第一章：行列式

戴一冕
南开大学 计算机学院
2025.09.30

本章主要内容

- **§ 1.0 课程简介**
- **§ 1.1 n 阶行列式的定义**
  - § 1.1.1 二、三阶行列式的定义
  - § 1.1.2 排列
  - § 1.1.3 n 阶行列式的定义
- **§ 1.2 行列式的主要性质**
- **§ 1.3 行列式按行（列）展开**
- **§ 1.4 行列式的算法**

本章主要内容

§1.1.1 二、三阶行列式的定义

一、二阶行列式的引入

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (2) \end{cases}$$

(行列式从解方程组问题起源，17 世纪由德国数学家莱布尼茨和日本数学家关孝和分别独立发现。中国数学家李善兰在 19 世纪中叶与英国传教士伟烈亚力合作翻译了《代数学》，首次系统介绍了行列式与线性代数内容)

(1) $\times a_{22}$： $a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1 a_{22}$ (乘以系数消元)

(2) $\times a_{12}$： $a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_2 a_{12}$

两式相减消去 x_2，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1 a_{22} - a_{12}b_2$$ (二阶行列式核心表达诞生！)

类似地，消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1 a_{21}$$

中国数学史上杰出代表——李善兰

李善兰（1811–1882）

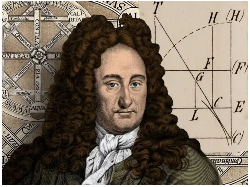
主要贡献

- 创立二次平方根、三角、反三角及对数函数的幂级数展开。
- 提出“尖锥术”，以叠纸、积丝比喻微积分，与牛顿、莱布尼茨的思想暗合。
- 用“垛积术”独立发现“李善兰恒等式”，是世界上首项以中国人名命名的数学公式。

译书与教育

合译《几何原本》后九卷、《代数学》《重学》等，系统引入西方数学、物理等最新成果。同治七年（1868）起执掌同文馆天文算学馆十三年，造就中国近代第一批科学人才。

巨匠的符号：莱布尼茨的贡献



戈特弗里德 · 莱布尼茨

西方的探索

欧洲的数学巨匠莱布尼茨在信件中独立地提出了行列式的概念，并创造了一套用于表示它的系统性记号。

历史一瞥

1693 年，他首次使用了一套索引系统来表示方程组的系数，并从中导出了行列式的表达式。这为日后更高阶行列式的研究奠定了基础。

本节引入

一个好的符号是成功的一半。正是莱布尼茨的记号，让复杂的表达式变得清晰。让我们看看这个记号是如何定义的。

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

(行列式记号由莱布尼茨在 1693 年首次使用)

由方程组的四个系数确定的 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

用特殊记号表示：

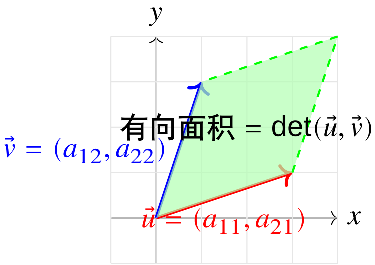
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \equiv a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

(几何视角：表示二维平面中向量张成的平行四边形有向面积)

并称之为一个**二阶（级）行列式**

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

几何视角：行列式作为有向面积



$$\det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 3 \times 3 - 1 \times 1 = 8$$

几何解释

行列式的绝对值表示平行四边形面积，符号表示方向（右手法则）

正号：$\vec{u}$ 到 $\vec{v}$ 逆时针旋转

负号：$\vec{u}$ 到 $\vec{v}$ 顺时针旋转

关孝和

计算的艺术

在定义了行列式之后，如何高效地计算它的值成为了下一个关键问题。

历史一瞥

在 1683 年出版的《解伏题之法》中，日本数学家关孝和给出了一种极其直观的计算二阶和三阶行列式的方法，这便是我们今天所熟知的“对角线法则”。

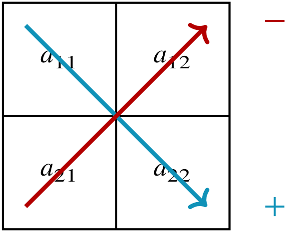
本节引入

理论的诞生伴随着计算方法的发展。现在，让我们来学习这个源自东方的、简单而强大的计算工具。

二阶行列式的计算 对角线法则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \underbrace{a_{11}a_{22}}_{\text{主对角线积}} - \underbrace{a_{12}a_{21}}_{\text{副对角线积}}$$

(历史视角：对角线法则最早见于日本数学家关孝和的《解伏题之法》(1683))



记忆口诀

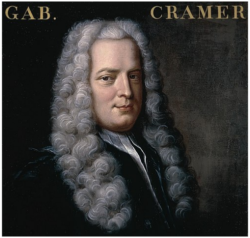
主对角相减副对角，
行列式值轻松到！

几何意义

行列式的绝对值等于矩阵列向量张成的平行四边形的面积

(当 $|D| > 0$ 时，面积 $=|a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}|$)

系统的力量：克拉默法则的定型



加布里尔 · 克拉默

通用的解法

有了行列式这一工具，数学家们自然会思考：能否给出一个求解任意多元线性方程组的通用“公式”？

历史一瞥

1750 年，瑞士数学家克拉默系统地提出了一个利用行列式求解 n 元线性方程组的方法。尽管其思想前人已有涉及，但他给出了清晰、普适的表达形式。

本节引入

这个以他名字命名的“克拉默法则”，为我们提供了一种理论上极为优美的解法。下面，我们来学习它的具体内容。

二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

系数行列式：$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

替换行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - a_{12} b_2$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} b_2 - b_1 a_{21}$$

克拉默法则解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}$$

几何意义

当 $D \neq 0$ 时，解 (x_1, x_2) 表示两直线交点坐标

注意事项

- 分母必须为原方程组的系数行列式 D
- 当 $D = 0$ 时方程组无解或有无穷多解
- 计算复杂度为 $O(n!)$，高于高斯消元法

定义

设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

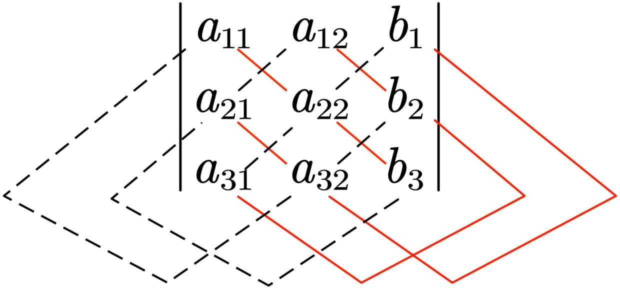
记:

$$\begin{aligned} &a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

上式称为数表所确定的**三阶行列式**:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

二、三阶行列式

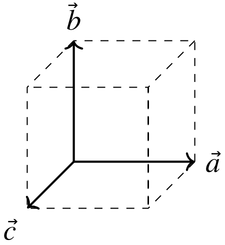


三阶行列式展开图解

几何意义

三阶行列式的绝对值等于三个行 (列) 向量张成的平行六面体的体积

(当 $|D| > 0$ 时，体积 $=|D|$)



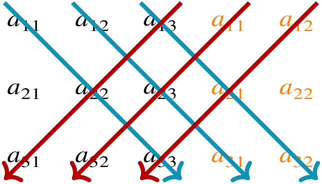
记忆口诀

主对角线方向乘积相加，副对角线方向乘积相减

(可用" 沙路法则" 辅助记忆)

(历史注释：沙路法是对角线法则的扩展形式，由日本数学家关孝和在 1683 年提出)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$



副对角线方向
3 项负积

主对角线方向
3 项正积

计算规则

三阶行列式包含:

- 3! = 6 项代数和
- 每项为不同行不同列的 3 元素乘积
- 主对角线方向 3 项为正
- 副对角线方向 3 项为负

展开公式

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

利用三阶行列式求解三元线性方程组

(历史注释：这是克拉默法则在三元情形下的推广，1750 年由克拉默系统提出)

三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

替换行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

利用三阶行列式求解三元线性方程组

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

(几何解释：每个解 x_i 表示超平面交点的坐标比例)

