

АКСЁНОВ Евгений Петрович
ЧАЗОВ Вадим Викторович

МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ИСЗ.

Главная проблема.

Основные алгоритмы.

7 лекций. 14 семинаров.



Воробьёвы Горы – Трёхгорка – Звенигород
2007

Е.П.Аксёнов, В.В.Чазов.

МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ИСЗ.

Главная проблема. Основные алгоритмы.

7 лекций. 14 семинаров. М., 2007 — с.188, рис.11, табл.7, библи.236.

Предлагаемое издание является реконструкцией замечательной монографии профессора Е.П.Аксёнова “Теория движения искусственных спутников Земли”, вышедшей в издательстве “Наука” в 1977 году. Содержание монографии полностью соответствовало уровню научных достижений того времени. В издании 1977 года основное внимание уделено выводу и анализу рабочих формул, необходимых для практических приложений. Промежуточная орбита на основе обобщённой задачи двух неподвижных центров построена с точностью до второго порядка относительно малого параметра, сжатия Земли, выражения для прочих неравенств получены в линейном приближении с такой же точностью.

В данной книге изложение пересмотрено. Вместо вывода рабочих формул представлено описание вычислительных алгоритмов. Все алгоритмы запрограммированы и содержатся на компакт-диске.

Тексты лекций и семинарских занятий вместе с электронным приложением, предлагаемые вниманию читателей, позволяют пройти весь путь от первых вычислительных программ фильтрации наблюдений и вычисления целеуказаний до создания программного приложения, соответствующего современному этапу развития науки.

Издание может оказаться полезным студентам и аспирантам астрономических и геодезических отделений и кафедр университетов, а также профессиональным астрономам и инженерам-вычислителям, решающим навигационные задачи и задачи планирования и обработки космических экспериментов.

© СССР, Первый спутник, 1957 г.

© Е.П.Аксёнов, текст, 1977 г.

© Е.П.Аксёнов, лекции, 1987 г.

© Л.П.Насонова, фото, 1987 г.

© В.В.Чазов, текст, алгоритмы, 2007 г.

Из предисловия Е.П.Аксёнова к монографии 1977 года	5
Предисловие	7
Лекция 1. Гравитационный потенциал	9
Семинар 1. Эллиптическая орбита	18
Семинар 2. Общие алгоритмы	24
Замечания	30
Лекция 2. Промежуточный потенциал	31
Семинар 3. Канонические преобразования	40
Семинар 4. Стандартные соглашения	46
Замечания	52
Лекция 3. Первые интегралы	53
Семинар 5. Промежуточная орбита	62
Семинар 6. Исходные данные	68
Замечания	74
Лекция 4. Качественные исследования	75
Семинар 7. Возмущающая функция	84
Семинар 8. Численная модель	90
Замечания	96
Лекция 5. Обращение квадратур	97
Семинар 9. Аналитические операции	106
Семинар 10. Влияние приливов	112
Замечания	118
Лекция 6. Эллиптические интегралы	119
Семинар 11. Осреднённые уравнения	128
Семинар 12. Проба пера	134
Замечания	140
Лекция 7. Канонические уравнения	141
Семинар 13. Зов несбывшегося	150
Семинар 14. Последние штрихи	156
Замечания	162

Послесловие	163
Литература	164
Именной указатель	184
Предметный указатель	186

Список иллюстраций

1	Система координат	9
2	Сравнение методов	67
3	График многочлена $\Phi(\xi)$	77
4	График многочлена $F(\eta)$	78
5	Стационарный объект	139
6	Стандартное отклонение	152
7	Положение полюса	153
8	Продолжительность суток	153
9	Коэффициент ускорения	154
10	Коэффициент отражения	154
11	Координатные условия	159

Список таблиц

1	Несколько параметров	34
2	Несколько объектов	72
3	Несколько чисел	110
4	Число слагаемых	111
5	Несколько слагаемых	135
6	Обработка измерений	137
7	Поле скоростей	155

Из предисловия Е.П.Аксёнова к монографии 1977 года “Теория движения искусственных спутников Земли”

Изучение движения искусственных спутников Земли представляет интерес не только для специалистов по астродинамике, занимающихся прогнозированием движения ИСЗ и проектированием их орбит. Проблема эта ныне интересует широкий круг учёных, и прежде всего астрономов, геофизиков и геодезистов. Определение постоянных гравитационного поля Земли и параметров земной атмосферы, изучение лунно-солнечных приливов и движения полюса — вот неполный перечень задач, которые уже сейчас успешно решаются с помощью наблюдений ИСЗ. Можно думать, что в будущем появятся и другие не менее интересные и важные задачи, решение которых будет тесно связано с использованием наблюдений искусственных спутников.

Для исследования движения искусственных спутников Земли используются все методы небесной механики: численные, аналитические и качественные. Особое место среди них занимают аналитические методы, которые могут конкурировать по точности и быстродействию с методами численного интегрирования, а вместе с качественными позволяют нарисовать довольно полную картину движения спутника на больших интервалах времени. Очень важно, что они дают возможность просто и наглядно охарактеризовать влияние каждого фактора, действующего на движение спутника.

Важнейшими из возмущающих факторов являются несферичность Земли, сопротивление атмосферы, притяжение Луны и Солнца и световое давление. Однако наибольшие возмущения в движении близких спутников связаны с одним фактором, а именно со второй зональной гармоникой потенциала притяжения Земли. Она вызывает возмущения, которые в сотни и тысячи раз превосходят неравенства от других возмущающих сил. Поэтому, как и в теории Луны, здесь следует выделить **главную проблему**. Эта проблема заключается

в интегрировании дифференциальных уравнений движения, правые части которых составлены с учётом лишь первых двух гармоник геопотенциала. Решение главной проблемы составляет первый этап построения аналитической теории движения ИСЗ. Второй этап состоит в определении остальных, уже менее значительных возмущений.

Главная проблема в теории ИСЗ может быть решена двумя способами: во-первых, с помощью классических методов возмущений и, во-вторых, путём построения промежуточных орбит на базе некоторых аппроксимирующих выражений для геопотенциала, допускающих интегрирование дифференциальных уравнений движения в замкнутой форме. Поскольку результаты применения классических методов приведены во многих монографиях по небесной механике, в наших лекциях мы ограничимся изложением второго способа. Что касается промежуточных орбит, то в основу их построения будет положена обобщённая задача двух неподвижных центров, силовая функция которой включает в себя как вторую, так и третью зональную гармонику геопотенциала и позволяет проинтегрировать уравнения движения в квадратурах.

В книге использованы публикации как отечественных, так и зарубежных учёных. Значительное место занимают исследования самого автора. Однако многие интересные работы в ней не нашли своего отражения. Чтобы как-то восполнить этот пробел, автор в конце каждой лекции даёт общую характеристику полученных результатов и приводит ссылки на литературные источники.

В заключение автор благодарит своих друзей и коллег Е.А.Гребеникова и В.Г.Дёмина, добрые советы которых ускорили работу над книгой. Автор благодарен также своим ученикам и коллегам С.Н.Вашковьяк, Н.В.Емельянову, Л.П.Насоновой, Б.Н.Носкову, И.П.Прохоровой, Н.А.Сорокину, В.С.Уральской и В.М.Чепуровой за помощь при подготовке рукописи к печати.

Профессор МГУ АКСЁНОВ Евгений Петрович.

Предисловие

Теория движения искусственных спутников Земли как раздел науки, объединяющий достижения вычислительной математики, небесной механики, геофизики, астрометрии и геодезии, берёт начало 4 октября 1957 года, дня запуска в СССР Первого спутника.

Почти пятьдесят лет, прошедших с того момента, столь малый срок, что студенты начала 21-ого века имеют уникальную возможность получать знания и умения от учёных – наблюдателей и теоретиков, – стоявших у истоков космической эры.

Пользователям доступен огромный массив высокоточных измерений топоцентрических дальностей до искусственных спутников Земли. В мировых центрах обработки данных созданы и эксплуатируются оригинальные программные продукты. Некоторые задачи, решаемые на основе наблюдений ИСЗ, переведены с научного на технический уровень.

Уникальность ситуации заключается ещё и в том, что современная молодёжь, с детства владеющая компьютером в совершенной степени, способна воплотить несбывшиеся мечты учителей и надежды учителей своих учителей, не вступая при этом в конфликт поколений и не задевая самолюбия старших товарищей.

Предлагаемое издание является реконструкцией замечательной монографии профессора Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова Е.П.Аксёнова “Теория движения искусственных спутников Земли”, вышедшей в издательстве “Наука” в 1977 году. Содержание монографии полностью соответствовало уровню научных достижений того времени. В издании 1977 года основное внимание уделено выводу и анализу рабочих формул, необходимых для практических приложений. Промежуточная орбита на основе обобщённой задачи двух неподвижных центров построена с точностью до второго порядка относительно малого параметра, сжатия

Земли, выражения для прочих неравенств получены в линейном приближении с такой же точностью.

В настоящем издании изложение материала несколько пересмотрено. Вместо вывода рабочих формул представлено описание вычислительных алгоритмов, позволяющих решить **главную проблему** теории движения искусственных спутников Земли с точностью, ограниченной только возможностями компьютера.

Уделено внимание рекомендациям Международного астрономического союза об использовании числовых значений астрономических постоянных и о системах отсчёта пространства-времени [229] и рекомендациям Международной службы вращения Земли по составу ускорений, возмущающих движение спутника [211]. Учёт упомянутых рекомендаций необходим для того, чтобы сделать результаты обработки различных экспериментов сопоставимыми.

Для описания движения искусственных спутников приняты во внимание возмущения, обусловленные гравитационным полем Земли, притяжением Луны и Солнца, приливными деформациями упругой Земли и океаническими приливами. Учтены также влияние светового давления и эффект захода объектов в тень Земли. При создании алгоритмов использованы числовые значения коэффициентов модели гравитационного поля Земли с условным названием JGM3 [235]. Алгоритмы включают два свободных параметра, зависящих от формы и ориентации космических аппаратов – эмпирический коэффициент отражения и коэффициент эмпирического ускорения.

Все предлагаемые алгоритмы запрограммированы и содержатся на компакт-диске, являющимся приложением к данному курсу лекций.

В тексте семинарских занятий больше внимания уделено вычислительным аспектам и сформулированы упражнения, для выполнения которых достаточно воспользоваться исходными текстами процедур и исполняемыми модулями программ, содержащихся на компакт-диске.

Лекция 1. Гравитационный потенциал

Притяжение объёмного тела. — Полиномы Лежандра. — Присоединённые функции Лежандра. — Разложение потенциала в ряд по сферическим функциям.

Рассмотрим задачу о притяжении материальной точки P единичной массы некоторым телом M . Будем предполагать, что тело имеет произвольную форму, а плотность \varkappa распределения масс внутри него является кусочно-непрерывной функцией координат.

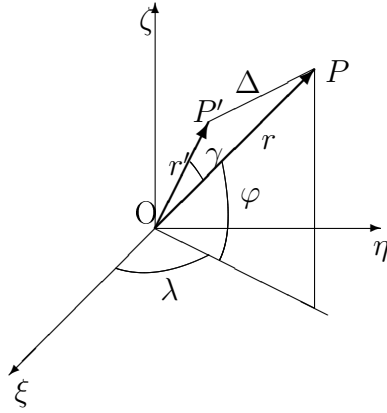


Рис. 1: Система координат

Возьмём прямоугольную, жёстко связанную с телом систему координат $O\xi\eta\zeta$ с началом в центре масс тела (рисунок 1). Тогда потенциал притяжения или силовая функция тела M в точке P с координатами ξ, η, ζ будет даваться формулой

$$U = f \int \int \int_T \frac{\varkappa d\tau}{\Delta}, \quad \Delta = \sqrt{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2}, \quad (1)$$

где

f — постоянная притяжения,

Δ — расстояние от точки P' с координатами ξ', η', ζ' , в которой

находится элемент объёма $d\tau$, а интеграл берётся по всему объёму, занятому притягивающим телом.

Если через r и r' обозначить радиусы-векторы точек P и P' , а через γ – угол между ними, то для Δ и γ будем иметь

$$\Delta = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}, \quad (2)$$

$$\cos \gamma = \frac{\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta'}{rr'}. \quad (3)$$

В конечном виде интеграл (1) берётся только в некоторых частных случаях, таких, например, как случай однородного шара или шара с концентрическим распределением плотности и случай однородного двухосного или трёхосного эллипсоида. Так, для концентрического шара потенциал даётся формулой

$$U = \frac{fm}{r}, \quad (4)$$

где m – масса шара.

Если же на форму тела и на распределение масс внутри него не накладывается никаких ограничений, кроме тех, которые были сделаны в начале этой лекции, интеграл (1) можно вычислить только при помощи ряда. Наиболее распространённым в настоящее время разложением для потенциала является разложение по сферическим функциям, позволяющее получить удобную для практических приложений аналитическую формулу. Составными элементами сферических функций являются полиномы Лежандра и присоединённые функции Лежандра.

Полином Лежандра $P_n(z)$ порядка n можно определить формулой

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (z^2 - 1)^n}{dz^n}, \quad (5)$$

носящей название *формулы Родрига*.

Для первых $P_n(z)$ имеем

$$\left. \begin{aligned} P_0(z) &= 1, \\ P_1(z) &= z, \\ P_2(z) &= \frac{1}{2}(-1 + 3z^2), \\ P_3(z) &= \frac{1}{2}(-3z + 5z^3), \\ P_4(z) &= \frac{1}{8}(3 - 30z^2 + 35z^4), \\ P_5(z) &= \frac{1}{8}(15z - 70z^3 + 63z^5), \\ P_6(z) &= \frac{1}{16}(-5 + 105z^2 - 315z^4 + 231z^6). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Из формулы Родрига (5) легко получается следующее выражение для $P_n(z)$:

$$P_n(z) = \sum_{r=0}^h (-1)^r \frac{(2n-2r)!}{2^n r! (n-r)! (n-2r)!} z^{n-2r},$$

где $h = n/2$ или $h = (n-1)/2$, смотря по тому, которое из этих чисел чётное.

Полиномы Лежандра высших порядков могут быть вычислены при помощи рекуррентного соотношения

$$(n+1)P_{n+1}(z) - (2n+1)zP_n(z) + nP_{n-1}(z) = 0. \quad (7)$$

Полиномы Лежандра и их первые производные связаны соотношениями

$$\frac{dP_n(z)}{dz} = nP_{n-1}(z) + z \frac{dP_{n-1}(z)}{dz}, \quad (8)$$

$$\frac{dP_n(z)}{dz} = (2n-1)P_{n-1}(z) + \frac{dP_{n-2}(z)}{dz}. \quad (9)$$

Из формулы (9) следует простая рекуррентная формула для вычисления производных высших порядков:

$$\frac{d^k P_n(z)}{dz^k} = (2n-1) \frac{d^{k-1} P_{n-1}(z)}{dz^{k-1}} + \frac{d^k P_{n-2}(z)}{dz^k}. \quad (10)$$

Отметим некоторые свойства полиномов Лежандра.

1. Полином Лежандра является чётной или нечётной функцией в зависимости от того, чётна или нечётна его степень, так что

$$P_n(-z) = (-1)^n P_n(z).$$

2. На границах интервала $[-1, +1]$ полином Лежандра принимает следующие значения:

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n. \quad (11)$$

3. Для любого z из промежутка $(-1, +1)$ и $n > 0$

$$|P_n(z)| < 1.$$

4. Функция $(1 - 2\alpha z + \alpha^2)^{-1/2}$ является производящей функцией для $P_n(z)$, так что при $0 < \alpha < 1$ и $|z| < 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha z + \alpha^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(z). \quad (12)$$

Присоединённые функции Лежандра $P_n^{(k)}(z)$ порядка n и индекса k можно определить формулой

$$P_n^{(k)}(z) = (1 - z^2)^{k/2} \frac{d^k P_n(z)}{dz^k}, \quad (13)$$

где $P_n(z)$ – полином Лежандра.

При помощи равенств (6) из формулы (13) легко находим явные выражения для нескольких первых $P_n^{(k)}(z)$:

$$\begin{aligned}
 P_2^{(1)}(z) &= 3z(1-z^2)^{1/2}, \\
 P_2^{(2)}(z) &= 3(1-z^2), \\
 P_3^{(1)}(z) &= \frac{3}{2}(-1+5z^2)(1-z^2)^{1/2}, \\
 P_3^{(2)}(z) &= 15z(1-z^2), \\
 P_3^{(3)}(z) &= 15(1-z^2)^{3/2}, \\
 P_4^{(1)}(z) &= \frac{5}{2}(-3z+7z^3)(1-z^2)^{1/2}, \\
 P_4^{(2)}(z) &= \frac{15}{2}(-1+7z^2)(1-z^2), \\
 P_4^{(3)}(z) &= 105z(1-z^2)^{3/2}, \\
 P_4^{(4)}(z) &= 105(1-z^2)^2.
 \end{aligned}$$

Функции $P_n^{(k)}(\cos \theta) \cos k\psi$ и $P_n^{(k)}(\cos \theta) \sin k\psi$ называются *элементарными сферическими функциями*.

Сферическая функция $Y_n(\theta, \psi)$ порядка n определяется формулой

$$Y_n(\theta, \psi) = \sum_{k=0}^n P_n^{(k)}(\cos \theta) [A_{nk} \cos k\psi + B_{nk} \sin k\psi],$$

где A_{nk} и B_{nk} – произвольные постоянные.

Приведём теперь формулу, которая играет важную роль в теории сферических функций и их приложениях. Она имеет вид

$$\begin{aligned}
 P_n(\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \omega) &= P_n(\cos \theta) P_n(\cos \theta') \\
 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(\cos \theta) P_n^{(k)}(\cos \theta') \cos k\omega & \quad (14)
 \end{aligned}$$

и носит название *теоремы сложения для полиномов Лежандра*.

Вернёмся к формуле для потенциала притяжения (1). Предполагая, что точка P лежит вне притягивающего тела, разложим Δ^{-1} в ряд по степеням отношения r'/r . Прежде всего, мы имеем

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \left(\frac{r'}{r}\right) \cos \gamma + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}},$$

а это даёт нам возможность применить формулу (12). При помощи этой формулы находим следующее разложение:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos \gamma), \quad (15)$$

подставляя которое в (1), получаем

$$U = f \int \int \int_T \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos \gamma) \kappa d\tau. \quad (16)$$

Перейдём теперь к полярным координатам

$$\begin{aligned} \xi &= r \cos \varphi \cos \lambda, & \xi' &= r' \cos \varphi' \cos \lambda', \\ \eta &= r \cos \varphi \sin \lambda, & \eta' &= r' \cos \varphi' \sin \lambda', \\ \zeta &= r \sin \varphi, & \zeta' &= r' \sin \varphi'. \end{aligned}$$

Тогда для $\cos \gamma$ найдём

$$\cos \gamma = \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda - \lambda').$$

Для того, чтобы выразить правую часть (16) через полярные координаты, воспользуемся теоремой сложения для полиномов Лежандра (14), которая в данном случае выглядит так:

$$\begin{aligned} P_n(\cos \gamma) &= P_n(\sin \varphi) P_n(\sin \varphi') \\ &+ 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(\sin \varphi) P_n^{(k)}(\sin \varphi') \cos k(\lambda - \lambda'). \end{aligned} \quad (17)$$

Поскольку

$$\cos k(\lambda - \lambda') = \cos k\lambda \cos k\lambda' + \sin k\lambda \sin k\lambda',$$

то равенство (17) можно представить в виде

$$\begin{aligned} P_n(\cos \gamma) &= P_n(\sin \varphi) P_n(\sin \varphi') \\ &+ 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(\sin \varphi) \cos k\lambda [P_n^{(k)}(\sin \varphi') \cos k\lambda'] \\ &+ 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(\sin \varphi) \sin k\lambda [P_n^{(k)}(\sin \varphi') \sin k\lambda']. \end{aligned}$$

Если подставить это равенство в формулу (16) и ввести следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} mr_0^n J_n &= - \int \int \int_T r'^n P_n(\sin \varphi') \varkappa d\tau, \\ mr_0^n C_{nk} &= \int \int \int_T \frac{2(n-k)!}{(n+k)!} r'^n P_n^{(k)}(\sin \varphi') \cos k\lambda' \varkappa d\tau, \\ mr_0^n S_{nk} &= \int \int \int_T \frac{2(n-k)!}{(n+k)!} r'^n P_n^{(k)}(\sin \varphi') \sin k\lambda' \varkappa d\tau, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

где m – масса тела, r_0 – некоторая линейная величина, то получим

$$\begin{aligned} U &= -\frac{fm}{r} \sum_{n=0}^{\infty} J_n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin \varphi) \\ &+ \frac{fm}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n^{(k)}(\sin \varphi) [C_{nk} \cos k\lambda + S_{nk} \sin k\lambda]. \end{aligned} \quad (19)$$

В случае Земли в качестве r_0 удобно принять средний экваториальный радиус. Очевидно, что величины J_n , C_{nk} и S_{nk} являются безразмерными.

Коэффициенты J_n , C_{nk} и S_{nk} зависят от формы тела и распределения масс внутри него. Рассмотрим первые из них. Пусть в (18) $n = 0$. Тогда, так как

$$P_0(\sin \varphi') = 1 \quad \text{и} \quad \int \int \int_T \varkappa d\tau = m, \quad \text{то} \quad J_0 = -1. \quad (20)$$

Полагая в формулах (18) $n = 1$ и $k = 1$ и учитывая, что

$$P_1(\sin \varphi') = \sin \varphi', \quad P_1^{(1)}(\sin \varphi') = \cos \varphi',$$

находим

$$\begin{aligned} mr_0 J_1 &= - \int \int \int_T \kappa r' \sin \varphi' d\tau = - \int \int \int_T \zeta' dm = -m\zeta_0, \\ mr_0 C_{11} &= \int \int \int_T \kappa r' \cos \varphi' \cos \lambda' d\tau = \int \int \int_T \xi' dm = m\xi_0, \\ mr_0 S_{11} &= \int \int \int_T \kappa r' \cos \varphi' \sin \lambda' d\tau = \int \int \int_T \eta' dm = m\eta_0, \end{aligned}$$

где ξ_0 , η_0 и ζ_0 – координаты центра масс тела. Поскольку начало системы координат $O\xi\eta\zeta$ находится в центре инерции тела, то отсюда заключаем, что

$$J_1 = 0, \quad C_{11} = 0, \quad S_{11} = 0. \quad (21)$$

Если в формулах (18) положить $n = 2$ и $k = 1$, $k = 2$, то можно легко получить следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} J_2 &= \frac{2C - (A + B)}{2mr_0^2}, \\ C_{21} &= \frac{E}{mr_0^2}, & S_{21} &= \frac{D}{mr_0^2}, \\ C_{22} &= \frac{B - A}{4mr_0^2}, & S_{22} &= \frac{F}{2mr_0^2}, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

где A , B , C – главные центральные моменты инерции; D , E , F – произведения инерции, то есть

$$\begin{aligned} A &= \int \int \int_T (\eta'^2 + \zeta'^2) \kappa d\tau, & B &= \int \int \int_T (\xi'^2 + \zeta'^2) \kappa d\tau, \\ C &= \int \int \int_T (\xi'^2 + \eta'^2) \kappa d\tau, & D &= \int \int \int_T \eta' \zeta' \kappa d\tau, \\ E &= \int \int \int_T \zeta' \xi' \kappa d\tau, & F &= \int \int \int_T \xi' \eta' \kappa d\tau. \end{aligned}$$

На основании (20) и (21) формула (19) принимает следующий окончательный вид:

$$U = \frac{fm}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{r_0}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{r_0}{r} \right)^n P_n^{(k)}(\sin \varphi) [C_{nk} \cos k\lambda + S_{nk} \sin k\lambda] \right\}. \quad (23)$$

Сделаем теперь несколько замечаний.

1. Полученное разложение для потенциала U сходится абсолютно и равномерно при

$$r > \bar{r}, \quad (24)$$

где \bar{r} – расстояние наиболее удалённой точки поверхности тела от его центра масс. Действительно, поскольку $|P_n(\sin \varphi)| \leq 1$, то ряд (15), а следовательно, и (16) абсолютно и равномерно сходится, если $r > r'$, где r' – радиус-вектор точки, лежащей внутри или на поверхности шара. Но $\max r' = \bar{r}$. Отсюда и получаем условие (24).

2. Предположим, что одна из осей координат, скажем, ось $O\zeta$, совпадает с главной центральной осью инерции. Тогда произведения инерции D и E будут равны нулю, а поэтому $C_{21} = 0$ и $S_{21} = 0$. Если все три координатные оси совпадают с главными центральными осями инерции, то и коэффициент $S_{22} = 0$.
3. При выводе формулы (23) мы предполагали, что плотность \varkappa является функцией лишь координат. Очевидно, эта формула будет иметь место, если плотность \varkappa зависит также от времени. В случае абсолютно твёрдого тела, как показывают равенства (18), коэффициенты J_n , C_{nk} и S_{nk} будут постоянными. Если же плотность \varkappa и форма тела зависят от времени, то J_n , C_{nk} и S_{nk} будут функциями времени.

Семинар 1. Эллиптическая орбита

Параметры движения.

Воспользуйтесь исходными текстами процедур или составьте самостоятельно подпрограммы взаимных переходов между элементами кеплеровской эллиптической орбиты

$$\begin{aligned}
 a & - \text{большая полуось,} \\
 e & - \text{эксцентриситет,} \\
 i & - \text{угол наклона,} \\
 \Omega & - \text{долгота восходящего узла,} \\
 \omega & - \text{аргумент перигея,} \\
 M = M_0(t_0) & - \text{средняя аномалия в момент времени } t_0
 \end{aligned} \tag{25}$$

и векторами положения и скорости пробной частицы

$$x(t_0), y(t_0), z(t_0), \dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0),$$

заданными в начальный момент времени t_0 .

При переходе от кеплеровских элементов к декартовым координатам и скоростям используют ещё три угловые переменные: истинную аномалию v , эксцентрическую аномалию E и аргумент широты $u = v + \omega$.

$$\begin{aligned}
 M &= E - e \sin E \quad - \text{уравнение Кеплера,} \\
 \sin v &= \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{1-e \cos E}, \quad \cos v = \frac{\cos E - e}{1-e \cos E}, \\
 \sin u &= \sin v \cos \omega + \cos v \sin \omega, \quad \cos u = \cos v \cos \omega - \sin v \sin \omega, \\
 r &= a(1 - e \cos E),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x &= r (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\
 y &= r (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\
 z &= r \sin u \sin i,
 \end{aligned} \tag{26}$$

$$p = a(1 - e^2) \quad - \text{параметр орбиты,}$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}, \quad \frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos v}{p},$$

$$V_r = \sqrt{\frac{fm}{p}} e \sin v \quad - \text{радиальная скорость,}$$

$$V_n = \sqrt{\frac{fm}{p}} (1 + e \cos v) \quad - \text{тангенциальная скорость,}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{x}{r} V_r + (-\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i) V_n, \\ \dot{y} &= \frac{y}{r} V_r + (-\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i) V_n, \\ \dot{z} &= \frac{z}{r} V_r + \cos u \sin i V_n.\end{aligned}$$

Элементы орбиты.

От декартовых координат и скоростей к кеплеровским элементам.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2,$$

$$h = \frac{V^2}{2} - \frac{fm}{r} \quad - \quad \text{интеграл энергии},$$

$$c_1 = y\dot{z} - z\dot{y} \quad - \quad \text{первый интеграл площадей},$$

$$c_2 = z\dot{x} - x\dot{z} \quad - \quad \text{второй интеграл площадей},$$

$$c_3 = x\dot{y} - y\dot{x} \quad - \quad \text{третий интеграл площадей},$$

$$l_1 = -\frac{fmx}{r} + \dot{y}c_3 - \dot{z}c_2 \quad - \quad \text{первый интеграл Лапласа},$$

$$l_2 = -\frac{fmy}{r} + \dot{z}c_1 - \dot{x}c_3 \quad - \quad \text{второй интеграл Лапласа},$$

$$l_3 = -\frac{fmz}{r} + \dot{x}c_2 - \dot{y}c_1 \quad - \quad \text{третий интеграл Лапласа},$$

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2},$$

$$l = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2},$$

$$a = -\frac{fm}{2h},$$

$$e = \frac{l}{fm},$$

$$p = \frac{c^2}{fm},$$

$$\begin{aligned}\cos i &= \frac{c_3}{c}, \quad \sin i = \sqrt{1 - \cos^2 i}, \\ \sin \Omega &= \frac{c_1}{c \sin i}, \quad \cos \Omega = -\frac{c_2}{c \sin i}, \\ \sin \omega &= \frac{l_3}{l \sin i}, \quad \cos \omega = \frac{l_1}{l} \cos \Omega + \frac{l_2}{l} \sin \Omega, \\ \sin u &= \frac{z}{r \sin i}, \quad \cos u = \frac{x}{r} \cos \Omega + \frac{y}{r} \sin \Omega,\end{aligned}$$

$$\sin v = \sin u \cos \omega - \cos u \sin \omega, \quad \cos v = \cos u \cos \omega + \sin u \sin \omega,$$

$$\sin E = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin v}{1 + e \cos v}, \quad \cos E = \frac{\cos v + e}{1 + e \cos v}.$$

Для вычисления истинной аномалии v надо использовать функцию \arctg от двух аргументов $\sin v, \cos v$ со значениями в области от 0 до 2π .

$$E = v + \arctg \left(\frac{\sin E \cos v - \cos E \sin v}{\cos E \cos v + \sin E \sin v} \right),$$

$$M = E - e \sin E.$$

При вычислениях можно использовать значение геоцентрической гравитационной постоянной $fm = 398600.436 \text{ км}^3/\text{с}^2$. Единица измерения времени – секунда, большая полуось и координаты будут измеряться в километрах, скорости – в километрах в секунду. Среднее движение n в радианах за секунду определяется формулой $a^3 n^2 = fm$.

Проверьте, нет ли потери точности в результате двух преобразований: от координат и скоростей к элементам орбиты и обратно.

Проведите расчёты для различных значений эксцентриситета эллиптической орбиты e .

Уравнение Кеплера.

Численное значение эксцентрической аномалии E при заданных численных значениях средней аномалии M и эксцентриситета орбиты e может быть найдено на основе уравнения Кеплера

$$M = E - e \sin E.$$

Для различных значений параметра e сравните эффективность простого метода итераций

$$E_0 = M,$$

...

$$E_{n+1} = M + e \sin E_n,$$

и метода Ньютона

$$\begin{aligned} E_0 &= M, \\ \dots \\ E_{n+1} &= E_n - \frac{E_n - e \sin E_n - M}{1 - e \cos E_n}. \end{aligned}$$

Методическая погрешность.

Для произвольного момента времени t , измеряемого в секундах, с помощью элементов эллиптической орбиты и значения средней аномалии

$$M = M_0(t_0) + n(t - t_0)$$

определите вектор положения и скорости

$$x(t), \quad y(t), \quad z(t), \quad \dot{x}(t), \quad \dot{y}(t), \quad \dot{z}(t).$$

Вычислите теперь новые значения элементов кеплеровской орбиты, соответствующие координатам и скоростям в момент времени t , вернитесь с новыми значениями элементов в начальный момент t_0 и определите ещё один набор из вектора положения и вектора скорости. Сравните компоненты этих векторов с их начальными значениями. Убедитесь, что отличия численных значений компонент возрастают с увеличением интервала времени $t - t_0$.

Канонические элементы.

Канонические элементы Делоне

$$L, \quad G, \quad H, \quad l, \quad g, \quad h$$

и кеплеровские параметры

$$a, \quad e, \quad i, \quad \Omega, \quad \omega, \quad M$$

связаны соотношениями:

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{fma}, & l &= M, \\ G &= L\sqrt{1-e^2}, & g &= \omega + \frac{\pi}{2}, \\ H &= G \cos i, & h &= \Omega - \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \tag{27}$$

Частные производные от позиционных параметров

$$a, \quad p = a(1 - e^2), \quad e, \quad \cos i, \quad \sin i$$

по каноническим элементам L , G , H равны:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial L} &= \frac{2a}{L}, & \frac{\partial a}{\partial G} &= 0, & \frac{\partial a}{\partial H} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial L} &= 0, & \frac{\partial p}{\partial G} &= \frac{2p}{G}, & \frac{\partial p}{\partial H} &= 0, \\ \frac{\partial e}{\partial L} &= \frac{1}{e} \frac{G^2}{L^3}, & \frac{\partial e}{\partial G} &= -\frac{1}{e} \frac{G}{L^2}, & \frac{\partial e}{\partial H} &= 0, \\ \frac{\partial \cos i}{\partial L} &= 0, & \frac{\partial \cos i}{\partial G} &= -\frac{H}{G^2}, & \frac{\partial \cos i}{\partial H} &= \frac{1}{G}, \\ \frac{\partial \sin i}{\partial L} &= 0, & \frac{\partial \sin i}{\partial G} &= \frac{1}{\sin i} \frac{H^2}{G^3}, & \frac{\partial \sin i}{\partial H} &= -\frac{1}{\sin i} \frac{H}{G^2}. \end{aligned}$$

Частные производные от истинной и эксцентрической аномалий равны

$$\frac{\partial v}{\partial L} = \frac{\partial v}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial L}, \quad \frac{\partial v}{\partial G} = \frac{\partial v}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial G}, \quad \frac{\partial E}{\partial L} = \frac{\partial E}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial L}, \quad \frac{\partial E}{\partial G} = \frac{\partial E}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial G}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial e} &= \frac{\sin v (2 + e \cos v)}{1 - e^2}, & \frac{\partial E}{\partial e} &= \frac{\sin v}{\sqrt{1 - e^2}}, \\ \frac{\partial v}{\partial l} &= \frac{(1 + e \cos v)^2}{(\sqrt{1 - e^2})^3}, & \frac{\partial E}{\partial l} &= \frac{1 + e \cos v}{1 - e^2}, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial e} &= \frac{L^2}{G^2} (2 \sin v + \frac{e}{2} \sin 2v), & \frac{\partial E}{\partial e} &= \frac{L}{G} \sin v, \\ \frac{\partial v}{\partial l} &= \frac{L^3}{G^3} (1 + e \cos v)^2, & \frac{\partial E}{\partial l} &= \frac{L^2}{G^2} (1 + e \cos v). \end{aligned}$$

Алгоритм дифференцирования.

Пусть $\tilde{u} = u + \pi/2$. Определите структуру вида

$$A \cdot L^{i_1} G^{i_2} H^{i_3} \cdot p^{j_1} e^{j_2} \sin^{j_3} i \cdot \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} (k_1 \tilde{u} + k_2 v + k_3 E), \quad (28)$$

где A – численный коэффициент, а показатели степени i_1 , i_2 , i_3 , j_1 , j_2 , j_3 и коэффициенты k_1 , k_2 , k_3 принимают положительные и отрицательные целые значения и нуль.

Каждую из частных производных от p , e , $\sin i$ по L , G , H представьте в вычислительной программе как составную переменную, соответствующую типу

новой структуры. Составьте производные от v по e и по l , состоящие, соответственно, из двух и из четырёх переменных данного типа, и производные от E по этим же параметрам, содержащие, соответственно, одну и две переменные. Составьте теперь подпрограмму умножения переменных, обладающих данной структурой, и определите производные от v по L и G . Каждая производная содержит два слагаемых того же типа:

$$\frac{\partial v}{\partial L} = +\frac{2}{eL} \sin v + \frac{1}{2L} \sin 2v, \quad \frac{\partial v}{\partial G} = -\frac{2}{eG} \sin v - \frac{1}{2G} \sin 2v.$$

Научитесь дифференцировать составные переменные по каноническим элементам Делоне. Убедитесь, что в этой операции структура слагаемых не меняется. Пусть

$$X = \frac{1}{G^3} \cdot e \cdot \sin^2 i \cdot \sin(2\tilde{u} + v).$$

Возьмите частные производные от X с помощью составленной вами подпрограммы и проверьте результат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial L} &= +\frac{1}{L^3 G} \frac{1}{e} \sin^2 i \sin(2\tilde{u} + v) \\ &\quad -\frac{3}{LG^3} \sin^2 i \sin 2\tilde{u} + \frac{3}{LG^3} \sin^2 i \sin(2\tilde{u} + 2v) \\ &\quad -\frac{3}{4} \frac{1}{LG^3} e \sin^2 i \sin(2\tilde{u} - v) + \frac{3}{4} \frac{1}{LG^3} e \sin^2 i \sin(2\tilde{u} + 3v), \\ \frac{\partial X}{\partial G} &= -\frac{1}{L^2 G^2} \frac{1}{e} \sin^2 i \sin(2\tilde{u} + v) \\ &\quad -\frac{3}{G^4} e \sin^2 i \sin(2\tilde{u} + v) + \frac{2H^2}{G^6} e \sin(2\tilde{u} + v) \\ &\quad +\frac{3}{G^4} \sin^2 i \sin 2\tilde{u} - \frac{3}{G^4} \sin^2 i \sin(2\tilde{u} + 2v) \\ &\quad +\frac{3}{4} \frac{1}{G^4} e \sin^2 i \sin(2\tilde{u} - v) - \frac{3}{4} \frac{1}{G^4} e \sin^2 i \sin(2\tilde{u} + 3v), \\ \frac{\partial X}{\partial H} &= -\frac{2H}{G^5} e \sin(2\tilde{u} + v). \end{aligned}$$

Обратите внимание на присутствие элемента e в знаменателе. Подумайте, не приведёт ли это к потере вычислительной точности при малых числовых значениях эксцентриситета?

Семинар 2. Общие алгоритмы

Ассамблея рекомендует.

В августе 2000 года в городе Манчестер состоялась 24-ая Генеральная ассамблея Международного астрономического союза (МАС, International Astronomical Union, IAU). На ассамблее были приняты постановления (резолюции В1.1 – В1.9) о системах координат и времени в Солнечной системе [229]. Подготовкой материалов занимались комиссии первого подразделения МАС. Подразделение имеет название “Фундаментальная астрономия”, названия пяти комиссий, после небольших изменений, также утверждены на большой встрече астрономов: 4 — “Эфемериды”, 7 — “Небесная механика и динамическая астрономия”, 8 — “Астрометрия”, 19 — “Вращение Земли”, 31 — “Время”.

Как отмечают авторы постановлений и непосредственные участники событий, “резолюция В1 снабжает пользователей определениями, стандартными алгоритмами и параметрами для установления и преобразования на современном уровне точности опорных систем отсчёта пространства-времени в рамках общей теории относительности”. А что Вы думаете по этому поводу?

Системы отсчёта.

Международная земная стандартная опорная система отсчёта (International Terrestrial Reference System, ITRS) в выбранный начальный момент времени t_0 задана положениями $\vec{R}(t_0)$ и скоростями \vec{V} станций, участвующих в современных геодинимических исследованиях. Положение наблюдательной станции в момент времени t вычисляется по формуле

$$\vec{R}(t) = \vec{R}(t_0) + \vec{V} \cdot (t - t_0) + \sum_i \Delta \vec{R}_i(t), \quad (29)$$

где параметры смещения $\Delta \vec{R}_i(t)$ определяются на основе знаний по физике приливов. Поддержка и расширение Международной земной опорной системы координат (International Terrestrial Reference Frame, ITRF) — постоянная забота Международной службы вращения Земли (International Earth Rotation Service, IERS) и Международной службы лазерной локации (International Laser Range Service, ILRS).

Международная небесная стандартная опорная система отсчёта (International Celestial Reference System, ICRS) задана высокоточными экваториальными положениями 608 внегалактических радиоисточников. Точка начала координат помещена в барицентр Солнечной системы. В оптическом диапазоне эту систему представляют каталог Гиппаркос и его расширения, например, Опорный каталог Тихо [102].

Пространство-время.

В рекомендациях Международного астрономического союза (МАС) подчёркивается, что пространство-время не может быть представлено математически в рамках единой координатной системы отсчёта. Для того, чтобы обрабатывать современные астрономические наблюдения, необходимо использовать несколько релятивистских систем отсчёта [200]. Теория преобразования координат и координатного времени, рекомендуемая МАС, представлена в работе С.М.Копейкина [98].

Пространство-время определяется значениями 10 компонент метрического тензора $g_{\alpha\beta}$, каждый компонент является функцией координатного времени и трёх пространственных координат, индексы α и β принимают значения 0, 1, 2, 3. Квадрат интервала имеет вид

$$d\tau^2 = -g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (30)$$

по повторяющимся индексам выполняется суммирование,

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z,$$

c – скорость света, t – координатное время.

Окрестности Земли.

Небесная опорная система отсчёта с началом координат в центре масс Земли называется *геоцентрической* небесной системой отсчёта.

Параметр t в этой системе отсчёта получил название *геоцентрическое координатное время* (Geocentric Coordinate Time, TCG).

В резолюциях МАС вводится понятие *земное время* (Terrestrial Time, TT). По определению, шкала TT отличается от шкалы TCG постоянным дрейфом:

$$\frac{d(TT)}{d(TCG)} = 1 - L_G, \quad (31)$$

где $L_G = 6.969290134 \cdot 10^{-10}$ является определяющей постоянной. Сама же шкала земного времени совпадает со шкалой атомного времени TAI. Различие заключается в положении нуль-пункта:

$$TT = TAI + 32.184 \text{ секунды.}$$

Шкала атомного времени формируется на основе показаний совокупности эталонов частоты служб времени всего мира. Всемирное координированное время UTC только на целое число секунд отличается от атомного времени TAI.

Современные численные модели движения искусственных спутников Земли построены в геоцентрической небесной системе отсчёта [110]. Модели предназначены для обработки высокоточных светолокационных наблюдений ИСЗ [112] и определения параметров вращения Земли.

Солнечная система.

Система отсчёта с началом координат в центре масс Солнечной системы получила название *барицентрической* небесной системы отсчёта. Параметр t получил название *барицентрическое координатное время* (Barycentric Coordinate Time, TCB).

В численных моделях движения Солнца, Луны и больших планет Солнечной системы, разработанных в Лаборатории реактивного движения США [232], использована барицентрическая небесная опорная система отсчёта.

Модель движения Солнца, Луны и планет, созданная в Лаборатории реактивного движения, скрывает в себе ещё одну особенность: аргументом для численного интегрирования уравнений движения является специально подобранная переменная T_{eph} , шкала которой очень близка шкале земного времени ТТ. Эти две шкалы никогда не расходятся между собой более, чем на 2 миллисекунды. Во многих приложениях таким отличием можно пренебречь. В противоположность этому, разность между ТТ и TCB возрастает на 0.5 секунды в год [154].

Шкалы времени.

В точке пространства, находящейся в окрестности Земли и имеющей барицентрический вектор \vec{r} , разность двух шкал координатного времени TCB и TCG равна [229]

$$\begin{aligned} \text{TCB} - \text{TCG} = & \frac{1}{c^2} \left[\frac{1}{1 - L_B} \int_{T_{eph0}}^{T_{eph}} \left(\frac{1}{2} v_E^2 + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq E}}^N \frac{f m_k}{|\vec{r}_E - \vec{r}_k|} \right) dt \right] \\ & + \frac{1}{c^2} (\vec{v}_E (\vec{r} - \vec{r}_E)), \end{aligned} \quad (32)$$

где \vec{r}_E и \vec{v}_E – вектор положения и вектор скорости Земли относительно барицентра Солнечной системы, m_k , \vec{r}_k – массы и вектора положений Солнца и больших планет относительно барицентра Солнечной системы, T_{eph} – аргумент современных численных моделей движения планет, согласующая переменная $L_B = 1.550505 \cdot 10^{-8}$.

Прецессия-нутаия.

Промежуточное положение между двумя подходами, геоцентрическим и барицентрическим, занимают модель прецессии, рекомендованная МАС в 1976 году,

модель нутации, разработанная Джоном Мэтью Варом и рекомендованная МАС в 1980 году, и современная модель *прецессии-нутации* МАС2000А [202], необходимые для установления связи земной и небесной опорных систем отсчёта и анализа всех типов наземных измерений.

Ось вращения.

Движение оси вращения Земли в пространстве обусловлено гравитационным действием небесных тел – Луны, Солнца и планет – на экваториальный избыток масс Земли. При математическом рассмотрении выделяют постоянную и переменную составляющие, прецессию и нутацию.

Кинематическая картина прецессии – это движение полюса мира относительно перемещающегося полюса эклиптики.

Взаимные перемещения плоскостей экватора и эклиптики на конечном интервале времени можно выразить в численном виде.

Стандартную эпоху обозначают J2000. Стандартная эпоха совпадает с юлианской датой 2451545.0 (полдень, 1 января 2000 года).

Наклон эклиптики к экватору в стандартную эпоху обозначают символом ε_0 . Численное значение параметра

$$\varepsilon_0 = 23^\circ 26' 21''.448.$$

входит в список основных астрономических постоянных

Матрица прецессии.

Матрица прецессии

$$\mathbf{P} = R_3(-z_A) \cdot R_2(\theta_A) \cdot R_3(-\zeta_A) \quad (33)$$

выполняет преобразование от *фиксированного экватора*, заданного небесной стандартной системой отсчёта, к системе *подвижного экватора даты*. Формулы для вычисления величин ζ_A , z_A , θ_A , получивших название прецессионных параметров Ньюкома-Андуайе, имеют вид полиномов по времени.

Матрицы поворота против часовой стрелки на угол α вокруг осей ОХ, ОУ и ОZ обозначены через $R_1(\alpha)$, $R_2(\alpha)$ и $R_3(\alpha)$.

Матрица нутации.

В математической модели периодической составляющей движения небесного полюса рассматривают мгновенную эклиптику и экватор даты. Для вычисления положения *истинного экватора* различают нутацию в долготе $\Delta\psi$ и нутацию в наклоне $\Delta\varepsilon$.

Матрица нутации выполняет преобразование от *подвижного экватора* даты к системе *истинного экватора*

$$\overline{\mathbf{N}} = R_1(-\varepsilon_A - \Delta\varepsilon) \cdot R_3(-\Delta\psi) \cdot R_1(\varepsilon_A), \quad (34)$$

где ε_A – наклон мгновенной эклиптики к подвижному экватору.

Параметры $\Delta\psi$ и $\Delta\varepsilon$ вычисляются с помощью тригонометрических рядов с численными коэффициентами. В модели МАС1980 аргументами этих рядов являются линейные комбинации фундаментальных аргументов:

$$\begin{aligned} l_M & - \text{средняя аномалия Луны,} \\ l'_S & - \text{средняя аномалия Солнца,} \\ F_M & - \text{средний аргумент широты Луны,} \\ D & - \text{разность средних долгот Луны и Солнца,} \\ \Omega_M & - \text{средняя долгота восходящего узла Луны.} \end{aligned} \quad (35)$$

Модель прецессии-нутации МАС2000А учитывает также зависимость аргументов тригонометрических рядов от средних долгот восьми больших планет и прецессии по долготе. Формулы для вычисления аргументов представляют из себя полиномы по времени.

Количество слагаемых в каждом из рядов для нутации в долготе и нутации в наклоне в модели МАС 1980 года равно 106 [210]. В модели МАС2000А ряды нутации содержат 678 лунно-солнечных и 687 планетных членов [211].

Стандартное преобразование.

Стандартное преобразование между земной (Т) и геоцентрической небесной (С) системами отсчёта выполняется по формуле

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{(C)} = \mathbf{P}' \cdot \overline{\mathbf{N}}' \cdot R_3(-S_{\oplus}) \cdot R_1(y_p) \cdot R_2(x_p) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{(T)}, \quad (36)$$

где

\mathbf{P} – матрица прецессии,

$\overline{\mathbf{N}}$ – матрица нутации,

S_{\oplus} – гринвичское истинное звёздное время,

x_p, y_p – координаты полюса.

Верхний штрих означает транспонирование соответствующей матрицы.

Эмпирические параметры.

Величины

$$x_p, y_p, \Delta\text{UT} = \text{UT1} - \text{UTC}, \text{ LOD} = (\Delta\text{UT}(t_2) - \Delta\text{UT}(t_1))/(t_2 - t_1) \quad (37)$$

являются продуктом наблюдательной деятельности. Они входят в набор *параметров вращения Земли* [213].

Звёздное время.

Гринвичское среднее звёздное время определено как функция всемирного времени

$$S_{\oplus}^m \text{ в } 0^h \text{ UT1} = 6^h 41^m 50^s 54841 + 8640184^s 812866 T_U \\ + 0^s 093104 T_U^2 - 6^s 2 \cdot 10^{-6} T_U^3,$$

где T_U – время в шкале всемирного времени UT1, отсчитываемое в юлианских столетиях от стандартной эпохи J2000.

Разность $\Delta\text{UT} = \text{UT1} - \text{UTC}$ всемирного времени и всемирного координированного времени входит в формулу для вычисления промежутка звёздного времени от 0^h UT1 до момента наблюдений, отсчитываемого от начала суток в шкале UTC:

$$S_{\oplus}^m = S_{\oplus}^m \text{ в } 0^h \text{ UT1} + r (\text{UTC} + \Delta\text{UT}),$$

где

$$r = 1.002737909350795 + 5.9006 \cdot 10^{-11} T_U - 5.9 \cdot 10^{-15} T_U^2.$$

Истинное и среднее звёздное время связаны соотношением

$$S_{\oplus} = S_{\oplus}^m + \Delta\psi \cos \varepsilon_A.$$

Особенности преобразования.

