线性代数

第 X 章　XXX

姓名：请在此处填写你的姓名　　班级：请在此处填写你的班级

学号：请在此处填写你的学号　　日期：2025 年 10 月 13 日

重要说明

以下所有题目均为模板占位符，请自己输入实际的题目，并作答

1　选择题

练习 1.1 设 A 为 3 阶方阵，且 $\det(A)=2$。则 $\det(2A^{-1})$ 的值是多少？

A. 2

B. 4

C. 8

D. 1/4

答案： ( )

练习 1.2 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性无关的充要条件是：

A. $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 中任意两个向量都线性无关。

B. $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 中不含零向量。

C. $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 中任意一个向量都不能由其余 $s-1$ 个向量线性表示。

D. $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 中存在一个向量不能由其余 $s-1$ 个向量线性表示。

答案： ( )

2 填空题

练习 2.1 已知 3 阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则矩阵 A 的秩 $r(A) =$ __________.

练习 2.2 若 n 元齐次线性方程组 $A_{m\times n}x = 0$ 满足 $r(A) = n$，则该方程组的解为 _______________.

练习 2.3 设 A 为 n 阶方阵，若 $\det(A) = d \neq 0$，则其伴随矩阵 A^* 的行列式 $\det(A^*) =$ __________.

3 计算与证明题

作答范例 计算下列三阶行列式的值：

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

提示 ❶

观察行列式的结构，尝试将所有列加到某一列上，看看能否创造出公因子。

解： 本题的核心思路是利用行列式的性质进行化简。观察到每一行的元素之和均为 $a +$

$b+c$。因此，我们将第 2 列和第 3 列加到第 1 列上（记为 $c_1+c_2+c_3$）。

$$
\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \\
&\xrightarrow{c_1+c_2+c_3} \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ c+a+b & a & b \\ b+c+a & c & a \end{vmatrix} && \text{（性质 5：列的倍加，值不变）} \\
&= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} && \text{（性质 4：提取第 1 列的公因子）} \\
&\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{vmatrix} && \text{（性质 5：行的倍加，值不变）} \\
&= (a+b+c)[(a-b)(a-c)-(b-c)(c-b)] && \text{（按第 1 列展开）} \\
&= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)
\end{aligned}
$$

最终结果亦可写作 $a^3+b^3+c^3-3abc$。

练习 3.1 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，求解矩阵方程 $AX=B$。

提示 ❶

当系数矩阵 A 可逆时，方程 $AX=B$ 的解为 $X=A^{-1}B$。

解：

练习 3.2 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$。

1. 求矩阵 A 的所有特征值。
2. 求每个特征值对应的全部特征向量。

提示 ❶

特征向量是特征方程 $(\lambda I-A)x=0$ 的非零解。你需要对每个求出的特征值 λ_i，求解对应的齐次线性方程组。

解：