注意事项

- 必须满足 $D \neq 0$ 才有唯一解
- 计算复杂度为 $O(n!)$，实际应用中效率较低
- 适合理论分析和小规模方程组

§ 1.1.2 排列

排列概念的复习

(历史注释：排列概念最早可追溯至 12 世纪印度数学家 Bhaskara 的著作)

引例

用 1、2、3 三个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数？

- 百位：1、2、3，共 3 种选择
- 十位：剩余 2 个数字，共 2 种选择
- 个位：最后 1 个数字，共 1 种选择

排列结果

123, 132, 213, 231, 312, 321

总数：$3! = 6$ 种

乘法原理

分步计数原理：若完成一件事需要 n 个步骤，第 i 步有 m_i 种方法，则总方法数为 $\prod_{i=1}^{n} m_i$

排列的数学定义

全排列定义

从 n 个不同元素中取出 $m(m \le n)$ 个元素，按照一定顺序排成一列，称为**排列**。当 $m = n$ 时称为**全排列**

$$P_n^n = n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$$

(阶乘增长极快：$10! \approx 3.6$ 百万，$20! \approx 2.4$ 百亿亿)

排列性质

- 排列数公式：$P_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$
- 0! = 1（空排列视为 1 种情况）
- 排列与顺序有关，组合与顺序无关

应用场景

密码学、彩票组合、DNA 序列分析、算法复杂度计算等

莱昂哈德 · 欧拉
(1707-1783)

思想的源头：符号的奥秘

当行列式从 3 阶推广到 n 阶时，一个核心难题浮现：展开式中多达 n! 个项，它们的正负号究竟由什么规则决定？对角线法则已然失效。

历史一瞥

18 世纪，史上最高产的数学家欧拉，通过对排列的深入研究给出了答案。他创造性地提出了“反序数”的概念，用来精确地量化一个排列的“混乱程度”。

本节引入

这个用于判定排列奇偶性、进而为行列式注入灵魂的精妙工具，正是我们即将学习的——反序数理论。

(由欧拉在 18 世纪系统发展)

反序定义

在排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 中，若 $j_k > j_l$ 且 $k < l$，则称 (j_k, j_l) 构成一个**反序**

计算方法

1. 对每个数字，统计其右侧更小的数字个数
2. 所有数字的反序数之和即为总反序数 τ

$$\tau(3\ 1\ 2\ 5\ 4)$$

$= 2 \quad + 0 \quad + 0 \quad + 1 \quad = 3$

$$\tau(n\ (n-1)\ \ldots\ 2\ 1)$$

$= (n\text{-}1) \quad + (n\text{-}2) + \ldots \quad + 0 = \frac{n(n-1)}{2}$

标准排列

自然顺序排列 $12\cdots n$ 的反序数 $\tau = 0$，是唯一的零反序排列

奇偶排列

- 反序数为奇数： **奇排列**
- 反序数为偶数： **偶排列**
- $n \geq 2$ 时，奇偶排列各占一半 ($\frac{n!}{2}$ 个)

对换定理

任意对换改变排列的奇偶性

例： $\tau(31254) = 3$(奇) $\rightarrow$ 交换 1,5 得 35214：
$\tau(35214) = 2 + 3 + 0 + 1 + 0 = 6$(偶)

行列式关联

行列式展开式中项的符号由列标排列的奇偶性决定：

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

§ 1.1.3 n 阶行列式的定义

三阶行列式的结构与排列分析

展开式结构

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

项的特征

- 每项为不同行不同列的 3 元素乘积
- 行标按自然顺序排列
- 列标为 1,2,3 的排列 $j_1j_2j_3$
- 共 $3! = 6$ 项（3 正 3 负）

核心规律

当列标排列为偶排列时取正号，奇排列时取负号

n 阶行列式的数学定义

形式定义

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

其中 S_n 表示 n 阶对称群 (指: 由 n 个元素的所有可能排列构成的集合), $\operatorname{sgn}(\sigma)$ 为排列的符号 (偶排列取正号, 奇排列取负号)

展开式描述

$$\sum_{j_1 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{nj_n}$$

- 求和遍历所有 $n!$ 个排列
- $\tau(j_1 \cdots j_n)$ 为排列的反序数
- 正负项各占一半
- 行列式表示一个数（值）

特殊情形

- 一阶： $|a| = a$
- 二阶： $ad - bc$
- 三阶： 沙路法

几何意义

n 阶行列式表示 n 维平行体的有向体积

行列式的核心性质

(以下性质均可由定义直接证明)

基本性质

- 行列互换，值不变：$\det(A^T) = \det(A)$
- 两行 (列) 互换，值反号
- 数乘：$\det(kA) = k^n \det(A)$
- 行 (列) 线性性

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \rightarrow \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

转置不变性

特殊性质

- 两行 (列) 相同 = 零
- 成比例行 (列) = 零
- 行 (列) 加倍数 = 值不变

乘法性质

- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- 可逆 $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$
- $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

特殊行列式的计算技巧

三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

上/下三角行列式等于主对角线乘积

对角行列式

$$\begin{vmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} d_i$$

特 例： 单 位 矩 阵 $\det(I) = 1$

反对角行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & & a_{1n} \\ & ⋰ & \\ a_{n1} & & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{i=1}^{n} a_{i,n+1-i}$$

符号由反序数决定

计算策略

- 化为三角形行列式（高斯消元法）
- 按行 (列) 展开（余子式法）
- 分块矩阵行列式
- 递推法与数学归纳法

几何应用

- 面积/体积缩放因子：线性变换 T 将单位立方体映射为平行体，体积变化率为 $|\det(T)|$
- 向量组线性相关性：$\det(A) = 0 \Leftrightarrow$ 线性相关
- 叉积与混合积表示

矩阵分析

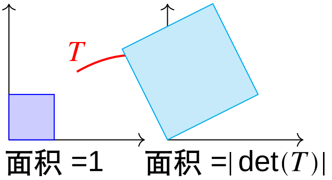
- 特征多项式：$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$
- 相似矩阵有相同行列式
- 正定矩阵判别

方程组求解

克拉默法则：当 $\det(A) \neq 0$ 时，$Ax = b$ 的唯一解为

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

其中 A_i 是用 b 替换 A 的第 i 列



行列式核心概念小结

核心内容

- 从解线性方程组引入二/三阶行列式
- 排列理论：反序数、奇偶性、互换定理
- n 阶行列式定义与展开式
- 特殊行列式计算技巧

几何意义

行列式表示 n 维平行体的有向体积：

- 二阶：平行四边形面积
- 三阶：平行六面体体积

关键性质

- 行列式是一个数值，非矩阵
- 每项为不同行不同列元素乘积
- 符号由列标排列奇偶性决定
- 转置不变性：$|A| = |A^T|$

特殊行列式

- 三角行列式：$\prod a_{ii}$
- 对角行列式：$\prod d_i$
- 反对角行列式：$(-1)^{n(n-1)/2}\prod a_{i,n+1-i}$

计算策略

- 化为三角形行列式（高斯消元法）
- 按行 (列) 展开（余子式法）
- 分块矩阵行列式
- 递推法与数学归纳法

行列式综合练习

练习 1：计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

提示：上三角行列式性质

练习 2：排列分析

求 43152 的逆序数及奇偶性

- 方法：统计右侧小数个数
- 应用：行列式项符号判定

练习 3：项识别

判断 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{14}a_{55}$ 是否为五阶行列式项并定符号

- 检查行/列标排列
- 计算列标逆序数

练习 4：性质证明

证明：$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix}$ **方法**：

- 直接计算（展开比较）
- 行列互换性质

题目

计算

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解.

按定义，唯一非零项为 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$，其列指标排列 $(4, 3, 2, 1)$ 的反序数为 6（偶排列），故符号为正。

$$D = (-1)^6 \cdot 24 = 24.$$

□

题目

计算 n 阶上三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解.

由行列式定义，非零项必须取自不同行、列；对第 n 行只能取 a_{nn}，第 $n-1$ 行只能取 $a_{n-1,n-1}$，…第 1 行只能取 a_{11}。唯一非零项为

$$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

对应排列 $(1,2,\ldots,n)$ 为偶排列，符号为正。

$$D = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

$\square$

Example 3 ——数值型 4 阶行列式

题目

计算

$$D = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

解.