Особенности стандартного варианта очевидны: угол, определяемый параметром истинное звёздное время, отсчитывается от истинной точки весеннего равноденствия, которая перемещается по истинному экватору вследствие прецессии и нутации, формула для S_{\oplus} записана с точностью до первого порядка относительно малых величин – параметров нутации.

Юлианские дни.

В вычислениях удобно использовать сквозную нумерацию суток. Счёт юлианских дней идёт от 1 января 4713 года до нашей эры. Юлианские сутки начинаются в полдень.

Модифицированные юлианские дни образованы простым вычитанием из значения юлианских дней числа 2400000.5. Модифицированные юлианские сутки начинаются в гринвичскую полночь.

Сквозная нумерация суток неприемлема для задания исходных данных и выдачи результатов расчётов. Для этих целей используют понятную и доступную всем форму календарных дат.

Замечания

Представление потенциала притяжения Земли в виде ряда по сферическим функциям стало классическим [72]. В силу простоты сферических функций оно очень удобно для аналитических и численных исследований движения искусственных спутников. Однако такое разложение обладает одним существенным недостатком, а именно медленной сходимостью, вследствие чего при точных исследованиях движения близких спутников необходимо учитывать достаточно большое число членов. Это обстоятельство заставляет искать другие формы разложения потенциала.

В 1965 году Г.Н.Дубошин получил разложение потенциала объёмного тела в ряд по функциям Ламе [204]. Л.А.Савров нашёл формулы, связывающие коэффициенты разложения по функциям Ламе с коэффициентами разложения по сферическим функциям [140].

В 1971 году Балмино представил аномальную часть потенциала Земли потенциалом притяжения некоторой совокупности точечных масс [196]. Им было использовано 126 материальных точек с заданными координатами в теле Земли. Важные исследования в этом направлении выполнил В.А.Антонов [25]. Несколько групп учёных изучало вопрос о применимости моделей точечных масс при вычислении движения ИСЗ, в работе [148] представлены результаты сравнительных вычислений.

В каждой конкретной задаче необходимы дополнительные исследования, чтобы судить о том, насколько целесообразно использовать полученные разложения для решения дифференциальных уравнений движения спутника. Можно лишь заметить, что эти разложения также содержат большое число членов, а используемые в них функции являются более сложными, чем сферические.

По-видимому, самым существенным фактом является то, что для описания гравитационного поля Земли с нужной нам в настоящее время точностью требуется большое число постоянных (порядка 1000, а может быть и больше). Трудности здесь обусловлены скорее физической стороной проблемы, чем математической.

Аналитическое интегрирование уравнений движения пробной частицы в гравитационном поле с потенциалом, задаваемым формулой (4), выполнено во всех учебниках по небесной механике, например [72, 182, 61]. Для этой проблемы допустимо любое из двух названий: *задача двух тел* или *задача одного неподвижного центра*.

Постановка задачи о разложении силовой функции, обусловленной притяжением двух твёрдых тел, дана в монографии Г.Н.Дубошина [72], современные результаты изложены В.В.Видякиным [56].

Лекция 2. Промежуточный потенциал

Зональные, тессеральные и секториальные гармоники. — Стандартная Земля. — Сходимость разложения геопотенциала. — Промежуточное гравитационное поле Земли. — Важнейшие свойства промежуточного потенциала. — Возмущающий потенциал.

Рассмотрим структуру разложения потенциала U (формула (23)).

Все члены этого разложения можно разделить на три типа. Пусть $k = 0$. Тогда мы будем иметь члены вида

$$-\frac{fm}{r} J_n \left(\frac{r_0}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi). \quad (38)$$

Поскольку полином Лежандра P_n имеет n действительных различных и по абсолютной величине меньших единицы корней, то на сфере $P_n(\sin \varphi)$ будет менять знак на n параллелях. Таким образом, сфера разделится на $n + 1$ широтных зон, в которых этот член будет попеременно принимать положительные и отрицательные значения. Такой член называется *зональной гармоникой порядка n* .

Пусть $0 < k < n$. Тогда мы будем иметь члены вида

$$\frac{fm}{r} \left(\frac{r_0}{r} \right)^n C_{nk} P_n^{(k)}(\sin \varphi) \cos k\lambda$$

и

$$\frac{fm}{r} \left(\frac{r_0}{r} \right)^n S_{nk} P_n^{(k)}(\sin \varphi) \sin k\lambda,$$

которые обращаются в нуль на $n - k$ параллелях, определяемых уравнением

$$\frac{d^k P_n(\sin \varphi)}{d(\sin \varphi)^k} = 0,$$

и на $2k$ меридианах:

$$\cos k\lambda = 0 \quad \text{или} \quad \sin k\lambda = 0.$$

Следовательно, в этом случае сфера делится на $n + k + 1$ сферических трапеций, в каждой из которых эти члены сохраняют знаки. Такие члены называются *тессеральными гармониками порядка n и индекса k* .

Пусть, наконец, $k = n$, и мы тогда получим члены вида

$$\frac{fm}{r} \left(\frac{r_0}{r} \right)^n C_{nn} P_n^{(n)}(\sin \varphi) \cos n\lambda$$

и

$$\frac{fm}{r} \left(\frac{r_0}{r} \right)^n S_{nn} P_n^{(n)}(\sin \varphi) \sin n\lambda.$$

Поскольку

$$\frac{d^n P_n(\sin \varphi)}{d(\sin \varphi)^n} = \text{const},$$

то такие члены обращаются в нуль только на меридианах, для которых

$$\cos n\lambda = 0 \quad \text{или} \quad \sin n\lambda = 0.$$

В этом случае сфера делится на $2n$ знакопостоянных секторов, вследствие чего такие члены называются *секториальными гармониками порядка n* .

Рассмотрим теперь механический смысл различных слагаемых разложения (23). Поскольку первый член представляет собой потенциал шара со сферическим распределением плотности, то все остальные слагаемые характеризуют отличие Земли от тела сферической структуры. Основным из этих слагаемых является вторая зональная гармоника, которая определяет сплюснутость Земли у полюсов, то есть полярное сжатие Земли. Другие гармоники характеризуют более мелкие детали. Так, тессеральные и секториальные гармоники характеризуют отличие Земли от тела, динамически симметричного относительно оси вращения, а зональные гармоники нечётного порядка и тессеральные гармоники, для которых $n - k$ нечётно, определяют асимметрию Земли относительно плоскости экватора.

Числовые значения коэффициентов разложения потенциала притяжения Земли определяются как при помощи гравиметрических и геодезических измерений, так и по наблюдениям Луны и искусственных небесных тел. В последние годы часто используется комбинированный метод, основанный на совместном использовании гравиметрических и спутниковых данных. Начиная с 1958 года при помощи наблюдений искусственных спутников Земли было выведено несколько десятков систем постоянных геопотенциала. В шестидесятые и семидесятые годы двадцатого столетия наиболее полные результаты были получены в Смитсоновской обсерватории США на основе фотографических и лазерных наблюдений специальных спутников с привлечением гравиметрических и геодезических измерений [153]. В Годдардовском центре космических полётов были получены самые современные модели GEM-T3 [222], JGM3 [235] и EGM96 [219].

Модели гравитационного поля Земли представляют из себя наборы чисел. В этих наборах указаны принятые в данном решении числовые значения геоцентрической гравитационной постоянной fm и экваториального радиуса Земли r_0 , а также два целых числа n_{max} и k_{max} , задающие полноту разложения по сферическим функциям. Далее приводится таблица числовых значений коэффициентов геопотенциала. Каждая строка таблицы содержит два целых числа n и k , указывающих на порядок сферической гармоник, и два действительных числа \bar{C}_{nk} , \bar{S}_{nk} , связанных с коэффициентами J_n , C_{nk} , S_{nk} соотношениями

$$J_n = -\sqrt{2n+1} \cdot \bar{C}_{n0},$$

$$C_{nk} = \sqrt{2(2n+1)} \sqrt{\frac{(n-k)!}{(n+k)!}} \cdot \bar{C}_{nk}, \quad k > 0,$$

$$S_{nk} = \sqrt{2(2n+1)} \sqrt{\frac{(n-k)!}{(n+k)!}} \cdot \bar{S}_{nk}, \quad k > 0.$$

Числовые значения некоторых параметров двух моделей гравитационного поля Земли представлены в таблице:

Таблица 1: Несколько параметров

постоянная	модель GEM-T3	модель JGM3
$fm \text{ км}^3/\text{с}^2$	$3.98600436 \cdot 10^5$	$3.986004415 \cdot 10^5$
$r_0 \text{ км}$	6378.137	6378.1363
J_2	$1082.6260745913 \cdot 10^{-6}$	$1082.6360229830 \cdot 10^{-6}$
J_3	$-2.5325160653 \cdot 10^{-6}$	$-2.5324353458 \cdot 10^{-6}$
J_4	$-1.6185636000 \cdot 10^{-6}$	$-1.6193312052 \cdot 10^{-6}$
J_5	$-0.2266690830 \cdot 10^{-6}$	$-0.2277161017 \cdot 10^{-6}$
J_6	$+0.5390785906 \cdot 10^{-6}$	$+0.5396484905 \cdot 10^{-6}$
C_{21}	$-0.0002194691 \cdot 10^{-6}$	$-0.0002414000 \cdot 10^{-6}$
S_{21}	$+0.0015362834 \cdot 10^{-6}$	$+0.0015431000 \cdot 10^{-6}$
C_{22}	$+1.5744102040 \cdot 10^{-6}$	$+1.5745360428 \cdot 10^{-6}$
S_{22}	$-0.9037571782 \cdot 10^{-6}$	$-0.9038680730 \cdot 10^{-6}$

Коэффициент J_2 имеет порядок 10^{-3} , в то время как остальные J_n и коэффициенты тессеральных и секториальных гармоник являются малыми порядка 10^{-6} и выше. Следовательно, основным (после первого) членом в разложении потенциала U является вторая зональная гармоника. Именно она должна вызывать самые значительные возмущения в движении спутника.

Числовые значения коэффициентов $C_{21} \neq 0$, $S_{21} \neq 0$, $S_{22} \neq 0$. Это означает, что ни одна из координатных осей не совпадает с главными центральными осями инерции.

Числовые значения коэффициентов J_n , $J_{nk} = \sqrt{C_{nk}^2 + S_{nk}^2}$ весьма медленно убывают с возрастанием n . Это подтверждается аналитическими исследованиями, проведёнными К.В.Холшевниковым [214]. При достаточно общих предположениях относительно плотности Земли им были получены следующие оценки:

$$|J_n| \leq \frac{c_1}{n^{5/2}}, \quad |J_{nk}| \leq \frac{c_2}{n^{3/2}} \sqrt{\frac{(n-k)!}{(n+k)!}},$$

где c_1 и c_2 – постоянные.

Таким образом, хотя разложение для U абсолютно сходится во всём пространстве $r > \bar{r}$, где \bar{r} – расстояние от центра Земли самой удалённой точки её поверхности, его сходимость в случае r_0/r , близких к единице, является весьма медленной.

Рассмотрим следующую функцию координат ξ, η, ζ :

$$W = \frac{fm}{2} \left(\frac{1+i\sigma}{r_1} + \frac{1-i\sigma}{r_2} \right), \quad (39)$$

где f и m – постоянная притяжения и масса Земли, $i = \sqrt{-1}$,

$$r_1 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + [\zeta - c(\sigma + i)]^2},$$

$$r_2 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + [\zeta - c(\sigma - i)]^2},$$

а c и σ – вещественные постоянные. Разложим W в ряд по степеням c/r , где $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$. Для этого воспользуемся формулой (12).

Тогда

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n (\sigma + i)^n}{r^n} P_n \left(\frac{\zeta}{r} \right), \quad (40)$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n (\sigma - i)^n}{r^n} P_n \left(\frac{\zeta}{r} \right). \quad (41)$$

Подставляя это разложение в формулу (39) и вводя средний экваториальный радиус r_0 и геоцентрическую широту φ , получим

$$W = -\frac{fm}{r} \sum_{n=0}^{\infty} J'_n \left(\frac{r_0}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi), \quad (42)$$

где

$$J'_n = -\frac{1}{2} \left(\frac{c}{r_0} \right)^n [(1+i\sigma)(\sigma+i)^n + (1-i\sigma)(\sigma-i)^n]. \quad (43)$$

Из равенств (40) и (41) следует, что разложения для $1/r_1$ и $1/r_2$ абсолютно сходятся в области

$$r > c\sqrt{1+\sigma^2}. \quad (44)$$

В этой же области будет сходиться и ряд (42).

Положим в (43) $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Тогда

$$\left. \begin{aligned} J'_0 &= -1, \\ J'_1 &= 0, \\ J'_2 &= \kappa^2(1 + \sigma^2), \\ J'_3 &= 2\kappa^3\sigma(1 + \sigma^2), \\ J'_4 &= -\kappa^4(1 + \sigma^2)(1 - 3\sigma^2), \\ J'_5 &= -4\kappa^5\sigma(1 - \sigma^4), \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

где

$$\kappa = \frac{c}{r_0}.$$

Легко убедиться в том, что все коэффициенты J'_n являются вещественными. Для этого достаточно заметить, что при любом целом n величины $(\sigma + i)^n$ и $(\sigma - i)^n$, входящие в формулу (43), будут комплексно сопряжёнными. Поэтому W является вещественной функцией координат r и φ .

С учётом первых двух равенств (45) формула (42) может быть представлена в виде

$$W = \frac{fm}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J'_n \left(\frac{r_0}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi) \right\}. \quad (46)$$

Сравнение этой формулы с формулой (23) показывает, что функцию W можно интерпретировать как потенциал притяжения некоторого тела, обладающего осевой симметрией. Поэтому поставим следующую задачу: подберём числовые значения постоянных c и σ таким образом, чтобы W по возможности была бы наиболее близкой к потенциалу притяжения Земли.

Поскольку в разложении (46) m – масса Земли, то первый член этого разложения равен первому члену разложения (23) для потенциала U . Если теперь постоянными c и σ распорядиться так, чтобы

$$J'_2 = J_2, \quad J'_3 = J_3,$$

то есть выбрать их из условий

$$c^2(1 + \sigma^2) = J_2 r_0^2, \quad 2c^3 \sigma(1 + \sigma^2) = J_3 r_0^3, \quad (47)$$

то уже первые три члена разложения (46) будут соответственно равны первым трём членам разложения (23).

Разрешая уравнения (47) относительно c и σ , находим

$$\left. \begin{aligned} c &= r_0 \left\{ J_2 - \left(\frac{J_3}{2J_2} \right)^2 \right\}^{1/2}, \\ \sigma &= \frac{J_3}{2J_2} \left\{ J_2 - \left(\frac{J_3}{2J_2} \right)^2 \right\}^{-1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Так как в случае Земли

$$J_2 > 0, \quad J_2 > \left(\frac{J_3}{2J_2} \right)^2,$$

то из формул (48) следует, что постоянные c и σ будут действительными величинами.

Подставляя в (48) вместо r_0 , J_2 и J_3 их числовые значения (модель JGM3, табл.1 на с.34), получим

$$c = +209.729018526789156 \text{ км}, \quad \sigma = -0.035569605599914327. \quad (49)$$

При этих значениях для r_0 , c и σ находим

$$\begin{aligned} J'_4 &= -1.166155068898880170 \cdot 10^{-6}, \\ J'_5 &= +0.005469677881748688 \cdot 10^{-6}, \\ J'_6 &= +0.001249715026407343 \cdot 10^{-6}, \end{aligned} \quad (50)$$

причём коэффициенты J'_n при $n > 6$ будут меньше 10^{-9} . Таким образом, хотя J'_4 и J_4 не равны друг другу, однако их разность меньше, чем J_4 . Вследствие малости отношения c/r_0 постоянные J'_n будут убывать с возрастанием n быстрее, чем J_n . Поэтому разности $J_n - J'_n$ будут иметь порядок 10^{-6} и выше.

В дальнейшем гравитационное поле, потенциал которого определяется формулами (46), (43), (48), будем называть *промежуточным гравитационным полем Земли*. Такое название объясняется тем обстоятельством, что потенциал W имеет промежуточный характер между потенциалом истинной Земли и потенциалом Земли шарообразной.

Отметим важнейшие свойства функции W .

1. Функция W включает в себя вторую, третью и частично четвёртую зональные гармоники потенциала притяжения Земли.
2. Разность $U - W$ содержит члены, порядок которых равен 10^{-6} и выше.
3. Функция W зависит от постоянных fm , r_0 , J_2 и J_3 , которые в настоящее время определены с наиболее высокой точностью.
4. Дифференциальные уравнения движения материальной точки в поле с потенциалом W строго интегрируются в квадратурах.

Последнее, чрезвычайно важное для приложений свойство, является следствием того, что W может рассматриваться как силовая функция задачи двух неподвижных центров с массами $(m/2)(1+i\sigma)$ и $(m/2)(1-i\sigma)$, удалёнными друг от друга на расстояние, равное $2ic$. А задача двух неподвижных центров, как известно, одна из немногих задач механики, которые интегрируются в квадратурах. В отличие от классической задачи, в которой массы центров и их взаимное расстояние являются действительными величинами, эту задачу мы будем называть в дальнейшем *обобщённой задачей двух неподвижных центров*.

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи. Положим в (46) и (43) $\sigma = 0$. Тогда найдём

$$W = \frac{fm}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} J'_{2n} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{2n} P_{2n}(\sin \varphi) \right\}, \quad (51)$$

где

$$J'_{2n} = (-1)^{n+1} \left(\frac{c}{r_0} \right)^{2n}.$$

Полученная формула содержит только чётные зональные гармоники. Поэтому можно различать два варианта задачи: *симметричный* ($\sigma = 0$) и *несимметричный* ($\sigma \neq 0$). В обоих вариантах силовая функция строго учитывает вторую зональную гармонику — самый существенный (после первого) член потенциала притяжения Земли. Но несимметричный вариант имеет преимущество перед симметричным, поскольку он учитывает частично (посредством третьей гармоники) асимметрию Земли относительно плоскости экватора.

Пусть теперь $c = 0$ и $\sigma = 0$. Тогда

$$W = \frac{fm}{r},$$

то есть в этом случае силовая функция W представляет собой потенциал шарообразной Земли.

Возвращаясь к потенциалу реальной Земли (23) и к силовой функции обобщённой задачи двух неподвижных центров (46), запишем

$$U = W + R_{\oplus}. \quad (52)$$

Тогда R_{\oplus} можно назвать *возмущающим потенциалом* и представить в виде следующего выражения

$$\begin{aligned} R_{\oplus} = & \frac{fm}{r} \sum_{n=4}^{\infty} j_n \left(\frac{r_0}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi) \\ & + \frac{fm}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{r_0}{r} \right)^n P_n^{(k)}(\sin \varphi) [C_{nk} \cos k\lambda + S_{nk} \sin k\lambda], \end{aligned} \quad (53)$$

где

$$j_n = -(J_n - J'_n), \quad (54)$$

причём J'_n даются формулой (43).

Семинар 3. Канонические преобразования

Степень полинома.

Расстояние r и обратное расстояние $1/r$ определены формулами

$$r = a(1 - e \cos E), \quad \frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos v}{p}, \quad p = a(1 - e^2).$$

Соотношение (23) подсказывает, что переменная r часто появляется в паре со средним экваториальным радиусом Земли r_0

$$\frac{r}{r_0} = \frac{a}{r_0} (1 - e \cos E), \quad \frac{r_0}{r} = \frac{r_0}{p} (1 + e \cos v).$$

Составьте программу возведения соотношения $1 + \alpha \cos A$ в произвольную степень k таким образом, чтобы результат имел вид

$$(1 + \alpha \cos A)^k = \sum_{j=0}^k \left(\sum_{i=0}^k b_{ij} \alpha^i \right) \cos jA,$$

где b_{ij} – численные коэффициенты.

Найдите правило, по которому с возрастанием степени k увеличивается число не равных нулю коэффициентов b_{ij} .

Выполните возведение в произвольную степень k величин r/r_0 и r_0/r с помощью прямого вычисления $(r/r_0)^k$, $(r_0/r)^k$ и на основе коэффициентов b_{ij} и сравните между собой два числа. Вычисления проведите для нескольких значений переменных a , e , E , v и степени k . Сделайте вывод о границах применимости в этом случае метода программирования аналитических операций.

Полиномы Лежандра.

Составьте процедуру, позволяющую с помощью рекуррентной формулы (7) получить численные значения коэффициентов a_{ni}

$$P_n(z) = \sum_{i=0}^n a_{ni} z^i \tag{55}$$

для произвольного значения n .

Обратите внимание на возрастание абсолютной величины коэффициентов a_{ni} при больших значениях n и i .

Принимая во внимание (11), проверьте, с какой точностью при различных n с помощью коэффициентов a_{ni} могут быть вычислены значения полиномов Лежандра на границах интервала $[-1, +1]$.

Придавая параметру α и переменной z некоторые численные значения, проверьте, удаётся ли с помощью коэффициентов a_{ni} удовлетворить формуле (12).

Синус широты.

Для эллиптической орбиты справедлива формула

$$\frac{z}{r} = \sin i \sin u,$$

где u – аргумент широты. Выполните замену угловой переменной $u = \tilde{u} - \pi/2$ и составьте алгоритм возведения соотношения z/r в произвольную степень k таким образом, чтобы результат имел вид

$$\left(\frac{z}{r}\right)^k = (-\sin i \cos \tilde{u})^k = \sum_{l=0}^k \left(\sum_{j=0}^k c_{jl} \sin^j i \right) \cos l\tilde{u}, \quad (56)$$

где c_{jl} – численные коэффициенты.

Напишите ещё одну процедуру для подстановки выражений (56) в формулу (55). Результатом вычислений будут численные значения коэффициентов p_{jl} , позволяющие представить полиномы Лежандра порядка k от величины z/r в виде

$$P_k\left(\frac{z}{r}\right) = \sum_{l=0}^k \left(\sum_{j=0}^k p_{jl} \sin^j i \right) \cos l\tilde{u}. \quad (57)$$

Для нескольких значений индекса n , угла наклона i и аргумента широты u выполните сравнение численных значений полиномов Лежандра $P_k(z/r)$, полученных по формуле (57) с одной стороны, и прямым вычислением – с другой.

Зональные гармоники.

Выражение (38) для зональной гармоники порядка k запишем в виде

$$A_k = -fm r_0 \frac{1}{r^2} J_k \left(\frac{r_0}{r} \right)^{k-1} P_k \left(\frac{z}{r} \right).$$

Представьте выражение A_k в виде функции от кеплеровских параметров орбиты

$$p = a(1 - e^2), \quad e, \quad \sin i, \quad \tilde{u}, \quad v.$$

Обратите внимание на увеличение числа слагаемых при увеличении числа k .

Процедура интегрирования.

Убедитесь в справедливости соотношения

$$dt = \frac{1}{\sqrt{fmp}} r^2 dv = \frac{1}{G} r^2 dv$$

и составьте процедуру интегрирования выражения

$$\int A_k dt = -\frac{fm r_0}{G} J_k \int \left(\frac{r_0}{r}\right)^{k-1} P_k\left(\frac{z}{r}\right) dv.$$

Проверьте результаты вычислений. Для значения $k = 2$, например, должно получиться семь слагаемых:

$$\begin{aligned} & -\frac{fm r_0}{G} J_2 \left(\frac{r_0}{p}\right) \left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \sin^2 i\right) \cdot v + \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \sin^2 i\right) e \sin v \right. \\ & \left. + \frac{3}{8} \sin^2 i \sin 2\tilde{u} + \frac{3}{8} e \sin^2 i \sin(2\tilde{u} - v) + \frac{1}{8} e \sin^2 i \sin(2\tilde{u} + v) \right]. \end{aligned} \quad (58)$$

Для значения $k = 3$ слагаемое, линейное по истинной аномалии v , равно

$$-\frac{fm r_0}{G} J_3 \left(\frac{r_0}{p}\right)^2 \left(-\frac{3}{2} \sin i + \frac{15}{8} \sin^3 i\right) e \cos g \cdot v. \quad (59)$$

Для значения $k = 4$ имеем два слагаемых, содержащих v в качестве множителя:

$$\begin{aligned} & -\frac{fm r_0}{G} J_4 \left(\frac{r_0}{p}\right)^3 \left(+\frac{3}{8} - \frac{15}{8} \sin^2 i - \frac{45}{16} e^2 \sin^2 i + \frac{105}{64} \sin^4 i\right) \cdot v \\ & -\frac{fm r_0}{G} J_4 \left(\frac{r_0}{p}\right)^3 \left(-\frac{45}{32} \sin^2 i + \frac{105}{64} \sin^4 i\right) e^2 \cos 2g \cdot v. \end{aligned} \quad (60)$$

Операция интегрирования составляет первый шаг решения **главной проблемы**. В таком виде формулы впервые получены Д.Брауэром [199].

Канонические уравнения.

Д.Брауэр использовал переменные Делоне L, G, H, l, g, h и записал уравнения движения спутника в поле притяжения, создаваемом зональными гармониками, в каноническом виде

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= +\frac{\partial K}{\partial l}, & \frac{dG}{dt} &= +\frac{\partial K}{\partial g}, & \frac{dH}{dt} &= +\frac{\partial K}{\partial h}, \\ \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial L}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial G}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial H}, \end{aligned} \quad (61)$$

с гамильтонианом $K = K_0 + R_1 + R_2$, где

$$K_0 = \frac{(fm)^2}{2L^2}, \quad R_1 = -\frac{fm}{r} J_2 \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 P_2\left(\frac{z}{r}\right), \quad R_2 = -\frac{fm}{r} \sum_{k=3}^N J_k \left(\frac{r_0}{r}\right)^k P_k\left(\frac{z}{r}\right).$$

Переменная h отсутствует в функции K , является “циклической” переменной, поэтому сразу имеем одну постоянную интегрирования $H = \text{const}$.

Функция преобразования.

Возмущающая функция R_1 содержит малый параметр – коэффициент J_2 . Возмущающая функция R_2 пропорциональна второй степени малого параметра.

Перейдём к новым переменным L', G', H', l', g', h' с помощью функции преобразования

$$S = L'l + G'g + H'h + S_1(L', G', H', l, g) + S_2(L', G', H', l, g) \quad (62)$$

по формулам

$$\begin{aligned} L &= L' + \frac{\partial S_1}{\partial l} + \frac{\partial S_2}{\partial l}, & G &= G' + \frac{\partial S_1}{\partial g} + \frac{\partial S_2}{\partial g}, & H &= H', \\ l' &= l + \frac{\partial S_1}{\partial L'} + \frac{\partial S_2}{\partial L'}, & g' &= g + \frac{\partial S_1}{\partial G'} + \frac{\partial S_2}{\partial G'}, & h' &= h + \frac{\partial S_1}{\partial H'} + \frac{\partial S_2}{\partial H'}, \end{aligned} \quad (63)$$

где $S_1(L', G', H', l, g)$ – функция, пропорциональная коэффициенту J_2 , а функция $S_2(L', G', H', l, g)$ пропорциональна коэффициенту J_3 , то есть имеет второй порядок малости относительно J_2 .

Новый гамильтониан.

Гамильтониан K не должен измениться при переходе к новым переменным:

$$K(L, G, H, l, g, -) = K^*(L', G', H', -, g', -).$$

Д.Брауэр разлагает правую и левую части тождества в ряд Тейлора с точностью до второй степени относительно J_2 и приравнивает члены, равные по порядку величины:

$$\begin{aligned} K_0 &= K_0^*, \\ \frac{\partial K_0}{\partial L'} \frac{\partial S_1}{\partial l} + R_1 &= K_1^*, \\ \frac{\partial K_0}{\partial L'} \frac{\partial S_2}{\partial l} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 K_0}{\partial L'^2} \left(\frac{\partial S_1}{\partial l} \right)^2 + \frac{\partial R_1}{\partial L'} \frac{\partial S_1}{\partial l} + \frac{\partial R_1}{\partial G'} \frac{\partial S_1}{\partial g} + R_2 &= \frac{\partial K_1^*}{\partial g} \frac{\partial S_1}{\partial G'} + K_2^*. \end{aligned} \quad (64)$$

Первое уравнение является следствием выбора функции преобразования: отличия между старыми и новыми переменными начинаются с первого порядка малости относительно параметра J_2 . Во втором уравнении предполагается постоянство всех элементов орбиты, кроме углового элемента l . В третьем уравнении погрешность, вносимая таким допущением, частично исправляется учётом дополнительных членов ряда Тейлора.

Для функций преобразования S_1 и S_2 получены дифференциальные уравнения в частных производных. Функции K_1^* , K_2^* могут быть назначены произвольным образом. Общего рецепта назначения нет. В нашей задаче условие сформулировано так: новый гамильтониан не должен зависеть от угловой переменной l' .

Интегрирование уравнений.

В силу уравнений кеплеровского движения можно записать

$$\begin{aligned}
 n &= \frac{(fm)^2}{L'^3} = -\frac{\partial K_0^*}{\partial L'}, \\
 S_1 &= \int R_1 dt - \frac{1}{n} \int K_1^* dl, \\
 S_2 &= \int R_2 dt - \frac{1}{n} \int K_2^* dl + \int R_2' dt, \\
 R_2' &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 K_0}{\partial L'^2} \left(\frac{\partial S_1}{\partial l} \right)^2 + \frac{\partial R_1}{\partial L'} \frac{\partial S_1}{\partial l} + \frac{\partial R_1}{\partial G'} \frac{\partial S_1}{\partial g} - \frac{\partial K_1^*}{\partial g} \frac{\partial S_1}{\partial G'}.
 \end{aligned} \tag{65}$$

Проверьте, что это действительно так.

Интегралы $\int R_1 dt$ и $\int R_2 dt$ вычислены в одном из предыдущих упражнений на основе предложения о замене дифференциала dt на dv . В статье [199] доктор Брауэр вычислил несколько слагаемых функции R_2' , не зависящих от переменной l' . Эта функция пропорциональна J_2^2 , слагаемые, полученные в работе [199], имеют второй порядок малости относительно сжатия. Мы не станем вычислять функцию R_2' на семинаре, а для получения K_2^* ограничимся вторым слагаемым выражения (60), пропорциональным J_4 , содержащим множитель $\cos 2g$ и линейным по истинной аномалии v .

Приравняем величину K_1^*/n коэффициенту при истинной аномалии v в формуле (58), а величину K_2^*/n приравняем коэффициенту во втором слагаемом формулы (60). В результате получим

$$K_1^* = fm r_0 J_2 \frac{(fm)^2}{L'^3} \frac{1}{G'} \left(\frac{r_0}{p} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \sin^2 i \right), \tag{66}$$

$$K_2^* = (fm r_0)^4 J_4 \frac{(fm)^2}{L'^3} \frac{1}{G'^7} \left(+\frac{45}{32} \sin^2 i - \frac{105}{64} \sin^4 i \right) e^2 \cos 2g, \tag{67}$$

и

$$\begin{aligned}
 S_1 &= fm r_0 J_2 \frac{1}{G} \left(\frac{r_0}{p} \right) \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \sin^2 i \right) \cdot (v - l) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \sin^2 i \right) e \sin v - \frac{3}{8} \sin^2 i \sin 2\tilde{u} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3}{8} e \sin^2 i \sin(2\tilde{u} - v) - \frac{1}{8} e \sin^2 i \sin(2\tilde{u} + v) \right].
 \end{aligned} \tag{68}$$

Гамильтониан $K_0^* + K_1^* + K_2^*$ действительно не зависит от угловой переменной l' , а в характеристической функции S_1 отсутствуют линейные по v и l члены, так как разность $v - l$ является чисто периодической величиной. Функция K_1^* первого порядка малости не зависит также от угловой переменной g' .

Обратите внимание,

что интегрирование выполняется по независимой переменной v и Д.Брауэр не разлагает возмущающую функцию в ряды по кратным средней аномалии или по степеням эксцентриситета, а получает буквенное решение в замкнутом виде. Набор переменных в полученных формулах очень широк. В него входят не только канонические элементы L, G, l, g , но и параметры $p, e, \sin i$ и угловые переменные \tilde{y}, v .

Осреднённые уравнения.

После перехода к новым переменным осреднённые уравнения движения сохраняют каноническую форму и имеют вид:

$$\frac{dL'}{dt} = 0, \quad \frac{dG'}{dt} = +\frac{\partial K_2^*}{\partial g'}, \quad \frac{dH'}{dt} = 0, \quad (69)$$

$$\frac{dl'}{dt} = -\frac{\partial K_0^*}{\partial L'} - \frac{\partial K_1^*}{\partial L'}, \quad \frac{dg'}{dt} = -\frac{\partial K_1^*}{\partial G'}, \quad \frac{dh'}{dt} = -\frac{\partial K_1^*}{\partial H'}. \quad (70)$$

В оригинальной статье [199] выполнено ещё одно каноническое преобразование для исключения из гамильтониана угловой переменной g' . На нашем семинаре проведём интегрирование уравнений (69)-(70) только для функций (66)-(67).

Средние движения.

Интегрируя (70), получим формулы вековых изменений угловых элементов:

$$l' = l'_0 + \left[\frac{(fm)^2}{L'^3} - \frac{3}{4} (fm)^4 r_0^2 J_2 \frac{1}{L'^4} \frac{1}{G'^3} (1 - 3 \cos^2 i) \right] \cdot (t - t_0), \quad (71)$$

$$g' = g'_0 + \left[\frac{3}{4} (fm)^4 r_0^2 J_2 \frac{1}{L'^3} \frac{1}{G'^4} (5 \cos^2 i - 1) \right] \cdot (t - t_0), \quad (72)$$

$$h' = h'_0 + \left[-\frac{3}{2} (fm)^4 r_0^2 J_2 \frac{1}{L'^3} \frac{1}{G'^4} \cos i \right] \cdot (t - t_0). \quad (73)$$

Интегрируя (69) с учётом (67) и (72), получаем долгопериодические вариации элемента действия G :

$$G' = G'_0 + \frac{5}{32} \frac{(fm r_0)^2}{G_0'^3} \left(\frac{J_4}{J_2} \right) \left(\frac{6 - 7 \sin^2 i}{4 - 5 \sin^2 i} \right) e^2 \sin^2 i \sin 2g'. \quad (74)$$

Размерность средних движений $\dot{l}', \dot{g}', \dot{h}' - (1/\text{с})$, вариации $-(\text{м}^2/\text{с})$.

“Критический” наклон.

Угол наклона i_c , удовлетворяющий уравнению $5 \sin^2 i_c = 4$, называется “критическим” наклоном. Для числовых значений i , близких к одному из “критических” ($i_c = 63^\circ 26'$ или $i_c = 116^\circ 34'$), решение (74) недействительно.

Семинар 4. Стандартные соглашения

Сборники стандартов.

С 1976 года Международное бюро времени и Международная служба движения полюса для вывода параметров вращения Земли стали использовать лазерные измерения топоцентрических дальностей до искусственного спутника Лагос. Для проверки надёжности и точности системы были запланированы и проведены две наблюдательные кампании МЕРИТ, первая продолжительностью в три, а вторая – в четырнадцать месяцев. Перед началом второй кампании в 1983 году Морская обсерватория США выпустила циркуляр №167 под названием “Project MERIT Standards”. В 1988 году после упразднения двух предыдущих служб и создания Международной службы вращения Земли был напечатан сборник “IERS Standards”. Затем последовали выпуски “IERS Standards (1992)”, “IERS Conventions (1996)” [210] и “IERS Conventions (2000)” [211]. Все сборники построены по принципу преемственности и в основных направлениях повторяют самый первый циркуляр. В них содержатся, в частности, рекомендации по обработке лазерных наблюдений искусственных спутников Земли.

Параметры модели.

Представлены факторы, которые необходимо учитывать при прогнозировании движения космических объектов. Сюда входят гравитационное поле Земли, притяжение Луны, Солнца, больших планет Солнечной системы, приливы упругой Земли и океанические приливы, давление солнечного излучения.

Даны подробные модели для расчёта вариаций координат наземных пунктов. Такие вариации обусловлены приливами упругой Земли и нагрузочными деформациями, возникающими вследствие океанических приливов.

В параметры, улучшаемые на основе высокоточных наблюдений ИСЗ, включены параметры вращения Земли, коэффициенты эффективного отражения и эмпирического ускорения, положения и перемещения наблюдательных станций в земной опорной системе отсчёта.

Потенциал Земли.

Потенциал гравитационного поля Земли U задан в земной опорной системе отсчёта. Рекомендовано использовать разложение в ряд по сферическим функциям с численными коэффициентами \bar{C}_{nk} , \bar{S}_{nk} :

$$U = \frac{fm}{r} + \frac{fm}{r} \sum_{n=2}^{N_{max}} \sum_{k=0}^n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \bar{P}_n^{(k)}(\sin \varphi) \cdot \operatorname{Re} \left[(\bar{C}_{nk} - \sqrt{-1} \bar{S}_{nk}) e^{\sqrt{-1} k \lambda} \right], \quad (75)$$

где fm – геоцентрическая гравитационная постоянная, r_0 – экваториальный радиус Земли, $\bar{P}_n^{(k)}(\sin \varphi)$ – нормированные присоединённые функции Лежандра, r , φ , λ – сферические координаты точки, находящейся в околоземном пространстве, вычисляемые в земной опорной системе отсчёта, Re – действительная часть комплексного числа.

Планетные возмущения.

Ускорение в движении искусственного спутника, вызываемое внешней планетой с массой m_p , имеет вид

$$\vec{F}_p = \frac{fm_p}{|\vec{r}_p - \vec{r}|^3} (\vec{r}_p - \vec{r}) - \frac{fm_p}{r_p^3} \vec{r}_p, \quad (76)$$

где \vec{r} – геоцентрический вектор объекта, $r = |\vec{r}|$ – модуль геоцентрического вектора объекта, \vec{r}_p – геоцентрический вектор планеты, $r_p = |\vec{r}_p|$ – модуль геоцентрического вектора планеты. Первое слагаемое – это *главная часть* ускорения, второе слагаемое, не зависящее от положения спутника, называют *косвенной частью* [182].

Формуле (76) соответствует потенциал

$$R_p = fm_p \left[\frac{1}{|\vec{r}_p - \vec{r}|} - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}_p)}{r_p^3} \right],$$

также составленный из двух частей, главной и косвенной. Учитывая неравенство $r < r_p$ и разлагая в ряд величину, обратную расстоянию между спутником и планетой, получим формулу

$$R_p = \frac{fm_p}{r_p} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r_p} \right)^n P_n \left(\frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}_p)}{r r_p} \right), \quad (77)$$

где $P_n(z)$ – полином Лежандра порядка n . Суммирование начинается со значения $n = 2$. При $n = 0$ слагаемое ряда не зависит от координат спутника и не принимается во внимание. Слагаемое ряда при $n = 1$ сокращается с косвенной частью.

Положения планет.

Выражение (76) применяют в алгоритмах численного интегрирования при определении правых частей дифференциальных уравнений движения. Для расчёта векторов положений небесных тел \vec{r}_p рекомендуется использовать современную модель движения Луны, Солнца и планет [232].

Пользователям доступны эфемериды, полученные численным интегрированием уравнений движения планет Солнечной системы на больших интервалах времени. Информация о положении и скорости каждого объекта хранится в виде числовых значений коэффициентов полинома Чебышева.

Эфемеридные данные DE405/LE405 [232] содержатся в файле прямого доступа в виде записей. Каждая запись содержит 1018 чисел двойной точности в двоичном формате по 8 байт. В одной записи упакована информация о положениях и скоростях небесных объектов на интервале времени, равном 32 суткам. Первое и второе числа каждой записи содержат юлианские даты начала и конца очередного интервала прогнозирования. Положения и скорости планет и Солнца даны относительно барицентра Солнечной системы. Вместо координат Земли упакованы коэффициенты для вычисления положения центра масс системы Земля-Луна. Положение Луны дано относительно центра Земли.

Приливный потенциал.

Первый член суммы (77) имеет вид

$$R_p^{(2)} = \frac{f m_p}{r_p} \left(\frac{r}{r_p} \right)^2 P_2 \left(\frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}_p)}{r r_p} \right)$$

и является основным в теории приливов.

Теорема сложения для полиномов Лежандра позволяет записать

$$R_p^{(2)} = R_p^{(20)} + R_p^{(21)} + R_p^{(22)}. \quad (78)$$

Слагаемые суммы имеют различный вид в небесной и земной системах отсчёта.

Приливы вызывают дополнительный потенциал

$$R_{pt}^{(2)} = k_{20} \left(\frac{r_0}{r} \right)^5 R_p^{(20)} + k_{21} \left(\frac{r_0}{r} \right)^5 R_p^{(21)} + k_{22} \left(\frac{r_0}{r} \right)^5 R_p^{(22)}, \quad (79)$$

где k_{20} , k_{21} , k_{22} — числа Лява. В современной теории приливов эти параметры состоят из действительной k_{2k}^R и мнимой k_{2k}^I частей и зависят от частоты приливной волны.

Мнение астронома.

Потенциал (79) является функцией координат Луны, Солнца и вектора положения объекта, вычисляемых в выбранной системе отсчёта.

В небесной системе отсчёта сферические координаты — это прямое восхождение α , склонение δ и модуль расстояния r .

Слагаемые суммы (78) имеют вид

$$R_p^{(2k)} = A_k^{(p)} r^2 \bar{P}_2^{(k)}(\sin \delta) \cos k\alpha + B_k^{(p)} r^2 \bar{P}_2^{(k)}(\sin \delta) \sin k\alpha, \quad (80)$$

где

$$\begin{aligned} A_k^{(p)} &= \frac{1}{5} \frac{f m_p}{r_p^3} \bar{P}_2^{(k)}(\sin \delta_p) \cos k \alpha_p, \\ B_k^{(p)} &= \frac{1}{5} \frac{f m_p}{r_p^3} \bar{P}_2^{(k)}(\sin \delta_p) \sin k \alpha_p, \end{aligned} \quad (81)$$

Взгляд геодезиста.

Пусть r_p , φ_p , λ_p – сферические координаты Луны или Солнца, вычисляемые в земной опорной системе отсчёта, тогда

$$\frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}_p)}{r r_p} = \sin \varphi \sin \varphi_p + \cos \varphi \cos \varphi_p \cos(\lambda - \lambda_p).$$

Слагаемые суммы (78) имеют вид

$$R_p^{(2k)} = \bar{A}_k^{(p)} r^2 \bar{P}_2^{(k)}(\sin \varphi) \cos k \lambda + \bar{B}_k^{(p)} r^2 \bar{P}_2^{(k)}(\sin \varphi) \sin k \lambda. \quad (82)$$

Поскольку координаты Луны и Солнца записаны в земной опорной системе отсчёта, то величины

$$\begin{aligned} \bar{A}_k^{(p)} &= \frac{1}{5} \frac{f m_p}{r_p^3} \bar{P}_2^{(k)}(\sin \varphi_p) \cos k \lambda_p, \\ \bar{B}_k^{(p)} &= \frac{1}{5} \frac{f m_p}{r_p^3} \bar{P}_2^{(k)}(\sin \varphi_p) \sin k \lambda_p, \end{aligned} \quad (83)$$

являются функциями среднего звёздного времени. В небесной системе отсчёта функции (81) не зависят от величины S_{\oplus}^m .

Подставляя (82), (83) в (79) и сравнивая с (75), получим

$$\begin{aligned} \Delta \bar{C}_{2k} &= \frac{r_0^3}{f m} \cdot \left(k_{2k}^{R(0)} \bar{A}_k^{(p)} + k_{2k}^{I(0)} \bar{B}_k^{(p)} \right), \\ \Delta \bar{S}_{2k} &= \frac{r_0^3}{f m} \cdot \left(k_{2k}^{I(0)} \bar{A}_k^{(p)} - k_{2k}^{R(0)} \bar{B}_k^{(p)} \right), \end{aligned} \quad (84)$$

где $k_{2k}^{R(0)}$, $k_{2k}^{I(0)}$ – номинальные значения действительных и мнимых частей приливных чисел Лява, не зависящие от частоты приливной волны.

Аналогичную процедуру применяют и для второго члена суммы (77), сферической гармоники третьего порядка (k_{30} , k_{31} , k_{32} , k_{33} – числа Лява):

$$\begin{aligned} \Delta \bar{C}_{3k} &= \frac{1}{7} k_{3k} \frac{f m_p}{f m} \left(\frac{r_0}{r_p} \right)^4 \bar{P}_3^{(k)}(\sin \varphi_p) \cos k \lambda_p, \\ \Delta \bar{S}_{3k} &= \frac{1}{7} k_{3k} \frac{f m_p}{f m} \left(\frac{r_0}{r_p} \right)^4 \bar{P}_3^{(k)}(\sin \varphi_p) \sin k \lambda_p. \end{aligned} \quad (85)$$

Рекомендовано вычислять также малые вариации числовых значений коэффициентов \bar{C}_{40} , \bar{S}_{40} , \bar{C}_{41} , \bar{S}_{41} , \bar{C}_{42} , \bar{S}_{42} по формулам

$$\begin{aligned}\Delta\bar{C}_{4k} &= \frac{1}{5} k_{2k}^{(+)} \frac{f m_p}{f m} \left(\frac{r_0}{r_p} \right)^3 \bar{P}_2^{(k)}(\sin \varphi_p) \cos k \lambda_p, \\ \Delta\bar{S}_{4k} &= \frac{1}{5} k_{2k}^{(+)} \frac{f m_p}{f m} \left(\frac{r_0}{r_p} \right)^3 \bar{P}_2^{(k)}(\sin \varphi_p) \sin k \lambda_p.\end{aligned}\tag{86}$$

Номинальные значения чисел Лява опубликованы в выпуске 2000 года [211].

Частотная зависимость.

Зависимость действительных и мнимых частей параметров k_{20} , k_{21} , k_{22} от частоты приливной волны ω рекомендуется учитывать с помощью формул [211]:

$$\begin{aligned}\Delta\bar{C}_{20}^{(\omega)} &= \sum_{\omega(2,0)} (+a_0^{(\omega)} \cos \theta_{20}^{(\omega)} - b_0^{(\omega)} \sin \theta_{20}^{(\omega)}), \\ \Delta\bar{C}_{21}^{(\omega)} &= \sum_{\omega(2,1)} (+b_1^{(\omega)} \cos \theta_{21}^{(\omega)} + a_1^{(\omega)} \sin \theta_{21}^{(\omega)}), \\ \Delta\bar{S}_{21}^{(\omega)} &= \sum_{\omega(2,1)} (+a_1^{(\omega)} \cos \theta_{21}^{(\omega)} - b_1^{(\omega)} \sin \theta_{21}^{(\omega)}), \\ \Delta\bar{C}_{22}^{(\omega)} &= \sum_{\omega(2,2)} (+a_2^{(\omega)} \cos \theta_{22}^{(\omega)}), \\ \Delta\bar{S}_{22}^{(\omega)} &= \sum_{\omega(2,2)} (-a_2^{(\omega)} \sin \theta_{22}^{(\omega)}),\end{aligned}\tag{87}$$

где $\theta_{2k}^{(\omega)} = k (S_{\oplus}^m + 180^\circ) - (j_{k1}^{(\omega)} l_M + j_{k2}^{(\omega)} l'_S + j_{k3}^{(\omega)} F_M + j_{k4}^{(\omega)} D + j_{k5}^{(\omega)} \Omega_M)$.

Численные значения амплитуд и коэффициентов

$$a_k^{(\omega)}, \quad b_k^{(\omega)}, \quad j_{k1}^{(\omega)}, \quad j_{k2}^{(\omega)}, \quad j_{k3}^{(\omega)}, \quad j_{k4}^{(\omega)}, \quad j_{k5}^{(\omega)}$$

содержатся в специальных таблицах [211].

Океанические приливы.

Динамические эффекты, обусловленные океаническими приливами, предлагается учитывать таким же образом:

$$\begin{aligned}\Delta\bar{C}_{nk}^{(o)} &= F_{nk} \sum_{\omega(n,k)} [(C_{nk}^{\omega+} + C_{nk}^{\omega-}) \cos \theta_{nk}^{(\omega)} + (S_{nk}^{\omega+} + S_{nk}^{\omega-}) \sin \theta_{nk}^{(\omega)}], \\ \Delta\bar{S}_{nk}^{(o)} &= F_{nk} \sum_{\omega(n,k)} [(S_{nk}^{\omega+} - S_{nk}^{\omega-}) \cos \theta_{nk}^{(\omega)} - (C_{nk}^{\omega+} - C_{nk}^{\omega-}) \sin \theta_{nk}^{(\omega)}],\end{aligned}\tag{88}$$

где $C_{nk}^{\omega\pm}$, $S_{nk}^{\omega\pm}$, $\theta_{nk}^{(\omega)}$ – амплитуды и аргумент приливной волны порядка n и степени k , имеющей частоту ω [206], F_{nk} – численные коэффициенты.

