线性代数

第一章　行列式

姓名：请在此处填写你的姓名　　班级：请在此处填写你的班级
学号：请在此处填写你的学号　　日期：2025 年 10 月 13 日

1　核心理论复习

本部分旨在回顾行列式的核心定义与重要性质，为完成课后习题打下坚实基础。

定义 1.1 (行列式 (Determinant))

个 n 阶方阵 A 的行列式是由 $n!$ 项组成的代数和，每一项都是取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积，其符号由该项元素的列标排列的逆序数决定。

$$\det(A) = \sum_{p \in S_n} (-1)^{\tau(p)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

定理 1.1 (行列式的性质)

列式具有以下几条核心性质：

1. 行列式与它的转置行列式相等，即 $\det(A) = \det(A^T)$。
2. 互换行列式的两行（或两列），行列式变号。
3. 若行列式有两行（或两列）相同或成比例，则其值为零。
4. 某一行（或一列）的公因子 k 可以提到行列式符号外。
5. 把某一行（或一列）的倍数加到另一行（或一列），行列式的值不变。
6. 三角矩阵的行列式等于其主对角线上元素的乘积。
7. 方阵乘积的行列式等于行列式的乘积，即 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$。

2　综合练习

重要说明

以下所有题目均为模板占位符，旨在演示不同题型的排版格式。请根据老师实际布置的作业题目在此处作答。

2.1　选择题

练习 2.1.1 设 A 为 3 阶方阵，且 $\det(A) = 2$。则 $\det(2A^{-1})$ 的值是多少?

A. 2

B. 4

C. 8

D. 1/4

答案： ( )

练习 2.1.2 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性无关的充要条件是:

A. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 中任意两个向量都线性无关。

B. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 中不含零向量。

C. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 中任意一个向量都不能由其余 $s-1$ 个向量线性表示。

D. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 中存在一个向量不能由其余 $s-1$ 个向量线性表示。

答案： ( )

2.2　填空题

练习 2.2.1 已知 3 阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则矩阵 A 的秩 $r(A) =$ __________.

练习 2.2.2 若 n 元齐次线性方程组 $A_{m\times n}x = 0$ 满足 $r(A) = n$，则该方程组的解为 _______________.

练习 2.2.3 设 A 为 n 阶方阵，若 $\det(A) = d \neq 0$，则其伴随矩阵 A^* 的行列式 $\det(A^*) =$ __________.

2.3 计算与证明题

作答范例 计算下列三阶行列式的值:

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

提示 ❶

观察行列式的结构，尝试将所有列加到某一列上，看看能否创造出公因子。

解: 本题的核心思路是利用行列式的性质进行化简。观察到每一行的元素之和均为 $a+b+c$。因此，我们将第 2 列和第 3 列加到第 1 列上（记为 $c_1+c_2+c_3$）。

$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \\
&\xrightarrow{c_1+c_2+c_3} \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ c+a+b & a & b \\ b+c+a & c & a \end{vmatrix} && \text{（性质 5：列的倍加，值不变）} \\
&= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} && \text{（性质 4：提取第 1 列的公因子）} \\
&\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{vmatrix} && \text{（性质 5：行的倍加，值不变）} \\
&= (a+b+c)[(a-b)(a-c)-(b-c)(c-b)] && \text{（按第 1 列展开）} \\
&= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)
\end{aligned}$$

最终结果亦可写作 $a^3+b^3+c^3-3abc$。

练习 2.3.1 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，求解矩阵方程 $AX = B$。

提示 ❶

当系数矩阵 A 可逆时，方程 $AX = B$ 的解为 $X = A^{-1}B$。

解:

练习 2.3.2 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$。

1. 求矩阵 A 的所有特征值。
2. 求每个特征值对应的全部特征向量。

提示 ❶

特征向量是特征方程 $(\lambda I - A)x = 0$ 的非零解。你需要对每个求出的特征值 λ_i，求解对应的齐次线性方程组。

解：