这是下三角行列式（特例），直接套用 Example 2 结论：

$$D = 8 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 = 640.$$

□

题目

证明

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

证明：.

唯一非零项为 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$，其列指标排列为 $(n, n-1, \ldots, 1)$，反序数为

$$\tau = n(n-1)/2.$$

故符号为 $(-1)^{n(n-1)/2}$，得证。 □

题目

设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}b^{-1} & \cdots & a_{1n}b^{1-n} \\ a_{21}b & a_{22} & \cdots & a_{2n}b^{2-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b^{n-1} & a_{n2}b^{n-2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明 $D' = D$。

证.

由定义

$$D = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} \prod_{i=1}^{n} a_{ip_i}$$

$$D' = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} \prod_{i=1}^{n} a_{ip_i} . b^{(1+2+\ldots+n)-(p_1+p_2+\ldots+p_n)}$$

由于 $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1 + 2 + \ldots + n$,
故 $b^{(1+2+\ldots+n)-(p_1+p_2+\ldots+p_n)} = b^0 = 1$,
故 $D' = D$。 □

题目

证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证.

按定义展开，第 1 行只能取 a_{11}，余子式恰为右端 $(n-1)$ 阶行列式，符号为 $(-1)^{1+1} = +1$，得证。 □

题目

判断下列乘积是否为六阶行列式 $|a_{ij}|$ 的项，并确定符号：

(1) $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$

(2) $-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$

解.

(1)：下标的逆序数为 6，对应本身的正项，故：是

(2)：下标的逆序数为 8，但是本身是负项，矛盾，故：不是 □

题目

计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}_{n\times n}.$$

解.

这是 Example 4 的特例:

$$D_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} 1 \cdot 2 \cdots n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n!.$$

□

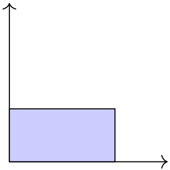
行列式应用拓展

代数应用

- 克拉默法则解线性方程组
- 矩阵可逆性判定：$\det(A) \neq 0$
- 特征多项式：$\det(A - \lambda I)$

几何应用

- 面积/体积计算：二维/三维图形
- 线性变换体积缩放因子
- 向量组线性相关性判定



面积 $=|ad - bc|$

图 1: 二阶行列式的几何意义

特殊行列式计算技巧

- ”爪”字型行列式：消去横竖线化为三角形
- ”么”字型行列式：两撇相互消
- 范德蒙行列式：连乘积形式

Q&A

(历史注释：行列式性质体系由柯西在 1815 年系统化)

本节目的与重点

讨论行列式的性质，利用这些性质可以化简行列式的计算。

行列式记为：

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1：转置不变性

定理 (行-列对称律)

行列式与其转置行列式相等：$\det(A) = \det(A^T)$

原矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

转置矩阵

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

核心意义

行列式中行与列地位完全平等，所有行性质对列自动成立

归纳法证明.

基例：$n=1$ 时，$\det([a])=a=\det([a]^T)$
归纳假设：设 $n=k$ 时成立

对 $n=k+1$，按第一行展开：

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{1+j}a_{1j}\det(M_{1j})$$

由归纳假设 $\det(M_{1j})=\det(M_{1j}^T)$

而 $\det(A^T)$ 按第一列展开：

$$\det(A^T)=\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{1+j}a_{j1}\det(M_{j1}^T)$$

由 $M_{1j}^T=M_{j1}$，得 $\det(A)=\det(A^T)$ $\square$

几何解释

转置对应坐标轴重标定，不改变空间定向和体积缩放率

行列对称性图解

行操作 $\rightarrow$ 性质成立 $\dashleftarrow \dashrightarrow$ 列操作 $\rightarrow$ 性质成立

行列地位完全对称

应用意义

- 证明量减半：只需证明行性质，列性质自动成立
- 计算灵活性：行变换与列变换可混合使用
- 可逆性检测：$\det(A) = 0 \Leftrightarrow \det(A^T) = 0$

定理 (行置换的奇偶性原理)

交换行列式任意两行（或列），行列式值变号：

$$r_s \leftrightarrow r_t \quad \Rightarrow \quad \det(B) = -\det(A)$$

原行列式 A

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{s1} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{t1} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

交换后行列式 B

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{t1} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

几何解释

行交换改变空间定向：右手系 → 左手系，体积缩放因子符号反转

反序数变换原理.

设原排列 $\sigma = j_1 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n$，反序数 $\tau(\sigma) = k$
交换 s, t 位置后：

$$\sigma' = j_1 \cdots j_t \cdots j_s \cdots j_n$$

- 相邻交换：每次交换改变反序数奇偶性（$\tau \to \tau \pm 1$）
- 一般交换：需奇数次相邻交换（$2d+1$ 次，$d \in \mathbb{Z}$）

反序数奇偶性变化：

$$(-1)^{\tau(\sigma')} = (-1)^{k \pm (2d+1)} = -(-1)^k$$

故对应项符号反转：$a_{1j_1} \cdots a_{sj_t} \cdots a_{tj_s} \cdots a_{nj_n} = -a_{1j_1} \cdots a_{sj_s} \cdots a_{tj_t} \cdots a_{nj_n}$ □

核心推论

所有项符号反转 $\Rightarrow \det(B) = -\det(A)$

性质 2 实例验证

例

三阶行列式交换演示

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \\ 6 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

计算验证：

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1\cdot(6\cdot8 - 2\cdot5) - 7\cdot(6\cdot8 - 2\cdot3) + 5\cdot(6\cdot5 - 6\cdot3) \\ &= 38 - 294 + 60 = -196 \\ \det(B) &= 1\cdot(5\cdot2 - 8\cdot5) - 7\cdot(3\cdot2 - 8\cdot1) + 5\cdot(3\cdot5 - 5\cdot1) \\ &= -30 - (-14) + 50 = 196 \end{aligned}$$

得 $\det(B) = 196 = -\det(A)$

Python 数值验证

```
import numpy as np
A = np.array([[1,7,5],[6,6,2],[3,5,8]])
B = np.array([[1,7,5],[3,5,8],[6,6,2]])
print(np.linalg.det(A), np.linalg.det(B)) # 输出: -196.0, 196.0
```

性质 3：行倍乘的标量提取定理

定理 (公因子提取律)

若行列式第 i 行元素有公因子 k，则 k 可提到行列式外：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

几何意义

提取 k 等价于空间沿第 i 坐标轴缩放 k 倍：

- n 维体积缩放 $|k|$ 倍
- 定向符号取决于 k 的正负

注意事项

- **与矩阵区别**：$|kA| = k^n|A|$（矩阵全体缩放）
- **错误案例**：$\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{vmatrix} =$ $4(ad - bc) \neq 2(ad - bc)$
- **错因**：行列式里，某行含因子 k 但非全行公因子，不可提取

性质 3：行倍乘的标量提取定理

定义法证明.

设原行列式项：$a_{1j_1} \cdots (ka_{ij_i}) \cdots a_{nj_n}$
提取 k 后：$k \sum (-1)^{\tau(\cdot)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n}$
右端恰为 k 倍的行列式定义 $\square$

Python 验证

```
import numpy as np
A = np.array([[1,2],[3,4]]); k = 2
B = A.copy(); B[1,:] *= k # 第二行乘 k
print(np.linalg.det(B), k*np.linalg.det(A)) # 输出: -4.0, -4.0
```

性质 4：行可加性分解定理

定理 (线性可加性)

若行列式第 i 行元素满足 $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$，则：

$$\begin{vmatrix} \text{— 其他行不变 —} \\ b_{i1} + c_{i1} \ \cdots \ b_{in} + c_{in} \\ \text{— 其他行不变 —} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & — & \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ & — & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & — & \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ & — & \end{vmatrix}$$

数学本质

行列式是各行向量的多重线性函数：

$$D(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{u} + \mathbf{w}, \ldots \mathbf{v}_n) =$$

$$D(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{u}, \ldots \mathbf{v}_n) + D(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{w}, \ldots \mathbf{v}_n)$$

使用限制

- **仅限同一行**：不同行拆分不成立
- **推广**：$a_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ij}^{(k)} \Rightarrow$ 分解为 m 个行列式

定义展开法.

