{}_i$$

Tenseur (p, q)

$$T^{i_1 \cdots i_p}{}_{j_1 \cdots j_q} \mapsto T'^{i_1 \cdots i_p}{}_{j_1 \cdots j_q} = M^{i_1}{}_{k_1} \cdots M^{i_p}{}_{k_p} (M^{-1})^{l_1}{}_{j_1} \cdots (M^{-1})^{l_q}{}_{j_q} T^{k_1 \cdots k_p}{}_{l_1 \cdots l_q}$$

Tenseur métrique

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$$

Dualité métrique

$$g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$$

$$r_i = g_{ij} r^j$$

$$r^i = g^{ij} r_j$$

Invariance du produit scalaire $a^i b_i = a'^i b'_j$

Quadrivecteur

$$\underline{X} = x^\mu \underline{e}_\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Métrique de l'espace-temps de Minkowski

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Produit scalaire :

$$\underline{X}^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

Transformations de Lorentz $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$

Groupe engendré par les rotations, les boosts, les transformations de parité $\eta_{\mu\nu}$ *et les renversements du temps* $-\eta_{\mu\nu}$

Changement de base orthonormée : $\eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha{}_\beta \Lambda^\beta{}_\nu = \eta_{\mu\nu}$

Matrice pseudo-orthogonale : $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \Lambda_\nu{}^\mu$

Dérivées partielles Même comportement qu'un tenseur :

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

Opérateur d'alembertien

$$\Box = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Genre d'un quadrivecteur

- Genre temps : $\underline{X}^2 > 0$ (passé ou futur) : Mesure une durée propre
- Genre lumière : $\underline{X}^2 = 0$ (cône de lumière)
- Genre espace : $\underline{X}^2 < 0$ (ailleurs) : Mesure une longueur propre

Géodésique Ligne d'univers qui maximise le temps propre :

$$\Delta\tau = \frac{1}{c}\int_A^B \sqrt{(d\underline{X})^2} = \frac{1}{c}\int_{\lambda_A}^{\lambda_B} \sqrt{\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda$$

Temps propre

$$cd\tau = \sqrt{(d\underline{X})^2}$$

Quadrivitesse

$$\underline{U} = \frac{d\underline{X}}{d\tau}$$

$$u^\mu = \gamma(v)(c, \vec{v})$$

Quadriaccélération

$$\underline{\mathcal{A}} = \frac{d\underline{U}}{d\tau} = \frac{d^2\underline{X}}{d\tau^2}$$

$$a^\mu = \gamma^2(v)\left(\gamma^2(v)\vec{\beta}\cdot\vec{a}, \vec{a} + \gamma^2(v)\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{a})\right)$$

$$a^\mu = \gamma^4(v)\left(\vec{\beta}\cdot\vec{a}, \vec{a} + \vec{\beta}\times(\vec{\beta}\times\vec{a})\right)$$

orthogonal à la quadrivitesse : $\underline{\mathcal{A}} \cdot \underline{U} = 0$

Rapidité

$$\alpha = \frac{1}{c}\int_0^\tau a_*(t_*)dt_*$$

4 Le principe de moindre action

Lagrangien Fonction $\mathcal{L}(x, \dot{x}, t)$.
Définit exactement une théorie physique

Action Le long de la trajectoire $\mathcal{C}$ définie sur $[t_1, t_2]$:

$$\mathcal{S}_\mathcal{C} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t), t)dt$$

Principe de moindre action Parmi tous les chemins vérifiant $x(t_1) = x_1$ et $x(t_2) = x_2$, la trajectoire physique est celle qui minimise $\mathcal{S}$.

Equations d'Euler-Lagrange Le principe de moindre action implique :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}$$

Garde la même forme dans tous les systèmes de coordonnées

Invariance de jauge Deux lagrangiens différant d'une dérivée totale par rapport au temps d'une fonction des variables de position définissent la même théorie physique.