Пусть

$$\begin{aligned} f &= 6.673 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2) - \text{гравитационная постоянная,} \\ g_e &= 9.7803278 \text{ м/с}^2 - \text{ускорение свободного падения на экваторе,} \\ \rho_w &= 1025 \text{ кг/м}^3 - \text{плотность морской воды,} \end{aligned}$$

тогда

$$F_{nk} = \frac{4\pi f \rho_w}{g_e} \frac{1}{N_{nk}} \left(\frac{1 + k'_n}{2n + 1} \right),$$

где k'_n – коэффициенты нагрузочной деформации,

$$N_{n0} = \sqrt{2n + 1}, \quad N_{nk} = \sqrt{\frac{2(2n + 1)(n - k)!}{(n + k)!}} \quad \text{при } k > 0.$$

Цетробежные силы.

Потенциал центробежных сил изменяется по причине движения полюсов. Деформации Земли, вызванные этим эффектом, приводят к появлению дополнительного потенциала. Влияние его предложено учитывать с помощью поправок [211]

$$\begin{aligned} \Delta \bar{C}_{21}^{(c)} &= -1.333 \cdot 10^{-9} (m_1 - 0.0115m_2), \\ \Delta \bar{S}_{21}^{(c)} &= -1.333 \cdot 10^{-9} (m_2 + 0.0115m_1), \end{aligned} \tag{89}$$

где

$$m_1 = x_p - 0.054 - 0.00083 \delta t, \quad m_2 = -y_p + 0.357 + 0.00395 \delta t,$$

текущие значения координат полюса x_p , y_p измеряются в секундах дуги, разность δt исчисляется в годах от эпохи J2000.

Постоянная часть.

Дополнительный вклад в числовое значение коэффициента геопотенциала \bar{C}_{20} обусловлен постоянной частью второй зональной гармоники приливного потенциала $R_p^{(20)}$. В модели гравитационного поля Земли JGM3 [235] эта поправка уже добавлена к величине соответствующего коэффициента. Вычисления по формулам (75) приводят к повторному учёту влияния постоянной части приливной деформации. Величину $\Delta \bar{C}_{20}^{(p)} = -4.201 \cdot 10^{-9}$ следует вычесть из полученного численного значения $\Delta \bar{C}_{20}$.

Способ учёта возмущений, обусловленных приливами, путём вычисления вариаций коэффициентов \bar{C}_{nk} и \bar{S}_{nk} был рекомендован уже в первом выпуске стандартов 1983 года [228]. Способ удобен для применения в алгоритме численного интегрирования.

Метод учёта приливных возмущений, удобный в аналитических исследованиях, рассмотрим в ходе следующих занятий (с.89, с.111).

Замечания

В гравиметрии гравитационное поле Земли обычно разбивают на две части: нормальную и аномальную. Под *нормальным гравитационным полем* понимают поле некоторой идеализированной Земли, потенциал которого содержит наиболее значительные члены разложения: нулевого, первого и некоторые члены второго порядка относительно сжатия Земли. В *аномальный потенциал* включают члены второго порядка и выше. В этом отношении промежуточное гравитационное поле Земли может рассматриваться как нормальное поле. Главное же отличие промежуточного потенциала W от других нормальных потенциалов заключается лишь в том, что он позволяет строго проинтегрировать дифференциальные уравнения движения спутника.

Первые аппроксимирующие выражения для потенциала притяжения Земли (на практике, в сущности, совпадающие друг с другом), которые допускают интегрирование в квадратурах, были предложены в 1959 и 1960 годах в работах Дж.Винти [236] и М.Д.Кислика [93]. Значение этих работ для теории движения спутников трудно переоценить. Если выражения Винти и Кислика разложить в ряды по сферическим функциям, то они могут быть представлены формулой (51), то есть будут совпадать с симметричным вариантом силовой функции задачи двух неподвижных центров. Такая связь задач была установлена в 1961 году в статье Е.П.Аксёнова, Е.А.Гребеникова и В.Г.Дёмина [11]. Указание на такую аналогию содержится также в книге Д.Брауэра и Дж.Клеменса [38], изданной в США в 1961 году. Некоторые замечания по этому поводу смотрите в обзорной статье М.С.Ярова-Ярового [186].

Идея применить обобщённую задачу двух неподвижных центров для построения промежуточных орбит искусственных спутников была выдвинута в 1961 году Е.П.Аксёновым, Е.А.Гребениковым и В.Г.Дёминым [13, 14]. Предложенная этими авторами формула (46) обобщала результаты Дж.Винти и М.Д.Кислика на случай несимметричного тела. Оказалось также, что менее удачная, но, несомненно, представляющая интерес аппроксимирующая формула Р.Баррара [198] может рассматриваться как некоторый предельный случай формулы (46). Другими словами, формула (46) содержит в себе все аппроксимирующие выражения для потенциала как частные или предельные случаи.

Интересно отметить, что ещё в 1958 году Р.Ньютон пытался применить классическую задачу двух неподвижных центров для изучения движения искусственных спутников Луны [223]. Но, оставаясь в области действительных масс и расстояний, он мог аппроксимировать только потенциал вытянутого тела, вследствие чего эта работа не могла иметь приложений к спутникам Земли.

Лекция 3. Первые интегралы

Дифференциальные уравнения промежуточного движения. — Интегрирование уравнений промежуточного движения. — Первые интегралы.

На первой лекции мы ввели подвижную, жёстко связанную с Землёй, систему координат $O\xi\eta\zeta$ и соответствующие ей полярные координаты r , φ и λ . Рассмотрим теперь следующий идеализированный вариант задачи. Возьмём неподвижную прямоугольную систему координат $Oxyz$ с началом в центре масс Земли такую, чтобы ось Oz , как и ось $O\zeta$, была направлена в северный полюс, а оси Ox и Oy располагались в плоскости экватора, то есть в той же плоскости, что и подвижные оси $O\xi$ и $O\eta$. Пусть далее w — долгота, отсчитываемая от неподвижной оси Ox . Тогда

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \cos w, \\ y &= r \cos \varphi \sin w, \\ z &= r \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

Предположим сначала, что на спутник действует только сила притяжения, обусловленная промежуточным потенциалом Земли W (46). Тогда дифференциальные уравнения движения запишутся в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial W}{\partial z}, \quad (91)$$

где предполагается, что промежуточный потенциал W выражен посредством формул (90) через x , y , z . Уравнения (91) не являются точными *уравнениями возмущённого движения* спутника, поскольку они не учитывают влияние тессеральных, секториальных и, начиная с четвёртой, зональных гармоник геопотенциала и таких сил, как сопротивление атмосферы, притяжение Луны и Солнца, световое давление и так далее.

Уравнения движения материальной точки под действием силы притяжения одного неподвижного центра с потенциалом (4) называются *уравнениями невозмущённого движения*. Уравнения (91) можно назвать *уравнениями промежуточного движения*, поскольку они имеют промежуточный характер между уравнениями возмущённого движения и уравнениями невозмущённого движения. Орбиты, описываемые уравнениями (91), будем называть *промежуточными орбитами*.

Поставим следующую задачу: свести дифференциальные уравнения (91) к квадратурам, которые и будут в дальнейшем использованы для построения промежуточной орбиты спутника. Для этого мы воспользуемся методом Гамильтона – Якоби и сфероидальными координатами ξ, η, w , которые связаны с прямоугольными координатами x, y, z формулами

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} \cos w, \\ y &= \sqrt{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} \sin w, \\ z &= c\sigma + \xi\eta. \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

Формулы для преобразования скоростей следующие

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{x\xi\dot{\xi}}{\xi^2 + c^2} - \frac{x\eta\dot{\eta}}{1 - \eta^2} - y\dot{w}, \\ \dot{y} &= \frac{y\xi\dot{\xi}}{\xi^2 + c^2} - \frac{y\eta\dot{\eta}}{1 - \eta^2} + x\dot{w}, \\ \dot{z} &= \dot{\xi}\eta + \xi\dot{\eta}. \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

Путаницы в обозначениях не должно возникнуть: прежде, в формуле (3), например, переменные ξ и η являлись прямоугольными координатами в подвижной системе отсчёта, в выражении (92) и везде в дальнейшем этими же греческими буквами обозначены сфероидальные координаты, но уже в неподвижной системе отсчёта, переменная w , как и в формуле (90), имеет смысл долготы.

Обратное преобразование имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \bar{r}^2 &= x^2 + y^2 + (z - c\sigma)^2, \\ \xi^2 &= \frac{\bar{r}^2 - c^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{\bar{r}^2 - c^2}{2}\right)^2 + c^2(z - c\sigma)^2}, \\ \eta &= \frac{z - c\sigma}{\xi}, \\ \cos w &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin w &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi} &= \frac{\xi[x\dot{x} + y\dot{y} + (z - c\sigma)\dot{z}] - c^2\eta\dot{z}}{\xi^2 + c^2\eta^2}, \\ \dot{\eta} &= \frac{\dot{z} - \xi\dot{\eta}}{\xi}, \\ \dot{w} &= \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2 + y^2}. \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

Согласно (39) в уравнениях (91) функция W определяется так:

$$W = \frac{fm}{2} \left(\frac{1 + i\sigma}{r_1} + \frac{1 - i\sigma}{r_2} \right),$$

где

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{x^2 + y^2 + [z - c(\sigma + i)]^2}, \\ r_2 &= \sqrt{x^2 + y^2 + [z - c(\sigma - i)]^2}. \end{aligned}$$

Поэтому в новых координатах функция W запишется в виде

$$W = \frac{fm(\xi - c\sigma\eta)}{J}, \quad (96)$$

где

$$J = \xi^2 + c^2\eta^2.$$

Пусть теперь T — кинетическая энергия спутника:

$$T = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

В координатах ξ, η, w она будет дана формулой

$$T = \frac{J}{2} \left(\frac{\dot{\xi}^2}{\xi^2 + c^2} + \frac{\dot{\eta}^2}{1 - \eta^2} + \frac{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)}{J} \dot{w}^2 \right). \quad (97)$$

Определяя импульсы ξ', η', w' формулами

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = \frac{J \dot{\xi}}{\xi^2 + c^2}, \\ \eta' &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}} = \frac{J \dot{\eta}}{1 - \eta^2}, \\ w' &= \frac{\partial T}{\partial \dot{w}} = (\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2) \dot{w}, \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

из (97) найдём

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{\xi^2 + c^2}{J} \xi'^2 + \frac{1 - \eta^2}{J} \eta'^2 + \frac{w'^2}{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} \right). \quad (99)$$

Дифференциальные уравнения промежуточного движения теперь запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial \xi'}, & \frac{d\eta}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial \eta'}, & \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial w'}, \\ \frac{d\xi'}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial \xi}, & \frac{d\eta'}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial \eta}, & \frac{dw'}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial w}, \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

где

$$K = T - W. \quad (101)$$

Система (100) имеет интеграл энергии

$$T - W = \alpha_1, \quad (102)$$

где α_1 – постоянная интегрирования. Составляя при помощи (102), (99) и (96) уравнение Гамильтона – Якоби, получим

$$\begin{aligned} \frac{\xi^2 + c^2}{2J} \left(\frac{\partial S}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{1 - \eta^2}{2J} \left(\frac{\partial S}{\partial \eta} \right)^2 \\ + \frac{1}{2(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} \left(\frac{\partial S}{\partial w} \right)^2 = \frac{fm(\xi - c\sigma\eta)}{J} + \alpha_1. \end{aligned} \quad (103)$$

Полный интеграл этого уравнения будем искать в виде

$$S = S_1(\xi) + S_2(\eta) + \alpha_3 w,$$

где α_3 – произвольная постоянная. Тогда для определения функций S_1 и S_2 приходим к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} (\xi^2 + c^2) \left(\frac{\partial S_1}{\partial \xi} \right)^2 &= \frac{c^2 \alpha_3^2}{\xi^2 + c^2} + 2\alpha_1 \xi^2 + 2fm\xi - \alpha_2^2, \\ (1 - \eta^2) \left(\frac{\partial S_2}{\partial \eta} \right)^2 &= -\frac{\alpha_3^2}{1 - \eta^2} + 2\alpha_1 c^2 \eta^2 - 2fm c \sigma \eta + \alpha_2^2, \end{aligned}$$

где α_2 – произвольная постоянная. Поэтому

$$S = \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{\sqrt{\Phi(\xi)}}{\xi^2 + c^2} d\xi + \int_{\eta_1}^{\eta} \frac{\sqrt{F(\eta)}}{1 - \eta^2} d\eta + \alpha_3 w. \quad (104)$$

Здесь ξ_1 и η_1 – постоянные, которые будут определены позже, а $F(\eta)$ и $\Phi(\xi)$ имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\xi) &= (\xi^2 + c^2)(2\alpha_1 \xi^2 + 2fm\xi - \alpha_2^2) + c^2 \alpha_3^2, \\ F(\eta) &= (1 - \eta^2)(2\alpha_1 c^2 \eta^2 - 2fm c \sigma \eta + \alpha_2^2) - \alpha_3^2. \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

Общий интеграл системы (100) будет даваться уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} &= t + \beta_1, & \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} &= \beta_2, & \frac{\partial S}{\partial \alpha_3} &= \beta_3, \\ \frac{\partial S}{\partial \xi} &= \xi', & \frac{\partial S}{\partial \eta} &= \eta', & \frac{\partial S}{\partial w} &= w'. \end{aligned} \quad (106)$$

Записывая первые три из них в развёрнутой форме, имеем

$$\left. \begin{aligned} \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi)}} + \int_{\eta_1}^{\eta} \frac{c^2 \eta^2 d\eta}{\sqrt{F(\eta)}} &= t + \beta_1, \\ - \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{\alpha_2 d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi)}} + \int_{\eta_1}^{\eta} \frac{\alpha_2 d\eta}{\sqrt{F(\eta)}} &= \beta_2, \\ - \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{c^2 \alpha_3 d\xi}{(\xi^2 + c^2) \sqrt{\Phi(\xi)}} + \int_{\eta_1}^{\eta} \frac{\alpha_3 d\eta}{(1 - \eta^2) \sqrt{F(\eta)}} &= w - \beta_3, \end{aligned} \right\} \quad (107)$$

где β_1 , β_2 и β_3 – произвольные постоянные. Подставляя в три других уравнения (106) равенства (98) и дифференцируя (104), легко находим следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi)}} &= \frac{dt}{J}, \\ \frac{d\eta}{\sqrt{F(\eta)}} &= \frac{dt}{J}, \\ (1 - \eta^2)(\xi^2 + c^2)dw &= \alpha_3 dt. \end{aligned} \right\} \quad (108)$$

Если теперь вместо t ввести новую независимую переменную τ по формуле

$$dt = J d\tau = (\xi^2 + c^2 \eta^2) d\tau, \quad (109)$$

то из уравнений (108) найдём

$$\int_{\eta_1}^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{F(\eta)}} = \tau + c_3, \quad \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi)}} = \tau + c_4, \quad (110)$$

где c_3 и c_4 – постоянные интегрирования, а η_1 и ξ_1 мы определим позже.

Итак, задача свелась к обращению квадратур (110). После того как мы найдём ξ и η в виде явных функций τ , третья координата

определится следующей квадратурой:

$$w = \alpha_3 \int_0^\tau \frac{\xi^2 + c^2 \eta^2}{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} d\tau + c_5, \quad (111)$$

которая легко выводится из третьего уравнения (108).

Связь же переменной τ с временем t даётся уравнением

$$t - t_0 = \int_0^\tau (\xi^2 + c^2 \eta^2) d\tau + c_6. \quad (112)$$

В (111) и (112) c_5 и c_6 – произвольные постоянные, а t_0 – начальный момент времени.

Формулы (110), (111), (112) содержат семь постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, c_3, c_4, c_5, c_6$. Но, как будет показано далее, постоянные c_3 и c_4 входят в окончательные формулы только посредством комбинации $c_3 - c_4$. Поэтому независимыми являются шесть постоянных.

Рассмотрим подробнее первые интегралы промежуточного движения. Обозначим через V орбитальную скорость спутника. Тогда на основании (102) и (96) интеграл энергии запишется в виде

$$V^2 = \frac{2fm(\xi - c\sigma\eta)}{\xi^2 + c^2\eta^2} + 2\alpha_1. \quad (113)$$

В сфероидальных координатах ξ, η, w интеграл площадей, как это следует из (108), имеет вид

$$(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2) \frac{dw}{dt} = \alpha_3. \quad (114)$$

Если перейти к прямоугольным координатам, то он примет форму

$$\dot{x}y - y\dot{x} = \alpha_3. \quad (115)$$

Существование этих двух интегралов обуславливается общими свойствами силового поля, определяемого потенциалом W . Оно не

зависит от времени (интеграл энергии) и симметрично относительно оси Oz (постоянство проекции вектора кинетического момента на ось Oz).

Рассмотрим теперь третий интеграл. Пусть

$$\begin{aligned}\bar{r}^2 &= x^2 + y^2 + (z - c\sigma)^2, \\ r' &= x\dot{x} + y\dot{y} + (z - c\sigma)\dot{z}.\end{aligned}$$

Тогда при помощи уравнений (90) имеем

$$\bar{r}^2 = \xi^2 + c^2(1 - \eta^2), \quad r' = \xi\dot{\xi} - c^2\eta\dot{\eta}.$$

Кроме того, дифференцируя третье уравнение (90), находим

$$\dot{z} = \xi\dot{\eta} + \eta\dot{\xi}. \quad (116)$$

Поэтому

$$r'^2 + c^2\dot{z}^2 = J(\dot{\xi}^2 + c^2\dot{\eta}^2). \quad (117)$$

Но согласно (108)

$$J^2\dot{\xi}^2 = \Phi(\xi), \quad J^2\dot{\eta}^2 = F(\eta).$$

Следовательно, если воспользоваться формулами (105), мы вместо (117) получим следующее равенство:

$$\begin{aligned}J(r'^2 + c^2\dot{z}^2) &= 2\alpha_1 [\xi^2(\xi^2 + c^2) + c^4\eta^2(1 - \eta^2)] \\ &\quad + 2fm[\xi(\xi^2 + c^2) - c^3\sigma\eta(1 - \eta^2)] \\ &\quad - \alpha_2^2(\xi^2 + c^2\eta^2).\end{aligned} \quad (118)$$

Вычитая из него интеграл энергии (113), умноженный на $J\bar{r}^2$, найдём

$$\bar{r}^2V^2 - r'^2 - c^2\dot{z}^2 = -\frac{2fm\xi\eta(c^2\eta + c\sigma\xi)}{J} + \alpha_2^2,$$

или

$$\alpha_2^2 = \bar{r}^2V^2 - r'^2 - c^2\dot{z}^2 + Q, \quad (119)$$

где

$$Q = \frac{2fm\xi\eta(c^2\eta + c\sigma\xi)}{\xi^2 + c^2\eta^2}. \quad (120)$$

Интеграл (119) есть тот третий интеграл, наличие которого даёт возможность проинтегрировать уравнения движения до конца.

Если интегралы (113) и (114) имеют наглядный механический смысл, то этого нельзя сказать об интеграле (119). Однако, поскольку

$$\bar{r}^2 V^2 - r'^2 = (y\dot{z} - \bar{z}\dot{y})^2 + (\bar{z}\dot{x} - x\dot{z})^2 + (x\dot{y} - y\dot{x})^2, \quad (121)$$

где

$$\bar{z} = z - c\sigma,$$

то в предельном случае, когда $c = 0$ и $\sigma = 0$, величина α_2 равна модулю момента количества движения спутника (на единицу массы).

Изложение теории промежуточных орбит ИСЗ окажется неполным без упоминания об интересных исследованиях Т.Штерна [233], Б.Гарфинкеля [205] и К.Акснеса [193]. В этих работах рассмотрены модельные задачи, которые дают приближённые решения проблемы движения спутника с учётом сжатия Земли. Такие решения определяют некоторые промежуточные орбиты, которые более близки к истинной орбите спутника, чем кеплеровская орбита, и могут рассматриваться как невозмущённые при построении полной теории движения спутника [2].

Предложенные Т.Штерном, Б.Гарфинкелем и К.Акснесом промежуточные потенциалы по своей структуре имеют много общего друг с другом. Все три потенциала можно записать в такой общей форме:

$$V = F(r) + \frac{\Phi(\varphi)}{r^2}.$$

Отсюда и следует интегрируемость рассмотренных задач, ибо эта форма, как известно, позволяет проинтегрировать соответствующее уравнение Гамильтона – Якоби методом разделения переменных [69].

Семинар 5. Промежуточная орбита

Предложение профессора.

Сведём вместе формулы, необходимые для вычисления промежуточной орбиты, основанной на решении обобщённой задачи двух неподвижных центров. Отметим здесь, что профессор К.В.Холшевников предложил, и вполне обоснованно, называть такую орбиту эйлеровской орбитой.

Постановка задачи.

Итак, пусть для момента времени $t = t_0$ известны координаты и скорости объекта

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0, \quad \dot{z} = \dot{z}_0.$$

Требуется определить позиционные элемент a , e , δ и канонические угловые переменные l , g , h .

План решения.

Задачу эту можно разбить на три части. Сначала по известным координатам и их производным находим постоянные интегрирования α_1 , α_2 , α_3 . Затем, зная эти постоянные, определяем группу позиционных элементов a , e , δ . После чего находятся начальные значения угловых элементов l , g , h на момент t_0 .

Сфероидальные координаты.

Введём следующие обозначения

$$\begin{aligned} \bar{r}_0^2 &= x_0^2 + y_0^2 + (z_0 - c\sigma)^2, \\ V_0^2 &= \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2, \\ r_0' &= x_0\dot{x}_0 + y_0\dot{y}_0 + (z_0 - c\sigma)\dot{z}_0. \end{aligned}$$

Тогда из уравнений (94) для момента $t = t_0$ имеем

$$\begin{aligned} \xi_0^2 &= \frac{\bar{r}_0^2 - c^2}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4c^2(z_0 - c\sigma)^2}{(\bar{r}_0^2 - c^2)^2}} \right], \\ \eta_0 &= \frac{z_0 - c\sigma}{\xi_0}, \\ \cos w_0 &= \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}, \\ \sin w_0 &= \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}, \end{aligned}$$

где через ξ_0 , η_0 , w_0 обозначены сфероидальные координаты для начального момента времени.

Из уравнений (95) получим

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_0 &= \frac{\xi_0 r'_0 - c^2 \eta_0 \dot{z}_0}{\xi_0^2 + c^2 \eta_0^2}, \\ \dot{\eta}_0 &= \frac{\dot{z}_0 - \dot{\xi}_0 \eta_0}{\xi_0}, \\ \dot{w}_0 &= \frac{x_0 \dot{y}_0 - y_0 \dot{x}_0}{(\xi_0^2 + c^2)(1 - \eta_0^2)}.\end{aligned}$$

Постоянные интегрирования.

Интегралы (113), (119) и (115) дают численные значения произвольных постоянных интегрирования

$$\begin{aligned}2\alpha_1 &= V_0^2 - \frac{2fm(\xi_0 - c\sigma\eta_0)}{\xi_0^2 + c^2\eta_0^2}, \\ \alpha_2^2 &= \bar{r}_0^2 V_0^2 - r_0'^2 - c^2 \dot{z}_0^2 + \frac{2fm\xi_0\eta_0(c^2\eta_0 + c\sigma\xi_0)}{\xi_0^2 + c^2\eta_0^2}, \\ \alpha_3 &= \dot{x}_0 y_0 - y_0 \dot{x}_0.\end{aligned}$$

Позиционные параметры.

Методом итераций на основе уравнений (137)-(142) находим числовые значения величин

$$a, e, \delta, \delta^*.$$

Далее из соотношений (174), (183) и (186) последовательно определяем значения параметров

$$\bar{\sigma}_2, \bar{e}, \bar{k}_2^2, \sigma_1, s, k_1^2, d, \gamma, \nu, \varkappa_{2j}, \bar{\varkappa}_{2j}.$$

Добавим к ним численные значения величин (формулы (224),(209))

$$n_0, e^*, \alpha, \beta, \bar{\gamma},$$

а также числовые значения вековых и периодических коэффициентов

$$\alpha'_0, \beta_0, \mu, \gamma_0, \gamma'_0, \lambda, \alpha_j^p, \beta_j^f, \gamma_j^p, \gamma_j^f,$$

и перейдём к определению угловых элементов

$$l_0(t_0), g_0(t_0), h_0(t_0).$$

Угловые переменные.

Найдём сначала значения переменных E , ψ , и $\tilde{\varphi}$ для $t = t_0$. Поскольку в эйлеровском движении

$$\begin{aligned}\xi &= a(1 - e \cos E), \\ \dot{\xi} &= a e \sin E \cdot \dot{E}, \quad \dot{E} > 0,\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}\cos E &= \frac{a - \xi_0}{ae}, \\ \sin E &= \text{sign}(\dot{\xi}) \sqrt{1 - \cos^2 E}, \\ \cos \psi &= \frac{\cos E - \bar{e}}{1 - \bar{e} \cos E}, \\ \sin \psi &= \frac{\sqrt{1 - \bar{e}^2} \sin E}{1 - \bar{e} \cos E}.\end{aligned}$$

Для переменной $\tilde{\varphi}$ имеем

$$\begin{aligned}\cos \tilde{\varphi} &= \frac{\eta_0 - \gamma}{-s + \eta_0 d}, \\ \sin \tilde{\varphi} &= \text{sign}(\dot{\eta}) \sqrt{1 - \cos^2 \tilde{\varphi}}.\end{aligned}$$

Первое из уравнений (253) даёт значение l в начальный момент времени t_0 :

$$l_0 = \frac{1}{1 - \lambda} \left[E - e^* \sin E - \lambda \psi + \sum_{i=1}^{2J} \left(\gamma_i^p \sin i\psi + \gamma_i^f \sin i\tilde{\varphi} \right) \right].$$

Из второго уравнения находим начальное значение g :

$$g_0 = \tilde{\varphi} - \psi - \nu(\psi - l_0) - \sum_{j=1}^J (\varkappa_{2j} \sin 2j\psi + \bar{\varkappa}_{2j} \sin 2j\tilde{\varphi}).$$

Объединение третьего из уравнений (253) с выражениями (218) и (219) приводит к значению угловой переменной h в начальный момент t_0 :

$$\begin{aligned}h_0 &= w_0 - \arctg \left(\frac{\sin \tilde{\varphi}}{\alpha \cos \tilde{\varphi} - \beta} \right) \\ &\quad - \mu(\psi - l_0) - \sum_{i=1}^{2J} \left(\alpha_i^p \sin i\psi + \beta_i^f \sin i\tilde{\varphi} \right).\end{aligned}$$

Обратная задача.

Решим теперь обратную задачу.

Постановка задачи.

Пусть в произвольный момент времени t известны численные значения позиционных параметров a, e, δ и угловых переменных l, g, h .

Требуется вычислить прямоугольные компоненты положения и скорости $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$.

Значения параметров.

С помощью формул (137)-(142) вычисляем величины

$$2\alpha_1, \alpha_2^2, \alpha_3, \delta^*.$$

Далее выполняем часть действий из предыдущего задания, то есть последовательно определяем значения параметров

$$\begin{aligned} &\bar{\sigma}_2, \quad \bar{e}, \quad \bar{k}_2^2, \quad \sigma_1, \quad s, \quad k_1^2, \quad d, \quad \gamma, \quad \nu, \\ &n_0, \quad e^*, \quad \alpha, \quad \beta, \quad \bar{\gamma}, \quad \alpha'_0, \quad \beta_0, \quad \mu, \quad \gamma_0, \quad \gamma'_0, \quad \lambda, \\ &\varkappa_{2j}, \quad \bar{\varkappa}_{2j}, \quad \alpha_j^p, \quad \beta_j^f, \quad \gamma_j^p, \quad \gamma_j^f. \end{aligned}$$

Угловые переменные.

После того, как все коэффициенты вычислены, методом последовательных приближений найдём значения угловых переменных $E, \psi, \tilde{\varphi}$ из уравнений

$$\begin{aligned} l &= E - e^* \sin E - \lambda(\psi - l) + \sum_{i=1}^{2J} \left(\gamma_i^p \sin i\psi + \gamma_i^f \sin i\tilde{\varphi} \right), \\ \tilde{\varphi} &= \psi + g + \nu(\psi - l) + \sum_{j=1}^J (\varkappa_{2j} \sin 2j\psi + \bar{\varkappa}_{2j} \sin 2j\tilde{\varphi}), \end{aligned}$$

используя при этом соотношения

$$\begin{aligned} \cos \psi &= \frac{\cos E - \bar{e}}{1 - \bar{e} \cos E}, \\ \sin \psi &= \frac{\sqrt{1 - \bar{e}^2} \sin E}{1 - \bar{e} \cos E}. \end{aligned}$$

Переменную $\tilde{\Omega}$ вычисляем по формуле

$$\tilde{\Omega} = h + \mu(\psi - l) + \sum_{i=1}^{2J} \left(\alpha_i^p \sin i\psi + \beta_i^f \sin i\tilde{\varphi} \right).$$

Сфероидальные координаты.

Сфероидальные координаты и производные по времени от сфероидальных координат равны

$$\begin{aligned}\xi &= a(1 - e \cos E), \\ \eta &= \frac{-s \cos \tilde{\varphi} + \gamma}{1 - d \cos \tilde{\varphi}}, \\ w &= \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin \tilde{\varphi}}{\alpha \cos \tilde{\varphi} - \beta} \right) + \tilde{\Omega}, \\ \dot{\xi} &= \frac{a e \bar{\sigma}_2 (1 - \bar{e}^2) \sin \psi \sqrt{1 - \bar{k}_2^2 \cos^2 \psi}}{(\xi^2 + c^2 \eta^2) (1 + \bar{e} \cos \psi)^2}, \\ \dot{\eta} &= \frac{(s - \gamma d) \sigma_1 \sin \tilde{\varphi} \sqrt{1 - k_1^2 \cos^2 \tilde{\varphi}}}{(\xi^2 + c^2 \eta^2) (1 - d \cos \tilde{\varphi})^2}, \\ \dot{w} &= \frac{\alpha_3}{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)}.\end{aligned}$$

Прямоугольные координаты.

Искомые прямоугольные координаты и производные по времени от прямоугольных координат определены формулами (92) и (93)

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} \cos w, \\ y &= \sqrt{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} \sin w, \\ z &= c\sigma + \xi\eta, \\ \dot{x} &= \frac{x\xi\dot{\xi}}{\xi^2 + c^2} - \frac{x\eta\dot{\eta}}{1 - \eta^2} - y\dot{w}, \\ \dot{y} &= \frac{y\xi\dot{\xi}}{\xi^2 + c^2} - \frac{y\eta\dot{\eta}}{1 - \eta^2} + x\dot{w}, \\ \dot{z} &= \dot{\xi}\eta + \xi\dot{\eta}.\end{aligned}$$

Точность формул.

Формулы, опубликованные профессором Е.П.Аксёновым в работах [5] и [10], ограничены по точности вторым порядком относительно малого параметра – сжатия Земли. Точность предлагаемых здесь алгоритмов преобразований ограничена только накоплением ошибок округления.

Задайте начальные значения шести элементов промежуточной орбиты. Вычислите соответствующие им начальные вектор положения и вектор скорости.

Выполните обратное преобразование. Повторите вычисления. Убедитесь, что с точностью до ошибок округления начальные значения не изменились.

Численные коэффициенты.

На основе формулы (43) (с. 35) и числовых значений (49) определите числовые значения коэффициентов J'_n разложения промежуточного потенциала (46). Сможете ли Вы объяснить, почему коэффициент J'_{15} , например, равен $2.7 \cdot 10^{-18}$.

Численное интегрирование.

Для тех же начальных векторов положения и скорости используйте программу численного интегрирования уравнений движения с промежуточным потенциалом и проведите сравнение результатов работы программы с прямоугольными координатами, вычисляемыми на основе начальных элементов промежуточной орбиты.

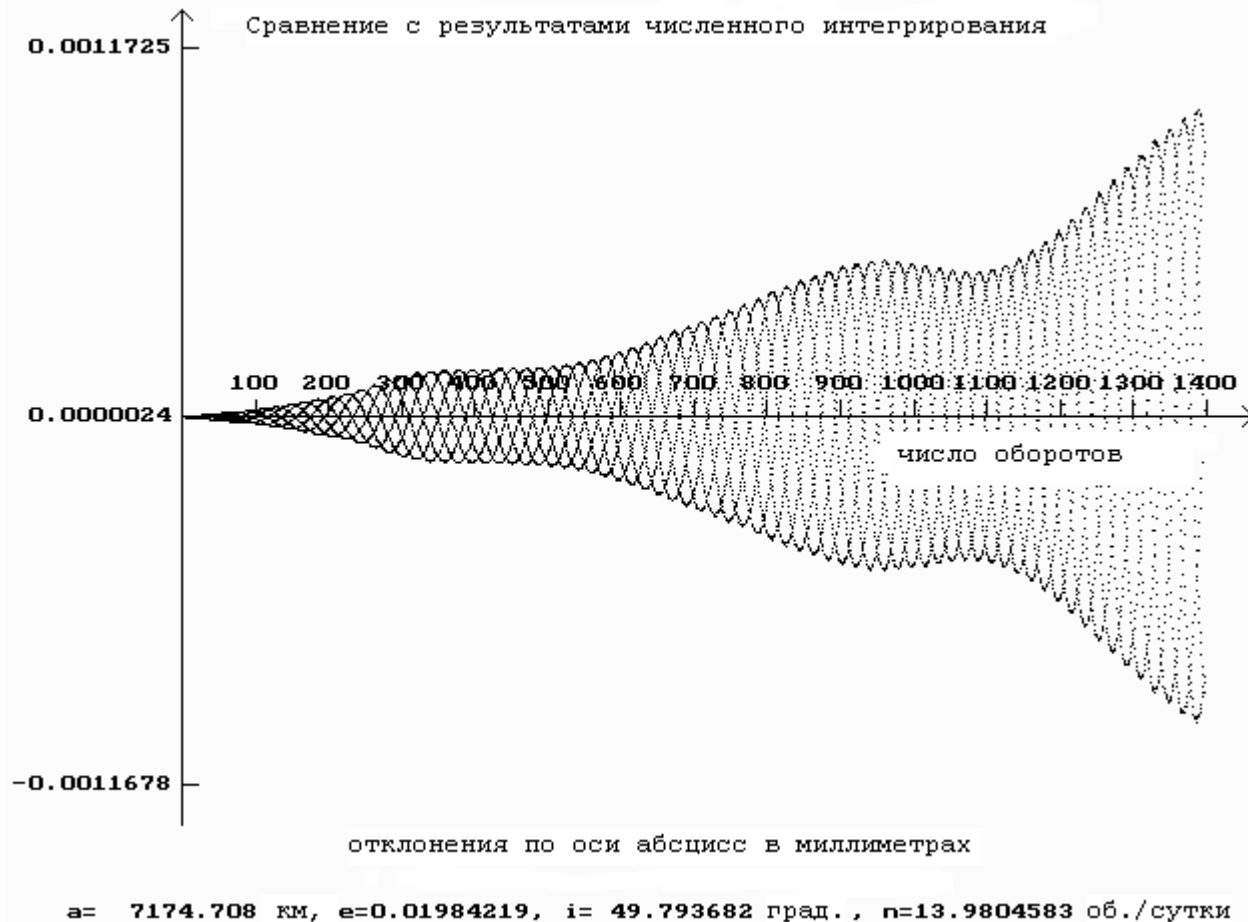


Рис. 2: Сравнение методов

Результаты вычислений для одного из модельных вариантов представлены на рисунке 2. Дайте простое объяснение результатам сравнения.

Семинар 6. Исходные данные

Параметры движения.

Начальные параметры движения большого числа объектов доступны пользователям в виде средних элементов кеплеровской орбиты [224]. Наборы данных можно найти в Интернете по адресу

<http://celestrak.com/NORAD/elements/>.

Формат данных получил название “двустрочные элементы”.

Формат данных.

Двустрочные орбитальные элементы в формате “NORAD” ежедневно публикует радиотехническая служба слежения за спутниками США.

Данные для каждого спутника содержат три строки:

AAAAAAAAAAAA

```
1 NNNNNU NNNNNAAA NNNNN.NNNNNNNN +.NNNNNNNN +NNNNN-N +NNNNN-N N NNNNN
2 NNNNN NNN.NNNN NNN.NNNN NNNNNNN NNN.NNNN NNN.NNNN NN.NNNNNNNNNNNNNNN
```

В строке 0 записано имя объекта из одиннадцати символов.

строка 1

колонка описание

01-01 номер линии,
 03-07 номер спутника,
 10-11 международный указатель (последние две цифры года запуска),
 12-14 международный указатель (порядковый номер запуска),
 15-17 международный указатель (часть запущенного изделия),
 19-20 эпоха элементов (последние две цифры года),
 21-32 эпоха элементов (день с дробной частью от начала года),
 34-43 первая производная от среднего движения,
 45-52 вторая производная от среднего движения,
 54-61 эффективный коэффициент отражения,
 63-63 тип эфемериды,
 65-68 номер элементов,
 69-69 контрольная сумма.

строка 2

колонка описание

01-01 номер линии,

03-07 номер спутника,
 09-16 угол наклона (градусы),
 18-25 прямое восхождение восходящего узла (градусы),
 27-33 эксцентриситет (впереди числа ставить десятичную точку),
 35-42 аргумент перигея (градусы),
 44-51 средняя аномалия (градусы),
 53-63 среднее движение (обороты за сутки),
 64-68 количество витков на эпоху,
 69-69 контрольная сумма.

Пример:

STELLA

```
1 22824U 93061B 04110.78132390 -.00000207 00000-0 -67902-4 0 7746
2 22824 98.2563 116.5245 0007837 91.7907 268.4122 14.27256914550382
```

В трёх строках формата “NORAD” даны средние кеплеровские элементы 55038-го витка спутника Стелла на 110.7813239 день с начала 2004 года.

Угол наклона равен 98.2563 градусов,
 долгота восходящего узла равна 116.5245 градуса,
 эксцентриситет орбиты равен 0.0007837,
 аргумент перигея равен 91.7907 градуса,
 средняя аномалия равна 268.4122 градуса,
 среднее движение составляет 14.27256914 оборотов за сутки.

Официальный документ.

В официальном документе радиотехнической службы слежения за спутниками США [209] авторы делают важное замечание о применении наборов элементов “NORAD” в практических приложениях. Смысл замечания состоит в следующем.

“Двустрочные элементы NORAD” суть “сглаженные” значения кеплеровских элементов орбиты, полученные исключением периодических вариаций. Для выполнения удовлетворительного прогноза положения спутника необходимо восстановить периодические вариации элементов. Периодические вариации должны быть добавлены по тем же самым формулам, на основании которых были исключены. Использование элементов “NORAD” в других моделях, даже более точных, в том числе и в алгоритмах численного интегрирования, приведёт к недостоверным результатам прогноза [209].

“Нормальные” точки.

Результаты измерений, полученные с помощью метода лазерной локации, хранятся в виде наборов строк [212]. Каждая порция строк соответствует одному про-

хождению спутника в поле зрения пункта наблюдений и содержит два-три десятка “нормальных” точек, являющихся результатом процедуры осреднения большого числа “сырых” наблюдений.

Точность одной “нормальной” точки находится в интервале от 2 до 10 сантиметров. Наборы данных с “нормальными” точками можно найти в Интернете по адресу

`ftp://cddisa.gsfc.nasa.gov/pub/slr/slrql/`.

Формат данных.

Текстовый формат данных получил название “Quick Look” [212].

Каждая серия наблюдений, полученная на конкретной станции за одно прохождение, отделяется от следующей серии специальной “шапкой”, состоящей из пяти цифр 9.

Далее следуют одна “головная” строка, содержащая информацию, общую для всех измерений данной серии, и несколько строк с результатами наблюдений.

Более подробно формат “Quick Look” рассмотрим на следующем примере, представляющем из себя запись одной серии лазерных наблюдений.

1	10	20	30	40	50
99999					
7603901993057110041153200009703600001600387307100580511					
021502028191051419271661000005908187288204200450000047					
022218028201050225271646000006508187288204202770000045					
022944028253049064925368000005708187288204200630000068					
043770028125052868096722000005408188288204202930000068					
044998028205055089599988000005008188286704201710000094					
045688028149056379716299000005108188286704200190000089					

99999 - “шапка”, отделяющая одну серию от другой.

7603901993057110041153200009703600001600387307100580511

- “головная” строка.

“Головная строка” содержит следующую информацию:

колонки 01 - 07 : 7603901 - номер для отождествления спутника;

колонки 08 - 09 : 99 - номер года от начала столетия;

колонки 10 - 12 : 305 - номер дня от начала года;

колонки 13 - 16 : 7110 - номер для отождествления станции;

колонки 21 - 24 : 5320

- длина волны лазерного излучателя в единицах 0.1 нанометра;

колонка 43 : 7

- индикатор длительности интервала осреднения “сырых” наблюдений:

0 = одиночное наблюдение,

2 = интервал осреднения 10 секунд,

3 = интервал осреднения 15 секунд,

4 = интервал осреднения 20 секунд,

5 = интервал осреднения 30 секунд,

6 = интервал осреднения 1 минута,

7 = интервал осреднения 2 минуты,

8 = интервал осреднения 3 минуты,

9 = интервал осреднения 5 минут;

колонка 44 : 3 - индикатор шкалы времени:

3 = UTC (USNO),

4 = UTC (GPS),

7 = UTC (BIH);

колонки 53 - 54 : 51

- контрольная сумма: остаток от деления суммы цифр на 100.

021502028191051419271661000005908187288204200450000047

- строка результатов измерений.

Строка результатов измерений содержит следующую информацию:

колонки 01 - 12 : 021502028191

- момент излучения импульса,

измеряемый в единицах 0.1 микросекунды от 0 часов UTC,

если интервал наблюдений пересекает отметку 24 часа UTC, то приводится остаток от деления на 86400 секунд;

колонки 13 - 24 : 051419271661

- разность между моментом приёма

и моментом излучения импульса в пикосекундах;

колонки 25 - 31 : 0000059

- стандартное отклонение разности

между моментами приёма и возвращения импульса в пикосекундах;

колонки 32 - 36 : 08187

- атмосферное давление в единицах 0.1 миллибар;

колонки 37 - 40 : 2882

- температура по шкале Кельвина в единицах 0.1 градуса;

колонки 41 - 43 : 042 - относительная влажность в процентах;

колонки 44 - 47 : 0045

– количество одиночных измерений,
использованных при образовании данной “нормальной” точки;
колонки 48 – 52 : 00000 – не используются;
колонки 53 – 54 : 47 – контрольная сумма.

Топоцентрическая дальность

$\rho(t_r)$ вычисляется на момент отражения импульса на спутнике t_r . Пусть c – скорость света, t_e – момент излучения импульса, τ – разность между моментами приёма и излучения импульса. Напишите, пожалуйста, две простые формулы для вычисления момента времени t_r и топоцентрической дальности $\rho(t_r)$.

Несколько спутников.

В табл.2 для нескольких спутников представлены средние значения минимальной высоты полёта h_{min} в километрах, эксцентриситета орбиты e , угла наклона i в градусах, среднего движения n в оборотах за сутки, скорости изменения аргумента перигея $\dot{\omega}$ в градусах за сутки, скорости изменения долготы восходящего узла $\dot{\Omega}$ в градусах за сутки и количество “нормальных мест” N_p , обычно получаемых на интервалах наблюдений протяжённостью один месяц.

Таблица 2: Несколько объектов

Спутник	h_{min}	e	i	n	$\dot{\omega}$	$\dot{\Omega}$	N_p
9306102 <i>Стелла</i>	800	0.0007	98.476	14.27121	-2.9342	0.9695	3000
7501001 <i>Старлет</i>	900	0.0206	49.817	13.82205	3.3041	-3.9476	4000
8606101 <i>Эйджисаи</i>	1500	0.0011	50.010	12.44446	2.5461	-3.0752	8000
7603901 <i>Лагеос</i>	6000	0.0044	109.835	6.38665	-0.2137	0.3425	5000
9207002 <i>Лагеос-2</i>	6000	0.0137	52.650	6.47295	0.4370	-0.6316	5000
8900103 <i>Эталон-1</i>	19500	0.0012	65.312	2.13156	-0.0062	-0.0320	600
8903903 <i>Эталон-2</i>	19500	0.0011	64.778	2.13205	-0.0036	-0.0332	600

Навигационные данные.

Учёные Соединённых Штатов Америки предоставляют всем пользователям уникальные результаты: положения навигационных спутников (GPS) в земной системе отсчёта [226]. День за днём, неделя за неделей в Интернете появляются наборы данных в формате SP3 [227] и наборы данных с численными значениями параметров вращения Земли.

Высокоточные лазерные наблюдения и положения навигационных объектов являются критерием для надёжной оценки погрешности восстановления орбиты на основе начальных данных в форме средних кеплеровских элементов.

С их помощью будет выполнена проверка функциональных возможностей алгоритмов модели движения искусственных спутников Земли (с.137).

Атмосферная задержка.

Каждая строка в наборе данных “Quick Look” [212] содержит метеорологическую информацию на момент наблюдений.

Метеорологические данные необходимы для вычисления задержки, возникающей при прохождении лазерного луча в атмосфере Земли. Задержка приводит к увеличению промежутка времени между моментами испускания и приёма импульса.

Пусть P_0 – атмосферное давление в миллибарах, T_0 – температура воздуха в градусах шкалы Кельвина, R_h – влажность воздуха в процентах на момент наблюдений. Длину волны лазерного излучателя, измеряемую в микрометрах, обозначим λ . Для вычисления поправки $\Delta\rho$, обусловленной задержкой в атмосфере, должны быть известны координаты станции наблюдений: геодезическая широта φ и высота над уровнем моря H в километрах. Необходимо знать также численное значение угловой высоты спутника над горизонтом h . Величина h может быть вычислена только в процессе дифференциального улучшения параметров орбиты на основе наблюдений.

В стандартах МЕРИТ [228] рекомендован следующий алгоритм вычисления задержки в атмосфере:

$$\Delta\rho = \frac{f(\lambda)}{f(\varphi, H)} \cdot \frac{A + B}{\sin h + \frac{B}{(A + B)/(\sin h + 0.01)}},$$

где

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= 0.9650 + \frac{0.0164}{\lambda^2} + \frac{0.000228}{\lambda^4}, \\ f(\varphi, H) &= 1 - 0.0026 \cos 2\varphi - 0.00031 H, \\ A &= 0.002357 P_0 + 0.000141 e_0, \\ B &= 1.084 \cdot 10^{-8} P_0 T_0 K + 4.734 \cdot 10^{-8} \frac{P_0^2}{T_0} \frac{2}{3 - 1/K}, \\ K &= 1.163 - 0.00968 \cos 2\varphi - 0.00104 T_0 + 0.1435 \cdot 10^{-4} P_0, \\ p &= \frac{7.5 (T_0 - 273.15)}{237.3 + (T_0 - 273.15)}, \\ e_0 &= 0.0611 \cdot R_h \cdot 10^p. \end{aligned}$$

Дж. Марини и К. Маррей опубликовали эти формулы в 1973 году в одном из отчётов НАСА.

Как Вы полагаете, с каким знаком надо учесть атмосферную задержку $\Delta\rho$ в численном значении топоцентрической дальности $\rho(t_r)$?

Замечания

Мы свели дифференциальные уравнения промежуточного движения к квадратурам. Для решения уравнений движения был использован метод Гамильтона – Якоби [73, 4]. Другой способ интегрирования, основанный на использовании регуляризирующего времени, был предложен в работах Е.П.Аксёнова, Е.А.Гребеникова и В.Г.Дёмина [11, 14].

Вопросам составления алгоритмов и программированию аналитических операций много внимания уделено в монографиях В.А.Брумберга [39] и Н.В.Емельянова [74]. Конструктивным методам решения задач небесной механики посвящена книга Е.А.Гребеникова и Ю.А.Рябова [66].

Решение Д.Брауэра главной проблемы движения ИСЗ содержится в монографии [38], но первой публикацией была статья [199], в которой доктор Д.Брауэр извлёк из забвения замечательный метод Цайпеля.

В том же номере журнала, вместе со статьёй [199], напечатаны оригинальные результаты Б.Гарфинкеля [205] и И.Козаи [217].

Решение главной проблемы в пионерской статье В.Ф.Проскурина и Ю.В.Батракова [137] было получено совершенно другим способом.

А.Пуанкаре показал, что все новые методы небесной механики являются асимптотическими [138]. Среди множества допустимых начальных значений параметров существуют такие их комбинации, при которых решение окажется расходящимся. Д.Брауэр отмечает, что для углов наклонов спутника i , близких к “критическому” значению, определяемому равенством $5 \sin^2 i = 4$, выведенные им формулы не дают правильного результата.

К.В.Холшевников провёл серьёзное исследование асимптотических методов и предложил ряд модификаций традиционных подходов. Возмущающее действие второй зональной гармоники было учтено в аналитической форме с точностью до второго порядка. Результаты представлены в монографии [174].