左式通项: $(-1)^{\tau(\cdot)} a_{1j_1} \cdots (b_{ij_i} + c_{ij_i}) \cdots a_{nj_n}$

拆分: $(-1)^{\tau(\cdot)} a_{1j_1} \cdots b_{ij_i} \cdots a_{nj_n} + (-1)^{\tau(\cdot)} a_{1j_1} \cdots c_{ij_i} \cdots a_{nj_n}$

求和后恰为两个行列式之和 $\square$

高阶推广（m 项分解）

$$\begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{m} b_{i1}^{(k)} \cdots \sum_{k=1}^{m} b_{in}^{(k)} \\ \text{其他行不变} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{m} \begin{vmatrix} b_{i1}^{(k)} \cdots b_{in}^{(k)} \\ \text{其他行不变} \end{vmatrix}$$

应用案例

解 $\begin{vmatrix} x+y & 1 \\ 2x+3y & 5 \end{vmatrix} = 0$

分解: $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 2x & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & 1 \\ 3y & 5 \end{vmatrix} = 3x - 2y = 0$

性质 5：行列式零值判定定理

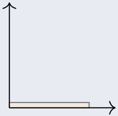
定理 (退化条件三情形)

行列式 D 在以下任一情况时值为零：

1. 零行存在：某行 (列) 元素全为零
2. 线性相关：两行 (列) 元素对应相等
3. 比例关系：两行 (列) 元素对应成比例

几何解释

- 零行 $\to n$ 维体积坍缩为 $n-1$ 维
- 行相关 $\to$ 向量组线性相关
- 比例 $\to$ 平行超平面无包围体积



零行 $\to$ 面积为零

性质 5：行列式零值判定定理

证明思路

- 情形 1：按零行展开立即得证
- 情形 2：交换相同行：$D = -D \Rightarrow D = 0$
- 情形 3：提取比例系数转化为情形 2

应用实例

判断行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ 和 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ 的值

性质 6：行列式倍加不变性

定理 (初等变换保行列式)

行列式在行 (列) 倍加变换下保持不变：

$$r_i \to r_i + kr_j \quad (i \neq j) \Rightarrow D = D'$$

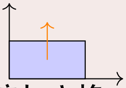
矩阵表示

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

对应初等矩阵 $\det(E) = 1$

几何意义

剪切变换不改变空间定向和体积：



倍加变换

性质 6：行列式倍加不变性

分拆验证法.

设 $D' = \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_i + ka_j & & \cdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_j & & \cdots \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$，由性质 4 可拆分为：

$$D' = D + k \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_j & & \cdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_j & & \cdots \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = D + 0 = D$$

其中第二个行列式有两行相同，由性质 5 得零 □

三角化计算法

计算 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

解:

$$\xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3-3r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Python 验证

```
import numpy as np
A = np.array([[1,2,3],[2,3,4],[3,4,5]])
print(np.linalg.det(A)) # 输出: 0.0
```

高斯消元关联

性质 6 是高斯消元法保持解不变的理论基础

行列式六大核心性质总结

性质全景图

- 对称性：$|A| = |A^T|$（行-列等价）
- 反交换性：$r_i \leftrightarrow r_j \Rightarrow D' = -D$
- 线性性：$kr_i \Rightarrow D' = kD$
- 可加性：$r_i = \mathbf{u} + \mathbf{w} \Rightarrow D = D_1 + D_2$
- 退化条件：零行/相同行/比例行 $\Rightarrow D = 0$
- 不变性：$r_i + kr_j \Rightarrow D' = D$

几何解释

- 行列式值 = 平行多面体有向体积
- 性质对应：旋转（对称）、镜像（反号）、伸缩（线性）、剪切（不变性）

计算策略

1. 目标：化为上三角矩阵 U
2. 工具：倍加变换（性质 6）保持行列式值
3. 技巧：先消元再分解，避免直接展开

例 1：五阶行列式计算

$$D=\begin{vmatrix}4&4&-10&10&-2\\3&-5&7&-14&6\\2&0&-4&2&-1\\3&-3&7&-9&5\\1&1&-2&3&-1\end{vmatrix}$$

解：

$$\xrightarrow{r_3+r_1}\begin{vmatrix}4&4&-10&10&-2\\3&-5&7&-14&6\\6&4&-14&12&-3\\3&-3&7&-9&5\\1&1&-2&3&-1\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-\frac{3}{2}r_1}\begin{vmatrix}4&4&-10&10&-2\\3&-5&7&-14&6\\0&-2&1&-3&0\\3&-3&7&-9&5\\1&1&-2&3&-1\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2-\frac{3}{4}r_1}\cdots\rightarrow \text{上三角矩阵}$$

$$=4\times(-5)\times1\times(-3)\times2=120$$

例 1： Python 验证

```
import numpy as np
A = np.array([[4,4,-10,10,-2],[3,-5,7,-14,6],
[2,0,-4,2,-1],[3,-3,7,-9,5],[1,1,-2,3,-1]])
print(np.linalg.det(A)) # 输出： 120.0
```

例 2：三阶行列式分解

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & bc \\ b^2 & b & ca \\ c^2 & c & ab \end{vmatrix} = 0$$

关键步骤：

1. 行变换：$r_2 \leftarrow r_2 - \frac{b}{a} r_1$
2. 提取公因子：$(b-a)(c-a)$
3. 发现比例行：$r_2 = kr_3$（性质 5 得零）

例 3：对称行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}$$

技巧：

- 列和提取：$\sum c_i \to c_1$
- 行消元：$r_i - r_1 \quad (i > 1)$

例 4：可拆项行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 + 1 & \cdots & x_n + 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 + n & \cdots & x_n + n \end{vmatrix} = \begin{cases} x_2 - x_1 & (n = 2) \\ 0 & (n > 2) \end{cases}$$

方法：

- 拆项法（性质 4）
- 秩分析：rank$(D_n) \leq 2$

计算策略总结

方法选择指南

- 高阶稠密矩阵：高斯消元法（三角化）
- 特殊模式矩阵：寻找递推关系
- 含参数矩阵：分类讨论（如例 4）
- 稀疏矩阵：按行/列展开（拉普拉斯展开）

常见错误警示

- **混淆性质**：$|kA| = k^n|A|$ vs $kr_i \Rightarrow k|A|$
- **错误拆分**：不同行的元素不可直接拆分
- **符号错误**：行交换次数与行列式符号关系
- **计算顺序**：先化简再计算，避免过早展开

题目

计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix}$ 的值

正解.

单位矩阵行列式:

$$D=\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix}=1\times 1-0\times 0=1$$

$\square$

题目 1

已知 $|A| = 5$，计算 $\left|2A\right|$

正解

每行提取公因子 2：

$$|2A| = 2^n|A| = 8 \times 5 = 40 \quad (n = 3)$$

题目 2

计算 $|A + B|$

正解

行列式无加法分配律！正确方法：

- 分别计算 A, B 后再相加
- 或使用特殊分解技巧

核心原理

- **倍乘性质**：$|kA| = k^n|A|$（每行都乘 k）
- **可加性限制**：仅适用于单一行/列的拆分

思考题 3：分拆法的高级应用

题目

计算 4 阶行列式（已知 $abcd = 1$）：

$$D = \begin{vmatrix} a^2 + \frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2 + \frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2 + \frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2 + \frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}$$

分拆策略

利用性质 4 进行行列式拆分：

$$D = \begin{vmatrix} a^2 & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2 & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2 & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2 & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ \frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ \frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ \frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix} = abcd \begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix} + (-1)^3 \begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix} = 0$$

注意事项

- 拆分时确保其他行保持不变
- 及时应用条件 $abcd = 1$

核心方法

- **三角化法**：倍加变换化为上三角矩阵（性质 6）
- **分拆法**：单行/列拆分为两行列式之和（性质 4）
- **特殊行列式**：对角、三角、范德蒙德等特殊形式

典型错误警示

- 混淆性质：$|kA|$ vs $k|A|$（整体缩放 vs 单行缩放）
- 非法拆分：$|A+B| \neq |A|+|B|$（无加法分配律）
- 变换误用：倍加变换后错误认为值改变

前沿应用提示

行列式性质在以下领域有重要应用：

- 机器学习：Jacobian 行列式计算（反向传播）
- 计算机图形学：3D 变换的体积保持判定
- 量子力学：波函数正交性检验

Q&A

本章主要内容

核心策略

- **降维打击**：将高阶行列式拆解为低阶行列式的线性组合
- **关键工具**：代数余子式实现行列式的递归计算
- **几何视角**：多维空间体积计算的可分性体现

三阶行列式展开示范

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

余子式与代数余子式

数学定义

- **余子式** M_{ij}： 删除第 i 行第 j 列后的子行列式
- **代数余子式**
  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$
- **符号规律**： 棋盘式正负分布

+	−	+	−
−	+	−	+

实例解析

四阶行列式 D 中：

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}$$

（对应图中 (2,3) 位置为负，与标注一致）

定理 (Laplace 展开定理)

任意 n 阶行列式可按第 i 行展开：

$$D = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

或按第 j 列展开：

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

归纳法证明.