Homogénéité L'homogénéité d'une grandeur dans un système physique (temps, espace, direction) est équivalente à l'indépendance du lagrangien vis-à-vis de cette grandeur.

— *Homogénéité du temps :* $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = 0$
— *Homogénéité de l'espace :* $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = 0$
— *Isotropie de l'espace :* $\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = \mathcal{L}(x^2, \dot{x}, t)$

Particule(s) dans un potentiel V Pour un système de particules de matrice de masse M :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - V(x)$$

Moments conjugués Moment conjugué par rapport à une variable q_a :

$$p_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a}$$

Optimisation sous contrainte Pour maximiser $f(x, y)$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$, on maximise la fonction

$$f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

puis on fixe λ de sorte à satisfaire la contrainte.

5 Formalisme lagrangien et symétries

Système isolé Invariant par translation dans le temps : $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$

Conservation de l'énergie Dans un système isolé, l'énergie est conservée :

$$\mathcal{E} = \sum_a p_a \dot{q}_a - \mathcal{L}$$

Variable cyclique q_a est cyclique si : $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} = 0$

Conservation du moment conjugué Si q_a est cyclique, alors p_a est conservé.

Action d'une particule libre relativiste

$$\mathcal{S} = -mc^2\tau$$

$$\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -mc^2\gamma^{-1}$$

Impulsion d'une particule libre relativiste

$$\vec{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} = \gamma m \vec{v}$$

Quadrivecteur énergie-impulsion

$$\underline{P} = m\underline{U} = (\mathcal{E}/c, \vec{p})$$

Energie relativiste

$$\mathcal{E}^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

$$\vec{v} = \frac{c^2\vec{p}}{\mathcal{E}}$$

6 Mécanique relativiste

Quadriforce $\underline{\mathcal{F}} = \dfrac{d\underline{P}_{lib}}{d\tau} = m\underline{\mathcal{A}}$

Théorème de l'énergie cinétique $\underline{\mathcal{F}} \cdot \underline{U} = 0$

Quadrivecteur d'onde $\underline{K} = (\omega/c, \vec{k})$
Dualité onde-corpuscule : $\underline{P} = \hbar \underline{K}$
Pour une onde plane électromagnétique, $\underline{K}^2 = 0$*, soit, pour un photon,* $\underline{P}^2 = 0$

Masse inerte $m_i = \dfrac{\mathcal{E}_{lib}}{c^2} = \gamma m$

Energie cinétique $\mathcal{E}_{cin} = (\gamma - 1)mc^2$

7 Relativité et électromagnétisme

Tenseur électromagnétique

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^x/c & -E^y/c & -E^z/c \\ E^x/c & 0 & -B^z & B^y \\ E^y/c & B^z & 0 & -B^x \\ E^z/c & -B^y & B^x & 0 \end{pmatrix}$$

Force de Lorentz

$$f^\mu = qF^{\mu\nu}u_\nu$$

Quadrivecteur source $\underline{J} = \rho_* \underline{U} = (c\rho^*, \vec{j}^*)$ où ρ_* est la charge dans le référentiel où le volume est au repos.

Conservation de la charge $\partial_\mu j^\mu = 0$

Quadrivecteur potentiel $\underline{A} = (\phi/c, \vec{A})$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Jauge de Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$

Equation d'ondes $\Box \underline{A} = \mu_0 \underline{J}$

Lagrangien d'une particule relativiste dans un champ EM

$$\mathcal{L} = -mc^2\gamma^{-1} + q\underline{U} \cdot \underline{A}$$

Quadrivecteur énergie-impulsion d'une particule relativiste dans un champ EM

$$\underline{P} = m\underline{U} + q\underline{A}$$

Tenseur de Levi-Civita

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{si } (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ permutation paire} \\ +1 & \text{si } (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ permutation paire} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Tenseur électromagnétique dual

$$^{*}F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$$

Equations de Maxwell

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$$

$$\partial^{\mu *}F_{\mu\nu} = \partial^\mu F\nu\rho + \partial^\nu F^{\rho\mu} + \partial^\rho F^{\mu\nu} = 0$$