А.Депри и А.Ром [203], А.Л.Кутузов [104] и Х.Киношита [216] сообщают о решении главной проблемы методом Депри – Хори с помощью выполнения канонических преобразований на ЭВМ с точностью до четвёртого порядка малости относительно сжатия. О повторении этих достижений есть несколько строк в статьях И.В.Тупиковой [165], С.М.Кудрявцева [100] и в большом обзорном докладе В.И.Бормотова [37].

В.В.Нестеров и Г.В.Романова в работах [117, 120] на основе промежуточной орбиты Акснеса построили аналитическую теорию движения ИСЗ, создали оригинальные вычислительные программы, выполнили обработку лазерных наблюдений и получили числовые значения ряда геодинимических параметров [118, 139].

Лекция 4. Качественные исследования

Область изменения сфероидальных координат. — Возможный характер движений. — Исследование корней многочленов. — Новые постоянные. — Качественная картина.

Рассмотрим уравнения (92), связывающие прямоугольные координаты x, y, z со сфероидальными координатами ξ, η, w . Очевидно, мы можем считать, что переменные ξ, η, w могут принимать значения в следующей области:

$$0 \leq \xi < \infty, \quad -1 \leq \eta \leq +1, \quad -\infty < w < +\infty. \quad (122)$$

Из (92) следует, что если согласно уравнениям движения координата ξ будет изменяться в ограниченных пределах, то и прямоугольные координаты будут также величинами ограниченными, а следовательно, и движение спутника будет происходить в ограниченной части пространства. Но если ξ будет величиной неограниченной, то и движение будет происходить в неограниченном пространстве.

Выясним теперь возможный характер движений, допускаемых уравнениями промежуточного движения. С этой целью рассмотрим сначала интеграл энергии:

$$V^2 = \frac{2fm(\xi - c\sigma\eta)}{\xi^2 + c^2\eta^2} + 2\alpha_1. \quad (123)$$

Так как левая часть этого равенства есть величина неотрицательная, то

$$\frac{fm(\xi - c\sigma\eta)}{\xi^2 + c^2\eta^2} + \alpha_1 \geq 0. \quad (124)$$

Разберём отдельно случаи $\alpha_1 < 0$, $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_1 > 0$. Если $\alpha_1 < 0$, то, обозначая через α' положительную величину $-fm/2\alpha_1$, мы из условия (124) найдём

$$(\xi - \alpha')^2 + (c\eta + \sigma\alpha')^2 \leq \alpha'^2(1 + \sigma^2). \quad (125)$$

Если $\alpha_1 = 0$, то из (124) следует, что

$$\xi - c\sigma\eta \geq 0. \quad (126)$$

Наконец, при $\alpha_1 > 0$ будем иметь

$$(\xi + \alpha'')^2 + (c\eta - \sigma\alpha'')^2 \geq \alpha''^2(1 + \sigma^2), \quad (127)$$

где через α'' обозначена положительная величина $fm/2\alpha_1$.

Условия (126) и (127) показывают, что при $\alpha_1 \geq 0$ переменная ξ может принимать любые значения из области (122). А тогда, как уже было отмечено, движение спутника будет неограниченным в пространстве. При $\alpha_1 < 0$ из условия (125) вытекает, что ξ изменяется в следующих пределах:

$$\alpha'(1 - \sqrt{1 + \sigma^2}) \leq \xi \leq \alpha'(1 + \sqrt{1 + \sigma^2}),$$

и следовательно, в этом случае движение спутника будет происходить в ограниченной части пространства.

Итак, с точки зрения применения этих результатов к искусственным спутникам нас может интересовать только случай, когда постоянная энергии α_1 отрицательна.

Рассмотрим теперь интегралы (108), которые можно записать в виде

$$\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 = \Phi(\xi), \quad \left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2 = F(\eta).$$

Поскольку левые части этих интегралов суть величины неотрицательные, то области, в которых должны изменяться координаты ξ и η , определяются условиями

$$\Phi(\xi) \geq 0, \quad F(\eta) \geq 0. \quad (128)$$

Исследуем сначала многочлен $\Phi(\xi)$:

$$\Phi(\xi) = 2\alpha_1\xi^4 + 2fm\xi^3 + (2\alpha_1c^2 - \alpha_2^2)\xi^2 + 2fmc^2\xi + c^2(\alpha_3^2 - \alpha_2^2).$$

Обозначим его корни через $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ и покажем, что все они не могут быть комплексными. Действительно, когда $\alpha_1 < 0$, коэффициент при ξ^4 отрицателен, и поэтому в случае всех комплексных корней многочлен $\Phi(\xi)$ принимал бы только отрицательные значения и, как следует из (128), мы тогда бы не имели никаких реальных движений. Поэтому многочлен $\Phi(\xi)$ должен иметь два действительных корня (пусть это будут ξ_1 и ξ_2). Таким образом, для многочлена $\Phi(\xi)$ имеются только следующие возможности:

- а) ξ_1 и ξ_2 действительные, а ξ_3 и ξ_4 — комплексные,
- б) $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ — все действительные.

Поведение многочлена $\Phi(\xi)$ в этих случаях показано на рисунке 3.

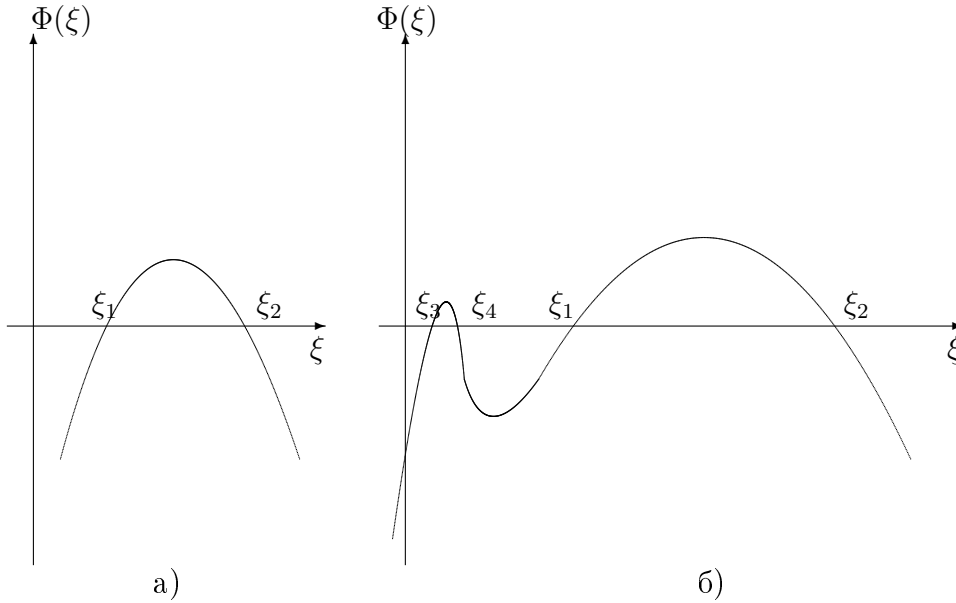


Рис. 3: График многочлена $\Phi(\xi)$

Перейдём к изучению многочлена $F(\eta)$:

$$F(\eta) = -2\alpha_1 c^2 \eta^4 + 2fmc\sigma \eta^3 + (2\alpha_1 c^2 - \alpha_2^2) \eta^2 - 2fmc\sigma \eta - (\alpha_3^2 - \alpha_2^2).$$

Прежде всего имеем

$$\left. \begin{aligned} F(-1) &= -\alpha_3^2 \leq 0, & F(+1) &= -\alpha_3^2 \leq 0, \\ F(-\infty) &> 0, & F(+\infty) &> 0. \end{aligned} \right\} \quad (129)$$

Отсюда видно, что многочлен $F(\eta)$ имеет два корня, один из которых меньше или равен -1 , а второй больше или равен $+1$. Обозначим эти корни соответственно через η_3 и η_4 . Покажем, что два других корня (пусть η_1 и η_2) являются также вещественными и лежат на отрезке $[-1, +1]$. Действительно, если бы многочлен $F(\eta)$ не имел таких корней, то никакими вещественными значениями η мы не смогли бы удовлетворить одновременно второму условию (128) и второму условию (122). Поведение многочлена $F(\eta)$ показано на рисунке 4.

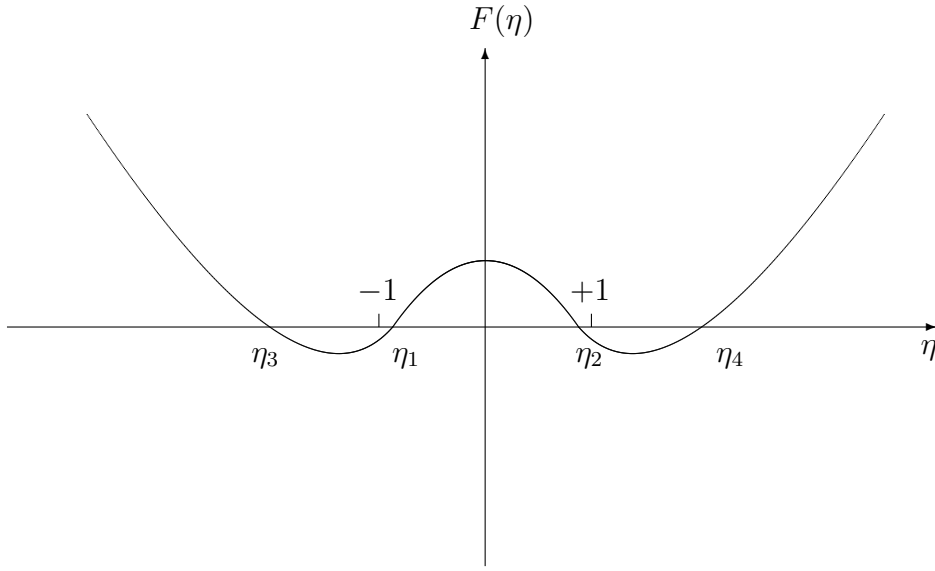


Рис. 4: График многочлена $F(\eta)$

Из проведённого анализа следует, что переменная η будет изменяться в области

$$-1 \leq \eta_1 \leq \eta \leq \eta_2 \leq +1. \quad (130)$$

Для переменной ξ в случае а) мы имеем

$$\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \quad (131)$$

а в случае б) возможны две области изменения ξ :

$$\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2 \text{ и } \xi_3 \leq \xi \leq \xi_4. \quad (132)$$

Однако, как мы покажем в дальнейшем, меньшие корни (пусть ξ_3

и ξ_4) при всех допустимых значениях α_1 , α_2 и α_3 не будут превосходить постоянной c . Но на основании формул (92)

$$r = \sqrt{\xi^2 + 2c\sigma\xi\eta - c^2\eta^2 + c^2(1 + \sigma^2)}.$$

Поэтому во второй области (132) будет иметь место следующее ограничение:

$$r < c\sqrt{2 + 2\sigma + \sigma^2} \approx 330 \text{ км}, \quad (133)$$

а следовательно, эта область полностью лежит внутри Земли и её можно не рассматривать.

При выводе формул промежуточного движения важным моментом является выбор элементов орбиты. Ясно, что эта задача не имеет однозначного решения. Однако при её решении следует стремиться к тому, чтобы, во-первых, эти элементы имели наглядный геометрический смысл, во-вторых, чтобы они были близкими к соответствующим кеплеровским элементам и, в-третьих, чтобы выражения для координат спутника через элементы и время имели по возможности наиболее простой вид. Очевидно, что постоянные α_1 , α_2 , α_3 не удовлетворяют указанным требованиям. Поэтому вместо них мы будем пользоваться элементами a , e и δ , которые введём следующими формулами:

$$\xi_1 = a(1 - e), \quad \xi_2 = a(1 + e), \quad \eta_2 = \delta, \quad (134)$$

где $\xi_1 \leq \xi_2$ — два наибольших корня многочлена $\Phi(\xi)$, а η_2 — наибольший корень многочлена $F(\eta)$, лежащий на отрезке $[-1, +1]$. Наименьший корень многочлена $F(\eta)$, лежащий на отрезке $[-1, +1]$, будем обозначать $\eta_1 = \delta^*$. Условиям (130), (131), (132) удовлетворяют элементы a , e , δ , принимающие любые значения из области

$$a > 0, \quad 0 \leq e < 1, \quad \delta \leq 1. \quad (135)$$

При этом области (135) будут соответствовать *все возможные* ограниченные движения, допускаемые уравнениями промежуточного движения.

Связь между старыми постоянными $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и новыми a, e, δ будет даваться равенствами

$$\Phi[a(1 - e)] = 0, \quad \Phi[a(1 + e)] = 0, \quad F(\delta) = 0, \quad (136)$$

которые можно рассматривать как три линейных уравнения относительно неизвестных α_1, α_2^2 и α_3^2 . Решив эти уравнения, мы выразим α_1, α_2^2 и α_3^2 через элементы a, e, δ :

$$2\alpha_1 = -\frac{fm}{a} [1 - \varepsilon^2(1 - e^2)(1 - \delta^2)Q], \quad (137)$$

$$\alpha_2^2 = +fma(1 - e^2) [1 + 2\varepsilon^2(1 + e^2)(1 - \delta^2)Q + \varepsilon^4(1 - e^2)^2(1 - \delta^2)Q], \quad (138)$$

$$\alpha_3^2 = +fma(1 - e^2)(1 - \delta^2) [1 + 2\varepsilon^2(1 + e^2) + \varepsilon^4(1 - e^2)^2] Q, \quad (139)$$

где

$$\varepsilon = \frac{c}{a(1 - e^2)}, \quad (140)$$

$$Q = \frac{1 - 2\varepsilon\sigma\delta - \varepsilon^2\delta^2(1 - e^2)}{1 + 2\varepsilon^2\delta^2(1 + e^2) + \varepsilon^4\delta^4(1 - e^2)^2}. \quad (141)$$

Приравнявая $\eta_1 = \delta^*$ величине $-\delta + \Delta\delta$, получим неявное уравнение для вычисления поправки $\Delta\delta$:

$$\Delta\delta = \frac{2fmc\sigma(1 - \eta_2^2)}{(2\alpha_1c^2 - \alpha_2^2) + 2fmc\sigma\eta_1 - 2\alpha_1c^2(\eta_1^2 + \eta_2^2)}. \quad (142)$$

В конце этой лекции будет показано, что числовое значение параметра ε не превосходит $1/30$. Поэтому можно считать, что ε^2 и $\varepsilon\sigma$ имеют порядок 10^{-3} . Это обстоятельство, никак не использованное при решении уравнений (136), окажется, тем не менее, чрезвычайно полезным для определения численных значений параметров a, e, δ, δ^* на основе численных же значений постоянных $\alpha_1, \alpha_2^2, \alpha_3$. Очевидно, что в этом случае уравнения (137), (138), (139) и (142) могут быть разрешены относительно a, e, δ, δ^* методом последовательных приближений.

Постоянная $\alpha_z \geq 0$ в случае прямых движений и $\alpha_z < 0$ в случае движений обратных. Это обстоятельство является следствием того, что α_z есть проекция удельного момента количества движения спутника на ось Oz .

Из формул (92) легко находим

$$\frac{x^2 + y^2}{\xi^2 + c^2} + \frac{(z - c\sigma)^2}{\xi^2} = 1, \quad (143)$$

$$\frac{x^2 + y^2}{c^2(1 - \eta^2)} - \frac{(z - c\sigma)^2}{c^2\eta^2} = 1, \quad (144)$$

$$\frac{x}{\cos w} - \frac{y}{\sin w} = 0. \quad (145)$$

Равенства (143) и (144) показывают, что уравнению $\xi = \text{const}$ соответствует семейство сжатых эллипсоидов вращения, а уравнение $\eta = \text{const}$ определяет семейство однополостных гиперболоидов вращения. Ось вращения эллипсоидов и гиперболоидов совпадает с осью Oz неподвижной прямоугольной системы координат $Oxyz$, а их центры лежат в точке пересечения этой оси с плоскостью $z = c\sigma$. Далее, формула (145) при $w = \text{const}$ представляет собой уравнение плоскости, проходящей через ось Oz .

Согласно (130), (131) и (134) переменные ξ и η изменяются в следующих пределах:

$$a(1 - e) \leq \xi \leq a(1 + e), \quad (146)$$

$$\delta^* \leq \eta \leq \delta, \quad (147)$$

где δ^* – наименьший корень $F(\eta)$ на отрезке $[-1, +1]$.

Отсюда заключаем, что область пространства, где происходит движение спутника, представляет собой тороидальное тело, ограниченное двумя эллипсоидами $\xi = a(1 - e)$ и $\xi = a(1 + e)$, гиперболоидом $\eta = \delta$ (в верхнем полупространстве) и гиперболоидом $\eta = \delta^*$ (в нижнем полупространстве).

Большая и малая полуоси внутреннего ограничивающего эллипсоида соответственно равны

$$\sqrt{a^2(1 - e)^2 + c^2} \text{ и } a(1 - e),$$

а полуоси внешнего ограничивающего эллипсоида суть

$$\sqrt{a^2(1 + e)^2 + c^2} \text{ и } a(1 + e).$$

Эксцентриситеты внутреннего и внешнего эллипсоидов определяются соответственно формулами

$$e_1 = \frac{c}{\sqrt{a^2(1 - e)^2 + c^2}}, \quad e_2 = \frac{c}{\sqrt{a^2(1 + e)^2 + c^2}}.$$

Наибольшая разность между большой и малой полуосями (когда эллипсоид касается поверхности Земли) равна ~ 3.5 км. При неограниченном возрастании величины $a(1 - e)$ эти эллипсоиды стремятся к сферам, центр которых лежит южнее центра Земли примерно на 7.5 км.

Действительная и мнимая полуоси гиперболоида, ограничивающие движение в верхнем полупространстве, соответственно равны

$$c\sqrt{1 - \delta^2} \text{ и } c\delta.$$

Для второго гиперболоида подобные величины будут равны

$$c\sqrt{1 - \delta^{*2}} \text{ и } c\delta^*.$$

Поскольку δ^* есть функция a , e и δ , то область пространства, где происходит движение спутника, полностью определяется тремя элементами a , e и δ .

Орбита спутника касается одного эллипсоида, затем гиперболоида, второго эллипсоида и второго гиперболоида и так далее. На одной из следующих лекций (с.148) будет показано, что промежуточное движение спутника является условно-периодическим с тремя периодами.

В заключение найдём оценку для параметра ε и покажем, что сумма квадратов $\xi_3^2 + \xi_4^2$ меньших корней уравнения $\Phi(\xi) = 0$ не превосходит c^2 .

Поскольку малая полуось внутреннего ограничивающего эллипсоида не может быть меньше экваториального радиуса Земли, то

$$\varepsilon = \frac{c}{a(1 - e^2)} \leq \frac{c}{a(1 - e)} < \frac{c}{r_0},$$

а поэтому, если воспользоваться оценками численных значений параметров (49) на стр. 37, то $\varepsilon < 0.033$.

Итак, величины ε^2 и $\varepsilon\sigma$ имеют порядок 10^{-3} и пропорциональны малому параметру – сжатию Земли.

Два корня ξ_1, ξ_2 многочлена $\Phi(\xi)$ даются формулами (134). Для двух других корней теорема Виета гласит

$$\begin{aligned}\xi_3 + \xi_4 &= -\frac{fm}{\alpha_1} - (\xi_1 + \xi_2), \\ \xi_3 \cdot \xi_4 &= \frac{c^2(\alpha_3^2 - \alpha_2^2)}{2\alpha_1\xi_1\xi_2}.\end{aligned}$$

Используя выражения (137), (138), (139), получаем, что при малых числовых значениях ε и σ абсолютные значения корней ξ_3 и ξ_4 действительно не превосходят числового значения постоянной c .

Отметим частные случаи движения спутников Земли по орбитам в рамках обобщённой задачи двух неподвижных центров.

Пусть $e = 0$, тогда $\xi = a$, и движение спутника будет происходить по поверхности эллипсоидального пояса. При значениях $e = 0$ и $\delta = 1$ спутник будет двигаться в меридианной плоскости. Если положить $e = 0$ и $\delta = \delta^*$, то получим *круговую орбиту*, расположенную в плоскости, перпендикулярной оси вращения Земли и смещённой относительно плоскости экватора на $22.5 \cdot \varepsilon^2$ км. Предположим, что $e \neq 0$ и $\delta = 1$. В этом случае *полярная орбита* заключена внутри эллиптического кольца и будет касаться попеременно то внутреннего, то внешнего ограничивающего эллипса.

Семинар 7. Возмущающая функция

Учёный интерес.

Запуск Первого искусственного спутника Земли вызвал интерес учёных к задаче точного определения орбит космических объектов, возмущаемых аномалиями геопотенциала, притяжением Луны и Солнца, потенциалом, обусловленным приливами упругой Земли, сопротивлением атмосферы и световым давлением [172, 173]. Уже за первые десять лет были получены выдающиеся результаты: построена аналитическая теория движения ИСЗ на основе обобщённой задачи двух неподвижных центров [5], открыто обобщение одного из методов теории возмущений – метода канонических преобразований [174]. В баллистических центрах были разработаны алгоритмы численного интегрирования дифференциальных уравнений движения космических аппаратов [34]. В работах М.Л.Лидова и его учеников [106, 48, 108] успешно применён полуаналитический, или, что то же, численно-аналитический метод расчёта спутниковых орбит. Некоторые итоги подведены М.Л.Лидовым в обзорном докладе [107], там же намечены перспективы исследований. Что бы Вы добавили к этому величественному списку?

Уравнения движения.

В алгоритмах численного интегрирования используют уравнения движения объекта, записанные в инерциальной системе отсчёта.

Через \vec{r} и \vec{v} обозначим вектор положения и вектор скорости космического аппарата относительно центра Земли в системе экватора и эклиптики, фиксированных на стандартную эпоху J2000.0 (геоцентрическая небесная опорная система отсчёта). Уравнения движения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \vec{v}, \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= \vec{F}_E + \vec{F}_M + \vec{F}_S + \vec{F}_t + \vec{F}_o + \vec{F}_p + \vec{F}_r + \vec{F}_a, \end{aligned} \right\} \quad (148)$$

где

- \vec{F}_E — ускорение, обусловленное геопотенциалом,
- \vec{F}_M — ускорение, вызываемое притяжением Луны,
- \vec{F}_S — ускорение, вызываемое притяжением Солнца,
- \vec{F}_t — ускорение, обусловленное приливами упругой Земли,
- \vec{F}_o — ускорение, обусловленное океаническими приливами,
- \vec{F}_p — ускорение, вызываемое притяжением больших планет,
- \vec{F}_r — ускорение, обусловленное давлением солнечного света,
- \vec{F}_a — ускорение, обусловленное торможением в атмосфере.

Вычисление ускорений.

Ускорения \vec{F}_M , \vec{F}_S и \vec{F}_p вычисляются по формуле (76) на с.47.

Алгоритм вычисления векторов \vec{F}_E , \vec{F}_t и \vec{F}_o в небесной системе отсчёта включает в себя дифференцирование выражения для геопотенциала U (с.17), заданного в земной системе отчёта. Последовательность формул, составляющих этот алгоритм, рассмотрим на следующем занятии. Там же будет записано выражение для ускорения \vec{F}_r , обусловленного давлением солнечного света.

Эффекты, обусловленные торможением в верхней атмосфере Земли, частично могут быть учтены с помощью эмпирического коэффициента ускорения (с.137).

Как Вы думаете, почему в правой части второго уравнения системы (148) можно складывать векторы ускорений, вызываемые действием различных сил?

Аналитический подход.

При численном интегрировании очень важно без ошибок запрограммировать правые части уравнений движения, то есть три компонента вектора действующих сил.

Аналитический подход позволяет работать со скалярной функцией – гамильтонианом системы. Хороший тому пример — решение главной проблемы, опубликованное доктором Д.Брауэром [199].

Величина угла наклона орбиты искусственного спутника Земли, вычисляемая относительно неподвижного экватора геоцентрической небесной системы отсчёта, имеет *вековую* составляющую. Можете ли Вы объяснить это явление?

При аналитическом подходе удобна неинерциальная система отсчёта, связанная с истинным экватором и истинной точкой весеннего равноденствия и вращающаяся с переменной угловой скоростью $\vec{\Omega}(t)$ относительно небесной опорной системы отсчёта. С точностью до первых степеней малых величин запишем

$$\begin{aligned}\Omega_x(t) &= -\frac{d}{dt}(\Delta\varepsilon), \\ \Omega_y(t) &= +\dot{\theta}_A + \sin \varepsilon_A \frac{d}{dt}(\Delta\psi), \\ \Omega_z(t) &= -\dot{z}_A - \dot{\zeta}_A - \cos \varepsilon_A \frac{d}{dt}(\Delta\psi),\end{aligned}$$

где

ζ_A , z_A , θ_A – прецессионные параметры Ньюкома-Андуайе (с.27),

$\Delta\psi$, $\Delta\varepsilon$ – параметры нутации (с.28),

ε_A – наклон мгновенной эклиптики к подвижному экватору.

Вариации угла наклона относительно истинного экватора носят *периодический* характер. В уравнениях движения появляются *силы инерции*.

Канонические уравнения.

Пусть \vec{r} и $\dot{\vec{r}}$ – вектор положения и вектор скорости объекта в системе истинного экватора. Набору из трёх обобщённых координат – компонентам \vec{r} – соответствуют обобщённые импульсы – три компонента вектора $\vec{p} = \dot{\vec{r}} + [\vec{\Omega} \times \vec{r}]$.

Канонические уравнения в неинерциальной системе отсчёта имеют вид [126]:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial K}{\partial \vec{p}}, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial \vec{r}}, \quad (149)$$

где K – гамильтониан системы,

$$K = \frac{1}{2} |\vec{p}|^2 - \vec{\Omega} \cdot [\vec{r} \times \vec{p}] - W - R_{\oplus} - R_M - R_S - R_t - R_o, \quad (150)$$

W – потенциал обобщённой задачи двух неподвижных центров (с.36),

$R_{\oplus} = U - W$ – аномальная часть геопотенциала (с.39),

R_M – возмущающая функция, обусловленная действием Луны, (с.47),

R_S – возмущающая функция, обусловленная действием Солнца, (с.47),

R_t – возмущающая функция, обусловленная приливами упругой Земли,

R_o – возмущающая функция, обусловленная океаническими приливами.

Вы, конечно, уже догадались, что все возмущающие функции должны быть выражены в системе истинного экватора.

Приближённые формулы.

В алгоритмах численного интегрирования преобразования между системами отсчёта выполняются по точной формуле (36) на с.28. В аналитических преобразованиях используют приближённые формулы, точность которых ограничена первыми степенями малых величин.

Пусть x, y, z – координаты вектора \vec{r} в системе истинного экватора.

Координаты вектора \vec{r} в земной системе отсчёта обозначим $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$, а в системе среднего подвижного экватора – $\check{x}, \check{y}, \check{z}$.

С точностью до первых степеней малых параметров x_p, y_p (координаты полюса, с.28) и $\Delta\psi, \Delta\varepsilon$ формулы преобразования имеют вид

$$\hat{z} = z - x_p \cdot (x \cos S_{\oplus} + y \sin S_{\oplus}) - y_p \cdot (x \sin S_{\oplus} - y \cos S_{\oplus}) \quad (151)$$

для связи земной системы и истинного экватора и, для перехода от среднего подвижного экватора к истинному,

$$\begin{aligned} x &= \check{x} - \Delta\psi \cos \varepsilon_A \cdot \check{y} - \Delta\psi \sin \varepsilon_A \cdot \check{z}, \\ y &= \check{y} + \Delta\psi \cos \varepsilon_A \cdot \check{x} - \Delta\varepsilon \cdot \check{z}, \\ z &= \check{z} + \Delta\psi \sin \varepsilon_A \cdot \check{x} + \Delta\varepsilon \cdot \check{y}. \end{aligned} \quad (152)$$

Возмущающий потенциал.

Модуль расстояния равен $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Угол долготы, отсчитываемый от истинной точки весеннего равноденствия вдоль истинного экватора, обозначим $w = S_{\oplus} + \lambda$, причём S_{\oplus} – гринвичское истинное звёздное время (с.29), λ – угол долготы в земной системе отсчёта:

$$\cos w = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin w = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (153)$$

Пусть $\hat{z} = z + \Delta z$. (Сравните с формулой (151).) Разложим выражение для полинома Лежандра $P_n(\hat{z}/r)$ в ряд Тейлора и учтём формулу (13). С точностью до первого порядка относительно Δz получим

$$P_n\left(\frac{\hat{z}}{r}\right) = P_n\left(\frac{z}{r}\right) + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} P_n^{(1)}\left(\frac{z}{r}\right) \cdot \Delta z.$$

Аномальную часть геопотенциала (формула (53), с.39) в системе истинного экватора запишем в виде

$$\begin{aligned} R_{\oplus} = & \frac{fm}{r_0} \sum_{n=4}^{\infty} j_n \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1} P_n\left(\frac{z}{r}\right) \\ & + \frac{fm}{r_0} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1} P_n^{(k)}\left(\frac{z}{r}\right) [\hat{C}_{nk} \cos kw + \hat{S}_{nk} \sin kw] \\ & + \frac{fm}{r_0} \sum_{n=2}^4 \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1} P_n^{(1)}\left(\frac{z}{r}\right) [\tilde{C}_{n1} \cos w + \tilde{S}_{n1} \sin w], \end{aligned} \quad (154)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{C}_{nk} &= C_{nk} \cos kS_{\oplus} - S_{nk} \sin kS_{\oplus}, \quad \hat{S}_{nk} = C_{nk} \sin kS_{\oplus} + S_{nk} \cos kS_{\oplus}, \\ \tilde{C}_{n1} &= J_n \cdot (x_p \cos S_{\oplus} + y_p \sin S_{\oplus}), \quad \tilde{S}_{n1} = J_n \cdot (x_p \sin S_{\oplus} - y_p \cos S_{\oplus}). \end{aligned} \quad (155)$$

величины \hat{C}_{nk} , \hat{S}_{nk} , \tilde{C}_{n1} , \tilde{S}_{n1} являются функциями звёздного времени.

Примите во внимание определение присоединённых функций Лежандра (формула (13) на с.12), формулу (153), теоремы сложения для суммы аргументов тригонометрических функций и *убедитесь* в правильности следующего утверждения: рекуррентный алгоритм расчёта возмущающего потенциала (154) основан на начальных значениях четырёх функций координат спутника

$$\frac{r_0}{r}, \quad \frac{z}{r}, \quad \frac{x}{r}, \quad \frac{y}{r}. \quad (156)$$

Знаменатель $(\sqrt{x^2 + y^2})^k$, возникающий при вычислении $\cos kw$, $\sin kw$, сокращается с таким же выражением в числителе после раскрытия функции $P_n^{(k)}(z/r)$.

Притяжение светил.

Возмущающий потенциал, обусловленный притяжением Луны или Солнца, можно представить в виде (77) (с.47)

$$R_p = \frac{f m_p}{r_p} \sum_{n=2}^{N_p} \left(\frac{r}{r_p} \right)^n P_n \left(\frac{x x_p + y y_p + z z_p}{r r_p} \right),$$

в разложении остановлено $N_p - 1$ слагаемых, индекс p в случае Луны принимает значение M , в случае Солнца — S , \vec{r}_p — геоцентрический вектор положения возмущающего тела, r_p — геоцентрическое расстояние,

Угол долготы возмущающего тела, отсчитываемый от истинной точки весеннего равноденствия вдоль истинного экватора, обозначим w_p . Раскроем выражение

$$\frac{x x_p + y y_p + z z_p}{r r_p} = \frac{z}{r} \frac{z_p}{r_p} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r} \frac{\sqrt{x_p^2 + y_p^2}}{r_p} \cos(w - w_p)$$

и применим теорему сложения для полиномов Лежандра (формула (14), с.13):

$$P_n \left(\frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}_p)}{r r_p} \right) = P_n \left(\frac{z}{r} \right) P_n \left(\frac{z_p}{r_p} \right) + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)} \left(\frac{z}{r} \right) P_n^{(k)} \left(\frac{z_p}{r_p} \right) \cos k(w - w_p).$$

Формула (77) выглядит теперь так

$$\begin{aligned} R_p = & \frac{f m}{r_0} \sum_{n=2}^{N_p} \left(\frac{r}{r_0} \right)^n P_n \left(\frac{z}{r} \right) \cdot A_{n0}^{(p)} \\ & + \frac{f m}{r_0} \sum_{n=2}^{N_p} \sum_{k=1}^n \left(\frac{r}{r_0} \right)^n P_n^{(k)} \left(\frac{z}{r} \right) [A_{nk}^{(p)} \cos kw + B_{nk}^{(p)} \sin kw], \end{aligned} \quad (157)$$

где коэффициенты зависят только от координат возмущающего объекта

$$\begin{aligned} A_{n0}^{(p)} &= \left(\frac{f m_p}{f m} \right) \left(\frac{r_0}{r_p} \right)^{n+1} \cdot P_n \left(\frac{z_p}{r_p} \right), \\ A_{nk}^{(p)} &= 2 \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \left(\frac{f m_p}{f m} \right) \left(\frac{r_0}{r_p} \right)^{n+1} \cdot P_n^{(k)} \left(\frac{z_p}{r_p} \right) \cos kw_p, \\ B_{nk}^{(p)} &= 2 \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \left(\frac{f m_p}{f m} \right) \left(\frac{r_0}{r_p} \right)^{n+1} \cdot P_n^{(k)} \left(\frac{z_p}{r_p} \right) \sin kw_p. \end{aligned} \quad (158)$$

Сравните выражения (154) и (157) и убедитесь в том, что рекуррентный алгоритм расчёта потенциала (157), обусловленного притяжением третьего тела, основан на начальных значениях четырёх функций координат спутника

$$\frac{r}{r_0}, \quad \frac{z}{r}, \quad \frac{x}{r}, \quad \frac{y}{r}. \quad (159)$$

Эффект приливов.

Действие Луны и Солнца вызывает приливы упругой Земли. Во внешнем пространстве появляется дополнительный потенциал (формула (79) на с.48)

$$R_{pt} = \frac{fm}{r_0} \sum_{n=2}^3 k_{n0} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1} P_n\left(\frac{z}{r}\right) \cdot A_{n0}^{(p)} + \frac{fm}{r_0} \sum_{n=2}^3 \sum_{k=1}^n k_{nk} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1} P_n^{(k)}\left(\frac{z}{r}\right) [A_{nk}^{(p)} \cos kw + B_{nk}^{(p)} \sin kw], \quad (160)$$

где k_{nk} – числа Лява. В современной теории приливов параметры k_{2k} состоят из действительной k_{2k}^R и мнимой k_{2k}^I частей и зависят от частоты приливной волны. Параметры k_{3k} являются действительными числами. Коэффициенты $A_{nk}^{(p)}$, $B_{nk}^{(p)}$ зависят от координат возмущающего объекта в системе истинного экватора и определены соотношениями (158).

Рекуррентный алгоритм расчёта дополнительного потенциала (160) основан, как и в случае геопотенциала (154), на начальных значениях четырёх функций координат спутника (156).

Положения светил.

В алгоритмах численного интегрирования для расчёта мгновенных значений векторов положений Луны и Солнца в геоцентрической небесной системе отсчёта используют современную численную модель движения планет [232]. Для нескольких специально выбранных моментов внутри короткого интервала времени — одного шага интегрирования — вычисляют значения правых частей дифференциальных уравнений движения объекта (148). Составляют разделённые разности и аппроксимируют параметры движения полиномами по времени [208]. На каждом следующем шаге алгоритм вычислений повторяют и находят новые коэффициенты аппроксимирующих полиномов [158].

Аналитический подход предполагает вычисление *неопределённого интеграла* от возмущающей функции по независимой переменной – времени t . Смотрите, например, на с.44 решение главной проблемы, полученное доктором Д.Брауэром. Для взятия интеграла коэффициенты (158) должны быть выражены в аналитическом виде как функции угловых переменных, явно или неявно зависящих от времени. Как и в случае с преобразованиями систем отсчёта (с.86), приходится применять приближённые формулы. Здесь таковыми являются отрезки тригонометрических рядов, аппроксимирующие координаты Луны и Солнца на длительных интервалах времени [123]. В качестве угловых переменных необходимо использовать *фундаментальные аргументы* (35) (с.28). Именно эти величины входят составной частью в классические теории движения Луны и Солнца [1].

Семинар 8. Численная модель

Составляющие ускорения.

Геопотенциал U в земной системе координат имеет вид

$$U = \frac{fm}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{N_{max}} \sum_{k=0}^n \left(\frac{r_0}{r} \right)^n P_n^{(k)}(\sin \varphi) [C_{nk} \cos k\lambda + S_{nk} \sin k\lambda] \right\}.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{fm}{r}, \\ U_1 &= \sum_{n=2}^{N_{max}} \sum_{k=0}^n u_{nk}, \\ u_{nk} &= \frac{fm}{r} \left(\frac{r_0}{r} \right)^n P_n^{(k)}(\sin \varphi) [C_{nk} \cos k\lambda + S_{nk} \sin k\lambda]. \end{aligned}$$

Составляющие ускорения в земной системе координат — это частные производные от геопотенциала U по x , y , z :

$$\begin{aligned} F'_x &= -fm \frac{x}{r^3} + \frac{\partial U_1}{\partial x}, \\ F'_y &= -fm \frac{y}{r^3} + \frac{\partial U_1}{\partial y}, \\ F'_z &= -fm \frac{z}{r^3} + \frac{\partial U_1}{\partial z}. \end{aligned}$$

Рекуррентные формулы.

Полиномы Лежандра высших порядков могут быть вычислены при помощи рекуррентного соотношения

$$(n+1)P_{n+1}(z) - (2n+1)zP_n(z) + nP_{n-1}(z) = 0$$

и начальных значений $P_0(z) = 1$ и $P_1(z) = z$.

Две рекуррентных формулы для вычисления производных высших порядков имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{dP_n(z)}{dz} &= nP_{n-1}(z) + z \frac{dP_{n-1}(z)}{dz}, \\ \frac{d^k P_n(z)}{dz^k} &= (2n-1) \frac{d^{k-1} P_{n-1}(z)}{dz^{k-1}} + \frac{d^k P_{n-2}(z)}{dz^k}. \end{aligned}$$

Каждое слагаемое геопотенциала

$$u_{nk} = \frac{fm}{r} \left(\frac{r_0}{r} \right)^n P_n^{(k)}(\sin \varphi) [C_{nk} \cos k\lambda + S_{nk} \sin k\lambda]$$

представим в виде произведения трёх сомножителей

$$\begin{aligned} R_n \left(\frac{1}{r} \right) &= \frac{fm}{r} \left(\frac{r_0}{r} \right)^n, \\ Z_{nk} \left(\frac{z}{r} \right) &= \frac{d^k P_n(\sin \varphi)}{d(\sin \varphi)^k}, \\ Z_{n0} \left(\frac{z}{r} \right) &= P_n \left(\frac{z}{r} \right), \\ Q_{nk} \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r} \right) &= (\cos \varphi)^k [C_{nk} \cos k\lambda + S_{nk} \sin k\lambda]. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{nk}}{\partial x} &= + \frac{dR_n}{d(1/r)} \frac{\partial(1/r)}{\partial x} \cdot Z_{nk} \cdot Q_{nk} \\ &+ R_n \cdot \frac{dZ_{nk}}{d(z/r)} \frac{\partial(z/r)}{\partial x} \cdot Q_{nk} \\ &+ R_n \cdot Z_{nk} \cdot \left[\frac{\partial Q_{nk}}{\partial(x/r)} \frac{\partial(x/r)}{\partial x} + \frac{\partial Q_{nk}}{\partial(y/r)} \frac{\partial(y/r)}{\partial x} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{nk}}{\partial y} &= + \frac{dR_n}{d(1/r)} \frac{\partial(1/r)}{\partial y} \cdot Z_{nk} \cdot Q_{nk} \\ &+ R_n \cdot \frac{dZ_{nk}}{d(z/r)} \frac{\partial(z/r)}{\partial y} \cdot Q_{nk} \\ &+ R_n \cdot Z_{nk} \cdot \left[\frac{\partial Q_{nk}}{\partial(x/r)} \frac{\partial(x/r)}{\partial y} + \frac{\partial Q_{nk}}{\partial(y/r)} \frac{\partial(y/r)}{\partial y} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{nk}}{\partial z} &= + \frac{dR_n}{d(1/r)} \frac{\partial(1/r)}{\partial z} \cdot Z_{nk} \cdot Q_{nk} \\ &+ R_n \cdot \frac{dZ_{nk}}{d(z/r)} \frac{\partial(z/r)}{\partial z} \cdot Q_{nk} \\ &+ R_n \cdot Z_{nk} \cdot \left[\frac{\partial Q_{nk}}{\partial(x/r)} \frac{\partial(x/r)}{\partial z} + \frac{\partial Q_{nk}}{\partial(y/r)} \frac{\partial(y/r)}{\partial z} \right]. \end{aligned}$$

Частные производные от $1/r$, x/r , y/r , z/r по x , y , z равны

$$\begin{aligned}\frac{\partial(1/r)}{\partial x} &= -\frac{x}{r^3}, & \frac{\partial(1/r)}{\partial y} &= -\frac{y}{r^3}, & \frac{\partial(1/r)}{\partial z} &= -\frac{z}{r^3}, \\ \frac{\partial(x/r)}{\partial x} &= \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}, & \frac{\partial(x/r)}{\partial y} &= -\frac{xy}{r^3}, & \frac{\partial(x/r)}{\partial z} &= -\frac{xz}{r^3}, \\ \frac{\partial(y/r)}{\partial x} &= -\frac{xy}{r^3}, & \frac{\partial(y/r)}{\partial y} &= \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}, & \frac{\partial(y/r)}{\partial z} &= -\frac{yz}{r^3}, \\ \frac{\partial(z/r)}{\partial x} &= -\frac{xz}{r^3}, & \frac{\partial(z/r)}{\partial y} &= -\frac{yz}{r^3}, & \frac{\partial(z/r)}{\partial z} &= \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3}.\end{aligned}$$

Вычисление производной

$$Z_{nk}(\sin \varphi) = \frac{d^k P_n(\sin \varphi)}{d(\sin \varphi)^k}$$

выполняется на основе рекуррентных формул, приведённых выше. Для значения индекса $k = 1$ удобна первая формула:

$$\frac{dP_n(z/r)}{d(z/r)} = nP_{n-1}(z/r) + z \frac{dP_{n-1}(z/r)}{d(z/r)}.$$

При $k > 1$ следует применять вторую формулу:

$$\frac{d^k P_n(z/r)}{d(z/r)^k} = (2n-1) \frac{d^{k-1} P_{n-1}(z/r)}{d(z/r)^{k-1}} + \frac{d^k P_{n-2}(z/r)}{d(z/r)^k}.$$

Рекуррентная формула для вычисления сомножителя $Q_{nk}(x/r, y/r)$ получается следующим образом. Обозначим

$$Q_{nk}\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right) = C_{nk} \cdot X_k + S_{nk} \cdot Y_k,$$

где

$$X_k = (\cos \varphi)^k \cos(k\lambda), \quad Y_k = (\cos \varphi)^k \sin(k\lambda).$$

При $k = 0$ имеем

$$X_0 = 1, \quad Y_0 = 0.$$

При $k = 1$ получаем

$$X_1 = \frac{x}{r} = \cos \varphi \cos \lambda, \quad Y_1 = \frac{y}{r} = \cos \varphi \sin \lambda.$$

Вывод рекуррентных соотношений основан на формулах сложения тригонометрических функций:

$$X_k = X_{k-1} \frac{x}{r} - Y_{k-1} \frac{y}{r}, \quad Y_k = Y_{k-1} \frac{x}{r} + X_{k-1} \frac{y}{r}.$$

Частные производные.

В алгоритме численного интегрирования уравнений движения необходимо знать частные производные от элементарных сферических функций по прямоугольным координатам x , y , z . Замечая, что величины Z_{nk} являются функциями отношения z/r , а величины X_k , Y_k являются функциями отношений x/r , y/r , получаем производные

$$\frac{d Z_{nk}(z/r)}{d(z/r)} = \frac{d^{k+1} P_n(z/r)}{d(z/r)^{k+1}},$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_k}{\partial(x/r)} &= \frac{\partial X_{k-1}}{\partial(x/r)} \frac{x}{r} + X_{k-1} - \frac{\partial Y_{k-1}}{\partial(x/r)} \frac{y}{r}, \\ \frac{\partial X_k}{\partial(y/r)} &= \frac{\partial X_{k-1}}{\partial(y/r)} \frac{x}{r} - \frac{\partial Y_{k-1}}{\partial(y/r)} \frac{y}{r} - Y_{k-1}, \\ \frac{\partial Y_k}{\partial(x/r)} &= \frac{\partial Y_{k-1}}{\partial(x/r)} \frac{x}{r} + Y_{k-1} + \frac{\partial X_{k-1}}{\partial(x/r)} \frac{y}{r}, \\ \frac{\partial Y_k}{\partial(y/r)} &= \frac{\partial Y_{k-1}}{\partial(y/r)} \frac{x}{r} + \frac{\partial X_{k-1}}{\partial(y/r)} \frac{y}{r} + X_{k-1}. \end{aligned}$$

Завершив формирование частных производных

$$\frac{\partial U_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial U_1}{\partial z},$$

вычислим составляющие вектора ускорения F'_x , F'_y , F'_z в земной системе, а затем при помощи матрицы преобразования (36) получим вектор ускорения \vec{F}_E в геоцентрической небесной системе отсчёта.

Рекуррентный алгоритм заключается в следующем: для каждого значения индекса k от $k = 0$ до $k = N_{max}$ выполняется цикл по индексу n от $n = k$ до $n = N_{max}$.

Световое давление.

Для определения ускорения, обусловленного давлением солнечного излучения, вычисляют вектор положения спутника $\vec{r}(t) - \vec{r}_S(t')$ относительно Солнца с учётом времени распространения света. Ускорение имеет вид

$$\vec{F}_r = C_r \left(\frac{a_E}{|\vec{r}(t) - \vec{r}_S(t')|} \right)^2 \cdot \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}_S(t')}{|\vec{r}(t) - \vec{r}_S(t')|}, \quad t' = t - \frac{|\vec{r}(t) - \vec{r}_S(t')|}{c}, \quad (161)$$

где a_E – астрономическая единица, c – скорость света.

Коэффициент отражения

C_r является произведением двух сомножителей, один из которых есть постоянная величина P_0 , а значение второго – сложная функция времени, определяемая конструктивными особенностями космического аппарата. Величина P_0 соответствует давлению солнечного света на среднем расстоянии Земли от Солнца:

$$P_0 = 4.5606 \cdot 10^{-6} \text{ н/м}^2.$$

Среднее расстояние приблизительно равно одной астрономической единице a_E . Значение коэффициента эффективного отражения определяется формулой

$$C_r = 10^{-3} \cdot P_0 \cdot k_r \cdot \frac{A_s}{m_s} \text{ (км/с}^2\text{)}, \quad (162)$$

где

k_r – эмпирический коэффициент отражения, $1 < k_r < 1.5$,

A_s – площадь поперечного сечения объекта, измеряемая в м^2 ,

m_s – масса объекта, измеряемая в кг.

Проверьте, пожалуйста, размерность в формуле (162).

Возмущающая функция.

В монографии 1977 года [5] профессор Е.П.Аксёнов замечает, что “если ввести функцию

$$R_r = -C_r \frac{a_E^2}{|\vec{r}(t) - \vec{r}_S(t')|} = -C_r r_0 \left(\frac{a_E}{r_S} \right)^2 \left(\frac{r}{r_0} \right) \left(\frac{x}{r} \frac{x_S}{r_S} + \frac{y}{r} \frac{y_S}{r_S} + \frac{z}{r} \frac{z_S}{r_S} \right), \quad (163)$$

то она будет возмущающей функцией, ибо её частные производные по координатам соответственно равны проекциям возмущающего ускорения (161) на координатные оси”. В выражении (163) использована формула (12) (с.12). В силу малости отношения r_0/r_S в разложении оставлен только один член, зависящий от четырёх функций (159). Координаты Солнца должны быть вычислены на момент t' .

Простое допущение.

Сферические объекты с однородной поверхностью сохраняют почти постоянное значение параметра C_r . Спутники Старлет, Стелла, Лагеос и Эталон, например, удовлетворяют этим условиям.

Сделаем следующее допущение: числовые значения величин C_r различны для разных объектов, являются постоянными во времени и подлежат определению на основе наблюдений.

Построение моделей изменения коэффициента эффективного отражения космических изделий сложной конфигурации может стать одной из тем Ваших будущих самостоятельных исследований.

Уточнение орбит.

Для проверки алгоритмов численной модели движения искусственных спутников Земли *используйте* навигационные данные системы GPS [226]. Наборы данных содержат информацию о прямоугольных координатах объектов в земной опорной системе отсчёта и параметрах вращения Земли на заданную дату полёта.

Из списка спутников выберите любой объект. Выберите одну из дат в двух прошедших месяцах. В совокупности файлов, распределённых по датам и номерам, найдите файл с данными для вашего спутника на выбранную дату. Значения трёх координат объекта, вычисленные в течение суток с шагом 15 минут, будут *изменяемыми параметрами*.