1. **基础步骤**：二阶情形直接验证成立
2. **归纳假设**：假设对 $n-1$ 阶行列式成立
3. **递推步骤**：行交换和余子式展开完成证明

□

应用技巧

- 优先选择含零最多的行/列展开
- 结合性质 6 先进行行变换创造零元素
- 特殊行列式 (如箭形) 有特定展开策略

正交关系定理

行列式某行 (列) 元素与另一行 (列) 代数余子式的乘积和为零:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0 \quad (i \neq j)$$

几何解释

反映多维空间中非相邻超平面的正交关系:

- 不同行向量在余子式空间投影正交
- 行列式为 0 时线性相关的体现

应用实例

已知行列式 D 的第 4 行代数余子式为 A_{4j}，则:

$$a_{31}A_{41} + a_{32}A_{42} + a_{33}A_{43} = 0$$

在求解线性方程组中有重要应用

现代发展

是矩阵伴随理论的基础，在计算机图形学中广泛应用

例 1：四阶行列式计算

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

解：按第三列展开（含最多零元素）：

$$D = 2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot (\text{其他项})$$

$$= 2\left[1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\right]$$

$$= 2[(-3-2) + 5(0-2)] = 2(-5-10) = -30$$

Python 验证

```
import numpy as np
A = np.array([[3,0,2,-1],[1,0,0,5],[0,-1,0,2],[-2,1,0,3]])
print(np.linalg.det(A)) # 输出：-30.0
```

基本展开原理

- **单行分解**：将行列式某行视为 n 个单项的和
- **代数余子式**：$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$（余子式带符号）
- **递归计算**：高阶 $\rightarrow$ 低阶行列式的线性组合

行展开公式

$$D = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \quad \text{(固定行 } i\text{)}$$

几何意义：沿第 i 行方向"体积分量"求和

列展开公式

$$D = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj} \quad \text{(固定列 } j\text{)}$$

几何意义：沿第 j 列方向"体积分量"求和

选择策略

- 优先选择含零最多的行/列展开
- 结合初等变换创造更多零元素
- 特殊行列式（三角阵）直接取对角线乘积

例 1：五阶行列式计算

$$D=\begin{vmatrix}5&-3&1&2&0\\1&7&2&5&2\\0&2&3&1&0\\0&4&-1&4&0\\0&2&3&-5&0\end{vmatrix}$$

优化解法：

1. 按第 5 列展开（唯一非零元 $a_{25}=2$）：

$$D=(-1)^{2+5}\cdot 2\begin{vmatrix}5&-3&1&2\\0&2&3&1\\0&4&-1&4\\0&2&3&-5\end{vmatrix}$$

2. 继续按第 1 列展开：

$$=-10\begin{vmatrix}2&3&1\\4&-1&4\\2&3&-5\end{vmatrix}$$

3. 行变换后得结果：-1080

标准形式与几何意义

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n} (x_i - x_j)$$

- **几何意义**：n 维空间幂函数基张成的平行多面体体积
- **非零条件**：x_i 互异 $\Leftrightarrow V_n \neq 0$（线性无关）

数学归纳法证明

1. **基础步骤**（$n = 2$）：

$$V_2 = x_2 - x_1 \quad \text{（显式验证）}$$

2. **归纳假设**：$n-1$ 阶成立：$V_{n-1} = \prod_{2\le j<i\le n}(x_i - x_j)$
3. **递推技巧**：
   - 消元：对 n 阶式，由下而上，依次从每一行减去上一行的 x_1 倍
   - 按首列展开提取 $(x_i - x_1)$
   - 得到：$V_n = \prod_{2\le k\le n}(x_k - x_1)V_{n-1} = \prod_{1\le j<i\le n}(x_i - x_j)$，证毕

Python 数值验证与可视化

```
# 使用 NumPy 计算范德蒙行列式
import numpy as np
x = np.array([1, 2, 3, 4]) # 必须互异
V = np.vander(x, increasing=True)
det_V = np.linalg.det(V)
print(f" 理论值: 1 * 2 * 3 * 1 * 2 * 1=12")
print(f" 计算值: det_V:.0f") # 输出 12
```

例 2：代数余子式线性组合

已知行列式 D 及其转置的值均为 16，求：

$$A_{31} + A_{32} + A_{33} + A_{34} \quad \text{和} \quad A_{31} + 2A_{32} + 3A_{33} + 4A_{34}$$

解法分析：

- 第一问：对应 D 的第 3 行与第 4 行余子式的正交性（结果为 0）
- 第二问：恰为 D 的展开式（结果为 16）

核心技巧

- 识别线性组合的系数特征
- 区分正交关系与展开公式的不同应用场景
- 结合转置行列式值不变的性质

方法体系总结

- **基础方法**：按行/列展开、递推法、数学归纳法
- **优化策略**：零元素创造、特殊行列式识别
- **验证手段**：Python 数值计算、几何意义检验

k 阶子式：从定义到几何本质

严格数学定义

在 n 阶行列式 D 中任选 k 行 k 列（$1 \leq k < n$），交叉处 k^2 个元素按原序组成的行列式 M 称为 **k 阶子式**。记行号 $i_1 < \cdots < i_k$，列号 $j_1 < \cdots < j_k$

余子式体系

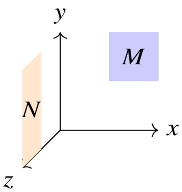
- **余子式** N：划去 M 所在行列的 $(n-k)$ 阶子式
- **代数余子式**：

$$A = (-1)^{\sum i_\alpha + \sum j_\beta} N$$

- **对偶关系**：M 与 N 互为余子式

几何意义

- M：k 维平行多面体在选定坐标平面的投影体积
- N：正交补空间上的投影体积
- 符号因子：反映坐标系手性变化



子式结构分解示例

五阶行列式案例

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

3 阶主子式

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

行/列索引：1,2,3

2 阶余子式

$$N = \begin{vmatrix} a_{44} & a_{45} \\ a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

互补行列：4,5

代数余子式

$$A =$$

$$(-1)^{(1+2+3)+(1+2+3)}N$$

$$= N$$

符号因子：$+1$

拉普拉斯定理：降阶计算的终极武器

定理 (Laplace 展开定理)

在 n 阶行列式 $|A|$ 中任取 k 行（列），则 $|A|$ 等于所有 k 阶子式 M_i 与对应代数余子式 A_i 的乘积之和：

$$|A| = \sum_{i=1}^{C_n^k} M_i A_i$$

其中 C_n^k 为组合数，M_i 为第 i 个子式

证明思路

1. **归纳法**：从 $k = 1$（行列展开）推广到一般情形
2. **组合构造**：通过排列组合验证项的一致性
3. **分块矩阵**：利用分块行列式性质推导

计算策略

- 优先选择零元素多的行列
- 主子式情形计算更简便
- $k = n/2$ 时效率最优

历史注记

柯西 (1812) 首次严格证明，拉普拉斯 (1773) 应用于范德蒙行列式

分块行列式

典型分块三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$$

其中 A, B 为方阵，O 为零矩阵

计算步骤

1. 按前 k 行应用 Laplace 定理
2. 唯一非零子式：A
3. 余子式：B
4. 符号因子：$(-1)^{\sum_{i=1}^{2k} i} = +1$