Loi de transformation du champ électromagnétique

$$\begin{cases} \vec{E}_{||} \mapsto \vec{E}_{||} \\ \vec{E}_{\perp} \mapsto \gamma\left(\vec{E}_{\perp} + \vec{v}\times\vec{B}_{\perp}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{B}_{||} \mapsto \vec{B}_{||} \\ \vec{B}_{\perp} \mapsto \gamma\left(\vec{B}_{\perp} - \vec{v}\times\vec{E}_{\perp}/c^2\right) \end{cases}$$

Invariants relativistes du champ électromagnétique

$$\frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \vec{B}^2 - \frac{\vec{E}^2}{c^2}$$

$$\frac{1}{4}F^{\mu\nu *}F_{\mu\nu} = \frac{\vec{E}}{c}\cdot\vec{B}$$

Genres de champs

- Si $\vec{E}\cdot\vec{B} \neq 0$, alors il existe un référentiel dans lequel $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont colinéaires
- Si $\vec{E}\cdot\vec{B} = 0$:
  - Champ à dominante magnétique : $B > E/c$, il existe un référentiel dans lequel $E = 0$
  - Champ à dominante électrique : $B < E/c$, il existe un référentiel dans lequel $B = 0$
  - Champ de genre lumière : $B = E/c$

Potentiels retardés En notant $t_r = t - \|\vec{r}\|/c$:

$$A^\mu(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{j^\mu(\vec{r}',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d^3\vec{r}'$$

Champ créé par une particule chargée en MRU

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{d}}{d^3}\frac{1}{\gamma^2(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\frac{\vec{v}\times\vec{d}}{d^3}\frac{1}{\gamma^2(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}$$

Potentiels de Liénart-Wiechert Potentiels générés par une particule chargée en mouvement :

$$\phi = \left.\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})d}\right]_{t_r}$$

$$\vec{A} = \phi\frac{\vec{v}(t_r)}{c^2}$$

Rayonnement électromagnétique Champ électromagnétique générés par une charge ponctuelle accélérée :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\vec{e} + \vec{E}_R$$

$$\vec{B} = \vec{n}\times\vec{E}/c$$

où $\vec{E}_R$ est le champ de rayonnement :

$$\vec{E}_R = \frac{\gamma^2}{c^2}\frac{\vec{n}\times(\vec{e}\times\vec{a})}{d}$$

où $\vec{e}$ et $\vec{a}$ sont définis par :

$$\vec{e} = \frac{\vec{n}-\vec{\beta}}{\gamma^2(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

8 Mécanique hamiltonienne

Hamiltonien $H(q,p,t) = [p\dot{q} - \mathcal{L}]_{\dot{q}=\dot{q}(q,p)}$

Equations canoniques de Hamilton

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \{q, H\}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \{p, H\}$$

Dépendance du temps $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$

Hamiltonien d'une particule relativiste dans un champ EM

$$H(p,q,t) = \sqrt{m^2c^4 + c^2(\vec{p}-q\vec{A})^2} + q\phi$$

Crochet de Poisson Si f et g sont deux fonctions sur l'espace des phases :

$$\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}$$

$\{p_a, q_b\} = \delta_{ab}$

Evolution temporelle d'une fonction dynamique

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}$$

Conservation Si $\dfrac{\partial f}{\partial t} = 0$ et $\{f, H\} = 0$ alors f est conservée.

Transformation ponctuelle $q \mapsto Q(q)$ et redéfinition correspondante de p

Transformation canonique $q \mapsto Q(p, q)$ et $p \mapsto P(p, q)$ telle que les équations de Hamilton gardent leur forme.

Caractérisation des transformations canoniques Une transformation est canonique si et seulement si elle conserve les crochets de Poisson entre variables d'état.