На эпоху, близкую к заданной дате, возьмите числовые значения ”средних элементов” кеплеровской орбиты [224] в формате ”двустрочные элементы”.

Значения ”средних элементов” близки параметрам промежуточной орбиты, основанной на решении обобщённой задачи двух неподвижных центров. Воспользуйтесь этим обстоятельством и вычислите вектор положения и вектор скорости объекта на начало суток выбранной Вами даты в геоцентрической небесной системе отсчёта.

Шесть параметров – три координаты и три скорости, заданные на определённый момент времени в небесной системе отсчёта – будут *улучшаемыми параметрами*. В число *уточняемых параметров* включите также эффективный коэффициент отражения C_r .

Выполните численное интегрирование уравнений движения с начальными значениями улучшаемых параметров. На каждый момент времени, на который известны значения измеряемых параметров, определите координаты объекта в небесной системе отсчёта. Выполните преобразование в земную систему отсчёта и образуйте разности измеряемых параметров и вычисленных координат.

Для получения изохронных производных примените метод вариаций. Процедуру численного интегрирования придётся повторить ещё 7 раз, при каждом повторе добавляя небольшую поправку к начальному значению одного из улучшаемых параметров. На основе найденных разностей и изохронных производных составьте систему 7 нормальных уравнений с 7 неизвестными. Решите эту систему и найдите поправки к начальным значениям уточняемых величин.

Выполните несколько итераций. Как Вы полагаете, *сходится* ли процесс дифференциального уточнения орбиты выбранного Вами спутника?

Повторите расчёты для других дат и других объектов. Обратите *внимание*, что оценка величины C_r для разных спутников приблизительно равна значению 10^{-10} км/с². Этому значению соответствует отношение площади поверхности объекта к его массе, равное 0.02 м²/кг.

Замечания

Предварительные качественные исследования были проведены в работе автора [10]. Подробный качественный анализ в симметричном случае ($\sigma = 0$) для отрицательных числовых значений постоянной энергии ($\alpha_1 < 0$) был дан в работе Е.П.Аксёнова, Е.А.Гребеникова и В.Г.Дёмина [12] и в общем случае в работе В.М.Алексеева [24]. Качественные исследования неограниченного движения были выполнены В.М.Чепуровой [179]. Полярные орбиты были подробно рассмотрены в работе В.С.Уральской [167]. Многие из указанных здесь исследований изложены в книгах В.Г.Дёмина [69] и В.В.Белецкого [30].

Недостатки промежуточных потенциалов, предложенных Т.Штерном, Б.Гарфинкелем и К.Акснесом, заключаются в следующем. Все они зависят не только от характеристик гравитационного поля Земли, но и от элементов орбиты спутника. Поэтому точность аппроксимации для разных орбит будет разной. Во всех случаях возмущающая функция содержит короткопериодические члены первого порядка относительно J_2 . Следовательно, промежуточные орбиты не учитывают этих возмущений, и их нужно определять методами теории возмущений.

Численное интегрирование уравнений движения искусственных спутников Земли – отдельная, интересная и трудная задача. Здесь выделяются замечательные исследования М.С.Ярова-Ярового [187, 188, 189].

В монографии Т.В.Бордовицыной [31] изучены самые современные методы численного интегрирования, даны примеры решения конкретных задач и сравнительные оценки точности.

Заслуживает внимания оригинальный метод [144], разработанный Н.А.Сорокиным. Уравнения движения представлены в виде, позволившем объединить метод Энке и промежуточную орбиту, построенную на основе решения обобщённой задачи двух неподвижных центров.

Коллектив авторов в составе С.К.Татевян, Н.А.Сорокина и С.Ф.Залёткина в статьях [157, 158] теоретически и практически развивает неявный одношаговый метод численного интегрирования, берущий начало от работ Е.Эверхарта [208] и Ю.В.Плахова [131].

Метод численного интегрирования уравнений движения позволяет выполнить независимую проверку результатов отдельных этапов построения аналитической теории движения небесных объектов. Об этом аспекте исследований смотрите, например, работы Е.П.Аксёнова и Л.М.Доможиловой [17, 18], Н.В.Емельянова [78, 79], С.М.Кудрявцева [100, 101].

В настоящее время во всех центрах обработки высокоточных лазерных наблюдений ИСЗ применяют метод численного интегрирования.

Лекция 5. Обращение квадратур

Эллиптические функции Якоби. — Определение координаты ξ . — Определение координаты η . — Связь между $\tilde{\varphi}$ и ψ . — Неявный вид соотношений. — Алгоритм умножения многочленов.

На третьей лекции были найдены первые интегралы уравнений промежуточного движения, позволяющие записать общий интеграл задачи в квадратурах. Поскольку функции $F(\eta)$ и $\Phi(\xi)$, входящие в формулы (110), суть многочлены четвёртой степени, то полученные квадратуры являются эллиптическими, вследствие чего общее решение должно выражаться через *эллиптические интегралы и эллиптические функции*. Поэтому перед тем, как приступить к обращению квадратур, мы изложим основные сведения об эллиптических интегралах и функциях.

Пусть имеется интеграл вида

$$\int \frac{dz}{\sqrt{R(z)}},$$

где $R(z)$ есть многочлен четвёртой степени. Всегда существует такая дробно-линейная подстановка, которая приводит его к виду

$$\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}. \quad (164)$$

Интеграл (164) называется *эллиптическим интегралом первого рода в нормальной форме Лежандра*. Число k ($0 < k < 1$) называется *модулем* этого интеграла, а $k' = \sqrt{1-k^2}$ его *дополнительным модулем*.

Подстановкой $t = \sin \varphi$ эллиптический интеграл приводится к нор-

мальной тригонометрической форме

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (165)$$

Эллиптический интеграл, взятый в пределах от 0 до $\pi/2$, называется *полным эллиптическим интегралом первого рода* и обозначается $\mathbf{K}(k)$:

$$\mathbf{K}(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Рассмотрим теперь равенство

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (166)$$

С одной стороны, оно определяет u как однозначную функцию верхнего предела φ

$$u = F(\varphi, k).$$

С другой стороны, мы можем рассматривать верхний предел φ как функцию самого интеграла u . Такая функция обозначается

$$\varphi = \operatorname{am} (u, k)$$

и называется *амплитудой*. Таким образом, $\operatorname{am} (u, k)$ есть результат *обращения* эллиптического интеграла первого рода в нормальной тригонометрической форме Лежандра.

Эллиптические функции Якоби вводятся следующими формулами:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn} (u, k) &= \sin [\operatorname{am} (u, k)], \\ \operatorname{cn} (u, k) &= \cos [\operatorname{am} (u, k)], \\ \operatorname{dn} (u, k) &= \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 (u, k)}, \end{aligned}$$

и называются соответственно *эллиптическим синусом*, *эллиптическим косинусом* и *дельтой амплитуды*.

Часто модуль k опускают и пишут просто

$$\operatorname{am} u, \quad \operatorname{sn} u, \quad \operatorname{cn} u, \quad \operatorname{dn} u,$$

но всегда нужно помнить, что эти функции зависят от параметра k .

Разложение для $\mathbf{K}(k)$ имеет вид

$$\mathbf{K}(k) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \dots + \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 k^{2n} + \dots \right\}. \quad (167)$$

Ряд сходится при $k < 1$.

Приведём теперь квадратуры (110) к виду (166).

Два корня многочлена $\Phi(\xi)$ и новые постоянные a , e связаны формулами

$$\xi_1 = a(1 - e), \quad \xi_2 = a(1 + e).$$

Положим

$$\xi_3 = p + iq, \quad \xi_4 = p - iq$$

и воспользуемся теоремой Виета, которая даёт

$$\begin{aligned} 2(a + p) &= -\frac{fm}{\alpha_1}, \\ a^2(1 - e^2)(p^2 + q^2) &= \frac{c^2(\alpha_3^2 - \alpha_2^2)}{2\alpha_1}. \end{aligned} \quad (168)$$

Многочлен $\Phi(\xi)$ можно представить в виде

$$\Phi(\xi) = -2\alpha_1(\xi_2 - \xi)(\xi - \xi_1)[p^2 + q^2 - 2p\xi + \xi^2], \quad (169)$$

где q^2 в случае комплексных ξ_3 и ξ_4 будет величиной положительной, а в случае всех действительных корней — отрицательной.

На основании (110) и (169) запишем квадратуру для определения переменной ξ в виде

$$\int_{\xi_1}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi_2 - \xi)(\xi - \xi_1)[p^2 + q^2 - 2p\xi + \xi^2]}} = \sqrt{-2\alpha_1}(\tau + c_4), \quad (170)$$

где c_4 – постоянная интегрирования. Делая подстановку

$$\xi = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2} + \frac{\xi_1 - \xi_2}{2} \cdot \frac{(n' + n'') \cos \psi + (n' - n'')}{(n' - n'') \cos \psi + (n' + n'')}, \quad (171)$$

приведём уравнение (170) к виду

$$\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \bar{k}_2^2 \cos^2 \psi}} = \bar{\sigma}_2(\tau + c_4), \quad (172)$$

а для ξ получим выражение

$$\xi = \frac{a[1 - e\bar{e} + (\bar{e} - e) \cos \psi]}{1 + \bar{e} \cos \psi}, \quad (173)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_2 &= \sqrt{-2\alpha_1 n' n'' (1 - k_2^2)}, \\ \bar{k}_2^2 &= -\frac{k_2^2}{1 - k_2^2}, \\ k_2^2 &= \frac{(\xi_2 - \xi_1)^2 - (n' - n'')^2}{4n' n''}, \\ \bar{e} &= \frac{n' - n''}{n' + n''}, \\ n' &= \sqrt{p^2 + q^2 - 2p\xi_2 + \xi_2^2}, \\ n'' &= \sqrt{p^2 + q^2 - 2p\xi_1 + \xi_1^2}. \end{aligned} \right\} \quad (174)$$

Величины p , $p^2 + q^2$, \bar{k}_2^2 пропорциональны сжатию.

Дифференцируя равенство (173) по времени t и принимая во внимание выражения (109) и (172), найдём, что

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{a e \bar{\sigma}_2 (1 - \bar{e}^2) \sin \psi \sqrt{1 - \bar{k}_2^2 \cos^2 \psi}}{(\xi^2 + c^2 \eta^2)(1 + \bar{e} \cos \psi)^2}. \quad (175)$$

Следует подчеркнуть, что полученные здесь формулы справедливы как в случае, когда $\Phi(\xi)$ имеет пару комплексных корней и два действительных корня, так и в случае, когда все корни этого многочлена действительны. Это обстоятельство является следствием того, что подстановкой (171) можно пользоваться как при положительных, так и при отрицательных q^2 .

Два корня многочлена $F(\eta)$ и новые постоянные δ , δ^* связаны формулами

$$\eta_1 = \delta^*, \quad \eta_2 = \delta.$$

Согласно теореме Виета

$$\begin{aligned} \eta_3 + \eta_4 + \delta + \delta^* &= \frac{fm\sigma}{\alpha_1 c}, \\ \delta\delta^*\eta_3\eta_4 &= \frac{(\alpha_3^2 - \alpha_2^2)}{2\alpha_1 c^2}. \end{aligned}$$

Пусть

$$p' = \frac{\eta_3 + \eta_4}{2} c^2, \quad q'^2 - p'^2 = -c^2 \eta_3 \eta_4.$$

После несложных вычислений получаем

$$\begin{aligned} p' &= \frac{fm}{2\alpha_1} c \sigma - \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} c^2, \\ q'^2 - p'^2 &= -\frac{\alpha_2^2}{2\alpha_1} + c^2(1 - \eta_2^2 - \eta_1\eta_2 - \eta_1^2) + \frac{2fmc\sigma(\eta_1 + \eta_2)}{2\alpha_1}. \end{aligned}$$

Поскольку $\eta_3\eta_4 < 0$, то $q'^2 > 0$, и многочлен $F(\eta)$ можно представить в форме

$$F(\eta) = -2\alpha_1(\eta_2 - \eta)(\eta - \eta_1)[q'^2 - p'^2 + 2p'\eta - c^2\eta^2]. \quad (176)$$

На основании (110) и (176) запишем квадратуру для определения переменной η в виде

$$\int_{\eta_1}^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{(\eta_2 - \eta)(\eta - \eta_1)[q'^2 - p'^2 + 2p'\eta - c^2\eta^2]}} = \sqrt{-2\alpha_1}(\tau + c_3), \quad (177)$$

где c_3 – постоянная интегрирования.

Чтобы найти отсюда η , воспользуемся подстановкой

$$\eta = \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} + \frac{\eta_1 - \eta_2}{2} \cdot \frac{(m' + m'') \cos \tilde{\varphi} + (m' - m'')}{(m' - m'') \cos \tilde{\varphi} + (m' + m'')} \quad (178)$$

и приведём уравнение (177) к виду

$$\int_0^{\tilde{\varphi}} \frac{d\tilde{\varphi}}{\sqrt{1 - k_1^2 \cos^2 \tilde{\varphi}}} = \sigma_1(\tau + c_3), \quad (179)$$

а для η получим выражение

$$\eta = \frac{-s \cos \tilde{\varphi} + \gamma}{1 - d \cos \tilde{\varphi}}. \quad (180)$$

Параметры γ, d, k_1^2 – малые величины первого порядка,

$$\begin{aligned} m' &= \sqrt{q'^2 - p'^2 + 2p'\eta_2 - c^2\eta_2^2}, \\ m'' &= \sqrt{q'^2 - p'^2 + 2p'\eta_1 - c^2\eta_1^2}. \end{aligned} \quad (181)$$

Дифференцируя равенство (180) по времени t и принимая во внимание выражения (109) и (179), найдём, что

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{(s - \gamma d) \sigma_1 \sin \tilde{\varphi} \sqrt{1 - k_1^2 \cos^2 \tilde{\varphi}}}{(\xi^2 + c^2\eta^2)(1 - d \cos \tilde{\varphi})^2}. \quad (182)$$

Параметры в формулах определены явными соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sqrt{-2\alpha_1 m' m'' (1 + \hat{k}_1^2)}, \\ k_1^2 &= \frac{\hat{k}_1^2}{1 + \hat{k}_1^2}, \\ \hat{k}_1^2 &= \frac{c^2(\eta_2 - \eta_1)^2 + (m' - m'')^2}{4m' m''}, \\ s &= \frac{m'' \eta_2 - m' \eta_1}{m' + m''}, \\ \gamma &= \frac{m'' \eta_2 + m' \eta_1}{m' + m''}, \\ d &= \frac{m'' - m'}{m' + m''}. \end{aligned} \right\} \quad (183)$$

Переменные ψ и $\tilde{\varphi}$ связаны с τ уравнениями (172) и (179). При взятии интегралов воспользуемся разложением

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} (\cos \varphi)^{2n}$$

и первой из двух формул

$$\left. \begin{aligned} (\cos \varphi)^{2n} &= \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^n + \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{j=1}^n C_{2n}^{n+j} \cos 2j\varphi, \\ (\cos \varphi)^{2n-1} &= \frac{1}{2^{2n-2}} \sum_{j=1}^n C_{2n-1}^{n+j-1} \cos (2j-1)\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (184)$$

где для “биномиальных коэффициентов” принято обозначение

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

После интегрирования находим

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_2(\tau + c_4) &= \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(\bar{k}_2) \cdot \psi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} (\bar{k}_2^2)^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} C_{2n}^{n+j} \sin 2j\psi, \\ \sigma_1(\tau + c_3) &= \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(k_1) \cdot \tilde{\varphi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} (k_1^2)^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} C_{2n}^{n+j} \sin 2j\tilde{\varphi}.\end{aligned}$$

Если исключить отсюда τ , то получим

$$\tilde{\varphi} = (1 + \nu)\psi + \tilde{\omega}_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \varkappa_{2j} \sin 2j\psi + \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\varkappa}_{2j} \sin 2j\tilde{\varphi}, \quad (185)$$

где

$$\left. \begin{aligned}\nu &= +\frac{\sigma_1 \mathbf{K}(\bar{k}_2)}{\bar{\sigma}_2 \mathbf{K}(k_1)} - 1, \\ \varkappa_{2j} &= +\frac{\pi \sigma_1}{2 \bar{\sigma}_2 \mathbf{K}(k_1)} \frac{1}{j} \sum_{n=j}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} C_{2n}^{n+j} (\bar{k}_2^2)^n, \\ \bar{\varkappa}_{2j} &= -\frac{\pi}{2 \mathbf{K}(k_1)} \frac{1}{j} \sum_{n=j}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} C_{2n}^{n+j} (k_1^2)^n,\end{aligned}\right\} \quad (186)$$

$\tilde{\omega}_0$ – постоянная интегрирования, пропорциональная разности $c_3 - c_4$. Параметр ν является малой величиной первого порядка относительно сжатия. Параметры \varkappa_{2j} , $\bar{\varkappa}_{2j}$ пропорциональны сжатию в степени j , их числовые значения быстро убывают при увеличении индекса j . По этой причине верхний предел суммирования, равный бесконечности, можно с учётом вычислительной точности заменить на некоторое целое число J . Коэффициент при второй зональной гармонике разложения геопотенциала имеет порядок 10^{-3} , и численное значение $J = 7$ обеспечит точность вычислений с 20 значащими цифрами.

В случае кеплеровской промежуточной орбиты $c = 0$, $\sigma = 0$. При этих условиях

$$\xi = r, \quad \eta = \frac{z}{r}, \quad \bar{e} = e, \quad s = \delta = \sin(\text{угол наклона}).$$

Угловая переменная ψ аналогична истинной аномалии, а переменная $\tilde{\varphi}$ и постоянная интегрирования $\tilde{\omega}_0$ аналогичны аргументу широты и аргументу перигея, увеличенным на $\pi/2$.

В задаче двух тел связь аргумента широты с истинной аномалией линейная. В обобщённой задаче двух неподвижных центров угловые переменные ψ и $\tilde{\varphi}$ связаны неявным соотношением (185). Нахождение значения $\tilde{\varphi}$ по заданным численным значениям ψ и $\tilde{\omega}_0$ может быть выполнено методом последовательных приближений. В силу малости величин \varkappa_{2j} и $\bar{\varkappa}_{2j}$ приближения сходятся очень быстро.

Теперь, когда выполнено обращение квадратур (110) и найдены явные зависимости $\xi(\psi)$ и $\eta(\tilde{\varphi})$, можно перейти к вычислению эллиптических интегралов (111) и (112). В монографии [5] получены формулы в буквенном виде. Зависимость между переменными в этих формулах – явная. Точность вычислений ограничена вторым порядком малости относительно сжатия Земли. С помощью специальной программы “универсальный пуассоновский процессор” [39], созданной коллективом под руководством В.А.Брумберга, Н.В.Емельянов [76] довёл решение до четвёртого порядка.

При использовании неявных соотношений можно построить алгоритм для проведения расчётов с точностью, ограниченной только возможностями компьютера.

Пусть известны численные значения величин

$$\alpha_1, \alpha_2^2, \alpha_3.$$

Соотношения (137), (138), (139), (142) и метод последовательных приближений помогут найти значения

$$a, e, \delta, \delta^*.$$

Затем будут вычислены параметры (174), (183) и коэффициенты (186). После этого все необходимые нам функции могут быть представлены в виде многочленов с численными коэффициентами по степеням $\cos \psi$ или $\cos \tilde{\varphi}$.

Семинар 9. Аналитические операции

Функции Бесселя.

Одним из методов небесной механики является разложение функций эллиптического движения в периодические ряды по кратным средней аномалии l с помощью бесселевых функций, например:

$$\frac{a}{r} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_k(ke) \cos kl, \quad (187)$$

$$\cos v = -e + \frac{2(1-e^2)}{e} \sum_{k=1}^{\infty} J_k(ke) \cos kl, \quad (188)$$

$$\sin v = \sqrt{1-e^2} \sum_{k=1}^{\infty} [J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)] \sin kl, \quad (189)$$

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} + e \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{k+1}(ke) - J_{k-1}(ke)}{k} \cos kl, \quad (190)$$

$$\sin E = \frac{2}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_k(ke)}{k} \sin kl. \quad (191)$$

Функции Бесселя $J_k(x)$ вычисляются на основе разложения по степеням $x/2$:

$$J_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k}. \quad (192)$$

Задайте максимальные значения k_{max} и n_{max} и составьте алгоритм вычисления коэффициентов при величинах $(x/2)^{2n+k}$ для каждой функции Бесселя $J_k(x)$ от $k=0$ до $k=k_{max}$ и для всех значений $0 \leq n \leq n_{max}$.

Полученные результаты используйте для построения периодических рядов по кратным средней аномалии l для трёх функций эллиптического движения a/r , $\cos v$ и $\sin v$. Обратите внимание на большое число слагаемых в этих рядах. Проверьте разложения с помощью прямых вычислений для нескольких численных значений эксцентриситета орбиты e и средней аномалии l . Убедитесь, что даже в таких простейших случаях весьма затруднительно назначить максимальное количество учитываемых членов ряда с тем, чтобы вычисления на основе разложений не приводили к большим погрешностям для всех значений $0.0 \leq e \leq 0.2$, а при значениях $e = 0.7$ использование рядов не даёт результатов, близких к действительным значениям функций.

Попытайтесь сформулировать основное отличие формул, полученных с использованием истинной аномалии v (с.40), от рядов, составленных с помощью разложений по кратным средней аномалии l .

Приближённые формулы.

Вернёмся к материалу с.89 и рассмотрим вопрос о представлении функций от координат возмущающего тела (формулы (158) на с.88) в виде тригонометрических рядов. Классические теории движения Луны и Солнца построены в сферических координатах в системе мгновенной эклиптики и подвижной точки весеннего равноденствия [1].

Пусть r_p – расстояние от Земли до возмущающего тела, λ_p и β_p – эклиптическая долгота и эклиптическая широта возмущающего тела, ε_A – угол наклона мгновенной эклиптики к подвижному экватору.

Эклиптическая долгота Луны равна сумме средней долготы $F_M + \Omega_M$ и величины $\Delta\lambda_M$, состоящей из суммы тригонометрических слагаемых с малыми амплитудами. Эклиптическая широта Луны β_M и величина r_0/r_M тоже представляют из себя суммы тригонометрических слагаемых с численными коэффициентами. В случае Солнца достаточно использовать приближённые выражения [123]:

$$\begin{aligned}\lambda_S &= F_M - D + \Omega_M + 6895''3645 \sin l'_S + 72''0393 \sin 2 l'_S + 1''0436 \sin 3 l'_S, \\ \beta &= 0''576 \sin F_M, \\ a_E/r_S &= 1.0 + 0.0167148 \cos l'_S + 0.0002794 \cos 2 l'_S + 0.0000052 \cos 3 l'_S.\end{aligned}$$

Прямоугольные координаты возмущающего тела x_p , y_p , z_p в системе подвижного экватора даты определены формулами:

$$\begin{aligned}\frac{x_p}{r_p} &= \cos \lambda_p \cos \beta_p, \\ \frac{y_p}{r_p} &= \sin \lambda_p \cos \beta_p \cos \varepsilon_A - \sin \beta_p \sin \varepsilon_A, \\ \frac{z_p}{r_p} &= \sin \lambda_p \cos \beta_p \sin \varepsilon_A + \sin \beta_p \cos \varepsilon_A.\end{aligned}$$

Воспользуйтесь малостью поправки к средней долготе и малой величиной эклиптической широты и составьте алгоритм преобразования этих соотношений в суммы слагаемых с численными амплитудами и линейными комбинациями угловых переменных (35) в качестве аргументов тригонометрических функций. С помощью разложений для нутации в долготе $\Delta\psi$ и нутации в наклоне $\Delta\varepsilon$ и формулы (152) (с.86) переведите Ваши ряды в систему истинного экватора.

Далее следует применить рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра и присоединённых функций Лежандра и представить формулы (158) в виде тригонометрических рядов, аргументами которых являются линейные комбинации фундаментальных аргументов.

Понравились ли Вам такие “простейшие” *аналитические* операции?

Элементарное слагаемое.

Пусть a, e, i – кеплеровские элементы орбиты спутника (25), l, g, h – канонические угловые элементы Делоне (27).

Определим *элементарное слагаемое* как структуру вида

$$A \cdot \left(\frac{a}{r_0}\right)^{j_1} e^{j_2} \sin^{j_3} i \cos^{j_4} i \cdot \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} \vartheta, \quad (193)$$

где

$$\vartheta = k_1 l + k_2 g + k_3 h + k_4 S_{\oplus} + k_5 l_M + k_6 l'_S + k_7 F_M + k_8 D + k_9 \Omega_M, \quad (194)$$

A – одномерный массив действительных чисел, а показатели степени j_1, j_2, j_3, j_4 и коэффициенты $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, k_8, k_9$ принимают положительные и отрицательные целые значения и нуль. На данном этапе все элементы массива A , кроме первого, равны нулю.

Два элементарных слагаемых назовём “подобными”, если у них совпадают типы и аргументы тригонометрических функций и численные значения показателей степени позиционных переменных. “Подобные” слагаемые можно *складывать*. Сложению подлежат только соответствующие элементы одномерных массивов.

Операция *умножения* двух элементарных слагаемых заключается в следующем: первые элементы одномерных массивов перемножаются, показатели степени складываются, а типы функций и аргументы преобразуются по правилам умножения тригонометрических функций.

Операции сложения, умножения и приведения подобных членов, выполняемые над элементарными слагаемыми, не меняют их вида.

Проверьте, пожалуйста, следующее утверждение: взятие частных производных по позиционным элементам a, e, i и по угловым переменным l, g, h не меняет вида элементарного слагаемого, но при дифференцировании по каноническим элементам Делоне L, G, H структура (193) не сохраняется.

Неопределённый интеграл от слагаемого по переменной t равен

$$\frac{1}{\dot{\vartheta}} \cdot A \cdot \left(\frac{a}{r_0}\right)^{j_1} e^{j_2} \sin^{j_3} i \cos^{j_4} i \cdot \begin{pmatrix} + \sin \\ - \cos \end{pmatrix} \vartheta, \quad (195)$$

где точка означает дифференцирование угловых переменных по времени:

$$\dot{\vartheta} = k_1 \dot{l} + k_2 \dot{g} + k_3 \dot{h} + k_4 \dot{S}_{\oplus} + k_5 \dot{l}_M + k_6 \dot{l}'_S + k_7 \dot{F}_M + k_8 \dot{D} + k_9 \dot{\Omega}_M. \quad (196)$$

Вы, конечно, догадались, что формула (195), как и многие другие соотношения, порожденные аналитическим подходом, является *приближённой*. При каком условии, налагаемом на величину $\dot{\vartheta}$, эта формула будет точной?

“Начальные” функции.

Используя периодические ряды по кратным средней аномалии, представленные на с.106, представим каждую из пяти функций

$$\frac{r_0}{r} = \left(\frac{r_0}{a}\right)\left(\frac{a}{r}\right), \quad \frac{r}{r_0} = \left(\frac{a}{r_0}\right)\left(\frac{r}{a}\right), \quad \frac{x}{r}, \quad \frac{y}{r}, \quad \frac{z}{r} \quad (197)$$

в виде суммы элементарных слагаемых. Максимальную степень эксцентриситета орбиты **ограничим** числом 10, то есть положим $\max j_2 = 10$.

С помощью формулы (187) получаем, что все члены разложения величины r_0/r имеют постоянные показатели степени $j_1 = -1$, $j_3 = 0$, $j_4 = 0$, нулевые значения всех коэффициентов, кроме k_1 , и содержат функцию косинус. От слагаемого к слагаемому меняют свои числовые значения коэффициент A , показатель степени j_2 и первый коэффициент k_1 .

Аналогично, из формулы (190) следует, что члены разложения r/r_0 имеют фиксированные показатели степени $j_1 = +1$, $j_3 = 0$, $j_4 = 0$, нулевые значения всех коэффициентов, кроме первого, и содержат функцию косинус. От слагаемого к слагаемому изменяются численный коэффициент A , второй показатель степени j_2 и коэффициент k_1 .

Разложения (188) для $\cos v$ и (189) для $\sin v$ являются суммой слагаемых, имеющих структуру (193). Числовые значения всех показателей степени, кроме j_2 , и всех коэффициентов, кроме k_1 , равны нулю.

С учётом соотношений (26) на с.18 и (27) на с.21 запишем

$$\begin{aligned} \frac{x}{r} &= \cos v \cdot X_c + \sin v \cdot X_s, \\ \frac{y}{r} &= \cos v \cdot Y_s + \sin v \cdot Y_c, \\ \frac{z}{r} &= \cos v \cdot (-\sin i \cos g) + \sin v \cdot (+\sin i \sin g), \end{aligned} \quad (198)$$

где каждую из величин X_c , X_s , Y_c , Y_s , составляют четыре слагаемых:

$$\begin{aligned} X_c &= 0.5 \cdot (-\cos(g-h) + \cos(g+h) + \cos i \cos(g-h) + \cos i \cos(g+h)), \\ X_s &= 0.5 \cdot (+\sin(g-h) - \sin(g+h) - \cos i \sin(g-h) - \cos i \sin(g+h)), \\ Y_c &= 0.5 \cdot (+\cos(g-h) + \cos(g+h) - \cos i \cos(g-h) + \cos i \cos(g+h)), \\ Y_s &= 0.5 \cdot (+\sin(g-h) + \sin(g+h) - \cos i \sin(g-h) + \cos i \sin(g+h)). \end{aligned}$$

Выполняя операции умножения, сложения и приведения подобных членов, получим разложения “начальных” функций (198) в ряды, состоящие из элементарных слагаемых. Ряды являются приближёнными и число слагаемых невелико в силу пренебрежения членами, содержащими эксцентриситет орбиты в степени, превышающей выбранное максимальное значение $\max j_2 = 10$.

Алгоритмы рекурсии.

Простая идея заключается в том, что возмущающую функцию, обусловленную действием на спутник различных факторов, можно представить в виде суммы слагаемых, обладающих структурой (193).

Каждая из функций звёздного времени S_{\oplus} (формулы (155) на с.87) не зависит от координат объекта и является суммой двух элементарных слагаемых.

Функции от координат Луны и Солнца (формулы (158) на с.88) в результате аналитических операций (с.107) преобразованы к сумме членов типа (193).

Следующий шаг состоит в преобразовании функций, зависящих только от координат спутника, к сумме элементарных слагаемых. В качестве стартовых условий рекуррентных алгоритмов примем “начальные” функции (197).

Составьте рекуррентный алгоритм возведения в произвольную целую положительную степень и примените его для последовательного вычисления разложений:

$$\left(\frac{r_0}{r}\right)^{k+1} = \left(\frac{r_0}{r}\right) \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)^k, \quad \left(\frac{r}{r_0}\right)^{k+1} = \left(\frac{r}{r_0}\right) \cdot \left(\frac{r}{r_0}\right)^k, \quad \left(\frac{z}{r}\right)^{k+1} = \left(\frac{z}{r}\right) \cdot \left(\frac{z}{r}\right)^k. \quad (199)$$

Составьте алгоритм вычисления рядов для функций угла долготы w :

$$\begin{aligned} \left[1 - \left(\frac{z}{r}\right)^2\right]^{\frac{k+1}{2}} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} (k+1)w &= +\frac{x}{r} \left[1 - \left(\frac{z}{r}\right)^2\right]^{\frac{k}{2}} \begin{pmatrix} +\cos \\ +\sin \end{pmatrix} kw \\ &+ \frac{y}{r} \left[1 - \left(\frac{z}{r}\right)^2\right]^{\frac{k}{2}} \begin{pmatrix} -\sin \\ +\cos \end{pmatrix} kw. \end{aligned} \quad (200)$$

В табл.3 дано количество слагаемых при различных значениях целого числа k и $\max j_2 = 10$. В крайних колонках для трёх значений эксцентриситета орбиты

Таблица 3: Несколько чисел

k	$\left(\frac{r_0}{r}\right)^k$	$\left(\frac{r}{r_0}\right)^k$	$\left(\frac{z}{r}\right)^k$	$\left[1 - \left(\frac{z}{r}\right)^2\right]^{\frac{k}{2}} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} kw$	$e = 0.01$	$e = 0.07$	$e = 0.1$
1	27	29	53	204	15	14	13
2	36	34	78	410	15	14	12
7	36	36	260	3529	14	11	8
10	36	36	347	5208	13	7	3
13	36	36	458	7428	13	5	2

приведены оценки количества *верных* цифр в численных значениях при использовании разложений на основе рекуррентных формул (200). Оценки были получены при сравнении с точными значениями функций долготы w , вычисленными для различных значений элементов орбиты i , l , g , h .

Возмущающая функция.

С помощью определения присоединённых функций Лежандра (13) (с.12) запишем произвольное слагаемое возмущающего потенциала (154) (с.87)

$$\frac{fm}{r_0} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1} \frac{d^k P_n(z/r)}{d(z/r)^k} \left[1 - \left(\frac{z}{r}\right)^2\right]^{\frac{k}{2}} \cos kw \cdot \hat{C}_{nk}$$

и выделим в нём два сомножителя.

Первый сомножитель зависит только от координат спутника. Численный коэффициент fm/r_0 вычисляется на основе принятых значений геодинамических постоянных (с.34). Величина r_0/r в степени $n+1$ и функция угла долготы $\cos kw$ вместе с величиной $\sqrt{1 - (z/r)^2}$, возведённой в степень k , входят в этот сомножитель явно. Производная порядка k по аргументу z/r от полинома Лежандра $P_n(z/r)$ является многочленом порядка $n - k$ относительно z/r . После использования разложений (199) и (200) и операции умножения рядов первый сомножитель примет вид суммы элементарных слагаемых.

Второй сомножитель $\hat{C}_{nk} = C_{nk} \cos kS_{\oplus} - S_{nk} \sin kS_{\oplus}$ (формула (155)) так же является суммой двух элементарных слагаемых со структурой (193).

Аналогичным образом *запишите* произвольное слагаемое возмущающей функции, обусловленной притяжением Луны и Солнца (формула (157) на с.88), и выражения (160) на с.89, учитывающего возмущения от приливных деформаций, и представьте его как произведение двух сомножителей.

Составьте алгоритм выполнения операций умножения, сложения и приведения подобных членов над рядами, составляющими первый и второй сомножитель. Проведите вычисления для всех значений целых чисел n и k , указанных в формулах суммирования (154), (157), (160).

Убедитесь, что Вы выполнили разложение функций R_{\oplus} , $R_M + R_{Mt}$, $R_S + R_{St}$ в ряды, состоящие из элементарных слагаемых. Обратите внимание, что в полу-

Таблица 4: Число слагаемых

функция	n	k	N
R_{\oplus}	2 – 13	0	9689
R_{\oplus}	2 – 13	1 – n	443447
$R_M + R_{Mt}$	2 – 6	0 – n	80829
$R_S + R_{St}$	2 – 4	0 – n	2941

ченных рядах сохранена зависимость в буквенном виде как от позиционных a , e , i , так и от угловых l , g , h элементов орбиты спутника. Количество слагаемых N и диапазоны изменений n и k при условии $\max j_2 = 10$ представлены в табл.4.

Семинар 10. Влияние приливов

Приливные смещения.

В формуле (29) на с.24 величина смещения наземных пунктов обозначена

$$\sum_i \Delta \vec{R}_i(t). \quad (201)$$

В публикации Международной службы вращения Земли [211] предложен следующий алгоритм определения отдельных составляющих этой суммы.

Система отсчёта.

Координаты станции наблюдений, Луны, Солнца и вектор смещения $\Delta \vec{R}_i$ вычисляются в земной опорной системе отсчёта.

Условные обозначения.

Пусть

- fm – геоцентрическая гравитационная постоянная,
- fm_2 – гравитационный параметр Луны,
- fm_3 – гравитационный параметр Солнца,
- r, φ, λ – сферические координаты наземного пункта,
- $r_2, \varphi_2, \lambda_2$ – сферические координаты Луны,
- $r_3, \varphi_3, \lambda_3$ – сферические координаты Солнца,
- \hat{r} – геоцентрический единичный вектор наземного пункта,
- \hat{r}_2 – геоцентрический единичный вектор Луны,
- \hat{r}_3 – геоцентрический единичный вектор Солнца,
- \hat{e} – единичный вектор, направленный к востоку,
- $\hat{n} = [\hat{r} \times \hat{e}]$ – единичный вектор, направленный на север.

$$\hat{r} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \hat{e} = \begin{pmatrix} -\sin \lambda \\ \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{n} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda \\ -\sin \varphi \sin \lambda \\ \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Успехи геофизики.

В рамках современной теории упругости Земли, разработанной геофизиками, определены значения чисел Лява k_2, k_3, h_2, h_3 и Шида l_2, l_3 для второй и третьей сферических гармоник разложения приливного потенциала. Особенность теории состоит в том, что параметры k, h, l имеют действительную и мнимую

части, зависящие от частоты приливной волны. Числа h_2 и l_2 зависят от широты наземных пунктов:

$$h_2(\varphi) = 0.6078 - 0.0006 \cdot \left(\frac{3}{2} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \right),$$

$$l_2(\varphi) = 0.0847 + 0.0002 \cdot \left(\frac{3}{2} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \right).$$

Основные слагаемые.

Первое слагаемое суммы (201) вычисляют по формуле

$$\begin{aligned} \Delta \vec{R}_1 = \sum_{j=2}^3 \frac{f m_j r^4}{f m r_j^3} & \left\{ h_2(\varphi) \hat{r} \left(\frac{3}{2} (\hat{r}_j \cdot \hat{r})^2 - \frac{1}{2} \right) \right. \\ & \left. + 3 l_2(\varphi) (\hat{r}_j \cdot \hat{r}) [\hat{r}_j - (\hat{r}_j \cdot \hat{r}) \hat{r}] \right\}. \end{aligned} \quad (202)$$

Второе слагаемое суммы (201) обусловлено третьей сферической гармоникой разложения приливного потенциала Луны:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{R}_2 = \frac{f m_2 r^5}{f m r_2^4} & \left\{ h_3 \hat{r} \left(\frac{5}{2} (\hat{r}_2 \cdot \hat{r})^3 - \frac{3}{2} (\hat{r}_2 \cdot \hat{r}) \right) \right. \\ & \left. + l_3 \left(\frac{15}{2} (\hat{r}_2 \cdot \hat{r})^2 - \frac{3}{2} \right) [\hat{r}_2 - (\hat{r}_2 \cdot \hat{r}) \hat{r}] \right\}, \end{aligned} \quad (203)$$

где

$$h_3 = 0.292, \quad l_3 = 0.015.$$

Долготная часть.

Зависимость от долготы учтена с помощью двух параметров:

$$l_{21}^{(1)} = 0.0012, \quad l_{22}^{(1)} = 0.0024.$$

Вклады в смещение пункта, пропорциональные $l_{21}^{(1)}$, $l_{22}^{(1)}$, равны

$$\begin{aligned} \Delta \vec{R}_3 &= -l_{21}^{(1)} \sin \varphi \sum_{j=2}^3 \frac{f m_j r^4}{f m r_j^3} P_2^{(1)}(\sin \varphi_j) \vec{q}_{j1}, \\ \Delta \vec{R}_4 &= -\frac{1}{2} l_{22}^{(1)} \sin \varphi \cos \varphi \sum_{j=2}^3 \frac{f m_j r^4}{f m r_j^3} P_2^{(2)}(\sin \varphi_j) \vec{q}_{j2}, \end{aligned}$$

где $P_2^{(1)}$, $P_2^{(2)}$ – присоединённые функции Лежандра,

$$\begin{aligned} \vec{q}_{j1} &= \sin \varphi \cos(\lambda - \lambda_j) \hat{n} - \cos 2\varphi \sin(\lambda - \lambda_j) \hat{e}, \\ \vec{q}_{j2} &= \cos 2(\lambda - \lambda_j) \hat{n} + \sin \varphi \sin 2(\lambda - \lambda_j) \hat{e}. \end{aligned}$$

Мнимая часть.

Для мнимых частей чисел h и l предложены значения:

$$\begin{aligned} h_{21}^{(I)} &= -0.0025, & l_{21}^{(I)} &= -0.0007, \\ h_{22}^{(I)} &= -0.0022, & l_{22}^{(I)} &= -0.0007. \end{aligned}$$

Вклады в смещение пункта, пропорциональные этим параметрам, равны

$$\begin{aligned} \Delta \vec{R}_5 &= -\frac{3}{4} h_{21}^{(I)} \sum_{j=2}^3 \frac{f m_j r^4}{f m r_j^3} \sin 2\varphi_j \sin 2\varphi \sin(\lambda - \lambda_j) \hat{r}, \\ \Delta \vec{R}_6 &= -\frac{3}{4} h_{22}^{(I)} \sum_{j=2}^3 \frac{f m_j r^4}{f m r_j^3} \cos^2 \varphi_j \cos^2 \varphi \sin 2(\lambda - \lambda_j) \hat{r}, \\ \Delta \vec{R}_7 &= -\frac{3}{2} l_{21}^{(I)} \sum_{j=2}^3 \frac{f m_j r^4}{f m r_j^3} \sin 2\varphi_j \vec{q}_{j3}, \\ \Delta \vec{R}_8 &= +\frac{3}{4} l_{22}^{(I)} \sum_{j=2}^3 \frac{f m_j r^4}{f m r_j^3} \cos^2 \varphi_j \vec{q}_{j4}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \vec{q}_{j3} &= \cos 2\varphi \sin(\lambda - \lambda_j) \hat{n} + \sin \varphi \sin(\lambda - \lambda_j) \hat{e}, \\ \vec{q}_{j4} &= \sin 2\varphi \sin 2(\lambda - \lambda_j) \hat{n} - 2 \cos \varphi \cos 2(\lambda - \lambda_j) \hat{e}. \end{aligned}$$

Частотная зависимость.

Зависимость действительных и мнимых частей чисел Лява и Шида от частоты приливной волны ω вносит свой вклад в смещение наземных пунктов:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{R}_9 &= \sum_{\omega(2,0)} (a_{2,0}^{(\omega)} P_2(\sin \varphi) \hat{r} + b_{2,0}^{(\omega)} \sin 2\varphi \hat{n}) \\ \Delta \vec{R}_{10} &= \sum_{\omega(2,1)} (a_{2,1}^{(\omega)} \sin 2\varphi \hat{r} + b_{2,1}^{(\omega)} \cos 2\varphi \hat{n} + c_{2,1}^{(\omega)} \sin \varphi \hat{e}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a_{2,0}^{(\omega)} &= \delta R_{0,1}^{(\omega)} \cos \theta_{20}^{(\omega)} + \delta R_{0,2}^{(\omega)} \sin \theta_{20}^{(\omega)}, \\ b_{2,0}^{(\omega)} &= \delta T_{0,1}^{(\omega)} \cos \theta_{20}^{(\omega)} + \delta T_{0,2}^{(\omega)} \sin \theta_{20}^{(\omega)}, \\ a_{2,1}^{(\omega)} &= \delta R_{1,1}^{(\omega)} \sin(\theta_{21}^{(\omega)} + \lambda) + \delta R_{1,2}^{(\omega)} \cos(\theta_{21}^{(\omega)} + \lambda), \\ b_{2,1}^{(\omega)} &= \delta T_{1,1}^{(\omega)} \sin(\theta_{21}^{(\omega)} + \lambda) + \delta T_{1,2}^{(\omega)} \cos(\theta_{21}^{(\omega)} + \lambda), \\ c_{2,1}^{(\omega)} &= \delta T_{1,1}^{(\omega)} \cos(\theta_{21}^{(\omega)} + \lambda) - \delta T_{1,2}^{(\omega)} \sin(\theta_{21}^{(\omega)} + \lambda). \end{aligned}$$

В сборнике [211] опубликованы числовые значения коэффициентов

$$\delta R_{0,1}^{(\omega)}, \delta R_{0,2}^{(\omega)}, \delta R_{1,1}^{(\omega)}, \delta R_{1,2}^{(\omega)}, \delta T_{0,1}^{(\omega)}, \delta T_{0,2}^{(\omega)}, \delta T_{1,1}^{(\omega)}, \delta T_{1,2}^{(\omega)}.$$

Центробежные силы.

Вариации потенциала центробежных сил вызывают следующие изменения координат обсерваторий в миллиметрах:

$$\Delta \vec{R}_{11} = -32 a_m \sin 2\varphi \hat{r} - 9 a_m \cos 2\varphi \hat{n} + 9 b_m \sin \varphi \hat{e},$$

где

$$a_m = m_1 \cos \lambda + m_2 \sin \lambda, \quad b_m = m_1 \sin \lambda - m_2 \cos \lambda,$$

и

$$m_1 = x_p - 0.054 - 0.00083 \delta t, \quad m_2 = -y_p + 0.357 + 0.00395 \delta t.$$

В этих формулах текущие значения координат полюса x_p , y_p измеряются в секундах дуги, разность δt исчисляется в годах от эпохи J2000.

Океанические приливы.

В отчёте Международной службы вращения Земли [211] представлена схема учёта деформаций земной поверхности, обусловленных приливами в океанах.

Отклик водной поверхности Земли на приливный потенциал (78) был аппроксимирован рядами Фурье. Для аппроксимации были использованы большие массивы альтиметрических измерений, выполненных с борта космических аппаратов [206]. Отклонение поверхности океанов от равновесного значения приводит к появлению дополнительного потенциала. Возникает поверхностная нагрузка и, как результат, зависящие от времени изменения координат обсерваторий.

К сожалению, такие изменения невозможно представить простыми формулами. Коэффициенты рядов Фурье, аппроксимирующие деформации земной поверхности вследствие океанических приливов, сложным образом зависят от долготы и широты обсерватории. Для каждого пункта на Земле предложено использовать предварительно вычисленные значения амплитуд и фаз, характеризующих влияние основных приливных волн.

В публикации [228] и в книге [230] приводятся таблицы, позволяющие на любой момент времени вычислить величину радиальных смещений, обусловленных океаническими приливами, для нескольких десятков пунктов на поверхности Земли.

В стандартных соглашениях 2000 года [211] рекомендуется вычислять составляющие смещений в трёх направлениях: по радиусу, по долготе и по широте.

Оценка величин.

Воспользуйтесь любым набором данных, содержащий лазерные измерения расстояний до ИСЗ в формате “Quick Look” (с.70). Оцените вариации координат пунктов на каждый момент наблюдений. Попытайтесь ответить на вопрос: в каких случаях необходим учёт изменения положений обсерваторий вследствие приливных деформаций, а когда этим эффектом можно пренебречь?

Дополнительные возмущения.

В табл.4 на с.111 приводится число слагаемых, содержащихся в разложении возмущающей функции. Разложение функций R_{Mt} и R_{St} , обусловленных приливными деформациями, вызываемыми, соответственно, Луной и Солнцем, выполнено на основе формулы (160). В алгоритме использованы номинальные значения приливных чисел Лява $k_{2k}^{R(0)}$, $k_{2k}^{I(0)}$, k_{30} , k_{31} , k_{32} , k_{33} [211], не зависящие от частоты приливной волны.

Обратите внимание, что формула (160) записана в системе истинного экватора. Вид функции в земной опорной системе отсчёта приведён на с.49. Именно такой вид функции был использован авторами стандарта вычислений [228]. Угол долготы Луны и угол долготы Солнца привязаны к гринвичскому меридиану. Для возмущающей функции было получено выражение, использующее поправки к численным значениям коэффициентов геопотенциала (84). В земной системе отсчёта функция, обусловленная приливными деформациями, имеет периоды изменения, приблизительно кратные звёздным суткам. В исходной формуле (160), связанной с истинным экватором даты, таких периодов нет и никогда не было.

Использование земной системы отсчёта удобно в алгоритмах численного интегрирования: влияние приливов на движение спутников учитывается вместе с вычислением ускорений от гравитационного поля Земли. При аналитическом подходе возмущения, обусловленные приливами упругой Земли, рассматриваются вместе с прямыми возмущениями от Луны и Солнца.

В стандартных соглашениях [211] возмущения, вызываемые зависимостью чисел Лява от частоты приливной волны и океаническими приливами, рекомендовано учитывать тем же способом, что и основные приливные эффекты: путём вычисления вариаций числовых значений коэффициентов разложения гравитационного поля Земли в ряд по сферическим функциям (формулы (87) и (88), с.50). Вариации зависят от звёздного времени и пяти фундаментальных аргументов.

Выполним переход в систему истинного экватора. Для примера используем только два слагаемых суммы (87). Запишем их в ненормированном виде и учтём угол фазы, равный 180° . Сделаем одно допущение: будем пренебрегать отличиями среднего и истинного звёздного времени и величину S_\oplus^m заменим на S_\oplus :

$$\begin{aligned}\Delta C_{21} &= \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \left[-b_1 \cos(S_\oplus - \vartheta) - a_1 \sin(S_\oplus - \vartheta) \right], \\ \Delta S_{21} &= \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \left[+b_1 \sin(S_\oplus - \vartheta) - a_1 \cos(S_\oplus - \vartheta) \right],\end{aligned}$$

где

$$\vartheta = j_1 l_M + j_2 l'_S + j_3 F_M + j_4 D + j_5 \Omega_M.$$

Используем соотношения

$$\begin{aligned}\Delta\hat{C}_{21} &= \Delta C_{21} \cos S_{\oplus} - \Delta S_{21} \sin S_{\oplus}, \\ \Delta\hat{S}_{21} &= \Delta C_{21} \sin S_{\oplus} + \Delta S_{21} \cos S_{\oplus},\end{aligned}$$

аналогичные формулам (155), и получим

$$\begin{aligned}\Delta\hat{C}_{21} &= \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot [-b_1 \cos \vartheta + a_1 \sin \vartheta], \\ \Delta\hat{S}_{21} &= \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot [-b_1 \sin \vartheta - a_1 \cos \vartheta].\end{aligned}$$

Угловая величина ϑ является линейной комбинацией фундаментальных аргументов. Зависимость от звёздного времени у возмущающей функции, обусловленной чувствительностью чисел Лява к частоте приливной волны, исчезает при переходе к системе истинного экватора. Это же утверждение справедливо и для возмущающей функции, обусловленной океаническими приливами.