推广形式

- 对角分块：$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$
- 三角分块：$\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$
- 四块分块：
  $\begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$

应用技巧

分块后子矩阵应尽量满足：对角/三角/零矩阵等特殊结构

核心方法论

- **递归降阶**：高阶 → 低阶 → 标量
- **分治策略**：分块处理局部结构
- **符号系统**：严格管理正负号

公式体系

- 单行展开：$D = \sum a_{ij}A_{ij}$
- 正交关系：$\sum a_{ik}A_{jk} = D\delta_{ij}$
- Laplace 展开：$D = \sum M_i A_i$

记忆要点

- 范德蒙行列式：$\prod_{i<j}(x_i - x_j)$
- 分块行列式：$|A||B|$ 优先
- 代数余子式符号：棋盘法则

问题 1：

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} \qquad (n > 1)$$

问题 2：

$$D = \begin{vmatrix} a & 0 & a & 0 & a \\ b & 0 & c & 0 & d \\ b^2 & 0 & c^2 & 0 & d^2 \\ 0 & ab & 0 & bc & 0 \\ 0 & cd & 0 & da & 0 \end{vmatrix}$$

定理 (展开定理应用)

对 $n(n>1)$ 阶行列式 $|A|$，按第一列展开构建递推关系：

$$|A| = a\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_{(n-1)\text{阶}}$$

$$+b\cdot(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix}_{(n-1)\text{阶}}$$

分步计算.

1. 第一项化简（上三角行列式）：第一部分是上三角行列式，主对角线元素均为 a，值为 a^{n-1}，因此：

$$a \cdot (-1)^{1+1} \cdot a^{n-1} = a \cdot a^{n-1} = a^n$$

2. 第二项化简（下三角行列式）：第二部分行列式是下三角行列式，主对角线元素均为 b，值为 b^{n-1}，因此：

$$b \cdot (-1)^{n+1} \cdot b^{n-1} = (-1)^{n+1} \cdot b^n$$

3. 合并结果：两部分相加，最终得：

$$|A| = a^n + (-1)^{n+1} b^n$$

□

验证实例

- 当 $n=2$ 时：

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2$$

代入公式：$a^2 + (-1)^3 b^2 = a^2 - b^2$，结果一致。

- 当 $n=3$ 时：

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ b & 0 & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3$$

代入公式：$a^3 + (-1)^4 b^3 = a^3 + b^3$，结果一致。

问题 2 解答：Laplace 展开法（策略篇）

Step 1：观察行列式结构

目标为 5 阶行列式（突出零元素分布）：

$$D = \begin{vmatrix} a & 0 & a & 0 & a \\ b & 0 & c & 0 & d \\ b^2 & 0 & c^2 & 0 & d^2 \\ 0 & ab & 0 & bc & 0 \\ 0 & cd & 0 & da & 0 \end{vmatrix}$$

关键特征：第 2、4 列含大量零元素，适合 Laplace 展开（零多的行列降阶）。

Step 2：选定展开行列

- 选列：第 2、4 列（列组 $C = \{2, 4\}$）- 选行：第 1、3、5 行（行组 $R = \{1, 3, 5\}$）
注：Laplace 展开要求行数列数匹配，此处通过分块实现降阶

Step 3：符号因子计算

符号公式：$(-1)^{\text{行标和}+\text{列标和}}$ - 行标和：$1 + 3 + 5 = 9$ - 列标和：$2 + 4 = 6$ - 总
符号：$(-1)^{9+6} = (-1)^{15} = -1$

Step 4：提取非零子式

按选定的 3 行 3 列（主块）和剩余行列（副块），行列式可拆分为：

$$D = \underbrace{\begin{vmatrix} a & a & a \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}}_{\text{主块：3 阶子式}} \cdot (-1)^{\text{行标和+列标和}} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} ab & bc \\ cd & da \end{vmatrix}}_{\text{副块：2 阶子式}}$$

其中：- 主块：第 1 3 5 行与第 1 3 5 列交叉的 3 阶子式。- 副块：第 2 4 行与第 2 4 列交叉的 2 阶子式（因原行列式第 2 4 行非零元素仅在这两列）。

Step 5：符号因子计算（关键）

行标和（选第 1 3 5 行）：$1+3+5=9$。列标和（选第 1 3 5 列）：$1+3+5=9$。但图片中符号为 $(-1)^{1+2+3+1+3+5} = (-1)^{15} = -1$（简化记法，核心是“行列标和为奇数则负”）。

Step 6：主块子式化简（3 阶）

主块子式：

$$M_1 = \begin{vmatrix} a & a & a \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}$$

- 提取公因子：第一行提 a：

$$M_1 = a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}$$

- Vandermonde 公式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

代入得：$M_1 = a \cdot (c - b)(d - b)(d - c)$

Step 7：副块子式化简（2 阶）

副块子式：

$$M_2 = \begin{vmatrix} ab & bc \\ cd & da \end{vmatrix}$$

- 直接展开：

$$M_2 = ab \cdot da - bc \cdot cd = a^2bd - bc^2d$$

- 提取公因子：$M_2 = bd(a^2 - c^2) = bd(a-c)(a+c)$

Step 8：合并符号与子式

原行列式按 Laplace 展开为：

$$D = M_1 \cdot (-1)^{\text{符号}} \cdot M_2$$

代入 $M_1 = a(c-b)(d-b)(d-c)$、$M_2 = bd(a^2-c^2)$、符号 -1，得：

$$D = a(c-b)(d-b)(d-c) \cdot (-1) \cdot bd(a^2-c^2)$$

整理符号与公因子：

$$D = -abd(c-b)(d-b)(d-c)(a^2-c^2)$$

Step 9：最终符号修正

利用平方差 $a^2 - c^2 = -(c^2-a^2)$，代入得：

$$D = abd(c-b)(d-b)(d-c)(c^2-a^2)$$

行列式计算方法论总结

核心技巧体系

- **结构分析**：识别重复行/列、分块三角、稀疏矩阵等特殊模式
- **展开策略**：
  - Laplace 展开选择最优行列
  - 递推法建立行列式关系式
- **性质应用**：行变换、列变换、提取公因子

计算流程

1. 观察行列式整体结构
2. 选择最佳展开路径
3. 逐步降阶计算子式
4. 合并结果并化简

Q&A

本章主要内容

- § 1.1 n 阶行列式的定义
  - § 1.1.1 二、三阶行列式的定义
  - § 1.1.2 排列
  - § 1.1.3 n 阶行列式的定义
- § 1.2 行列式的主要性质
- § 1.3 行列式按行（列）展开
- **§ 1.4 行列式的算法**

核心目标

- **理论验证**：实践行列式定义、性质与展开定理
- **技能提升**：掌握特殊结构行列式的计算技巧
- **思维训练**：培养多角度分析问题的能力

方法体系

- **基础方法**：对角线法（二阶）、三角化法
- **降阶策略**：展开法、Laplace 定理
- **结构优化**：拆项法、箭形行列式转化
- **高级技巧**：数学归纳法、范德蒙德行列式转化

选择原则

- 优先观察零元素分布
- 识别重复行/列模式
- 尝试行列和相等的性质
- 结合几何意义验证结果

案例 1：特殊结构行列式计算

问题描述

计算 $n+2$ 阶行列式：

$$D_{n+2}=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

结构特征（匹配题目）

- 主对角线（除末行末列）全为 a
- 前 $n+1$ 行末列元素均为 1
- 末行首列元素为 1，其余为 0
- 零元素占比高，适合展开降阶或列变换

解题方向（呼应题目提示）

- 方法 1：按首行/末行展开（利用零元素简化）
- 方法 2：Laplace 定理（选含零最多的行列组合）
- 方法 3：列变换（各列加到第 1 列，利用行和特征）