Grandeurs canoniquement conjuguées Grandeurs dont le crochet de Poisson est égal à 1.

Mouvement hamiltonien comme transformation canonique Pour deux instants t et t', $(q(t), p(t)) \mapsto (q(t'), p(t'))$ est une transformation canonique.

Conservation du volume dans l'espace des phases Le volume $|\Omega|$ d'un volume de l'espace des phases est conservé.

Système chaotique Un système dynamique chaotique doit être non linéaire et avoir au moins trois variables indépendantes (après prise en compte des lois de conservation) dans l'espace des phases.

Théorème de Noether Si on considère la transformation

$$q \mapsto \varepsilon\xi(q, t)$$

$$\dot{q} \mapsto \dot{q} + \varepsilon\frac{d}{dt}\xi(q, t)$$

Et que la transformation du lagrangien s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L} + \varepsilon\xi \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \varepsilon\frac{d\xi}{dt} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \mathcal{L} + \varepsilon\frac{d\Lambda}{dt}$$

Alors, la quantité $\xi \cdot \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \Lambda$ est conservée.

9 Le principe de Feynman

Principe de Feynman L'amplitude de probabilité par unité de volume pour aller de $a = (x_a, t_a)$ à $b = (x_b, t_b)$ est donnée par :

$$K(b, a) \propto \sum_{C(a,b)} e^{i\frac{\mathcal{S}_C(a,b)}{\hbar}}$$

Loi de composition :

$$K(b,a) = \int K(b,c)K(c,a)dx_c$$

Trajectoire classique Si $\mathcal{S} >> \hbar$, alors seule reste la contribution de la trajectoire classique, définie par :

$$\frac{\partial \mathcal{S}_{cl}}{\partial x_j} = \frac{\partial \mathcal{S}_{cl}}{\partial p_j} = 0$$

Amplitude de Feynman pour une particule libre non relativiste

$$K(b,a) = \left(\frac{m}{2i\pi\hbar}\right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{(t_b - t_a)^3}} e^{i\frac{m}{2\hbar}\frac{(x_b - x_a)^2}{t_b - t_a}}$$

Principe de Feynman

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}K(x,t,x_0,t_0) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta K(x,t,x_0,t_0)$$

Implique l'équation de Schrödinger.

10 Relativité générale

Principe d'équivalence Localement, il n'y a aucune différence entre un champ gravitationnel et une accélération.
Imlique une courbure de l'espace temps, i.e. une métrique $g_{\mu\nu}$ non plate

Décalage des fréquences Un gradient de potentiel gravitationnel implique un décalage des fréquences :

$$d\nu = -\nu\frac{d\phi}{c^2}$$

Equation d'Einstein Equation sur la métrique $g_{\mu\nu}$:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

où R est le tenseur de Ricci et T est le tenseur énergie impulsion.
Approximation des vitesses non relativistes et champ faible : $\vec{\nabla}^2\phi = 4\pi G\rho$

Métrique de Schwarzschild A l'extérieur d'un corps sphérique sans rotation

$$ds^2 = W(r)(cdt)^2 - W^{-1}(r)dr^2 - r^2d\Omega^2$$

avec le facteur de distorsion :

$$W(r) = 1 - \frac{R_S}{r}$$

et le rayon de Schwarzschild :

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}$$

Lagrangien d'une particule massive dans un espace-temps courbe

$$\mathcal{L} = -\frac{m}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

Equation des géodésiques

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0$$

avec les symboles de Christoffel :

$$\Gamma^\mu{}_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \left(\partial_\rho g_{\alpha\sigma} + \partial_\sigma g_{\alpha\rho} - \partial_\alpha g_{\rho\sigma} \right)$$

Géodésiques en métrique de Schwarzschild Avance du périhélie :

$$r(\phi) \approx \frac{\bar{r}}{1 + e \cos[\phi(1-\alpha)]}$$

avec $\alpha = \dfrac{3}{2} \dfrac{R_S}{\bar{r}}$