Переменные Дудсона.

Учёные-геофизики с большим вниманием относятся к составляющим приливного потенциала. Хорошо известны оценки средних значений амплитуд и частот основных приливных волн. Многие из приливных волн обозначены даже специальными символами, M_0 , M_f , O_1 , K_1 , M_2 , S_2 , например [112]. Вместо фундаментальных аргументов используются переменные Дудсона [228]:

$$\begin{aligned}\tau &= S_{\oplus} + 180^\circ - F_M - \Omega_M && \text{— среднее лунное время,} \\ s &= F_M + \Omega_M && \text{— средняя долгота Луны,} \\ h &= F_M - D + \Omega_M && \text{— средняя долгота Солнца,} \\ p &= -l_M + F_M + \Omega_M && \text{— средняя долгота перигея Луны,} \\ N' &= -\Omega_M, && \text{— отрицательное значение долготы} \\ &&& \text{восходящего узла орбиты Луны,} \\ p_1 &= -l'_S + F_M - D + \Omega_M && \text{— средняя долгота перигелия Солнца.}\end{aligned}$$

Аргументы приливных волн различают с помощью кодовых чисел Дудсона [112]. Например, аргументное число Дудсона **135,655** соответствует суточной волне, обозначаемой символом Q_1 и имеющей аргумент, равный выражению

$$1 \cdot \tau - 2 \cdot s + 0 \cdot h + 1 \cdot p + 0 \cdot N' + 0 \cdot p_1 = S_{\oplus} + 180^\circ - l_M - 2F_M - 2\Omega_M.$$

Обычное явление: исследователи, создающие основы нового раздела науки, создают и новую терминологию. Нам остаётся только уловить смысл их усилий и использовать полученные знания для решения своих задач.

Замечания

Подробнее об эллиптических интегралах и функциях смотрите книги Ю.С.Сикорского [141] и Н.И.Ахиезера [26].

При выводе формул (174), (183) никаких разложений по малому параметру не проводилось. Единственное ограничение: подстановки (171) и (178) допустимы при выполнении условий $\bar{k}_2 < 1$ и $k_1 < 1$.

С помощью эллиптических функций Вейерштрасса П.Андрле выполнил обращение квадратур и вычисление эллиптических интегралов, возникающих в обобщённой задаче двух неподвижных центров [195].

И.А.Герасимову удалось найти общее решение задачи двух неподвижных центров в функциях Вейерштрасса [59].

Статья М.Д.Кислика [94] является, по-видимому, одной из первых важных публикаций, в которой вместо вывода буквенных формул разработаны численные алгоритмы обращения квадратур и взятия эллиптических интегралов. Как и в наших лекциях, алгоритмы, реализованные М.Д.Кисликом, основаны на операциях с многочленами относительно тригонометрических функций.

Интересный вклад в расширение алгоритмической части теории промежуточных орбит внёс Ю.Х.Жагар [81]. Им составлена и отлажена программа, построенная на прямом вычислении эллиптических функций Якоби.

Е.П.Аксёновым получены формулы, связывающие все коэффициенты и переменные промежуточной орбиты с двумя постоянными c , σ и тремя параметрами a , e , s . Исследования Е.П.Аксёнова, Н.В.Емельянова и В.А.Тамарова [21] показали, что формулы удовлетворяют многим практическим приложениям. Дополнительные исследования точности формул промежуточной орбиты провёл Н.В.Емельянов [79].

Для качественных исследований, при нахождении областей возможных движений, например, явный вид функций чрезвычайно полезен, в чём мы убедились в ходе лекции 4. Теперь же задача иная: как можно точнее проводить вычисление параметров промежуточной орбиты, опираясь на числовые значения величин fm , c , σ и числовые значения произвольных постоянных интегрирования α_1 , α_2^2 и α_3 . В этом случае совокупность формул, выражающая как явные, так и неявные зависимости между переменными, становится *алгоритмом* для решения поставленной задачи и может быть запрограммирована. Входными данными вычислительной процедуры будут числовые значения параметров модели гравитационного поля Земли fm , r_0 , J_2 , J_3 и численные значения произвольных постоянных интегрирования. Результатом её работы станут численные значения всех величин, необходимых для построения промежуточной орбиты.

Лекция 6. Эллиптические интегралы

Определение координаты w . — Новая угловая переменная E . — Связь между временем t и угловыми переменными E , ψ и $\tilde{\varphi}$.

Перейдём теперь к выводу формулы для долготы w . На основании (111) имеем

$$w = \alpha_3 \int_0^\tau \frac{d\tau}{1 - \eta^2} - \alpha_3 c^2 \int_0^\tau \frac{d\tau}{\xi^2 + c^2} + c_5, \quad (204)$$

где c_5 — произвольная постоянная.

Займёмся сначала вычислением первого интеграла. Согласно (179)

$$d\tau = \frac{1}{\sigma_1} \frac{1}{\sqrt{1 - k_1^2 \cos^2 \tilde{\varphi}}} d\tilde{\varphi},$$

или

$$d\tau = \frac{1}{\sigma_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k_1^{2n} (\cos \tilde{\varphi})^{2n} \right] d\tilde{\varphi}. \quad (205)$$

Верхний предел суммирования, равный ∞ , заменим на число $J = 7$.

Получаем также, что

$$\frac{1}{1 - \eta^2} = \frac{1 - 2d \cos \tilde{\varphi} + d^2 \cos^2 \tilde{\varphi}}{A + B \cos \tilde{\varphi} + C \cos^2 \tilde{\varphi}},$$

где

$$A = 1 - \gamma^2, \quad B = 2(s\gamma - d), \quad C = d^2 - s^2.$$

Условимся теперь, что мы имеем дело с численными значениями величин k_1^2 , d , A , B , C . Выражения становятся многочленами с численными коэффициентами. Для таких объектов определены операции сложения, умножения и выделения целой части.

Алгоритм умножения полиномов опубликован в монографии Н.В.Емельянова [74]. Пусть заданы многочлены переменной z

$$A = a_0 + \sum_{i=1}^I a_i z^i, \quad B = b_0 + \sum_{j=1}^J b_j z^j$$

с численными коэффициентами a_i , b_j . Результатом умножения полиномов будет многочлен с численными коэффициентами c_k :

$$C = c_0 + \sum_{k=1}^K c_k z^k, \quad K = I + J, \quad (206)$$

причём

$$c_0 = a_0 b_0, \quad c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \quad c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}, \quad i \leq I, \quad k - i \leq J.$$

Интересен и алгоритм деления многочленов или, другими словами, алгоритм выделения целой части. Пусть $I > J$, тогда

$$\frac{a_0 + \sum_{i=1}^I a_i z^i}{b_0 + \sum_{j=1}^J b_j z^j} = \frac{d_0 + \sum_{k=1}^{J-1} d_k z^k}{b_0 + \sum_{j=1}^J b_j z^j} + g_0 + \sum_{n=1}^{I-J} g_n z^n. \quad (207)$$

Вычисление коэффициентов d_k и g_n происходит за $I - J + 1$ шагов. Начальные значения $d_k = a_k$, $0 \leq k \leq I$ и $g_n = 0$.

Применяя алгоритм умножения полиномов (206) к многочлену (205) и выражению

$$1 - 2d \cos \tilde{\varphi} + d^2 \cos^2 \tilde{\varphi},$$

а затем алгоритм выделения целой части (207), то есть деления на

$$A + B \cos \tilde{\varphi} + C \cos^2 \tilde{\varphi},$$

получим

$$\int_0^\tau \frac{d\tau}{1 - \eta^2} = \frac{1}{\sigma_1} \int_{\tilde{\varphi}_0}^{\tilde{\varphi}} \left[\frac{(S - R \cos \tilde{\varphi}) d\tilde{\varphi}}{A + B \cos \tilde{\varphi} + C \cos^2 \tilde{\varphi}} + r_0 + \sum_{i=1}^{2J-2} r_i (\cos \tilde{\varphi})^i \right] d\tilde{\varphi}, \quad (208)$$

где $\tilde{\varphi}_0$ есть значение $\tilde{\varphi}$ при $\tau = 0$.

Представим знаменатель дроби, стоящей в правой части, в виде

$$A + B \cos \tilde{\varphi} + C \cos^2 \tilde{\varphi} = \frac{1}{\bar{\gamma}} [1 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos \tilde{\varphi} - (1 - \alpha^2) \cos^2 \tilde{\varphi}],$$

где α , β , $\bar{\gamma}$ определяются из уравнений

$$1 + \beta^2 = A\bar{\gamma}, \quad 2\alpha\beta = -B\bar{\gamma}, \quad 1 - \alpha^2 = -C\bar{\gamma},$$

то есть

$$\begin{aligned} \alpha &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{\bar{\gamma}} (\sqrt{A - B + C} + \sqrt{A + B + C}), \\ \beta &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{\bar{\gamma}} (\sqrt{A - B + C} - \sqrt{A + B + C}), \\ \bar{\gamma} &= \frac{4}{(\sqrt{A - B + C} + \sqrt{A + B + C})^2 - 4C}. \end{aligned}$$

Придавая постоянным интегрирования α_1 , α_2^2 , α_3 различные допустимые начальные значения, прямым вычислением легко проверить, что во всех случаях выполняются равенства:

$$\frac{R}{S} = \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{и} \quad \frac{\alpha_3}{\sigma_1} \cdot \frac{\bar{\gamma}}{\alpha} \cdot S = \pm 1.$$

Величинам α и β припишем знак постоянной α_3 , тогда

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} \sqrt{\bar{\gamma}} \operatorname{sign}(\alpha_3) (\sqrt{A - B + C} + \sqrt{A + B + C}), \\ \beta &= \frac{1}{2} \sqrt{\bar{\gamma}} \operatorname{sign}(\alpha_3) (\sqrt{A - B + C} - \sqrt{A + B + C}), \\ \bar{\gamma} &= \frac{4}{(\sqrt{A - B + C} + \sqrt{A + B + C})^2 - 4C}, \end{aligned} \right\} \quad (209)$$

и

$$\frac{\alpha_3}{\sigma_1} \cdot \frac{R - S \cos \tilde{\varphi}}{A + B \cos \tilde{\varphi} + C \cos^2 \tilde{\varphi}} = \frac{\alpha - \beta \cos \tilde{\varphi}}{1 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos \tilde{\varphi} - (1 - \alpha^2) \cos^2 \tilde{\varphi}}.$$

Но

$$\int \frac{(\alpha - \beta \cos \tilde{\varphi}) d\tilde{\varphi}}{1 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos \tilde{\varphi} - (1 - \alpha^2) \cos^2 \tilde{\varphi}} = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin \tilde{\varphi}}{\alpha \cos \tilde{\varphi} - \beta} \right),$$

поэтому, интегрируя (208) и используя формулы (184), получим

$$\alpha_3 \int_0^\tau \frac{d\tau}{1 - \eta^2} = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin \tilde{\varphi}}{\alpha \cos \tilde{\varphi} - \beta} \right) + \beta_0 \tilde{\varphi} + \sum_{i=1}^{2J} \beta'_i \sin i \tilde{\varphi} + c'_5, \quad (210)$$

где β'_i – численные коэффициенты, c'_5 – постоянная.

Перейдём теперь к вычислению второго интеграла (204). Воспользуемся уравнением

$$d\tau = \frac{1}{\bar{\sigma}_2} \left[1 + \sum_{n=1}^J \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \bar{k}_2^{2n} (\cos \psi)^{2n} \right] d\psi, \quad (211)$$

в котором верхний предел суммирования, равный ∞ , заменён на число J , и выполним разложение подынтегральной функции в ряд по степеням c/ξ

$$\frac{c^2}{\xi^2 + c^2} = \frac{c^2}{\xi^2} \cdot \left[1 + \sum_{n=1}^{J-1} (-1)^n \left(\frac{c^2}{\xi^2} \right)^n \right]. \quad (212)$$

Отношение c^2/ξ^2 с помощью (173) может быть представлено в виде многочлена по степеням $\cos \psi$. Действительно

$$\frac{c}{\xi} = \frac{c}{a(1 - e\bar{e})} \cdot \frac{1 + \bar{e} \cos \psi}{1 - \bar{q} \cos \psi},$$

$$\bar{q} = \frac{e - \bar{e}}{1 - e\bar{e}},$$

$$\frac{1}{1 - \bar{q} \cos \psi} = 1 + \sum_{n=1}^J \bar{q}^n \cos^n \psi.$$

где \bar{q} – величина первого порядка малости относительно сжатия. Применяя к этому ряду и выражению в числителе $1 + \bar{e} \cos \psi$ алгоритм умножения многочленов и учитывая множитель $c/[a(1 - e\bar{e})]$, получаем

$$\frac{c}{\xi} = q_0 + \sum_{k=1}^{J+1} q_k \cos^k \psi. \quad (213)$$

После возведения (213) в квадрат будем иметь искомый многочлен с численными коэффициентами

$$\frac{c^2}{\xi^2} = q'_0 + \sum_{k=1}^{J+2} q'_k \cos^k \psi. \quad (214)$$

Выполняя $J - 1$ раз операцию умножения текущего многочлена на выражение (214) и складывая, получим многочлен для подынтегральной функции (212). Умножим его на дифференциал (211) и проинтегрируем, учитывая формулы (184). В результате оказывается, что

$$-\alpha_3 c^2 \int_0^\tau \frac{d\tau}{\xi^2 + c^2} = \alpha'_0 \psi + \sum_{i=1}^{2J} \alpha'_i \sin i\psi + c''_5, \quad (215)$$

где c''_5 – значение интеграла при $\tau = 0$.

Подставим, наконец, формулы (210) и (215) в (204). Тогда окончательно получим

$$w = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin \tilde{\varphi}}{\alpha \cos \tilde{\varphi} - \beta} \right) + \tilde{\Omega},$$

где

$$\tilde{\Omega} = \alpha'_0 \psi + \beta_0 \tilde{\varphi} + \sum_{i=1}^{2J} (\alpha'_i \sin i\psi + \beta_i \sin i\tilde{\varphi}) + \tilde{c}_5,$$

причём $\tilde{c}_5 = c_5 + c'_5 + c''_5$. Учитывая формулу (185) и определяя параметры

$$\mu = \alpha'_0 + (1 + \nu)\beta_0, \quad \alpha_i^p = \alpha'_i + \beta_0 \varkappa_i, \quad \beta_i^f = \beta_i + \beta_0 \bar{\varkappa}_i, \quad (216)$$

придадим последнему выражению вид

$$\tilde{\Omega} = \mu \psi + \sum_{i=1}^{2J} \left(\alpha_i^p \sin i\psi + \beta_i^f \sin i\tilde{\varphi} \right) + \tilde{\Omega}_0. \quad (217)$$

Очевидно, что постоянную $\tilde{\Omega}_0 = \tilde{c}_5 + \beta_0 \tilde{\omega}_0$ мы можем рассматривать как произвольную постоянную, вместо постоянной c_5 .

Запишем w в виде

$$w = \tilde{w} + \tilde{\Omega}, \quad (218)$$

где

$$\tilde{w} = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin \tilde{\varphi}}{\alpha \cos \tilde{\varphi} - \beta} \right). \quad (219)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sin \tilde{w} &= \frac{\sin \tilde{\varphi}}{\sqrt{1 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos \tilde{\varphi} - (1 - \alpha^2) \cos^2 \tilde{\varphi}}}, \\ \cos \tilde{w} &= \frac{\alpha \cos \tilde{\varphi} - \beta}{\sqrt{1 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos \tilde{\varphi} - (1 - \alpha^2) \cos^2 \tilde{\varphi}}}. \end{aligned}$$

Но

$$1 - \eta^2 = \frac{1 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos \tilde{\varphi} - (1 - \alpha^2) \cos^2 \tilde{\varphi}}{\bar{\gamma}(1 - d \cos \tilde{\varphi})^2},$$

поэтому

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{1 - \eta^2} \sin \tilde{w} &= \frac{1}{\sqrt{\bar{\gamma}}} \frac{\sin \tilde{\varphi}}{1 - d \cos \tilde{\varphi}}, \\ \sqrt{1 - \eta^2} \cos \tilde{w} &= \frac{1}{\sqrt{\bar{\gamma}}} \frac{\alpha \cos \tilde{\varphi} - \beta}{1 - d \cos \tilde{\varphi}}. \end{aligned} \right\} \quad (220)$$

Найдём теперь связь времени t и угловых переменных ψ и $\tilde{\varphi}$.

Для начала формулой

$$\operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = \sqrt{\frac{1 + \bar{e}}{1 - \bar{e}}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}$$

определим новую угловую переменную E , аналогичную эксцентрической аномалии кеплеровской промежуточной орбиты. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \sin \psi &= \frac{\sqrt{1 - \bar{e}^2} \sin E}{1 - \bar{e} \cos E}, & \sin E &= \frac{\sqrt{1 - \bar{e}^2} \sin \psi}{1 + \bar{e} \cos \psi}, \\ \cos \psi &= \frac{\cos E - \bar{e}}{1 - \bar{e} \cos E}, & \cos E &= \frac{\cos \psi + \bar{e}}{1 + \bar{e} \cos \psi}, \end{aligned}$$

а из формулы (173) следуют соотношения

$$\xi = a(1 - e \cos E) \quad \text{и} \quad d\xi = a e \sin E dE,$$

позволяющие другим способом записать как многочлен $\Phi(\xi)$ (формула (169))

$$\Phi(\xi) = -2\alpha_1 a^2 e^2 \sin^2 E [\xi^2 - 2p\xi + p^2 + q^2],$$

так и дифференциальное выражение

$$\frac{d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi)}} = \frac{1}{\sqrt{-2\alpha_1}} \frac{1}{\xi} \left(1 - \frac{2p}{\xi} + \frac{p^2 + q^2}{\xi^2} \right)^{(-\frac{1}{2})} dE. \quad (221)$$

Величины p и $p^2 + q^2$ имеют первый порядок малости. Справедливо разложение

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2p}{\xi} + \frac{p^2 + q^2}{\xi^2} \right)^{(-\frac{1}{2})} &= 1 + \frac{p}{\xi} - \frac{p^2 + q^2}{2\xi^2} \\ &+ \sum_{n=2}^J \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{2p}{\xi} - \frac{p^2 + q^2}{\xi^2} \right)^n. \end{aligned} \quad (222)$$

На основании (112) уравнение, связывающее время t с промежуточной переменной τ , имеет вид

$$t - t_0 = \int_0^\tau \xi^2 d\tau + c^2 \int_0^\tau \eta^2 d\tau + c_6, \quad (223)$$

где t_0 – начальный момент времени, а c_6 – постоянная интегрирования.

Займёмся вычислением первого интеграла. Объединим (108), (221) и разложение (222), тогда

$$\int \xi^2 d\tau = \frac{1}{\sqrt{-2\alpha_1}} \int (\xi + p) dE + \frac{a}{\sqrt{-2\alpha_1}} \int I_E \frac{a}{\xi} dE,$$

$$I_E = -\frac{p^2 + q^2}{2a^2} + \sum_{n=2}^J \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{a}{\xi}\right)^{n-2} \left(\frac{2p}{a} - \frac{p^2 + q^2}{a^2} \frac{a}{\xi}\right)^n.$$

С учётом (168) имеем

$$\xi + p = a + p - ae \cos E = \frac{fm}{(-2\alpha_1)} - ae \cos E.$$

Определим новые параметры n_0 , e^* формулами

$$n_0 = \frac{\sqrt{(-2\alpha_1)^3}}{fm}, \quad e^* = \frac{(-2\alpha_1) a e}{fm} \quad (224)$$

и запишем

$$\frac{1}{\sqrt{-2\alpha_1}} \int (\xi + p) dE = \frac{1}{n_0} \cdot (E - e^* \sin E). \quad (225)$$

Для вычисления интеграла I_E учтём, что

$$dE = \frac{\sqrt{1 - \bar{e}^2}}{1 + \bar{e} \cos \psi} d\psi, \quad \frac{a}{\xi} = \frac{1 + \bar{e} \cos \psi}{(1 - e\bar{e})(1 - \bar{q} \cos \psi)},$$

и представим последовательно выражения

$$\frac{a}{\xi}, \quad \frac{\sqrt{1 - \bar{e}^2}}{1 - e\bar{e}} \frac{1}{1 - \bar{q} \cos \psi} \quad \text{и} \quad \frac{2p}{a} - \frac{p^2 + q^2}{a^2} \frac{a}{\xi}$$

в виде полиномов по степеням $\cos \psi$. Далее с помощью алгоритма умножения полиномов составим подынтегральное выражение и проинтегрируем его. Умножим результат на числовой множитель и добавим его к выражению (225)

$$\int_0^\tau \xi^2 d\tau = \frac{1}{n_0} \left[(E - e^* \sin E) + \gamma_0 \psi + \sum_{i=1}^{2J} \gamma_i \sin i\psi \right] + c'_6,$$

где через c'_6 обозначено значение интеграла при $\tau = 0$.

Для вычисления второго интеграла в (223) заметим, что η^2 можно представить как произведение полиномов

$$\eta^2 = (\gamma^2 - 2s\gamma \cos \tilde{\varphi} + s^2 \cos^2 \tilde{\varphi}) \left(1 + \sum_{n=1}^J n d^n \cos^n \tilde{\varphi} \right),$$

а для дифференциала $d\tau$ использовать формулу (205). Дважды применяем алгоритм умножения многочленов и после интегрирования получаем

$$c^2 \int_0^\tau \eta^2 d\tau = \frac{1}{n_0} \left[\gamma'_0 \tilde{\varphi} + \sum_{i=1}^{2J} \gamma'_i \sin i\tilde{\varphi} \right] + c''_6,$$

где c''_6 — значение интеграла при $\tau = 0$.

Снова примем во внимание формулу (185), определим параметры

$$\lambda = -\gamma_0 - (1 + \nu)\gamma'_0, \quad \gamma_i^p = \gamma_i + \gamma'_0 \varkappa_i, \quad \gamma_i^f = \gamma'_i + \gamma'_0 \bar{\varkappa}_i \quad (226)$$

и придадим интегралу (223) окончательный вид

$$n_0 \cdot (t - t_0) + \tilde{M}_0 = E - e^* \sin E - \lambda \psi + \sum_{i=1}^{2J} \left(\gamma_i^p \sin i\psi + \gamma_i^f \sin i\tilde{\varphi} \right), \quad (227)$$

где

$$\tilde{M}_0 = -n_0(c_6 + c'_6 + c''_6) - \gamma'_0 \tilde{\omega}_0$$

шестая и последняя произвольная постоянная.

Величины β_1 , β_2 и β_3 , входящие в соотношения (107), связаны с новыми произвольными постоянными простыми формулами

$$\beta_1 = \frac{\tilde{M}_0}{n_0} - t_0, \quad \beta_2 = \frac{\alpha_2}{\sigma_1} \frac{\pi}{2} \mathbf{K}(k_1) \tilde{\omega}_0, \quad \beta_3 = \tilde{\Omega}_0.$$

Выражение (227) аналогично уравнению Кеплера в эллиптическом движении. Отличие состоит в том, что решать его надо совместно с уравнением (185).

В случае $c = 0$, $\sigma = 0$, когда промежуточная орбита обобщённой задачи двух неподвижных центров становится эллиптической орбитой, зависящей от средней аномалии M_0 в начальный момент времени t_0 , аргумента перигея ω и долготы восходящего узла Ω , произвольные постоянные \tilde{M}_0 , $\tilde{\omega}_0$, $\tilde{\Omega}_0$ равны

$$\tilde{M}_0 = M_0, \quad \tilde{\omega}_0 = \omega + \frac{\pi}{2}, \quad \tilde{\Omega}_0 = \Omega - \frac{\pi}{2}.$$

Семинар 11. Осреднённые уравнения

Количество слагаемых

возмущающей функции (табл.4, с.111) очень велико. Причина проста: тригонометрический ряд получен в общем виде. Каждое элементарное слагаемое является функцией шести орбитальных элементов, звёздного времени и пяти фундаментальных аргументов. Разложение можно применять для значений большой полуоси орбиты от 7000 километров до 50000 километров, эксцентриситета орбиты, не превышающего значения 0.1, и любого угла наклона.

Если Вы ещё не привыкли к особенностям аналитического подхода, то следующая фраза немного *огорчит* Вас: построенный тригонометрический ряд не используется в явном виде. Необходимо уметь интегрировать каждый член ряда по времени t и вычислять частные производные от каждого элементарного слагаемого по параметрам орбиты.

Алгоритм интегрирования.

Интегрирование элементарных слагаемых выполняют по формуле (195) (с.108). В знаменателе появляется производная по времени от аргумента ϑ :

$$\dot{\vartheta} = k_1 \dot{l} + k_2 \dot{g} + k_3 \dot{h} + k_4 \dot{S}_{\oplus} + k_5 \dot{l}_M + k_6 \dot{l}'_S + k_7 \dot{F}_M + k_8 \dot{D} + k_9 \dot{\Omega}_M.$$

Можно ли *объяснить* простым совпадением то, что для значений индекса k_4 , отличных от нуля, выполняется равенство $k_4 = -k_3$?

Вековые изменения звёздного времени и фундаментальных аргументов известны. Величины \dot{g} и \dot{h} в случае кеплеровской орбиты равны нулю. Производная от средней аномалии \dot{l} равна значению среднего движения и зависит от большой полуоси орбиты спутника. Для эйлеровской промежуточной орбиты скорости изменения канонических переменных l , g , h являются функциями позиционных параметров a , e , δ . Другими словами, числовые значения частоты $\dot{\vartheta}$ (1/с) и периода $\pi/(43200 \cdot \dot{\vartheta})$ (суток) могут быть вычислены только для конкретных значений элементов орбиты.

Интегрирование возможно не всегда. Возмущающая функция содержит слагаемые как короткого, от долей оборота до нескольких суток, так и долгого, порядка нескольких месяцев и лет, периодов, и, что важно, слагаемые с очень большими периодами и вековой член. Если оценка величины $\dot{\vartheta}$ меньше заранее выбранной частоты и, соответственно, оценка периода превышает заданное граничное значение периода, измеряемое в сутках, то аналитическое интегрирование не выполняется, а слагаемое поступает в “вековой” гамильтониан, составляющий основу численного интегрирования “осреднённых” уравнений движения [107].

Аналитический подход

требует проведения нескольких преобразований исходных уравнений.

Вначале с помощью обобщённых координат \vec{r} и обобщённых импульсов \vec{p} запишем канонические уравнения в неинерциальной системе отсчёта (с.86):

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial (K_0 - K_2)}{\partial \vec{p}}, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\partial (K_0 - K_2)}{\partial \vec{r}}. \quad (228)$$

В векторных уравнениях (228) K_0 является гамильтонианом обобщённой задачи двух неподвижных центров, а возмущающая функция K_2 состоит из слагаемых, имеющих второй порядок малости относительно сжатия (формула (150)):

$$K_0 = \frac{1}{2} |\vec{p}|^2 - W, \quad (229)$$

$$K_2 = \vec{\Omega} \cdot [\vec{r} \times \vec{p}] + R_{\oplus} + R_M + R_S + R_t + R_o. \quad (230)$$

Интегрирование уравнений с гамильтонианом K_0 изложено в предыдущих лекциях. На с.56 эта величина обозначена символом K . Характеристическую функцию K приравняли произвольной постоянной α_1 (формула (102)). Выполнили переход к сжатым сфероидальным координатам и получили уравнение Гамильтона – Якоби (103) (с.57). Полный интеграл уравнения был найден методом разделения переменных. При этом было получено решение обобщённой задачи двух неподвижных центров без учёта эффектов, обусловленных неинерциальностью системы отсчёта. Такие эффекты учтены появлением слагаемого $\vec{\Omega} \cdot [\vec{r} \times \vec{p}]$ в возмущающей функции K_2 (формула (230)).

В следующей лекции на с.146 будут выведены уравнения с использованием канонических элементов L, G, H, l, g, h промежуточной орбиты, построенной на основе решения обобщённой задачи двух неподвижных центров:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= +\frac{\partial K}{\partial l}, & \frac{dG}{dt} &= +\frac{\partial K}{\partial g}, & \frac{dH}{dt} &= +\frac{\partial K}{\partial h}, \\ \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial L}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial G}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial H}, \end{aligned} \quad (231)$$

где $K = -\alpha_1 + K_2$ – гамильтониан системы.

При внешнем сходстве с каноническими уравнениями в элементах Делоне (61) (семинар 3, с.42), уравнения (231) отличаются от них внутренним содержанием. *Найдите*, пожалуйста, несколько таких отличий.

Обратите внимание, что необходимо знать только частные производные от гамильтониана K по каноническим элементам, представлять же гамильтониан в виде явной функции переменных действия L, G, H нет никакой необходимости. Более того, даже явного решения уравнений (231) искать не следует.

“Сглаженные” параметры.

Для этой цели, как и на семинаре 3, воспользуемся методом канонических преобразований [174]. Оригинальную версию метода предложил профессор Сорбонны Анри Пуанкаре [138]. Представитель Пулковской школы астрометрии директор обсерватории в городе Упсала Хуго фон Цайпель дополнил метод идеями об исключении из возмущающей функции слагаемых короткого периода и сохранении в новом “вековом” гамильтониане долгопериодических и резонансных членов.

Выполним переход от оскулирующих элементов L, G, H, l, g, h к новым переменным L', G', H', l', g', h' . Функцию преобразования и вековой гамильтониан обозначим, соответственно, S_2 и K_2^* . Эти функции, как и возмущающий гамильтониан K_2 , имеют второй порядок малости относительно сжатия. *Вспомните*, пожалуйста, с какого порядка относительно малого параметра начиналось решение **главной проблемы**, рассмотренное на семинаре 3 (с.43).

В новом гамильтониане $K_2^*(t, L', G', H', l', g', h')$ оставим ту часть слагаемых возмущающей функции K_2 , период изменения которых превышает несколько суток. Функцию преобразования S_2 найдём по формуле

$$S_2 = \int (K_2 - K_2^*) dt. \quad (232)$$

С точностью до второго порядка относительно малого параметра, сжатия Земли, выражения $S_2, K_2, K_0^* = -\alpha_1, K_2^*$ можно считать функциями как оскулирующих элементов L, G, H, l, g, h , так и новых переменных L', G', H', l', g', h' .

Новые переменные могут быть названы “средними” или “сглаженными” элементами орбиты. В изменениях “сглаженных” параметров отсутствуют вариации с малым периодом. Между двумя наборами переменных существует простая связь:

$$\begin{aligned} L &= L' + \frac{\partial S_2}{\partial l'}, & G &= G' + \frac{\partial S_2}{\partial g'}, & H &= H' + \frac{\partial S_2}{\partial h'}, \\ l &= l' - \frac{\partial S_2}{\partial L'}, & g &= g' - \frac{\partial S_2}{\partial G'}, & h &= h' - \frac{\partial S_2}{\partial H'}. \end{aligned} \quad (233)$$

Уравнения движения, записанные в новых переменных, назовём “осреднёнными” уравнениями. Они сохраняют каноническую форму и имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{dL'}{dt} &= +\frac{\partial K_2^*}{\partial l'}, & \frac{dl'}{dt} &= +\frac{\partial \alpha_1}{\partial L'} - \frac{\partial K_2^*}{\partial L'}, \\ \frac{dG'}{dt} &= +\frac{\partial K_2^*}{\partial g'}, & \frac{dg'}{dt} &= +\frac{\partial \alpha_1}{\partial G'} - \frac{\partial K_2^*}{\partial G'}, \\ \frac{dH'}{dt} &= +\frac{\partial K_2^*}{\partial h'}, & \frac{dh'}{dt} &= +\frac{\partial \alpha_1}{\partial H'} - \frac{\partial K_2^*}{\partial H'}. \end{aligned} \quad (234)$$

“Несингулярные” переменные.

Не удивляйтесь, пожалуйста, но уравнения вида (234) тоже не надо интегрировать. Их надо преобразовать.

Воспользуемся набором “несингулярных” элементов:

$$a', \quad l' + g' + h', \quad e' \cos(g' + h'), \quad e' \sin(g' + h'), \quad \delta' \cos h', \quad \delta' \sin h', \quad (235)$$

где a', e', δ' – позиционные параметры промежуточной орбиты, основанной на решении обобщённой задачи двух неподвижных центров (с.79). Штрихи означают, что позиционные параметры, как и переменные L', G', H' , являются “средними”. Алгоритм вычисления частных производных от позиционных параметров по каноническим переменным действия изложен в лекции 7 на с.147 и с.148.

Обозначим $K^* = -\alpha_1 + K_2^*$ и с помощью соотношений (234) получим дифференциальные уравнения в несингулярных элементах:

$$\begin{aligned} \frac{da'}{dt} &= + \frac{\partial a'}{\partial L'} \frac{\partial K_2^*}{\partial l'} + \frac{\partial a'}{\partial G'} \frac{\partial K_2^*}{\partial g'} + \frac{\partial a'}{\partial H'} \frac{\partial K_2^*}{\partial h'}, \\ \frac{d(l' + g' + h')}{dt} &= + \frac{\partial \alpha_1}{\partial L'} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial G'} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial H'} - \frac{\partial K_2^*}{\partial L'} - \frac{\partial K_2^*}{\partial G'} - \frac{\partial K_2^*}{\partial H'}, \\ \frac{d[e' \cos(g' + h')]}{dt} &= + \frac{de'}{dt} \cos(g' + h') + e' \sin(g' + h') \left(\frac{\partial K^*}{\partial G'} + \frac{\partial K^*}{\partial H'} \right), \\ \frac{d[e' \sin(g' + h')]}{dt} &= + \frac{de'}{dt} \sin(g' + h') - e' \cos(g' + h') \left(\frac{\partial K^*}{\partial G'} + \frac{\partial K^*}{\partial H'} \right), \\ \frac{d[\delta' \cos h']}{dt} &= + \frac{d\delta'}{dt} \cos h' + \delta' \sin h' \frac{\partial K^*}{\partial H'}, \\ \frac{d[\delta' \sin h']}{dt} &= + \frac{d\delta'}{dt} \sin h' - \delta' \cos h' \frac{\partial K^*}{\partial H'}. \end{aligned} \quad (236)$$

Частные производные от величины α_1 получены на с.146 (формула (249)), причём значения параметров n_0, ν, μ, λ надо вычислять по формулам (186), (216), (224) и (226) на основе “средних” значений элементов a', e', δ' :

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial L'} = \frac{n_0}{1 - \lambda}, \quad \frac{\partial \alpha_1}{\partial G'} = \frac{n_0 \nu}{1 - \lambda}, \quad \frac{\partial \alpha_1}{\partial H'} = \frac{n_0 \mu}{1 - \lambda}. \quad (237)$$

Производные от параметров e' и δ' по времени t равны

$$\begin{aligned} \frac{de'}{dt} &= + \frac{1}{2e'} \left(\frac{\partial e'^2}{\partial L'} \frac{\partial K_2^*}{\partial l'} + \frac{\partial e'^2}{\partial G'} \frac{\partial K_2^*}{\partial g'} + \frac{\partial e'^2}{\partial H'} \frac{\partial K_2^*}{\partial h'} \right), \\ \frac{d\delta'}{dt} &= + \frac{1}{2\delta'} \left(\frac{\partial \delta'^2}{\partial L'} \frac{\partial K_2^*}{\partial l'} + \frac{\partial \delta'^2}{\partial G'} \frac{\partial K_2^*}{\partial g'} + \frac{\partial \delta'^2}{\partial H'} \frac{\partial K_2^*}{\partial h'} \right). \end{aligned} \quad (238)$$

Простая связь

между оскулирующими и “сглаженными” параметрами орбиты, определяемая формулой (233), для “несингулярных” элементов выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
 a &= a' + \frac{\partial a'}{\partial L'} \frac{\partial S_2}{\partial l'} + \frac{\partial a'}{\partial G'} \frac{\partial S_2}{\partial g'} + \frac{\partial a'}{\partial H'} \frac{\partial S_2}{\partial h'}, \\
 l + g + h &= l' + g' + h' - \frac{\partial S_2}{\partial L'} - \frac{\partial S_2}{\partial G'} - \frac{\partial S_2}{\partial H'}, \\
 e \cos(g + h) &= e' \cos(g' + h') \\
 &\quad + \{e', S_2\} \cos(g' + h') - e' \sin(g' + h') \{g' + h', S_2\}, \\
 e \sin(g + h) &= e' \sin(g' + h') \\
 &\quad + \{e', S_2\} \sin(g' + h') + e' \cos(g' + h') \{g' + h', S_2\}, \\
 \delta \cos h &= \delta' \cos h' + \{\delta', S_2\} \cos h' - \delta' \sin h' \{h', S_2\}, \\
 \delta \sin h &= \delta' \sin h' + \{\delta', S_2\} \sin h' + \delta' \cos h' \{h', S_2\},
 \end{aligned} \tag{239}$$

где скобки Пуассона равны [174]

$$\begin{aligned}
 \{e', S_2\} &= + \frac{1}{2e'} \left(\frac{\partial e'^2}{\partial L'} \frac{\partial S_2}{\partial l'} + \frac{\partial e'^2}{\partial G'} \frac{\partial S_2}{\partial g'} + \frac{\partial e'^2}{\partial H'} \frac{\partial S_2}{\partial h'} \right), \\
 \{g' + h', S_2\} &= - \frac{\partial S_2}{\partial G'} - \frac{\partial S_2}{\partial H'}, \\
 \{\delta', S_2\} &= + \frac{1}{2\delta'} \left(\frac{\partial \delta'^2}{\partial L'} \frac{\partial S_2}{\partial l'} + \frac{\partial \delta'^2}{\partial G'} \frac{\partial S_2}{\partial g'} + \frac{\partial \delta'^2}{\partial H'} \frac{\partial S_2}{\partial h'} \right), \\
 \{h', S_2\} &= - \frac{\partial S_2}{\partial H'}.
 \end{aligned} \tag{240}$$

Частные производные.

В определении элементарного слагаемого (193) (с. 108) сделаем замену: вместо $\sin i$ и $\cos i$ запишем, соответственно, параметры обобщённой задачи двух неподвижных центров s' (с.103) и α' (с.121):

$$\begin{aligned}
 X_c &= A \cdot \left(\frac{a'}{r_0} \right)^{j_1} \cdot e'^{j_2} \cdot s'^{j_3} \cdot \alpha'^{j_4} \cdot \cos \vartheta, \\
 X_s &= A \cdot \left(\frac{a'}{r_0} \right)^{j_1} \cdot e'^{j_2} \cdot s'^{j_3} \cdot \alpha'^{j_4} \cdot \sin \vartheta,
 \end{aligned} \tag{241}$$

$$\vartheta = k_1 l' + k_2 g' + k_3 h' + k_4 S_\oplus + k_5 l_M + k_6 l'_S + k_7 F_M + k_8 D + k_9 \Omega_M.$$

Частные производные по угловым переменным l' , g' , h' от слагаемых, входящих в ряды K_2^* и S_2 , определяются простым дифференцированием. Проведите, пожалуйста, такое вычисление на примере элементарного слагаемого (241).

Производные по каноническим переменным действия L' , G' , H' следует вычислять по правилам дифференцирования сложной функции, например:

$$\begin{aligned}\frac{\partial X_c}{\partial L'} &= \frac{\partial X_c}{\partial a'} \frac{\partial a'}{\partial L'} + \frac{\partial X_c}{\partial e'} \frac{\partial e'}{\partial L'} + \frac{\partial X_c}{\partial s'} \frac{\partial s'}{\partial L'} + \frac{\partial X_c}{\partial \alpha'} \frac{\partial \alpha'}{\partial L'}, \\ \frac{\partial s'}{\partial L'} &= \frac{\partial s'}{\partial a'} \frac{\partial a'}{\partial L'} + \frac{\partial s'}{\partial e'} \frac{\partial e'}{\partial L'} + \frac{\partial s'}{\partial \delta'} \frac{\partial \delta'}{\partial L'}, \\ \frac{\partial \alpha'}{\partial L'} &= \frac{\partial \alpha'}{\partial a'} \frac{\partial a'}{\partial L'} + \frac{\partial \alpha'}{\partial e'} \frac{\partial e'}{\partial L'} + \frac{\partial \alpha'}{\partial \delta'} \frac{\partial \delta'}{\partial L'}, \\ \frac{\partial X_c}{\partial a'} &= j_1 \frac{1}{a'} X_c, \quad \frac{\partial X_c}{\partial e'} = j_2 \frac{1}{e'} X_c, \quad \frac{\partial X_c}{\partial s'} = j_3 \frac{1}{s'} X_c, \quad \frac{\partial X_c}{\partial \alpha'} = j_4 \frac{1}{\alpha'} X_c.\end{aligned}\tag{242}$$

Для нахождения одного из слагаемых функции преобразования S_2 необходимо проинтегрировать X_c по независимой переменной – времени t . Результат интегрирования имеет вид $X_s/\dot{\vartheta}$. Частная производная по L' равна выражению:

$$\frac{\partial}{\partial L'} \left(\frac{X_s}{\dot{\vartheta}} \right) = \frac{1}{\dot{\vartheta}} \frac{\partial X_s}{\partial L'} - \frac{X_s}{\dot{\vartheta}^2} \left[k_1 \frac{\partial}{\partial L'} \left(\frac{n_0}{1-\lambda} \right) + k_2 \frac{\partial}{\partial L'} \left(\frac{n_0 \nu}{1-\lambda} \right) + k_3 \frac{\partial}{\partial L'} \left(\frac{n_0 \mu}{1-\lambda} \right) \right].\tag{243}$$

Частные производные от любых параметров обобщённой задачи двух неподвижных центров, s , α , n_0 , ν , μ , λ , например, по позиционным переменным для конкретных численных значений a , e , δ определяются с помощью алгоритма, обобщающего процедуру вычисления параметров эйлеровской промежуточной орбиты. Каждой величине ставится в соответствие массив из четырёх элементов. Первый элемент массива содержит числовое значение параметра, второй, третий и четвёртый элементы содержат числовые значения частных производных от параметра по переменным a , e , δ .

Заполним элементы трёх массивов, соответствующих позиционным переменным $(a, 1, 0, 0)$, $(e, 0, 1, 0)$, $(\delta, 0, 0, 1)$, и начнём с уравнения (137) (с.80). Операции сложения, умножения и возведения в степень выполняют алгоритмы, работающие с массивами чисел (x_0, x_1, x_2, x_3) , (y_0, y_1, y_2, y_3) и (z_0, z_1, z_2, z_3) :

$$\begin{array}{lll} z_0 = x_0 + y_0, & | & z_0 = x_0 \cdot y_0, & | & z_0 = x_0^b, \\ z_1 = x_1 + y_1, & | & z_1 = x_1 \cdot y_0 + x_0 \cdot y_1, & | & z_1 = b \cdot x_0^{b-1} \cdot x_1, \\ z_2 = x_2 + y_2, & | & z_2 = x_2 \cdot y_0 + x_0 \cdot y_2, & | & z_2 = b \cdot x_0^{b-1} \cdot x_2, \\ z_3 = x_3 + y_3; & | & z_3 = x_3 \cdot y_0 + x_0 \cdot y_3; & | & z_3 = b \cdot x_0^{b-1} \cdot x_3. \end{array}$$

Подсчитайте, пожалуйста, сколько элементов массива необходимо для учёта всех независимых частных производных второго, третьего и четвёртого порядков. (Подсказка: $1 + 3 + 6 + 10 + 15$). Как в этом случае будут выглядеть алгоритмы сложения, умножения и возведения в произвольную степень?

Семинар 12. Проба пера

Порядок действий.

Пусть в начальный момент времени t_0 известны численные значения “средних” элементов орбиты $a'(t_0)$, $e'(t_0)$, $\delta'(t_0)$, $l'(t_0)$, $g'(t_0)$, $h'(t_0)$.

По формулам (235) находим начальные числовые значения “несингулярных” переменных в момент времени t_0 .

Далее с большим шагом по времени выполняем численное интегрирование осреднённых дифференциальных уравнений в “несингулярных” элементах (236). Нахождение численных значений правых частей в момент времени t начинается с расчёта “сглаженных” параметров орбиты $e'(t)$, $\delta'(t)$, $l'(t)$, $g'(t)$, $h'(t)$ по формулам

$$\begin{aligned} e'(t) &= \sqrt{[e' \cos(g' + h')]^2 + [e' \sin(g' + h')]^2}, \\ \delta'(t) &= \sqrt{(\delta' \cos h')^2 + (\delta' \sin h')^2}, \\ \cos h'(t) &= \frac{\delta' \cos h'}{\delta'(t)}, \\ \sin h'(t) &= \frac{\delta' \sin h'}{\delta'(t)}, \\ \cos(g'(t) + h'(t)) &= \frac{e' \cos(g' + h')}{e'(t)}, \\ \sin(g'(t) + h'(t)) &= \frac{e' \sin(g' + h')}{e'(t)}, \\ g'(t) &= (g'(t) + h'(t)) - h'(t), \\ l'(t) &= (l' + g' + h') - (g'(t) + h'(t)). \end{aligned} \tag{244}$$

При расчёте частных производных в правых частях уравнений необходимо использовать выражения (237), (238), (251) и алгоритмы, представленные на с.133. В результате вычислений находятся “средние” или “сглаженные” параметры орбиты на заданном интервале численного решения осреднённых уравнений.

На основе “средних” параметров орбиты с помощью соотношений (239), (240), (242), (243) на любой момент времени внутри интервала интегрирования определяем числовые значения оскулирующих “несингулярных” элементов:

$$a, \quad l + g + h, \quad e \cos(g + h), \quad e \sin(g + h), \quad \delta \cos h, \quad \delta \sin h.$$

Оскулирующие элементы промежуточной орбиты e , δ , l , g , h вычисляются из соотношений, аналогичных формулам (244).

Световое давление.

Выражение (163) (с. 94) запишем в виде:

$$R_r = -10^{-3} P_0 r_0 \left(k_r \frac{A_s}{m_s} \right) \left(\frac{r}{r_0} \right) \left[A_{10} \cdot \left(\frac{z}{r} \right) + A_{11} \cdot \left(\frac{x}{r} \right) + B_{11} \cdot \left(\frac{y}{r} \right) \right], \quad (245)$$

где величины A_{10} , A_{11} , B_{11} являются функциями параметров движения Солнца

$$A_{10} = \left(\frac{a_E}{r_S} \right)^2 \left(\frac{z_S}{r_S} \right), \quad A_{11} = \left(\frac{a_E}{r_S} \right)^2 \left(\frac{x_S}{r_S} \right), \quad B_{11} = \left(\frac{a_E}{r_S} \right)^2 \left(\frac{y_S}{r_S} \right).$$

В формулу (245) входят начальные значения четырёх функций координат спутника (159) (с.88). Алгоритм вычислений величин A_{10} , A_{11} , B_{11} изложен на с.107. Первые слагаемые выглядят следующим образом

$$\begin{aligned} A_{10} &= 0.39772158 \cdot \sin(F_M - D + \Omega_M) + 0.01329539 \cdot \sin(l'_S + F_M - D + \Omega_M), \\ A_{11} &= 0.99986030 \cdot \cos(F_M - D + \Omega_M) + 0.03342418 \cdot \cos(l'_S + F_M - D + \Omega_M), \\ B_{11} &= 0.91735389 \cdot \sin(F_M - D + \Omega_M) + 0.03066608 \cdot \sin(l'_S + F_M - D + \Omega_M). \end{aligned}$$

Несколько членов разложения функции (245) представлены в табл.5. Числовые

Таблица 5: Несколько слагаемых

ампл-да	степени				ф-я	аргументы								
10^{-5}	a	e	$\sin i$	$\cos i$		l	g	h	S_{\oplus}	l_M	l'_S	F_M	D	Ω_M
+2.0913	+1	+1	0	+1	cos	0	+1	-1	0	0	0	+1	-1	+1
-2.0913	+1	+1	0	0	cos	0	+1	-1	0	0	0	+1	-1	+1
+2.0913	+1	+1	0	+1	cos	0	+1	+1	0	0	0	-1	+1	-1
+2.0913	+1	+1	0	0	cos	0	+1	+1	0	0	0	-1	+1	-1
-0.8677	+1	+1	+1	0	sin	0	+1	0	0	0	0	+1	-1	+1
+0.8677	+1	+1	+1	0	sin	0	+1	0	0	0	0	-1	+1	-1
-0.5785	+1	0	+1	0	sin	+1	+1	0	0	0	0	-1	+1	-1
+0.5785	+1	0	+1	0	sin	+1	+1	0	0	0	0	+1	-1	+1
+0.0698	+1	+1	0	0	cos	0	+1	+1	0	0	-1	-1	+1	-1
-0.0698	+1	+1	0	0	cos	0	+1	-1	0	0	+1	+1	-1	+1
+0.0698	+1	+1	0	+1	cos	0	+1	-1	0	0	+1	+1	-1	+1
+0.0698	+1	+1	0	+1	cos	0	+1	-1	0	0	-1	-1	+1	-1
+0.0289	+1	+1	+1	0	sin	0	+1	0	0	0	-1	-1	+1	-1
-0.0289	+1	+1	+1	0	sin	0	+1	0	0	0	+1	+1	-1	+1

значения амплитуды каждого слагаемого, приведённые в первой колонке, не содержат эмпирический параметр – множитель $k_{sat} = k_r \frac{A_s}{m_s}$.