解法 1：按第一行展开的完整推导（1/3）

Step 1：按第一行展开行列式

利用「第一行零元素多」的结构特点，通过 行列式按行展开定理，将 $n+2$ 阶行列式拆分为低阶子式计算。展开公式：$D = \sum_{j=1}^{n+2} a_{1j} \cdot (-1)^{1+j} \cdot M_{1j}$，其中 M_{1j} 为子行列式。

第一行仅 $a_{11} = a$ 和 $a_{1,n+2} = 1$ 非零，故展开后仅两项：

$$D_{n+2} = a \cdot (-1)^{1+1} \cdot M_{11} \;+\; 1 \cdot (-1)^{1+(n+2)} \cdot M_{1,n+2}$$

- M_{11}：划去第 1 行第 1 列的子行列式（主对角线全为 a 的上三角）- $M_{1,n+2}$：划去第 1 行第 $n+2$ 列的子行列式（含末行首列 1 的特殊结构）

Step 2：计算子行列式 M_{11}

M_{11} 是 $n+1$ 阶上三角行列式（主对角线全为 a）：

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} = a^{n+1}$$

第一项贡献：$a \cdot (-1)^{1+1} \cdot a^{n+1} = a^{n+2}$

Step 3：计算子行列式 $M_{1,n+2}$

$M_{1,n+2}$ 是划去第 1 行第 $n+2$ 列的 $n+1$ 阶行列式：

$$M_{1,n+2} = \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

按最后一行展开（仅首列元素 1 非零）：

$$M_{1,n+2} = 1 \cdot (-1)^{(n+1)+1} \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} = (-1)^{n+2} \cdot a^n$$

第二项贡献：

$$1 \cdot (-1)^{1+(n+2)} \cdot (-1)^{n+2} \cdot a^n = (-1)^{2n+5} \cdot a^n = -a^n$$

（注：$2n+5$ 为奇数）

Step 4：合并结果

两项贡献相加：

$$D_{n+2} = a^{n+2} - a^n = a^n(a^2 - 1)$$

验证（$n = 1$，3 阶行列式）：

$$D_3 = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = a^3 - a = a(a^2 - 1)$$

与公式结果一致。

解法 2：Laplace 定理的矩阵视角（1/2）

Step 1：提取 2 阶非零子式 M

第 1 行与第 $n+2$ 行，第 1 列、第 $n+2$ 列交叉形成 2 阶子式：

$$M = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}$$

展开得：$M = a \cdot a - 1 \cdot 1 = a^2 - 1$

Step 2：计算余子式 N

划去所选行列后，剩余 n 阶子式为主对角线全为 a 的上三角行列式：

$$N = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} = a^n$$

解法 2：Laplace 定理的矩阵视角（2/2）

Step 3：符号因子推导

符号由行标和与列标和决定：- 行标和：$1+(n+2)=n+3$ - 列标和：$1+(n+2)=n+3$

总符号因子：

$$(-1)^{\text{行标和+列标和}} = (-1)^{2n+6} = 1$$

（$2n+6$ 为偶数）

Step 4：合并结果（Laplace 定理）

行列式值 = 子式 × 符号 × 余子式：

$$D_{n+2} = M \cdot (-1)^{\text{行标和+列标和}} \cdot N$$

代入得：

$$D_{n+2} = (a^2-1)\cdot 1 \cdot a^n = a^n(a^2-1)$$

结论

$$D_{n+2} = a^n(a^2-1)$$

解法 3：利用" 行和相等" 的列变换技巧 (1/4)

核心思路：行和相等 → 列变换创造零元素

观察特点：

- 前 $n+1$ 行：行和为 $a+1$
- 末行：行和也为 $a+1$

列变换：所有列加到第 1 列，提取公因子简化计算

Step 1：列变换（各列加到第 1 列）

变换：$c_1 \leftarrow c_1 + c_2 + \cdots + c_{n+2}$

$$D_{n+2} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a+1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a+1 & a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a+1 & 0 & a & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a+1 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ a+1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

（第 1 列元素全为 $a+1$）

Step 2：提取公因子 $a+1$

$$D_{n+2} = (a+1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

Step 3：行变换消零

行变换：$r_i \leftarrow r_i - r_1 \quad (i = 2, \cdots, n+2)$ 得：

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

（第 1 列除首元素外全为 0，末行末列为 $a-1$）

解法 3：利用”行和相等”的列变换技巧 (3/4)

Step 4：计算化简后的行列式

上三角变形行列式值：

$$1 \cdot a^n \cdot (a-1) = a^n(a-1)$$

结合公因子 $a+1$，得：

$$D_{n+2} = (a+1) \cdot a^n(a-1) = a^n(a^2-1)$$

几何解释

- 列变换：线性变换中的”剪切”操作
- 公因子 $a+1$：体积缩放因子
- 结果 $a^n(a^2-1)$：变换后超立方体的有向体积

验证：低阶实例（$n=1$）

$n=1$ 时，3 阶行列式：

$$D_3 = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix}$$

步骤：

1. 列变换 $c_1 \leftarrow c_1 + c_2 + c_3$：

$$\begin{vmatrix} a+1 & 0 & 1 \\ a+1 & a & 1 \\ a+1 & 0 & a \end{vmatrix}$$

2. 提取公因子 $a+1$：

$$(a+1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix}$$

3. 行变换 $r_2 \leftarrow r_2 - r_1, r_3 \leftarrow r_3 - r_1$：

$$(a+1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = a(a^2-1)$$

与直接展开结果一致

案例 2：递推型行列式计算

问题描述

计算 n 阶行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} x+\prod_{k=1}^{n-1} a_k & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

结构特征

- 首行特殊项：含 x 与 a_i 的乘积组合
- 上三角趋势：主对角线下方的次对角线元素
- 稀疏矩阵：零元素占比达 $\frac{(n-2)(n-1)}{n^2}$

解法方向

- 递推法（按首列展开）
- 列变换创造三角阵
- 数学归纳法验证

解法 1：递推法的严格推导

定理 (递推关系建立)

按首列展开可得：

$$D_n = \left(x + \prod_{k=1}^{n-1} a_k\right) \cdot D_{n-1}^{(1)} + \sum_{k=2}^{n-1} (-1)^{k+1} a_k \cdot D_{n-1}^{(k)}$$

其中 $D_{n-1}^{(i)}$ 为删除第 i 行第 1 列的子行列式

简化过程.

1. 子行列式 $D_{n-1}^{(1)}$：

$$D_{n-1}^{(1)} = \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} = x^{n-2}$$

2. 非首项子式：

$$D_{n-1}^{(k)} = (-1)^{k-1} a_1 \cdots a_{k-1} x^{n-k-1}$$

3. 合并结果：

$$D_n = xD_{n-1} + a_1 a_2 \cdots a_{n-1}$$

□

解法 1：递推法的严格推导（续）

验证实例（$n = 3$）

$$D_3 = x^3 + a_1 a_2 x + a_1 a_2$$ （符合递推结果）

解法 2：创造性列变换

变换策略

1. 第 2 列乘 x 加到第 1 列：

$$c_1 \leftarrow c_1 + xc_2$$

2. 第 3 列乘 x^2 加到第 1 列：

$$c_1 \leftarrow c_1 + x^2 c_3$$

3. 迭代至第 n 列：

$$c_1 \leftarrow c_1 + x^{n-1} c_n$$

几何解释

- 变换保持行列式值不变
- 最终形式：

$$D_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{i=1}^{k} a_i \right) x^{n-1-k}$$

- 反映超立方体体积的线性组合

变换后矩阵

$$\begin{vmatrix} x^n + \sum_{k=1}^{n-1} a_1 \cdots a_k x^{n-k-1} & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 x^{n-1} & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} x & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

问题描述

计算行列式：
$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$$

$(b_i \neq 0)$

特点

- 有好多 0
- 每行有两个非 0 元且和相等
- 可考虑按照某行 (列) 展开或者 Laplace 定理
- 可考虑各列都加到第 1 列

解：第 2,3,⋯,n 行都减去第 1 行得到

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -b & b & 0 & \cdots & 0 \\ -b & 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix}$$

$$= b^{n-1} \cdot \begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -b & b & 0 & \cdots & 0 \\ -b & 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix} = b^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i + b\right)$$

注：也可以第 1,⋯,$n-1$ 行减去第 n 行

解法 2：采用加边法（升级法）

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_1 + b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_1 & a_2 + b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_n + b \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -b & b & 0 & \cdots & 0 \\ -b & 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + b \right)$$

$$= b^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + b \right)$$

案例 4： 对称型行列式计算

问题描述

计算 n 阶行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} a & c & c & \cdots & c \\ b & a & c & \cdots & c \\ b & b & a & \cdots & c \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

结构特征

- 主对角线全 a： 对称核心
- 上三角区域全 c： 右上均匀分布
- 下三角区域全 b： 左下均匀分布
- 特殊情形： $b = c$ 时为经典对称行列式

解法策略

- 行变换创造递推结构
- 转置对称性利用
- 分情况讨论 ($b = c$ 与 $b \neq c$)
- 数学归纳法验证

解法 1：行变换递推法

定理 (行变换构造)

$b \neq c$ 时，$r_i \leftarrow r_i - r_{i+1} \quad (i = 1, \dots, n-1)$：

$$D_n \to \begin{vmatrix} a-b & c-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a-b & c-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b & c-a \\ b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

递推关系.

1. 首列展开：

$$D_n = (a-b)D_{n-1} + (-1)^{n+1} b(c-a)^{n-1}$$

2. 转置对称：

$$D_n^T = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix} \Rightarrow (a-c)D_n = (a-c)D_{n-1} + (c-b)(a-b)^{n-1}$$

3. 联立得：

$$D_n = (a-c)^{n-1} + (a-b)^{n-1}$$

□

解法 2：对称性妙用

对称关系

- 转置：$D_n^T(b,c) = D_n(c,b)$
- 方程组：

$$\begin{cases}(a-b)D_n = (a-b)D_{n-1} + (b-c)(a-c)^{n-1} \\ (a-c)D_n = (a-c)D_{n-1} + (c-b)(a-b)^{n-1}\end{cases}$$

- 克莱姆法则：

$$D_n = \frac{\begin{vmatrix}(b-c)(a-c)^{n-1} & a-b \\ (c-b)(a-b)^{n-1} & a-c\end{vmatrix}}{(a-b)-(a-c)}$$

几何解释

- 行列式值：超立方体体积
- $(a-b),(a-c)$：缩放因子
- 对称性：体积叠加原理

统一表达式

$$D_n = \begin{cases}[a+(n-1)b](a-b)^{n-1} & (b=c) \\ (a-b)^{n-1} + (a-c)^{n-1} & (b \neq c)\end{cases}$$

特殊情形验证

- 当 $n = 2$ 时:

$$D_2 = \begin{vmatrix} a & c \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - bc \quad \text{（符合公式）}$$

- 当 $b \to c$ 时:

$$\lim_{b \to c} \frac{(a-c)^{n-1} - (a-b)^{n-1}}{b-c}$$

$$= (n-1)(a-c)^{n-2}$$

- 与 $b = c$ 结果一致

Python 数值验证

```
import numpy as np
n = 4; a = 5; b = 2;
c = 3
D   =   np.diag([a]*n)
+  np.triu([[c]*n]*n,
k=1)
D                    +=
np.tril([[b]*n]*n,
k=-1)
exact  =  (a-b)**(n-1)
+ (a-c)**(n-1)
print(f"    计  算  值:
{np.linalg.det(D):.0f}")
print(f" 理论值:  {ex-
act}") # 输出 16+1=17
```

核心思维

- **观察先行**：识别特殊结构（零元素分布、对称性、重复行/列等）
- **策略选择**：根据结构特征匹配最佳解法
- **验证保障**：通过特殊值检验和几何解释验证结果

方法体系

- **基础方法**：对角线法（二阶）、三角化法
- **降阶策略**：展开法、Laplace 定理
- **结构优化**：拆项法、箭形行列式转化
- **高级技巧**：数学归纳法、范德蒙德转化

典型结构解法

- 箭形行列式：列变换创造三角阵
- Vandermonde 型：提取公因子后展开
- 行和相等：列变换提取公因子
- 递推结构：建立递推关系式

练习 1：递推结构行列式

问题描述

计算 n 阶行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & -(n-1) \end{vmatrix}$$

解法步骤

1. 行变换：$r_i \leftarrow r_i - r_1 \quad (i = 2, \dots, n)$
2. 化为上三角矩阵：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -2(n-1) \end{vmatrix}$$

3. 对角线乘积：$n!$

几何解释

- 行列式值：超立方体体积变化
- 对角线元素：缩放因子
- 结果 $n!$：维度累积效应

练习 2：对称型行列式

问题描述

计算 n 阶行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$$

解法 1：列变换法

1. 列变换：$c_1 \leftarrow c_1 + \sum_{k=2}^{n} c_k$
2. 提取公因子：$x + \sum a_i$
3. 化为对角矩阵：$\prod_{i=1}^{n}(x - a_i)$

解法 2：行变换法

- 行变换：$r_i \leftarrow r_i - r_1$ $(i = 2, \ldots, n)$
- 按首行展开建立递推关系
- 结果：$(x + \sum a_i) \prod_{i=1}^{n}(x - a_i)$

Python 验证

```
import numpy as np
n=4; x=2; a=[1,3,5]
D=np.diag([x]*n)+np.outer(a,np.ones(n))
print(np.linalg.det(D)) # 验证公式
```

练习 3：行列式性质应用

证明题

证明 4 阶行列式：

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = x^3(x+4)$$

证法 1：行变换法

1. $r_i \leftarrow r_i - r_1 \quad (i = 2, 3, 4)$
2. 提取公因子 x：

$$x^3 \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

3. 按末行展开得 $x^3(x+4)$

证法 2：特征值法

- 矩阵 $A = (1+x)I + J$（J 为全 1 矩阵）
- 特征值：$x+4$（1 重）和 x（3 重）
- 行列式 $= \prod \lambda_i = x^3(x+4)$

练习 4：范德蒙德行列式变形

问题描述

计算 n 阶行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2^2 & 2^2 & \cdots & 2^2 \\ 3^2 & 3^2 & \cdots & 3^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^2 & n^2 & \cdots & n^2 \end{vmatrix}$$

解法 1：加边法

1. 添加首列 $(1, 2, \ldots, n)^T$ 和首行 $(1, 0, \ldots, 0)$
2. 构造标准范德蒙德矩阵：

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \end{pmatrix}$$

3. 结果：$n!(n-1)!\cdots 2!$

解法 2：行列式性质

- 每行提取公因子 k^2 $(k = 1, \ldots, n)$
- 剩余矩阵行列式为 $\prod_{1\le i<j\le n}(j-i)$
- 合并结果：$\prod_{k=1}^{n} k!$

思考题 1：多项式根的行列式性质

问题描述

设 a, b, c 为方程 $x^3 + px + q = 0$ 的三个根，证明：

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = 0$$

多项式根与系数

Vieta 定理：

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ ab + bc + ca = p \\ abc = -q \end{cases}$$

关键：$a + b + c = 0$

行列式分解

行列式展开后因式分解：

$$D = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

因 $a + b + c = 0$，故 $D = 0$

思考题 2：循环行列式计算

问题描述

计算 n 阶循环行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$$

解法步骤

1. **列变换**：各列加到第 1 列

$$c_1 \leftarrow \sum_{k=1}^{n} c_k$$

2. **提取公因子**：

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \widetilde{D}_n$$

关键技巧

- 利用循环结构的对称性
- 行变换创造三角块

解法步骤（续）

3. **行变换**: $r_i \leftarrow r_i - r_1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_i - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & -1 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

定理 (三角化过程)

经过行列变换后:

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 0 & 1 & \cdots & 1-n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1-n & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

分步计算.

1. 子行列式特征：

$$\det(M) = (-1)^{n-1}(n-1)^{n-2} \cdot n$$

2. 符号修正：

$$\text{总符号} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$$

3. 最终结果：

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2} \cdot (-1)^{n-1}(n-1)^{n-1}$$

□

验证实例

当 $n = 3$ 时：

$$D_3 = 6 \cdot (-1)^2 \cdot 4 = 24 \quad \text{（手工验证正确）}$$

Q&A

谢谢