Тень Земли.

Функцию (245), обусловленную действием светового давления, следует добавить в возмущающий гамильтониан (230).

При расчётах необходимо учитывать эффект, обусловленный прохождением спутника в тени Земли. Алгоритм вычисления моментов захода в тень и выхода из тени изложен, например, в лекциях профессора В.В.Нестерова [119].

Пусть $\vec{r}(t)$ и $\vec{R}_\odot(t')$ – векторы положения объекта и Солнца относительно центра Земли в любой системе отсчёта. Координаты Солнца следует вычислить на более ранний по отношению к t момент t' с учётом времени распространения света. Перенесём центр системы координат на спутник и определим косинус угла между направлением на Солнце и на центр Земли:

$$\cos v = - \frac{\vec{r}(t) \cdot (\vec{R}_\odot(t') - \vec{r}(t))}{|\vec{r}(t)| |\vec{R}_\odot(t') - \vec{r}(t)|}.$$

Объект находится в тени Земли при выполнении двух неравенств

$$\cos v > 0, \quad |\vec{r}_\perp| < 6402 \text{ км},$$

где \vec{r}_\perp – перпендикуляр к линии, соединяющей Солнце и спутник:

$$\vec{r}_\perp = \frac{\vec{r}(t) + q \vec{R}_\odot(t')}{1 + q}, \quad q = \frac{|\vec{r}(t)| \cos v}{|\vec{R}_\odot(t') - \vec{r}(t)| - |\vec{r}(t)| \cos v}.$$

На затенённом участке орбиты сила светового давления равна нулю. Алгоритм учёта эффекта тени заключается в процедуре внесения поправок в числовые значения как средних, так и оскулирующих параметров орбиты.

В процессе численного интегрирования осреднённых уравнений движения принимают во внимание возмущения, обусловленные гамильтонианом (230) (с.129) и функцией (245). На интервале очередного шага численного интегрирования находят все случаи прохождения спутника в тени Земли. Для каждого затенённого участка орбиты с помощью функции (245) определяют числовые значения изменений “несингулярных” элементов, обусловленных действием светового давления. Все изменения суммируют и результат суммирования *вычитают* из числовых значений “несингулярных” элементов, полученных на конце очередного шага численного интегрирования. Таким способом выполняют коррекцию *начальных условий* для выполнения следующего шага интегрирования осреднённых уравнений движения.

Появилось ли у Вас желание *продумать и предложить* алгоритм внесения поправок, обусловленных эффектом тени, в тех случаях, когда необходимо получить оценки оскулирующих “несингулярных” элементов орбиты в любой точке очередного шага численного интегрирования?

Действие порядка.

В ходе разработки основных алгоритмов численно-аналитического подхода было сделано несколько допущений. Вот некоторые из них.

Сферические гармоники геопотенциала учтены только до 13-го порядка и степени (с.111). Модели движения Луны и Солнца были заменены приближёнными тригонометрическими рядами с численными коэффициентами (с.89). Разложение возмущающей функции выполнено на основе формул кеплеровской промежуточной орбиты (с.106). При получении осреднённого гамильтониана был выполнен только один шаг метода канонических преобразований (с.130). Неравенства, комбинированные с возмущениями от сжатия Земли, не были приняты во внимание. Осреднённая возмущающая функция и короткопериодические неравенства получены в линейном приближении.

Сделаем очередное допущение. Будем использовать эмпирический коэффициент ускорения \ddot{M} : $l(t) = l(t) + \ddot{M} \cdot (t - t_0)^2$, где $l(t)$ – мгновенное значение средней аномалии. Численное значение \ddot{M} , как и численное значение эмпирического параметра отражения k_{sat} следует находить в процессе обработки результатов наблюдений. С помощью эмпирического коэффициента ускорения можно частично учесть эффект, обусловленный торможением в верхней атмосфере (с.85).

Для объектов из списка табл.2 (с.72) *подготовьте* измерения топоцентрических дальностей в формате “Quick Look”, охватывающие интервалы времени около одного месяца. С целью проверки функциональных возможностей предлагаемых алгоритмов модели движения искусственных спутников Земли *проведите* обработку подготовленных Вами данных наблюдений. Некоторые результаты, которые Вы можете получить, представлены в табл.6. В столбцах таблицы использованы

Таблица 6: Обработка измерений

Спутник	h_{min}	N_{sec}	N_{sh}	$\Delta\rho_{min}$	$\Delta\rho_{max}$	k_{sat}	\ddot{M}
9306102 <i>Стелла</i>	800	1160	201084	-195.2	274.7	$1.16 \cdot 10^{-3}$	$23.52 \cdot 10^{-8}$
7501001 <i>Старлет</i>	900	1086	191623	-208.7	209.8	$8.16 \cdot 10^{-3}$	$9.26 \cdot 10^{-8}$
8606101 <i>Эйджисаи</i>	1500	1189	175526	-71.8	77.7	$5.27 \cdot 10^{-3}$	$3.98 \cdot 10^{-8}$
7603901 <i>Лагеос</i>	6000	1224	150842	-5.6	6.2	$0.76 \cdot 10^{-3}$	$0.23 \cdot 10^{-8}$
8900103 <i>Эталон-1</i>	19500	1127	43896	-11.1	12.7	$1.03 \cdot 10^{-3}$	—

следующие обозначения:

N_{sec} – число слагаемых в осреднённом гамильтониане K_2^* ,

N_{sh} – число слагаемых в функции преобразования S_2 ,

$\Delta\rho_{min}$ и $\Delta\rho_{max}$ – минимальные и максимальные невязки в метрах,

единица измерения эмпирического коэффициента \ddot{M} – обороты/сутки².

“Стационарные” спутники

совершают приблизительно один оборот за одни земные сутки. В настоящее время многие из них являются управляемыми объектами. С помощью специальных двигателей несколько раз в год выполняется коррекция среднего движения и угла наклона орбиты спутника. В результате таких действий объект продолжительное время находится в экваториальной плоскости Земли и с точностью до нескольких угловых минут имеет заданную географическую долготу. Когда управление параметрами движения объекта прекращают, начинается эволюция элементов орбиты под действием гравитационных сил и сил, вызываемых давлением солнечного излучения.

Для изучения эволюции параметров движения искусственных спутников Земли, находящихся на “стационарных” орбитах, применим численно-аналитическую модель.

Одним из таких объектов является COMSTAR 4 (номер 81018A по каталогу КОСПАР). Он был запущен на “стационарную” орбиту в 1981 году и 20 лет отработал в “точке стояния” над восточным побережьем Южной Америки. После окончания активной стадии работы объект был переведён в область орбиты с географической долготой около 75° . Как Вы полагаете, *зачем?*

На основе средних элементов орбиты в формате “NORAD” (с.68) вычислите начальный вектор состояния спутника. На интервале времени 55 лет выполните численное интегрирование осреднённых дифференциальных уравнений движения с учётом ускорений, обусловленных геопотенциалом, притяжением Луны и Солнца, приливами упругой Земли, световым давлением и эффектом тени. В процессе интегрирования определите моменты времени, когда “стационарный” объект пересекает плоскость экватора в восходящем узле своей орбиты. Это событие происходит один раз в сутки, *почему?*

На рисунке 5 (с.139) представлены графики изменения оскулирующих элементов орбиты и географической долготы спутника, вычисленных в момент прохождения восходящего узла. Можете ли Вы *выделить* на графиках короткопериодические вариации с периодами, не превышающими одних суток? Надо думать, что можете, особенно в вариациях большой полуоси и эксцентриситета орбиты.

Попытайтесь оценить периоды и амплитуды долгопериодических неравенств. *Согласны ли Вы*, что один из периодов изменения эксцентриситета орбиты близок к 11 годам, а минимальное и максимальное числовые значения эксцентриситета различаются более чем в 5 раз? В случае с углом наклона ситуация ещё более интересная: в продолжение 27 лет этот элемент орбиты убывал от 15 градусов до почти нулевого значения, а затем начал возрастать. Обратите также внимание на сдвиг по фазе в вариациях большой полуоси и географической долготы.

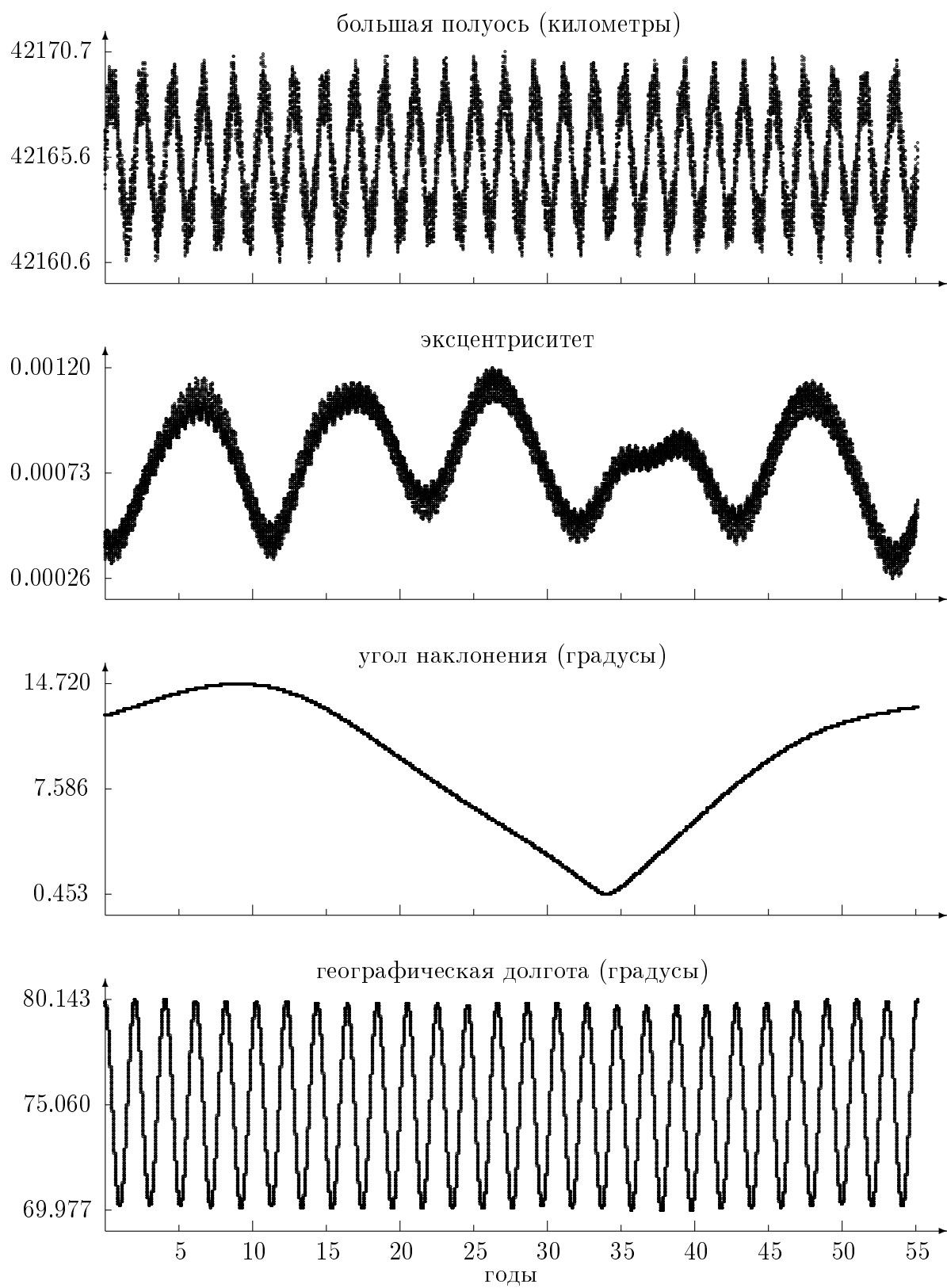


Рис. 5: Стационарный объект

Замечания

Неявная связь между координатами и между координатами и временем является одной из особенностей задач небесной механики. Это подчёркивает А.Пуанкаре в предисловии к мемуару [138].

Описание особых, резонансных движений небесных тел является важной задачей небесной механики. С запуском искусственных спутников Земли число таких задач пополнилось проблемой “критического” наклона. Решению их в случае близких спутников посвящены статьи С.Н.Яшкина [190] и [191].

Среди первых теорий движения стационарных спутников следует отметить работы М.А.Вашковьяка [44] и С.Г.Журавлёва [82, 83].

Развивая это направление, С.Г.Журавлёв создал и опубликовал в монографии [86] оригинальный и достаточно универсальный метод исследования остро-резонансных задач небесной механики.

Особого внимания заслуживают работы А.С.Сочилиной [149, 150, 151] по эволюции орбитальных элементов геостационарных объектов и спутников на орбитах с критическими наклонениями.

В интересной статье А.С.Сочилиной и И.С.Гаязова [152] предложен новый подход к вычислению лунно-солнечных возмущений. Оригинальный метод учёта таких возмущений, реализованный первоначально М.А.Вашковьяком [45], существенно улучшил А.А.Кантер [90, 91]. Нетригонометрическая теория, принимающая во внимание притяжение Луны и Солнца, построена В.П.Долгачёвым [70, 71]. Эта теория весьма компактна и может быть использована при изучении движения спутника на небольших интервалах времени.

Оценка влияния несферичности Луны на движение ИСЗ выполнена в статьях С.Н.Вашковьяк [53] и Н.А.Сорокина [147].

В цикле работ Е.Н.Поляховой подробно рассмотрены возмущения в движении спутника, обусловленные световым давлением. Прекрасный обзор результатов опубликован в специальном издании [135].

Дифференциальному исправлению орбит и методу наименьших квадратов посвящены отдельные главы в книге Д.Брауэра и Дж.Клеменса [38]. Много интересных, полезных и поучительных деталей содержится в большой работе Е.М.Гапошкина [58]. В монографии [67] В.С.Губанов даёт изложение материала в соответствии с современным уровнем науки и техники.

Результаты обработки наблюдений искусственных спутников Земли содержатся в работах Е.П.Аксёнова, С.Н.Вашковьяк и Н.В.Емельянова [15, 16].

Замечательная монография [184] создана П.Е.Эльясбергом на основе огромного опыта фильтрации навигационных измерений.

Лекция 7. Канонические уравнения

Параметры α_k и β_k . — Канонические элементы A_k и B_k . — Вычисление величин A_1, A_2 . — Элементы L, G, H, l, g, h . — Частные производные. — “Быстрые” и “медленные” переменные.

На предыдущих лекциях было подробно изучено промежуточное движение искусственного спутника. Была рассмотрена качественная картина движения, введены элементы промежуточной орбиты и получены все необходимые формулы, позволяющие определять положение спутника и его скорость для произвольного момента времени. В настоящей лекции будут рассмотрены система канонических переменных действие–угол и дифференциальные уравнения в канонической форме, которые позволяют находить возмущения, не принятые во внимание при построении промежуточной орбиты.

Подобно тому, как это имеет место в классической теории возмущений, мы при решении уравнений возмущённого движения за искомые функции примем элементы промежуточного движения. Другими словами, мы будем считать, что в возмущённом движении координаты и составляющие скорости спутника определяются формулами промежуточного движения, в которых элементы орбиты не являются постоянными, а суть некоторые функции времени.

Пусть возмущающие силы имеют силовую функцию R , тогда потенциал задачи можно записать как сумму $W + R$, где W — силовая функция обобщённой задачи двух неподвижных центров. В невозмущённом движении $R = 0$, переменные разделяются и система имеет общий интеграл (107), зависящий от шести произвольных постоянных

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3.$$

В возмущённом движении эти величины станут функциями времени,

удовлетворяющими следующим каноническим уравнениям:

$$\frac{d\alpha_k}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \beta_k}, \quad \frac{d\beta_k}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_k}, \quad (k = 1, 2, 3).$$

Параметры α_k и β_k аналогичны каноническим элементам Якоби в кеплеровском движении. Известно, что элементы Якоби не являются удобными переменными при решении уравнений возмущённого движения. Их недостаток заключается в том, что в правых частях дифференциальных уравнений появляются смешанные члены, то есть члены вида $t \sin \gamma t$, где γ – постоянная. По аналогичным причинам элементы α_k и β_k необходимо заменить другими, более удобными каноническими элементами. В теории кеплеровского движения такими элементами служат элементы Делоне. В нашем случае задача существенно осложняется тем обстоятельством, что рассматриваемая промежуточная орбита характеризуется тремя частотами, в то время как кеплеровская орбита зависит только от одной частоты. Задача, тем не менее, и здесь успешно разрешается, если воспользоваться общей теорией условно–периодических движений, прекрасно развитой в книге К.Шарлье [181].

Переменные действия A_1, A_2, A_3 определим формулами

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\sqrt{\Phi(\xi)} d\xi}{\xi^2 + c^2}, \quad A_2 = \frac{1}{\pi} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\sqrt{F(\eta)} d\eta}{1 - \eta^2}, \quad A_3 = \alpha_3, \quad (246)$$

где $\Phi(\xi)$ и $F(\eta)$ даются равенствами (105), ξ_1 и ξ_2 – корни многочлена $\Phi(\xi)$, между которыми изменяется координата ξ , а η_1 и η_2 – корни многочлена $F(\eta)$, лежащие в промежутке $[-1, +1]$.

Вторую группу элементов – переменные угол B_1, B_2, B_3 , сопряжённые переменным действия A_1, A_2, A_3 , определим формулами

$$B_1 = \frac{\partial S}{\partial A_1}, \quad B_2 = \frac{\partial S}{\partial A_2}, \quad B_3 = \frac{\partial S}{\partial A_3},$$

где S – выражение (104), в котором $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ считаются функциями A_1, A_2, A_3 .

Три первых уравнения общего интеграла (106) теперь можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} t + \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial A_3}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial A_3}{\partial \alpha_2} \\ \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_3} & \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_3} & \frac{\partial A_3}{\partial \alpha_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая выражения (104), (107) и (246), сразу получаем формулы для частных производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} &= +\frac{1}{\pi} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi)}}, & \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} &= \frac{1}{\pi} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{c^2 \eta^2 d\eta}{\sqrt{F(\eta)}}, \\ \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} &= -\frac{1}{\pi} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\alpha_2 d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi)}}, & \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_2} &= \frac{1}{\pi} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\alpha_2 d\eta}{\sqrt{F(\eta)}}, \\ \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_3} &= -\frac{1}{\pi} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{c^2 \alpha_3 d\xi}{(\xi^2 + c^2) \sqrt{\Phi(\xi)}}, & \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_3} &= \frac{1}{\pi} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\alpha_3 d\eta}{(1 - \eta^2) \sqrt{F(\eta)}}. \end{aligned}$$

Взятие интегралов, стоящих в правых частях каждого из равенств, составляло предмет двух предыдущих лекций. Учитывая пределы интегрирования, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} &= \frac{1 + \gamma_0}{n_0}, & \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} &= \frac{\gamma'_0}{n_0}, & \frac{\partial A_3}{\partial \alpha_1} &= 0, \\ \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} &= -\frac{\alpha_2}{\bar{\sigma}_2} \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(\bar{k}_2), & \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_2} &= \frac{\alpha_2}{\sigma_1} \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(k_1), & \frac{\partial A_3}{\partial \alpha_2} &= 0, \\ \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_3} &= -\alpha'_0, & \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_3} &= -(1 + \beta_0), & \frac{\partial A_3}{\partial \alpha_3} &= 1. \end{aligned}$$

Обращение матрицы приводит к частным производным от парамет-

ров α_k по элементам A_k :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \alpha_1}{\partial A_1} &= \frac{1}{\Delta} \frac{\alpha_2}{\sigma_1} \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(k_1), \\
 \frac{\partial \alpha_1}{\partial A_2} &= \frac{1}{\Delta} \frac{\alpha_2}{\bar{\sigma}_2} \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(\bar{k}_2), \\
 \frac{\partial \alpha_1}{\partial A_3} &= \frac{1}{\Delta} \left[\frac{\alpha_2}{\bar{\sigma}_2} \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(\bar{k}_2) (1 + \beta_0) + \frac{\alpha_2}{\sigma_1} \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(k_1) \alpha'_0 \right], \\
 \frac{\partial \alpha_2}{\partial A_1} &= -\frac{1}{\Delta} \frac{\gamma'_0}{n_0}, \\
 \frac{\partial \alpha_2}{\partial A_2} &= \frac{1}{\Delta} \frac{1 + \gamma_0}{n_0}, \\
 \frac{\partial \alpha_2}{\partial A_3} &= \frac{1}{\Delta} \left[\frac{1 + \gamma_0}{n_0} (1 + \beta_0) - \frac{\gamma'_0}{n_0} \alpha'_0 \right], \\
 \Delta &= \frac{\alpha_2}{\sigma_1} \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(k_1) \frac{1 - \lambda}{n_0}.
 \end{aligned}$$

Выражения (246) перепишем в виде

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\Phi(\xi) d\xi}{(\xi^2 + c^2) \sqrt{\Phi(\xi)}}, \quad A_2 = \frac{1}{\pi} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{F(\eta) d\eta}{(1 - \eta^2) \sqrt{F(\eta)}}.$$

Подставляя сюда явный вид функций $\Phi(\xi)$, $F(\eta)$ (105) и сравнивая результат подстановки с соотношениями (107), замечаем, что почти все интегралы, кроме двух новых, нам уже известны:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{2\alpha_1}{n_0} (1 + \gamma_0) - \frac{\alpha_2^2}{\bar{\sigma}_2} \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(\bar{k}_2) - \alpha'_0 \alpha_3 + \frac{1}{\pi} 2fm \int_{\xi_1}^{\xi_2} \xi d\tau, \\
 A_2 &= \frac{\alpha_2^2}{\sigma_1} \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(k_1) + \frac{2\alpha_1}{n_0} \gamma'_0 - (1 + \beta_0) \alpha_3 - \frac{1}{\pi} 2fmc\sigma \int_{\eta_1}^{\eta_2} \eta d\tau.
 \end{aligned}$$

Из формул (108), (179), (180), (221), (222) и (224) следует, что

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{fm}{\sqrt{-2\alpha_1}}(1 - \gamma_0) - \frac{\alpha_2^2}{\bar{\sigma}_2} \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(\bar{k}_2) - \alpha'_0 \alpha_3 + I_\xi, \\ A_2 &= \frac{\alpha_2^2}{\sigma_1} \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(k_1) - \frac{fm}{\sqrt{-2\alpha_1}} \gamma'_0 - (1 + \beta_0) \alpha_3 - I_\eta, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} I_\xi &= \frac{2fm}{\sqrt{-2\alpha_1}} \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^J \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \int_0^\pi \left(\frac{a}{\xi} \right)^{n-1} \left(\frac{2p}{a} - \frac{p^2 + q^2}{a^2} \frac{a}{\xi} \right)^n \frac{a}{\xi} dE, \\ I_\eta &= \frac{2fmc\sigma}{\sigma_1} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{-s \cos \tilde{\varphi} + \gamma}{1 - d \cos \tilde{\varphi}} \frac{1}{\sqrt{1 - k_1^2 \cos^2 \tilde{\varphi}}} d\tilde{\varphi}. \end{aligned}$$

Численные значения I_ξ и I_η находятся с помощью алгоритмов умножения и интегрирования многочленов относительно $\cos \psi$ и $\cos \tilde{\varphi}$ соответственно, после подстановки пределов интегрирования число π в знаменателе сокращается.

Согласно теории канонических преобразований дифференциальные уравнения для элементов A_k и B_k будут иметь вид

$$\frac{dA_k}{dt} = \frac{\partial(-\alpha_1 + R)}{\partial B_k}, \quad \frac{dB_k}{dt} = -\frac{\partial(-\alpha_1 + R)}{\partial A_k}, \quad (k = 1, 2, 3).$$

Канонические элементы A_k и B_k свободны от того недостатка, который имеют первоначальные элементы α_k и β_k . В промежуточном движении относительно каждой из угловых переменных B_k координаты спутника будут периодическими с периодом 2π .

Введём новые элементы L, G, H, l, g, h по формулам

$$\begin{aligned} L &= A_1 + A_2 + A_3, & l &= B_1, \\ G &= A_2 + A_3, & g &= B_2 - B_1, \\ H &= A_3, & h &= B_3 - B_2. \end{aligned}$$

Поскольку, как легко проверить,

$$\sum_{i=1}^3 A_i dB_i - (Ldl + Gdg + Hdh) = 0,$$

то новые элементы являются каноническими, и дифференциальные уравнения, их определяющие, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= +\frac{\partial K}{\partial l}, & \frac{dG}{dt} &= +\frac{\partial K}{\partial g}, & \frac{dH}{dt} &= +\frac{\partial K}{\partial h}, \\ \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial L}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial G}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial H}, \end{aligned} \right\} \quad (247)$$

где $K = -\alpha_1 + R$ – гамильтониан системы.

Для вычисления канонических переменных действия L , G , H имеем формулы

$$\left. \begin{aligned} L &= \frac{fm}{\sqrt{-2\alpha_1}} (1 + \lambda) + \nu G + \mu H + I_\xi - (1 + \nu)I_\eta, \\ G &= \frac{\alpha_2^2}{\sigma_1} \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(k_1) - \frac{fm}{\sqrt{-2\alpha_1}} \gamma'_0 - \beta_0 H - I_\eta, \\ H &= \alpha_3, \end{aligned} \right\} \quad (248)$$

где $\nu, \mu, \gamma'_0, \beta_0, \lambda, I_\xi, I_\eta$ – величины первого порядка малости относительно сжатия. Если приравнять нулю параметры s и σ обобщённой задачи двух неподвижных центров, то, как нетрудно видеть,

$$L = \sqrt{fma}, \quad G = \sqrt{fma(1 - e^2)}, \quad H = \sqrt{fma(1 - e^2)} \cos i,$$

то есть переменные действия аналогичны элементам Делоне кеплеровской промежуточной орбиты.

Частные производные от постоянных интегрирования α_1 , α_2 , α_3 по переменным действия L , G , H принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \alpha_1}{\partial L} &= \frac{n_0}{1 - \lambda}, & \frac{\partial \alpha_2}{\partial L} &= -\frac{1}{\Delta} \frac{\gamma'_0}{n_0}, & \frac{\partial \alpha_3}{\partial L} &= 0, \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial G} &= \frac{n_0 \nu}{1 - \lambda}, & \frac{\partial \alpha_2}{\partial G} &= +\frac{1}{\Delta} \frac{1 + \gamma_0 + \gamma'_0}{n_0}, & \frac{\partial \alpha_3}{\partial G} &= 0, \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial H} &= \frac{n_0 \mu}{1 - \lambda}, & \frac{\partial \alpha_2}{\partial H} &= +\frac{1}{\Delta} \frac{(1 + \gamma_0)\beta_0 - \gamma'_0 \alpha'_0}{n_0}, & \frac{\partial \alpha_3}{\partial H} &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (249)$$

Первое полезное свойство совокупности частных производных (249) проявляется в алгоритме вычисления наборов величин a , e , δ и $2\alpha_1$, α_2^2 , α_3 на основе известных численных значений элементов L , G , H . Для удобства обозначим $L_1 = L$, $L_2 = G$, $L_3 = H$. В нулевом приближении полагаем

$$(\alpha_1)_0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{fm}{L_1} \right)^2, \quad (\alpha_2)_0 = L_2, \quad (\alpha_3)_0 = L_3.$$

Далее методом последовательных приближений на основе уравнений (137)-(142) находим числовые значения величин $(a)_0$, $(e)_0$, $(\delta)_0$, а затем, также в нулевом приближении, последовательно вычисляем другие параметры задачи: элементы $(L)_0$, $(G)_0$ и частные производные от величин α_1 , α_2 по этим элементам. Уточнённые значения параметров находим по формуле линейных разностей

$$\alpha_j = (\alpha_j)_0 + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \alpha_j}{\partial L_i} [L_i - (L_i)_0], \quad j = 1, 2. \quad (250)$$

Процесс сходится очень быстро, за две – три итерации.

Второе полезное свойство соотношений (249) тоже достаточно очевидно. С их помощью выполняется дифференцирование позиционных параметров a , e , δ по каноническим элементам действия L , G , H . Алгоритм состоит из трёх шагов. Вначале надо продифференцировать каждую из формул (137), (138), (139) по явно входящим величинам a , e^2 , δ^2 и вычислить матрицу

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial a} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial e^2} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial \delta^2} \\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial a} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial e^2} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial \delta^2} \\ \frac{\partial \alpha_3}{\partial a} & \frac{\partial \alpha_3}{\partial e^2} & \frac{\partial \alpha_3}{\partial \delta^2} \end{pmatrix}.$$

Численное обращение этой матрицы даст значения частных производных от параметров a , e^2 , δ^2 по α_1 , α_2 , α_3 , и, наконец, численные значения производных по каноническим элементам получаем в

результате суммирования произведений

$$\begin{aligned}\frac{\partial a}{\partial L_j} &= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial a}{\partial \alpha_k} \frac{\partial \alpha_k}{\partial L_j}, \\ \frac{\partial e^2}{\partial L_j} &= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial e^2}{\partial \alpha_k} \frac{\partial \alpha_k}{\partial L_j}, \quad \frac{\partial e}{\partial L_j} = \frac{1}{2e} \frac{\partial e^2}{\partial L_j}, \\ \frac{\partial \delta^2}{\partial L_j} &= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \delta^2}{\partial \alpha_k} \frac{\partial \alpha_k}{\partial L_j}, \quad \frac{\partial \delta}{\partial L_j} = \frac{1}{2\delta} \frac{\partial \delta^2}{\partial L_j}.\end{aligned}\tag{251}$$

Установим теперь зависимость между угловыми элементами. При $R = 0$, то есть в случае промежуточного движения, из уравнений (247) и (249) находим

$$\begin{aligned}l &= \frac{n_0}{1-\lambda} (t - t_0) + l_0(t_0), \\ g &= \frac{n_0\nu}{1-\lambda} (t - t_0) + g_0(t_0), \\ h &= \frac{n_0\mu}{1-\lambda} (t - t_0) + h_0(t_0),\end{aligned}\tag{252}$$

где $l_0(t_0)$, $g_0(t_0)$, $h_0(t_0)$ – постоянные интегрирования. С другой стороны, в промежуточном движении время t входит в явном виде в формулу (227). Если положить

$$\tilde{M}_0 = l_0(1-\lambda), \quad g_0 = \tilde{\omega}_0 + \nu l_0, \quad h_0 = \tilde{\Omega}_0 + \mu l_0,$$

то соотношения (227), (185), (217) принимают вид

$$\left. \begin{aligned}l &= E - e^* \sin E - \lambda(\psi - l) + \sum_{i=1}^{2J} \left(\gamma_i^p \sin i\psi + \gamma_i^f \sin i\tilde{\varphi} \right), \\ \tilde{\varphi} &= \psi + g + \nu(\psi - l) + \sum_{j=1}^J (\kappa_{2j} \sin 2j\psi + \bar{\kappa}_{2j} \sin 2j\tilde{\varphi}), \\ \tilde{\Omega} &= h + \mu(\psi - l) + \sum_{i=1}^{2J} \left(\alpha_i^p \sin i\psi + \beta_i^f \sin i\tilde{\varphi} \right).\end{aligned}\right\} \tag{253}$$

Назовём *аномалистическим периодом* промежутков времени между двумя последовательными касаниями внешнего (внутреннего) эл-

липсоида. За аномалистический период угловая переменная ψ изменяется на величину 2π радиан. *Драконическим периодом* назовём промежуток времени между двумя последовательными пересечениями спутником плоскости $z = c\sigma$. Этому промежутку времени будет соответствовать изменение угловой переменной $\tilde{\varphi}$ на величину 2π . Назовём *сидерическим периодом* промежуток времени, в течение которого долгота w возрастает на 2π радиан. Все три периода изменяются от оборота к обороту, подвергаясь малым периодическим колебаниям. Однако если пренебречь этими малыми колебаниями, то мы получим некоторые средние значения для этих периодов, которые и будут характеризовать движение спутника на больших интервалах времени. В соответствии с этим введём среднее аномалистическое движение n_1 , среднее драконическое движение n_2 и среднее сидерическое движение n_3 по формулам

$$n_1 = \frac{n_0}{1 - \lambda}, \quad n_2 = \frac{n_0(1 + \nu)}{1 - \lambda}, \quad n_3 = \frac{n_0(1 + \nu + \mu)}{1 - \lambda}.$$

Величины n_1 , n_2 , n_3 в известной степени определяют характер движения спутника. Если n_1 , n_2 , n_3 несоизмеримы, то траектория спутника будет всюду плотно заполнять область возможности движения. Картина изменяется, если отношения этих постоянных являются рациональными числами. В этом случае орбита спутника будет замкнутой кривой, а его движение — периодическим.

Период изменения угловой переменной l совпадает со средним аномалистическим периодом. Периоды изменения величин g и h , по крайней мере, в 1000 раз больше. Иногда l называют “быстрой”, а g и h — “медленными” переменными. В промежуточной орбите учтена самая существенная часть силовой функции. Возмущающая функция R пропорциональна второй степени малого параметра — сжатия Земли. Два этих обстоятельства позволяют при решении канонических дифференциальных уравнений движения (247) успешно применять методы теории возмущений.

Семинар 13. Зов несбывшегося

Лагеос клуб.

Искусственные спутники Земли — настоящая лаборатория методов небесной механики, астрометрии и вычислительной математики. Отметим основные отличия от других небесных объектов. Это и разнообразие позиционных параметров орбит — больших полуосей, эксцентриситетов и углов наклонов, и возмущающие факторы самой различной природы, от силы сопротивления атмосферы до силы светового давления и притяжения планет.

Вот уже более тридцати лет сеть наблюдательных станций, расположенных на всех континентах, проводит измерения наклонной дальности до искусственного спутника Земли Лагеос с помощью лазерной техники. С 1992 года среди объектов наблюдений появился ещё один геодинимический спутник — Лагеос-2. Лазерные установки способны измерять топоцентрические расстояния *с ошибкой от одного до десяти сантиметров* при величине самих расстояний более тысячи километров. Такой уникальный наблюдательный материал привлекал и привлекает внимание многих исследователей.

Ведущие специалисты астрономических институтов многих стран имеют быстрый и удобный доступ к накапливающейся информации, как первичной — “сырые” наблюдения и осреднённые “нормальные” точки, так и научной — улучшенные модели для описания действующих факторов и новые стандартные соглашения. Учёные встречаются на конференциях и выступают с важными докладами. Результаты анализа наблюдений, излагаемые в выступлениях, имеют ярко выраженную “выездную направленность” и раз за разом выглядят всё более совершенными, то есть адекватно представляющими очередную порцию измерительных данных.

Пакеты вычислительных программ имеют много общего. Все они основаны на численном интегрировании уравнений движения спутника и ведущим алгоритмом, за редким исключением, выступает метод профессора Эверхарта [208]. Для вычисления положений возмущающих тел, Луны и Солнца, используют современные численные модели движения больших планет — эфемериды в форме коэффициентов аппроксимирующих полиномов Чебышева. Обязательными улучшаемыми параметрами при фильтрации наблюдений по методу наименьших квадратов являются два трёхмерных вектора положения и скорости объекта в начальный момент времени, не поддающиеся моделированию эффективный коэффициент отражения и коэффициент эмпирического ускорения, параметры вращения Земли и координаты станций наблюдений. За этими строгими стандартными границами остаётся ещё большой простор для творческой фантазии, и учёные неустанно показывают её в своих докладах.

Software Lenta.

Ladies and Gentlemen, may I introduce myself? My name is Lenta. I am a Software. I have been created by unknown Astronomer with the only purpose to help one who wants for analyse artificial satellite's Observations. If you have a file with Lageos laser measurements I can say it is that I like. I hope you have. Let us begin our process.

1. The First Programm for Run is PCM.EXE .

Programm PCM -> to construct a Theory

You deal with the Satellite LAGEOS 7603901

now are 7231 short periodic terms limitation is 1.00E-10

now are 2656 long periodic terms limitation is 1.00E-16

2. The Second Programm for Run is PCME.EXE

You deal with observations of the Satellite : 7603901

there are observations for January of 1990 year

4978 Observations on 18 Stations

in Interval from 47893.01 to 47922.94 in MJD

3. The Third Programm for Run is PCML.EXE

The short periodic perturbations are calculated.

4. The Fourth Programm for Run is PCMLDOI.EXE

The results of LAGEOS Data processing

are presented in the next Table

Epoch	Xpol	Ypol	LOD	sigmaX	sigmaY	sigmaLOD	sigmaRo
47894.00	-.13587	.16955	.001674	.000151	.000292	.0000128	.036
47899.00	-.14459	.18357	.001648	.000126	.000160	.0000078	.035
47904.00	-.15585	.19662	.001457	.000110	.000138	.0000072	.034
47909.00	-.16455	.21103	.001567	.000117	.000138	.0000083	.040
47914.00	-.17808	.22696	.001726	.000128	.000181	.0000127	.039
47919.00	-.18775	.24431	.001909	.000217	.000268	.0000104	.036

5. The Fifth Programm for Run is PCMLDOIS.EXE

mean Epoch for data is equal 47907 in MJD or 16.01.1990

dimensions of matrix to inverse is : 80 * 80

station 7835 : 1280 observations on 70 passages , fixed coordinates

corrections to station coordinates

sigma

station	d(X)	d(Y)	d(Z)	X	Y	Z	obs	pass
7810	-.003	-.001	.000	.004	.005	.003	509	34
7840	-.002	-.001	-.001	.008	.007	.005	138	16
7090	.008	.000	-.007	.005	.005	.004	418	23

Положительный опыт.

Первый взгляд на табл.6 (с.137) с результатами обработки лазерных наблюдений различных объектов должен был сильно *разочаровать* Вас. Второй взгляд – тоже. На интервале один месяц невязки достигают двухсот метров.

Постарайтесь, тем не менее, посмотреть на табл.6 с положительной стороны. Вы уже очень много умеете. Вы хорошо справились с поставленной задачей. Шаг за шагом была построена численно-аналитическая модель движения искусственных спутников Земли. Модель была использована для определения и прогноза параметров движения объектов на основе наблюдений.

Выполните теперь *детальную обработку* многолетних рядов лазерных наблюдений объектов Лагос и Лагос-2. “Детальность” заключается в следующем: на пятисуточных интервалах времени должны быть определены 6 численных значений “сглаженных” элементов орбиты и три значения параметров вращения Земли.

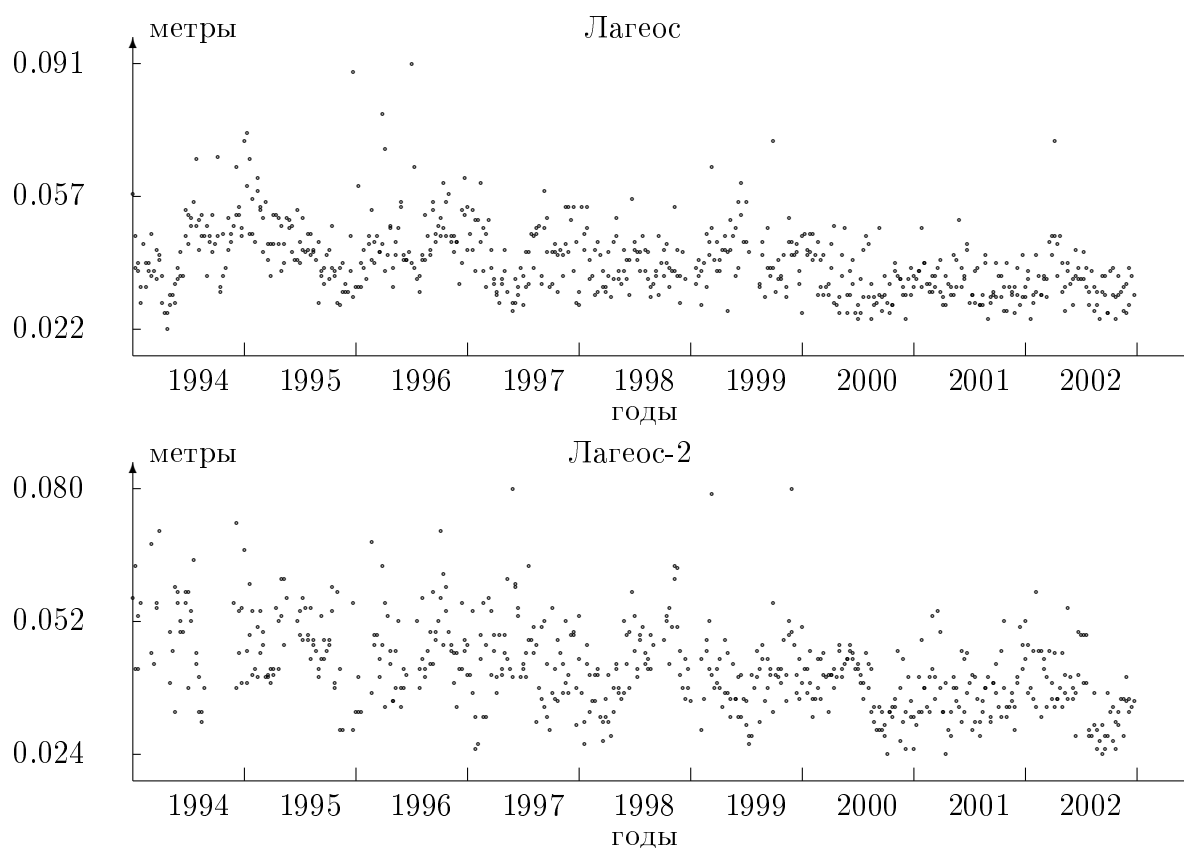


Рис. 6: Стандартное отклонение

На рис.6 представлены оценки средних квадратических погрешностей одного измерения на каждом из пятисуточных интервалов. Вам удалось получить важную геодинимическую информацию. На интервале времени 9 лет были определены

параметры вращения Земли: координаты полюса x_p , y_p и вариация продолжительности суток LOD [119]. На рис.7 представлены разности двух рядов координат

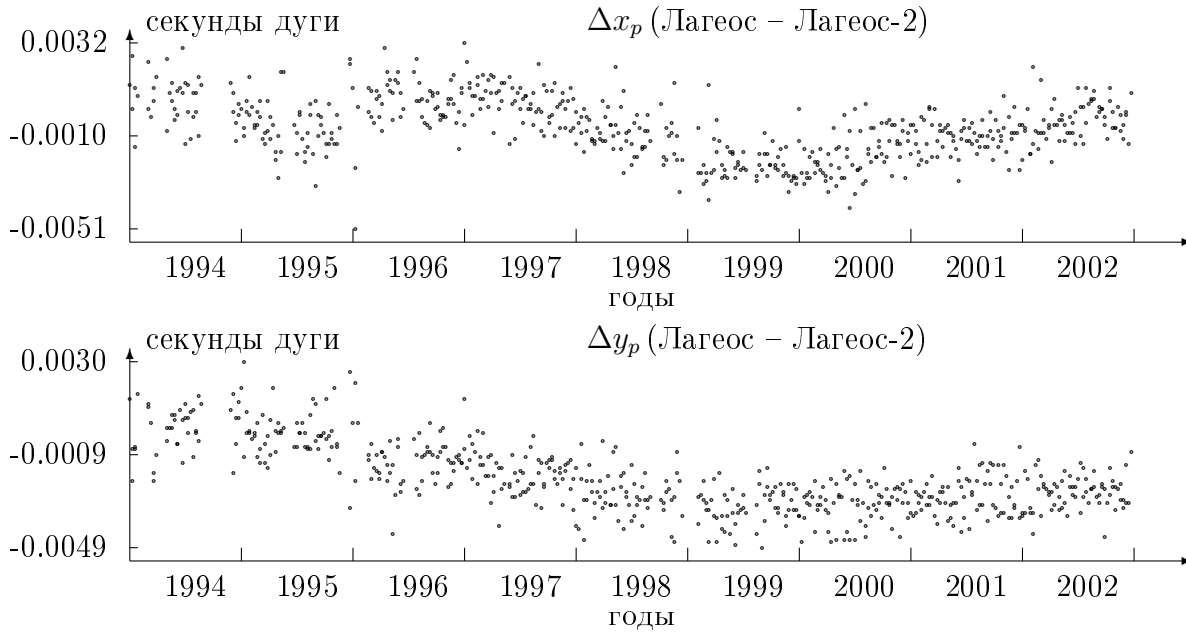


Рис. 7: Положение полюса

полюса. Из значений, полученных на основе наблюдений Лагееос, были вычтены соответствующие результаты обработки измерений дальностей до ИСЗ Лагееос-2. Верхний график рис.8 даёт представление о вариациях угловой скорости враще-

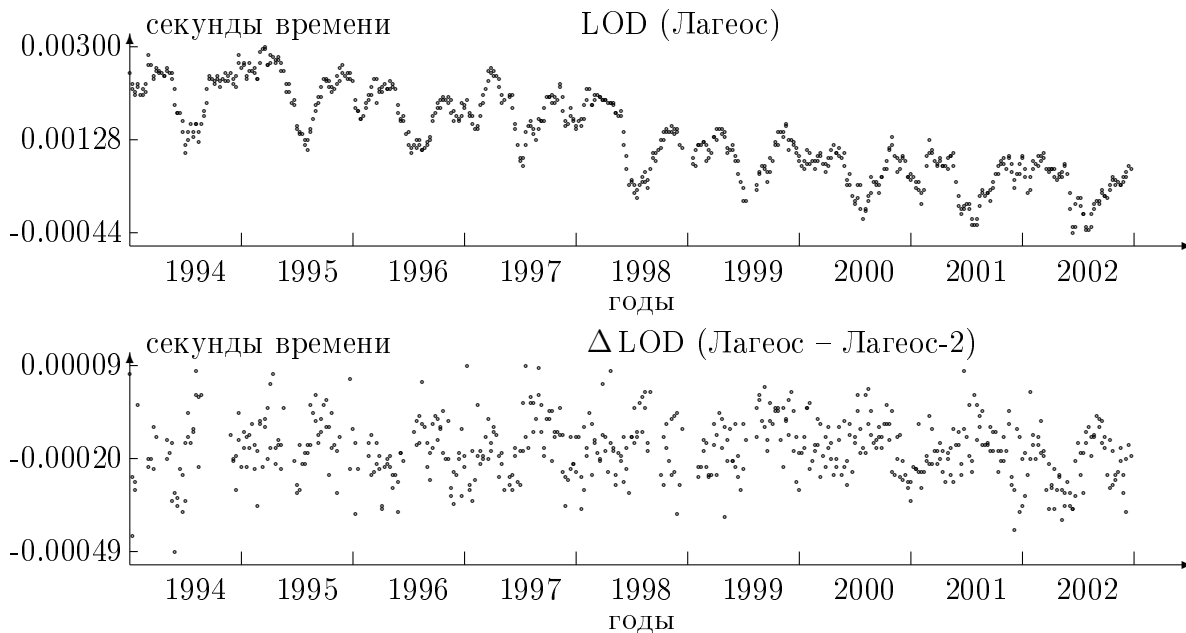


Рис. 8: Продолжительность суток

ния Земли за 9 лет, полученных на основе наблюдений спутника Лагееос.

Объедините далее невязки, полученные на шести идущих подряд пятидневных интервалах, в одну серию. Для каждой такой серии длиной 30 суток определите

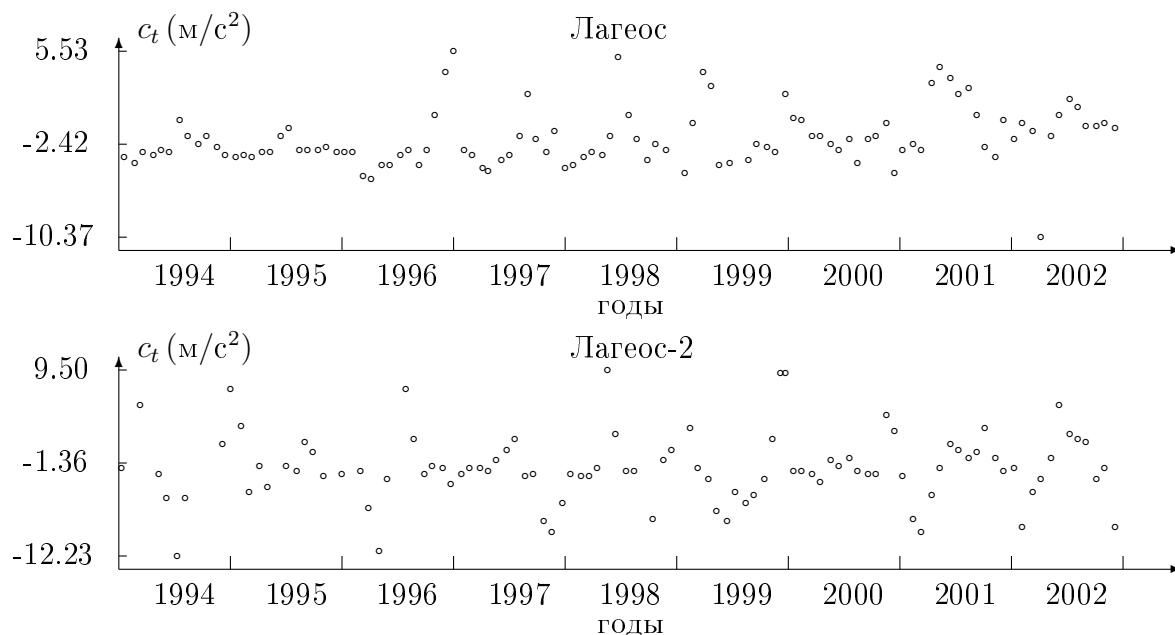


Рис. 9: Коэффициент ускорения

коэффициент ускорения $c_t = -5.61 \cdot 10^5 \cdot a \cdot \ddot{M}$ (рис.9), эмпирический коэффициент отражения k_r (рис.10) и поправки к координатам наблюдательных станций.

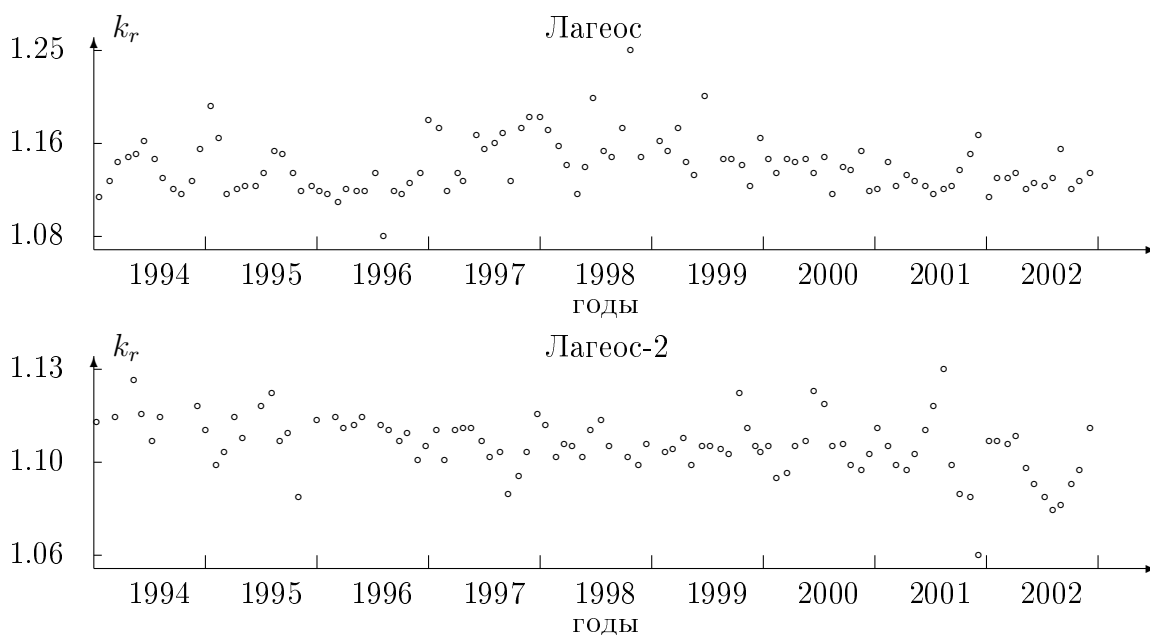


Рис. 10: Коэффициент отражения

Почему положение одной из обсерваторий должно быть зафиксировано?

Поправки координат наблюдательных станций, вычисленные в земной системе отсчёта на эпоху, близкую к середине каждого тридцатисуточного интервала, позволяют получить поле скоростей, то есть оценки вековых изменений положе-

Таблица 7: Поле скоростей

\dot{X} (м/год)	\dot{Y} (м/год)	\dot{Z} (м/год)	$\sigma_{\dot{X}}$ (м/год)	$\sigma_{\dot{Y}}$ (м/год)	$\sigma_{\dot{Z}}$ (м/год)	
Северная Америка, Fort Davis, 7080 $\lambda = 255^\circ 59' 5'' 35$, $\varphi = +30^\circ 41' 48'' 96$, $H = 1998.9$ м						
-0.0488	0.0085	-0.0071	0.0034	0.0011	0.0015	Lageos
-0.0064	-0.0069	-0.0155	0.0029	0.0018	0.0019	Lageos-2
-0.0126	-0.0009	-0.0053	0.0003	0.0004	0.0004	ITRF
Южная Америка, Arequipa, 7403 $\lambda = 288^\circ 30' 25'' 42$, $\varphi = -16^\circ 27' 56'' 58$, $H = 2484.4$ м						
-0.0690	-0.0164	-0.0170	0.0049	0.0019	0.0043	Lageos
-0.0427	-0.0009	-0.0383	0.0092	0.0022	0.0050	Lageos-2
0.0128	0.0043	0.0134	0.0012	0.0015	0.0010	ITRF
Тихий океан, Monument Peak, 7110 $\lambda = 243^\circ 34' 38'' 45$, $\varphi = +32^\circ 53' 30'' 26$, $H = 1835.1$ м						
-0.0617	0.0429	0.0156	0.0029	0.0017	0.0014	Lageos
-0.0235	0.0154	0.0111	0.0025	0.0022	0.0020	Lageos-2
-0.0335	0.0247	0.0141	0.0005	0.0005	0.0005	ITRF
Австралия, Yarragadee, 7090 $\lambda = 115^\circ 20' 48'' 35$, $\varphi = -29^\circ 2' 47'' 40$, $H = 237.4$ м						
-0.0146	0.0258	0.0502	0.0030	0.0014	0.0015	Lageos
-0.0548	0.0168	0.0663	0.0026	0.0018	0.0018	Lageos-2
-0.0498	0.0110	0.0466	0.0009	0.0013	0.0010	ITRF
Африка, Helwan, 7831 $\lambda = 31^\circ 20' 33'' 80$, $\varphi = +29^\circ 51' 32'' 43$, $H = 124.7$ м						
0.0096	-0.0206	0.0161	0.0063	0.0108	0.0062	Lageos
-0.0250	0.0472	0.0298	0.0359	0.0116	0.0265	Lageos-2
-0.0179	0.0172	0.0231	0.0045	0.0032	0.0032	ITRF
Европа, Grasse, 7835 $\lambda = 6^\circ 55' 16'' 11$, $\varphi = +43^\circ 45' 16'' 89$, $H = 1315.6$ м						
-0.0065	-0.0135	0.0096	0.0011	0.0026	0.0014	Lageos
-0.0023	0.0072	0.0064	0.0020	0.0027	0.0023	Lageos-2
-0.0116	0.0208	0.0074	0.0072	0.0014	0.0069	ITRF

ний пунктов на поверхности Земли. Табл.7 возвращает нас к формуле (29) (с.24). Величины \dot{X} , \dot{Y} , \dot{Z} – это составляющие вектора \vec{V} . На той же странице раскрыта тайна четырёх букв “ITRF”. Ожидали ли Вы, что по ходу одного из занятий внесёте свой вклад в *гипотезу* перемещения материков?

Семинар 14. Последние штрихи

Повторение формулы.

Квадрат интервала имеет вид (формула (30) на с.25)

$$d\tau^2 = -g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta.$$

Метрические коэффициенты $g_{\alpha\beta}$ находят в результате решения уравнений поля. Задача имеет малый параметр: отношение скорости пробной частицы к скорости света. Отношение потенциала взаимодействия пробных частиц к квадрату скорости света пропорционально второй степени малого параметра. Решение уравнений поля в постньютоновском приближении со всей необходимой точностью соответствует достаточно медленным движениям небесных тел Солнечной системы и относительно небольшим силам их взаимного притяжения.

Координатные условия.

Десять компонент симметричного метрического тензора связаны между собой четырьмя произвольными соотношениями, так называемыми *координатными условиями*. Уравнения движения двух частиц в постньютоновском приближении были впервые получены Альбертом Эйнштейном на основе **изотропных** координатных условий. Вскоре после этого В.А.Фок вывел релятивистские уравнения поступательно–вращательного движения небесных тел с использованием **гармонических** координатных условий.

Квадрат интервала (30) перепишем в виде

$$d\tau^2 = -c^2 g_{00} dt^2 - 2c g_{0i} dt dx^i - g_{ij} dx^i dx^j. \quad (254)$$

Индексы i, j принимают значения $1, 2, 3$. По повторяющимся индексам выполняется суммирование. Запись $g_{ij} dx^i dx^j$, например, равносильна выражению

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_{ij} dx^i dx^j.$$

Символ Кронекера $\delta_{ij} = 1$ для $i = j$, и $\delta_{ij} = 0$ для $i \neq j$.

Современная теория движения планет, Луны и Солнца, построенная в барицентрической системе отсчёта, получена численным интегрированием релятивистских уравнений движения, записанных в постньютоновском приближении с помощью изотропных координатных условий.

Международный астрономический союз, принимая во внимание факт, что многие работы по теории относительности выполнены при использовании “гармонических” координат, оказавшихся полезными для приложений, рекомендует выбор гармонических координатных условий.

Компоненты тензора.

Обозначим

f – гравитационная постоянная,

m_0 – масса Солнца,

m_k , $k > 0$ – массы планет,

\vec{r} – барицентрический вектор положения произвольной точки в пространстве,

\vec{r}_k – барицентрический вектор положения объекта с номером k ,

\vec{v}_k – барицентрический вектор скорости объекта с номером k ,

v_k^2 – квадрат модуля вектора скорости,

U – потенциал в произвольной точке пространства, создаваемый системой частиц, взаимодействующих по закону Ньютона,

W – скалярная функция,

\vec{V} – векторная функция с компонентами V_1 , V_2 , V_3 .

Составляющие метрического тензора равны

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 + \frac{2U}{c^2} - \frac{2U^2}{c^4} + \frac{2W}{c^4}, \\ g_{0i} &= -\frac{1}{c^3} V_i, \\ g_{ij} &= \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) \delta_{ij}. \end{aligned} \tag{255}$$

Потенциал U пропорционален v^2 . Выражение W/c^4 имеет порядок v^4/c^4 , а $|\vec{V}|/c^3$ пропорционально v^3/c^3 . Формулы для метрических коэффициентов g_{ij} совпадают для обоих координатных условий. Отличие в коэффициенте g_{00} возникает только в четвёртом порядке, а в g_{0i} – в третьем порядке относительно v/c . Из этого следует, что отличия в координатах x^1 , x^2 , x^3 будут порядка v^2/c^2 , а отличия в координатном времени смогут проявиться на уровне v^4/c^4 .

Изотропная форма представления метрики пространства-времени $N + 1$ взаимодействующих частиц предполагает, что

$$\begin{aligned} U &= \sum_{k=0}^N \frac{f m_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|}, \\ W &= \sum_{k=0}^N \frac{f m_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \left(\frac{3}{2} v_k^2 - \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^N \frac{f m_l}{|\vec{r}_l - \vec{r}_k|} \right), \\ \vec{V} &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \frac{f m_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \left(7 \vec{v}_k + \frac{((\vec{r} - \vec{r}_k) \vec{v}_k)}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \right). \end{aligned}$$

Метрика, полученная под гармоническими координатными условиями, отличается от изотропной в выражениях для дополнительных потенциалов

$$W = \sum_{k=0}^N \frac{f m_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \left[2 v_k^2 - \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^N \frac{f m_l}{|\vec{r}_l - \vec{r}_k|} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (\vec{r} - \vec{r}_k) \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^N \frac{f m_l}{|\vec{r}_l - \vec{r}_k|^3} (\vec{r}_k - \vec{r}_l) - \frac{1}{2} \frac{((\vec{r} - \vec{r}_k) \vec{v}_k)^2}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^2} \right],$$

$$\vec{V} = 4 \sum_{k=0}^N \frac{f m_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \vec{v}_k.$$

Тензорное преобразование.

С помощью тензорного преобразования

$$g_{\alpha\beta}(x^0, x^1, x^2, x^3) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g'_{\mu\nu}(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$$

выведем формулы связи между координатами x'^0, x'^1, x'^2, x'^3 , удовлетворяющими изотропным координатным условиям, и гармоническими координатами x^0, x^1, x^2, x^3 .

Закон преобразования ищем в виде

$$x^\alpha = x'^\alpha + \delta x^\alpha(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3),$$

причем вариация $\delta x^0(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$ имеет четвёртый порядок, а вариация $\delta x^i(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$ – второй порядок относительно $\frac{v}{c}$.

Подставим соотношения для координат в формулу преобразования, выполним разложение правой и левой частей равенства в ряд Тейлора и приравняем величины одинакового порядка малости. В результате получим следующие дифференциальные соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta x^i}{\partial x'^0} &= \frac{1}{c^3} (V'_i(x') - V_i(x')), \\ \frac{\partial \delta x^i}{\partial x'^j} &= 0, \\ \frac{\partial \delta x^0}{\partial x'^0} &= \frac{1}{c^4} (W'(x') - W(x')) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial U(x')}{\partial x'^i} \cdot \delta x^i(x'^0), \\ \frac{\partial \delta x^0}{\partial x'^j} &= 0. \end{aligned}$$

Зависимость функций δx^0 и δx^i от координат исчезает, а интегрирование по переменной x'^0 приводит к определенным интегралам

$$\delta x^i(t') = \frac{1}{c^2} \int_{t'_0}^{t'} (V'_i(x') - V_i(x')) dt',$$

$$\delta t(t') = \frac{1}{c^4} \int_{t'_0}^{t'} \left(W'(x') - W(x') - c^2 \frac{\partial U(x')}{\partial x'^i} \delta x^i(t') \right) dt'.$$

Выражения, стоящие под знаком интеграла, суть известные функции координат и времени и вычисляются на основе численной теории движения Солнца, Луны и планет.

Общий вывод.

Расчёты показали, что значения вариаций очень малы. Для пространственно-временной траектории Земли, например, они не превосходят 3 метра на интервале 100 лет (рисунок 11).

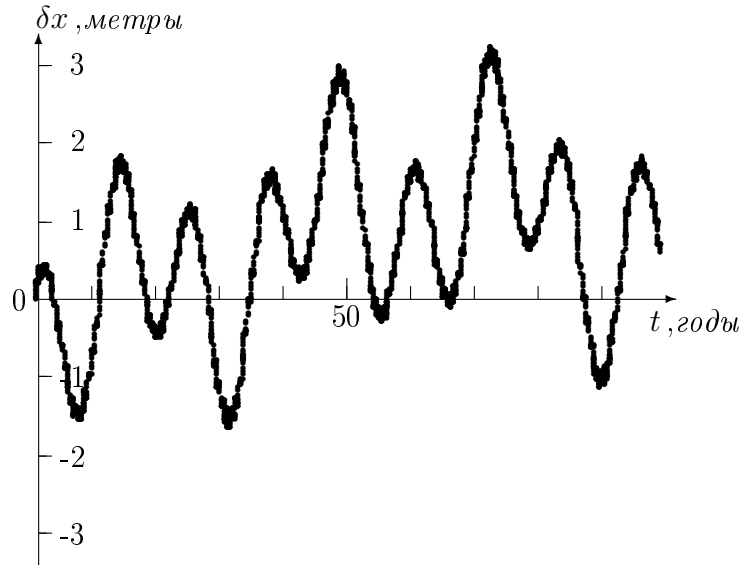


Рис. 11: Координатные условия

В прикладных задачах достаточно записать релятивистские уравнения движения пробной частицы на основе “гармонических” координатных условий, а при вычислении возмущающих сил использовать “изотропные” координаты Солнца, Луны и планет.

В околоземном пространстве метрический тензор необходим при выводе релятивистских уравнений движения объекта.

Вблизи Земли

в качестве инерциальной системы принимается геоцентрическая небесная опорная система отсчёта [229]. Компоненты метрического тензора имеют вид

$$g_{00} = -1 + \frac{2U}{c^2} + \frac{2R}{c^2} - \frac{2U^2}{c^4}, \quad (256)$$

$$g_{0i} = -\frac{1}{c^3} V_i, \quad (257)$$

$$g_{ij} = \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) \delta_{ij}, \quad (258)$$

где через U обозначено выражение для геопотенциала, а символом R обозначена сумма возмущающих функций, обусловленных действием Луны, Солнца, планет и приливов.

Пусть

f – гравитационная постоянная,

C – наибольший момент инерции Земли,

\vec{r} – вектор с компонентами x, y, z , модуль вектора $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

$\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости вращения Земли с компонентами

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega_z.$$

Потенциал \vec{V} , обусловленный эффектом Лензе-Тирринга, равен

$$\vec{V} = \frac{2f}{r^3} C [\vec{\omega} \times \vec{r}]. \quad (259)$$

Вектор скорости \vec{v} в инерциальной системе отсчёта имеет составляющие

$$v_1 = \dot{x}, \quad v_2 = \dot{y}, \quad v_3 = \dot{z} \quad \text{и} \quad v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2, \quad (260)$$

причём дифференцирование проводится по параметру t .

Уравнения движения.

Дифференциальное уравнение в частных производных, представляющее движение частицы с массой m_p в искривлённом пространстве-времени с метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$ (формулы (256) - (258)), имеет вид [105]

$$g^{\alpha\beta} \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} \frac{\partial S}{\partial x^\beta} = -m_p^2 c^2, \quad (261)$$

где функция S – действие для частицы, $g^{\alpha\beta}$ – контравариантный метрический тензор, c – скорость света.

Простое превращение.

Подстановки $S \rightarrow S - m_p c^2 t$ и $S \rightarrow m_p S$ превращают выражение (261) в уравнение Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] - U - R - K_r = 0 \quad (262)$$

с потенциалом $U + R$ и возмущающим гамильтонианом

$$K_r = +\frac{1}{8} v^2 \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{2} U \frac{v^2}{c^2} - \frac{1}{2} U \frac{U}{c^2} - \frac{1}{c^2} (\vec{V} \vec{v}), \quad (263)$$

обусловленным эффектами общей теории относительности.

В неинерциальной системе отсчёта (с.86), связанной с истинным экватором, классическое уравнение Гамильтона-Якоби имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] - \vec{\Omega} \cdot [\vec{r} \times \vec{p}] - U - R = 0$$

Компоненты вектора обобщённого импульса \vec{p}

$$p_1 = \frac{\partial S}{\partial x}, \quad p_2 = \frac{\partial S}{\partial y}, \quad p_3 = \frac{\partial S}{\partial z}$$

равны, соответственно, координатам v_1, v_2, v_3 вектора скорости \vec{v} (260), вычисляемого в инерциальной системе отсчёта.

Выбор есть.

Дифференциальному уравнению в частных производных (262) эквивалентна система трёх дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{\partial(U + R)}{\partial \vec{r}} + \frac{1}{c^2} \vec{F}^{(1)} + \frac{1}{c^2} \vec{F}^{(2)}, \quad (264)$$

где

$$\vec{F}^{(1)} = \frac{U}{r^2} \left[4U \vec{r} - v^2 \vec{r} + 4(\vec{r} \vec{v}) \vec{v} \right], \quad (265)$$

$$\vec{F}^{(2)} = \frac{2f}{r^3} \left[\frac{3}{r^2} C(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) [\vec{r} \times \vec{v}] - C[\vec{\omega} \times \vec{v}] \right]. \quad (266)$$

Вот Вам на выбор два способа усложнения модели движения искусственных спутников Земли. Можно либо искать приближённое аналитическое решение уравнения в частных производных (262), либо дополнить алгоритм численного интегрирования уравнений движения релятивистскими ускорениями (265), (266).

Замечания

Метод вариации произвольных постоянных в случае канонических уравнений подробно изложен в монографии Г.Н.Дубошина [72]. Каноническим уравнениям небесной механики посвящено учебное пособие И.А.Герасимова, Е.Л.Винникова и Б.Р.Мушаилова [61].

Способ получения канонических уравнений на основе элементов промежуточной орбиты впервые дан в работе Е.П.Аксёнова [4]. В той же статье с точностью до первого порядка малости выведены формулы связи между каноническими элементами и произвольными постоянными интегрирования. Модификацию канонических уравнений в статье [192] выполнил С.Н.Яшкин.

По-видимому, канонические уравнения являются наиболее удобными для аналитических исследований. Эти уравнения были использованы С.Н.Вашковьяк для построения теории движения спутников Марса [49], Л.П.Насоновой для вычисления вековых возмущений третьего порядка в движении спутника [116] и Н.А.Сорокиным при определении долгопериодических неравенств второго порядка [143].

Уравнения, аналогичные уравнениям Лагранжа, были получены Е.И.Тимошковой [160], а уравнения, подобные уравнениям Ньютона, выведены в работе Е.П.Аксёнова и Б.Н.Носкова [19]. Эти уравнения имеют ту же точность, что и канонические уравнения из статьи [4]. Они были использованы Е.П.Аксёновым и Б.Н.Носковым [20] для определения возмущений спутника, вызываемых совместным влиянием сопротивления атмосферы и сжатия Земли.

В работе Е.П.Аксёнова [7] были получены упрощённые уравнения, однако они позволяют довольно легко найти все важнейшие неравенства в движении спутника, что и подтверждено в статьях [8, 9] и в публикации [22].

В большом и важном исследовании Н.В.Емельянова [78] с точностью до второго порядка относительно сжатия получены уравнения возмущённого движения, аналогичные уравнениям Лагранжа, и разработан метод их решения. В работе В.А.Тамарова [155] эти уравнения были использованы для учёта возмущений от несферичности планеты.

В статьях Н.В.Емельянова [77], Н.В.Емельянова и Л.П.Насоновой [80] со всей необходимой точностью получено разложение возмущающей функции, обусловленной гравитационным полем Земли, притяжением Луны и Солнца.

А.М.Фоминов развил и опубликовал в [172, 173] достаточно полную буквенную теорию движения искусственного спутника Земли. В статье Л.Л.Филенко [171] разработана методика вычисления возмущений от любой гармоники геопотенциала в случае малых и умеренных эксцентриситетов орбиты.

Послесловие

“Истинная цель небесной механики состоит в разрешении великого вопроса, может ли закон Ньютона, и только он один, объяснить все наблюдаемые астрономические явления.” Это доброе напутствие, эти страстные слова сказал Анри Пуанкаре в предисловии к своему мемуару “Новые методы небесной механики”.

Ежедневное чтение мемуара и личное общение с мэтром вдохновили Хуго фон Цайпеля на дальнейшее развитие метода. Сотворение принципов построения аналитических моделей на этом завершилось. Стало очевидным, что основная часть возмущений в движении небесных тел имеет чисто тригонометрическую форму, а влияние особых слагаемых легко учитывается путём численного интегрирования осреднённых уравнений движения.

Красота и совершенство предложенных методов более всего способствовали их забвению. Мысли исследователей устремились в другом направлении, в направлении только численного интегрирования.

Вся энергия аналитических методов, уже почти забытых и забываемых, проявила себя после запуска в СССР Первого искусственного спутника Земли.

Нездешняя и улыбчивая, Природа не отвечает никакой модели, не интегрирует ни численным, ни аналитическим образом. Она дарит нас прекрасными мыслителями, удивляет законами и, несмирившихся, заманивает в ловушку. Мы добавляем два-три новых параметра, объясняем шестую и седьмую цифру в результатах измерений, мы в предвосхищении успеха и признания, но мы не на том пути, совсем не там, и уже не можем представить своё творчество без Интернета, грантов РФФИ и тезисов конференций.

Поиск истины на Земле и за её пределами ведут небесные механики и астрометристы, дерзкие и доверчивые. Успехи у них на лице, пожелаем же им немного удачи и вдохновения.

Список литературы

- [1] Абалакин В.К. Основы эфемеридной астрономии. М., Наука, 1979.
- [2] Абалакин В.К., Аксёнов Е.П., Гребеников Е.А., Дёмин В.Г., Рябов Ю.А. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Под ред. Г.Н.Дубошина. М., Наука, 1976.
- [3] Авдюшев В.А. Новая промежуточная орбита в задаче о движении близкого спутника сжатой планеты. //Исследования по баллистике и смежным вопросам механики. Томск: Изд-во ТГУ, 1999. вып.3. с.126-127.
- [4] Аксёнов Е.П. Канонические уравнения движения спутника. //Астрономический журнал, 1968, т.45, вып.6, с.1284-1289.
- [5] Аксёнов Е.П. Теория движения искусственных спутников Земли. М., Наука, 1977.
- [6] Аксёнов Е.П. Специальные функции в небесной механике. М., Наука, 1986.
- [7] Аксёнов Е.П. Один вид дифференциальных уравнений движения спутника. //Труды Государственного астрономического института им. П.К. Штернберга, 1966, т.35, с.44-64.
- [8] Аксёнов Е.П. Лунно-солнечные возмущения в движении искусственных спутников Земли. //Труды Государственного астрономического института им. П.К. Штернберга, 1966, т.35, с.93-110.
- [9] Аксёнов Е.П. Вековые и долгопериодические возмущения спутника осесимметричной планеты. //Труды Государственного астрономического института им. П.К. Штернберга, 1967, т.36, с.161-185.
- [10] Аксёнов Е.П. Асимметричные промежуточные орбиты искусственных спутников Земли. //Сообщения Государственного астрономического института им. П.К. Штернберга, 1968, т.155, с.3.
- [11] Аксёнов Е.П., Гребеников Е.А., Дёмин В.Г. Общее решение задачи о движении искусственного спутника в нормальном поле притяжения Земли. /Искусственные спутники Земли, 1961, вып.8, с.64-76.
- [12] Аксёнов Е.П., Гребеников Е.А., Дёмин В.Г. Качественный анализ форм движения в задаче о движении искусственного спутника в нормальном поле притяжения Земли. /Искусственные спутники Земли, 1963, вып.16, с.173-188.

- [13] Аксёнов Е.П., Гребеников Е.А., Дёмин В.Г. Применение обобщённой задачи двух неподвижных центров в теории движения искусственных спутников Земли. //Проблемы движения искусственных спутников Земли. Изд-во АН СССР, 1963, с.92-96.
- [14] Аксёнов Е.П., Гребеников Е.А., Дёмин В.Г. Обобщённая задача двух неподвижных центров и её применение в теории движения искусственных спутников Земли. //Астрономический журнал, 1963, т.40, вып.2, с.363-372.
- [15] Аксёнов Е.П., Вашковьяк С.Н., Емельянов Н.В. Определение элементов орбит ИСЗ по фотографическим и лазерным наблюдениям. //Труды Государственного астрономического института им. П.К.Штернберга, 1980, т.49, с.90-115.
- [16] Аксёнов Е.П., Вашковьяк С.Н., Емельянов Н.В. Построение условных уравнений при улучшении промежуточной орбиты ИСЗ. //Труды Государственного астрономического института им. П.К.Штернберга, 1980, т.49, с.116-121.
- [17] Аксёнов Е.П., Доможилова Л.М. Вычисление симметричной промежуточной орбиты ИСЗ. //Труды Государственного астрономического института им. П.К.Штернберга, 1972, т.38, номер 2, с.52-66.
- [18] Аксёнов Е.П., Доможилова Л.М. Вычисление асимметричной промежуточной орбиты ИСЗ. //Труды Государственного астрономического института им. П.К.Штернберга, 1972, т.38, номер 2, с.67-81.
- [19] Аксёнов Е.П., Носков Б.Н. Одна форма дифференциальных уравнений возмущённого движения спутника. //Астрономический журнал, 1972, т.49, номер 6, с.1292-1299.
- [20] Аксёнов Е.П., Носков Б.Н. О вековых возмущениях в движении искусственных спутников, вызываемых сопротивлением атмосферы. //Астрономический журнал, 1973, т.50, номер 3, с.590-600.
- [21] Аксёнов Е.П., Емельянов Н.В., Тамаров В.А. Практическое применение промежуточной орбиты спутника. Формулы. Программы. Тесты. //Труды Государственного астрономического института им. П.К.Штернберга, 1988, т.59, с.3-40.
- [22] Аксёнов Е.П., Прохорова И.П. О вековых возмущениях в движении искусственных спутников Земли. //Астрономический журнал, 1972, т.49, номер 3, с.630-636.

- [23] Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание (перевод с английского под ред. Я.З.Цыпкина). М., Наука, 1977.
- [24] Алексеев В.М. Обобщённая пространственная задача двух неподвижных центров. Классификация движений. //Бюллетень Института теоретической астрономии АН СССР, 1965, т.10, номер 4, с.241-271.
- [25] Антонов В.А. Представление гравитационного поля планеты системой точечных масс. //Труды астрономической обсерватории Ленинградского государственного университета, 1978, т.34, с.145-155.
- [26] Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. М., Наука, 1970.
- [27] Бадалян Г.К. О проблеме двух неподвижных центров. //Астрономический журнал, 1934, т.11, вып.4, с.346-378.
- [28] Батраков Ю.В. Периодические движения частицы в поле тяготения вращающегося трёхосного эллипсоида. //Бюллетень Института теоретической астрономии АН СССР, 1957, т.6, номер 8, с.524-542.
- [29] Бахтигараев Н.С., Чазов В.В. Информационное обеспечение космических экспериментов на основе численно-аналитической теории движения искусственных спутников Земли. //Космические исследования, 2005, т.43, номер 5, с.386-389.
- [30] Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. М., Наука, 1972.
- [31] Бордовицына Т.В. Современные численные методы в задачах небесной механики. М., Наука, 1984.
- [32] Бордовицына Т.В. Динамика искусственных спутников Земли. *Электронная хрестоматия*.
<http://solar.tsu.ru/chrest/>
- [33] Бордовицына Т.В., Быкова Л.Е., Бороненко Т.С., Тамаров В.А., Шарковский Н.А., Шмидт Ю.Б. Численные и численно-аналитические алгоритмы прогнозирования движения ИСЗ. //Томск: Изд-во ТГУ, 1991. 156с.
- [34] Бордовицына Т.В., Быкова Л.Е., Кардаш А.В. Федяев Ю.А., Шарковский Н.А. Эффективные алгоритмы численного моделирования движения ИСЗ. //Известия вузов. Физика, Томск: Изд-во ТГУ, 1992. т.35. с.62-70.

- [35] Бордовицына Т.В., Быкова Л.Е., Авдюшев В.А. Проблемы применения регуляризирующих и стабилизирующих преобразований в задачах динамики спутников планет и астероидов. //Астрономия и геодезия. Томск: Изд-во ТГУ, 1998. вып.16. с.33-57.
- [36] Бордовицына Т.В., Дружинина И.В. Математическое моделирование динамических параметров потока частиц, образовавшихся в результате распада космического аппарата на орбите. //Околоземная астрономия / под ред. Масевич А.Г. М. ИНАСАН, 1998. с.102-117
- [37] Бормотов В.И. Аналитический обзор теоретических и практических работ по изучению и определению движения искусственных спутников Земли. Иркутск, Сибирское отделение ИЗМИРАН, 1991.
- [38] Брауэр Д., Клеменс Дж. Методы небесной механики. Перевод с английского В.К.Абалакина. М., Мир, 1964.
- [39] Брумберг В.А. Аналитические алгоритмы небесной механики. М., Наука, 1980.
- [40] Брумберг В.А. Разложение пертурбационной функции в спутниковых задачах. //Бюллетень Института теоретической астрономии АН СССР, 1967, т.11, номер 2, с.73-83.
- [41] Брумберг В.А., Глебова Н.И., Лукашова М.В., Малков А.А., Питьева Е.В., Румянцева Л.И., Свешников М.Л., Фурсенко М.А. Расширенное объяснение к “Астрономическому ежегоднику”. //Труды Института прикладной астрономии РАН, 2004, вып.10, с.3-488.
- [42] Вайнберг Ст. Гравитация и космология. М., Мир, 1975.
- [43] Васильев Н.Н. Об интегрировании функций эллиптического движения. //Бюллетень Института теоретической астрономии АН СССР, 1982, т.15, номер 3, с.142-144.
- [44] Вашковьяк М.А. Возмущённое движение стационарного искусственного спутника Земли на коротком интервале времени. //Космические исследования, 1969, т.7, номер 6, с.841-851.
- [45] Вашковьяк М.А. Численно – аналитический метод расчёта движения стационарных ИСЗ. 1. Описание алгоритмов и оценка методической точности. 2. Рабочие формулы. //Препринты Института прикладной математики АН СССР, 1971, номер 34, номер 35, с.3-69.

- [46] Вашковьяк М.А. О методе приближённого расчёта движения стационарного искусственного спутника Земли. //Космические исследования, 1972, т.10, номер 2, с.147-158.
- [47] Вашковьяк М.А. О методах вычисления вековых возмущений. /Почти периодические орбиты в небесной механике. Москва. Изд-во Московского государственного университета, 1990, с.102-114.
- [48] Вашковьяк М.А., Лидов М.Л. О приближённом описании эволюции орбиты стационарного ИСЗ. //Космические исследования, 1973, т.11, номер 3, с.347-359.
- [49] Вашковьяк С.Н. Промежуточные орбиты спутников Марса. //Вестник Московского государственного университета. Физика, астрономия. 1968, т.10, номер 3, с.284-290.
- [50] Вашковьяк С.Н. Функция тени в задаче о влиянии светового давления на движение ИСЗ. //Вестник Московского государственного университета. Физика, астрономия. 1974, т.15, номер 5, с.584-590.
- [51] Вашковьяк С.Н. Изменение орбит спутников – баллонов под действием светового излучения. //Астрономический журнал, 1976, т.53, номер 5, с.1085-1094.
- [52] Вашковьяк С.Н. Действие светового излучения на орбиты геодезических спутников. //Космические исследования, 1979, т.27, номер 2, с.218-224.
- [53] Вашковьяк С.Н. Учёт влияния нецентральности поля Луны на движение ИСЗ. //Астрономический журнал, 1993, т.70, номер 3, с.635-641.
- [54] Вернадский В.И. Труды по всеобщей истории науки. М.: Наука, 1988.
- [55] Видякин В.В. Поступательно–вращательное движение двух твёрдых тел. Часть 1. РФФИ. Архангельск. Изд-во Поморского международного педагогического университета. 1995.
- [56] Видякин В.В. О некоторых подходах к решению проблемы поступательно–вращательного движения твёрдых тел. РФФИ. Архангельск. Труды кафедры прикладной математики АГТУ, 2001, вып.1, с.5-22.
- [57] Видякин В.В., Емельянов Н.В., Меньшикова Т.В., Самбурская Е.Н. Поступательно–вращательное движение двух твёрдых тел. Часть 2. РФФИ. Архангельск. Изд-во Поморского государственного университета. 1997.

- [58] Гапошкин Е.М. Определение орбит. /В кн. Стандартная Земля. М., Мир, 1969, стр.49-96. Перевод с английского П.П.Медведева.
- [59] Герасимов И.А. Функции Вейерштрасса и их приложения к механике и астрономии. Москва. Изд-во Московского государственного университета, 1990.
- [60] Герасимов И.А., Винников Е.Л. Определение областей возможных движений в задаче двух неподвижных центров. //Труды Государственного астрономического института им. П.К.Штернберга, 2000, т.68, с.31-85.
- [61] Герасимов И.А., Винников Е.Л., Мушаилов Б.Р. Канонические уравнения в небесной механике. *Учебное пособие*. Москва. ТОО “Эдем”, 1996.
- [62] Гребеников Е.А. Метод усреднения в прикладных задачах. М., Наука, 1986.
- [63] Гребеников Е.А., Митропольский Ю.А., Рябов Ю.А. Введение в резонансную аналитическую динамику. РФФИ. Москва. Изд-во Янус-К, 1999.
- [64] Гребеников Е.А., Рябов Ю.А. Новые качественные методы в небесной механике. М., Наука, 1971.
- [65] Гребеников Е.А., Рябов Ю.А. Резонансы и малые знаменатели в небесной механике. М., Наука, 1978.
- [66] Гребеников Е.А., Рябов Ю.А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем. М., Наука, 1979.
- [67] Губанов В.С. Обобщённый метод наименьших квадратов. Теория и применение в астрометрии. СПб., Наука, 1997.
- [68] Дёмин В.Г. Об орбитах задачи двух неподвижных центров. //Астрономический журнал, 1960, т.37, вып.6, с.1068-1075.
- [69] Дёмин В.Г. Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения. М., Наука, 1968.
- [70] Долгачёв В.П. О движении далёких ИСЗ в гравитационном поле Земли и Луны. //Вестник Московского государственного университета. Физика, астрономия. 1968, т.10, номер 1, с.94-100.
- [71] Долгачёв В.П. Долгопериодические возмущения элементов орбит искусственных спутников Земли, обусловленные притяжением Луны. //Вестник Московского государственного университета. Физика, астрономия. 1974, т.15, номер 5, с.591-596.

- [72] Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М., Наука, 1975.
- [73] Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М., Наука, 1964.
- [74] Емельянов Н.В. Методы составления алгоритмов и программ в задачах небесной механики. М., Наука, 1983.
- [75] Емельянов Н.В. Влияние притяжения Луны и Солнца на движение ИСЗ. //Итоги науки и техники. Исследование космического пространства. Движение искусственных спутников Земли. Под ред. В.Г.Дёмина. М., 1980, т.15, с.44-63.
- [76] Емельянов Н.В. Возмущения 3-го и 4-го порядков относительно сжатия планеты в орбите спутника. //Астрономический журнал, 1979, т.56, номер 5, с.1070-1076.
- [77] Емельянов Н.В. Разложение возмущающей функции, обусловленной влиянием притяжения Луны и Солнца на движение ИСЗ. //Астрономический журнал, 1985, т.62, номер 6, с.1168-1174.
- [78] Емельянов Н.В. Построение аналитической теории движения ИСЗ с точностью до третьего порядка относительно сжатия Земли. //Астрономический журнал, 1986, т.63, номер 4, с.800-809.
- [79] Емельянов Н.В. О точности формул промежуточной орбиты спутника. //Астрономический журнал, 1990, т.67, номер 2, с.400-408.
- [80] Емельянов Н.В., Насонова Л.П. Разложение возмущающей функции, обусловленной несферичностью Земли. //Астрономический журнал, 1985, т.61, номер 5, с.1021-1028.
- [81] Жагар Ю.Х. Применение промежуточных орбит для прогнозирования движения ИСЗ. /Veröffentlichungen des Zentralinstitut für Physik der Erde, 1977, Nummer 52, Teil 3, S.990-1005.
- [82] Журавлёв С.Г. Аналитическая теория движения суточного спутника. Часть 1. Промежуточная орбита. /Проблемы механики управляемого движения, Пермь, 1972, номер 1, с.68-84.
- [83] Журавлёв С.Г. Аналитическая теория движения суточного спутника. Часть 2. Вековые, долгопериодические и короткопериодические возмущения. /Проблемы механики управляемого движения, Пермь, 1972, номер 1, с.85-101.

- [84] Журавлёв С.Г. О преобразовании Делоне–Цейпеля в резонансных задачах небесной механики. //Астрономический журнал, 1979, т.56, номер 3, с.652-663.
- [85] Журавлёв С.Г. Движение резонансных искусственных спутников Земли. /Итоги науки и техники. Исследование космического пространства. Движение искусственных спутников Земли. Под ред. В.Г.Дёмина. М., 1980, т.15, с.114-158.
- [86] Журавлёв С.Г. Метод исследования острорезонансных задач небесной механики и космодинамики. РФФИ. Архангельск. 2000.
- [87] Журавлёв С.Г. Об одном общем подходе к выбору неособенных канонических систем переменных в острорезонансных задачах небесной механики и космодинамики. РФФИ. Архангельск. Труды кафедры прикладной математики АГТУ, 2001, вып.1, с.101-138.
- [88] Зленко А.А. Поступательно–вращательное движение резонансных спутников. М., Международная академия информационных технологий, 2004.
- [89] Идельсон Н.И. Этюды по истории небесной механики. М., Наука, 1983.
- [90] Кантер А.А. Представление лунно-солнечных возмущений в движении ИСЗ тригонометрическими рядами с коэффициентами, зависящими от времени. //Астрономический журнал, 1993, т.70, номер 1, с.226-229.
- [91] Кантер А.А. О разложении функций от координат возмущающего тела в задаче вычисления лунно-солнечных возмущений в движении ИСЗ. //Космические исследования, 1997, т.35, номер 3, с.303-307.
- [92] Кинг-Хили Д. Теория орбит искусственных спутников в атмосфере. М., Мир, 1966.
- [93] Кислик М.Д. Движение искусственного спутника в нормальном гравитационном поле Земли. /Искусственные спутники Земли, 1960, вып.4, с.3-17.
- [94] Кислик М.Д. Анализ интегралов уравнений движения искусственного спутника в нормальном гравитационном поле Земли. /Искусственные спутники Земли, 1963, вып.13, с.23-52.
- [95] Коман Г.Г. Промежуточные орбиты искусственных спутников Луны. //Сообщения Государственного астрономического института им. П.К.Штернберга, 1973, номер 186, с.3.

- [96] Копейкин С.М. Релятивистские системы отсчёта в Солнечной системе. //Астрономический журнал, 1989, т.66, номер 5, с.1069-1080.
- [97] Копейкин С.М. Асимптотические сшивки гравитационных полей в Солнечной системе. //Астрономический журнал, 1989, т.66, номер 6, с.1289-1303.
- [98] Копейкин С.М. Релятивистские системы отсчёта в Солнечной системе. /Астрономия и гравитация. Итоги науки и техники. Серия Астрономия. М., ВИНТИ, 1991, т.41, с.87-146.
- [99] Красинский Г.А. К вычислению возмущений от несферичности Земли в движении ИСЗ. //Астрономический журнал, 1973, т.50, номер 5, с.1076-1084.
- [100] Кудрявцев С.М. Вычисление возмущений элементов орбиты спутника несферичной планеты на длительных интервалах времени. //Астрономический журнал, 1994, т.71, номер 1, с.161-165.
- [101] Кудрявцев С.М. Вычисление возмущений элементов орбиты спутника несферичной планеты на длительных интервалах времени. Аналитическая теория пятого порядка. //Астрономический журнал, 1995, т.72, номер 2, с.285-288.
- [102] Кузьмин А.В. Опорный каталог Тихо. //Труды Государственного астрономического института им. П.К.Штернберга, 2004, т.70, с.180-237.
- [103] Куимов К.В. Редукционные вычисления. /Практикум по астрометрии. М., изд-во МГУ, 1989, с.6-42.
- [104] Кутузов А.Л. Аналитическое решение главной задачи теории движения ИСЗ на ЭВМ. //Астрономия и геодезия, Томск, 1977, вып.6, с.26-31.
- [105] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.,1973.
- [106] Лидов М.Л. Вековые эффекты эволюции орбит под влиянием светового давления. //Космические исследования, 1969, т.7, номер 4, с.467-484.
- [107] Лидов М.Л. Полуаналитические методы расчёта движения спутников. //Труды Института теоретической астрономии АН СССР, 1978, т.17, с.54-61.
- [108] Лидов М.Л., Соловьёв А.А. Метод расчёта атмосферных возмущений движения спутника по орбите с большим эксцентриситетом. //Космические исследования, 1978, т.16, номер 6, с.806-821.
- [109] Лукьянов Л.Г., Емельянов Н.В., Ширмин Г.И. Обобщённая задача двух неподвижных центров или задача Дарбу-Гредеакса. //Космические исследования, 2005, т.43, номер 3, с.194-200.

- [110] Малкин З.М. Определение параметров вращения Земли из SLR наблюдений в ИПА РАН. //Труды Института прикладной астрономии Российской академии наук, С.Пб., 1997, вып.1, с.113-132.
- [111] Моисеев Н.Д. О некоторых упрощённых схемах небесной механики, получаемых при помощи осреднения ограниченной круговой проблемы трёх точек. //Труды Государственного астрономического института им. П.К.Штернберга, 1945, т.15, номер 1, с.75-117.
- [112] Мориц Г., Мюллер А. Вращение Земли: теория и наблюдения. Киев, Наукова Думка, 1992.
- [113] Мукин Э.Э. Влияние светового давления на движение некоторых видов ИСЗ. //Труды Государственного астрономического института им. П.К.Штернберга, 1972, т.43, номер 2, с.79-88.
- [114] Мушаилов Б.Р. Успехи небесной механики на рубеже веков. /Астрономический календарь.2000. Выпуск 102. М.:Космосинформ.,1999.
- [115] Насонова Л.П. О вековых возмущениях третьего порядка в движении спутников планет. //Астрономический журнал, 1971, т.48, номер 1, с.194-204.
- [116] Насонова Л.П. Вековые возмущения третьего порядка относительно сжатия от всех зональных гармоник гравитационного потенциала планеты. //Астрономический журнал, 1973, т.50, номер 4, с.849-861.
- [117] Нестеров В.В. Вычисление обусловленных Луной возмущений элементов орбит искусственных спутников Земли. //Труды Государственного астрономического института им. П.К.Штернберга, 1983, т.53, с.154-169.
- [118] Нестеров В.В. Определение параметров вращения Земли по данным лазерной дальнометрии ИСЗ Лагос во время первой кампании Мерит. /Итоги науки и техники. Астрономия. Проблемы современной астрометрии. Под ред. В.В.Подобеда. М., 1983, т.23, с.102-133.
- [119] Нестеров В.В. Стандарт основных вычислений астрономии. Основные алгоритмы спутниковой геодинамики. *Лекции для студентов старших курсов.* РФФИ. Москва. Изд-во Янус-К, 2001.
- [120] Нестеров В.В., Романова Г.В. Вычисление возмущений движения искусственных спутников в гравитационном поле Земли. //Труды Государственного астрономического института им. П.К.Штернберга, 1983, т.53, с.142-153.

- [121] Носков Б.Н. Влияние атмосферы на движение искусственных спутников Земли. //Итоги науки и техники. Исследование космического пространства. Движение искусственных спутников Земли. Под ред. В.Г.Дёмина. М., 1980, т.15, с.64-81.
- [122] Носков Б.Н. Возмущения элементов орбиты спутника, вызываемые совместным влиянием сжатия Земли и сопротивлением атмосферы. //Астрономический журнал, 1974, т.51, номер 4, с.876-889.
- [123] Монтенбрук О., Пфлегер Т. Астрономия на персональном компьютере. Санкт-Петербург. Изд-во “Питер”, 2002.
- [124] Орлов А.А. О почти периодических движениях материальной точки в поле тяготения сфероида. //Труды Государственного астрономического института им. П.К.Штернберга, 1954, т.24, с.139-153.
- [125] Орлов А.А. Вековые и долгопериодические возмущения в движении спутника несферической планеты. //Бюллетень Института теоретической астрономии АН СССР, 1965, т.10, номер 1, с.6-26.
- [126] Петкевич В.В. Теоретическая механика. *Учебное пособие для студентов университетов*. М., Наука, 1981.
- [127] Петровская М.С. Оценки функций Бесселя и коэффициентов Ганзена. //Бюллетень Института теоретической астрономии АН СССР, 1970, т.12, номер 5, с.401-421.
- [128] Петровская М.С. О сходимости разложения зональной части геопотенциала. //Астрономический журнал, 1970, т.47, номер 5, с.1128-1140.
- [129] Петровская М.С. Оценки коэффициентов разложения геопотенциала по сферическим функциям. //Бюллетень Института теоретической астрономии АН СССР, 1972, т.13, номер 4, с.225-230.
- [130] Питьева Е.В. Высокоточные эфемериды планет – ЕРМ и определение некоторых астрономических постоянных. //Астрономический вестник, 2005, т.39, номер 3, с.202-213.
- [131] Плахов Ю.В., Мыценко А.В., Шельпов В.А. О методике численного интегрирования уравнений возмущённого движения ИСЗ в задачах космической геодезии. //Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъёмка. М., 1989, номер 4, с.61-67.

- [132] Поляхова Е.Н. Световое давление и движение спутников Земли. //Бюллетень Института теоретической астрономии АН СССР, 1963, т.9, номер 1, с.15-45.
- [133] Поляхова Е.Н. Долгопериодические возмущения ИСЗ под действием светового давления Солнца. //Вестник Ленинградского государственного университета, 1970, т.7, с.144-152.
- [134] Поляхова Е.Н. Влияние теневых эффектов на движение искусственных спутников Земли. //Вестник Ленинградского государственного университета, 1972, т.1, с.138-144.
- [135] Поляхова Е.Н. Возмущающее влияние светового давления Солнца на движение ИСЗ. /Итоги науки и техники. Исследование космического пространства. Движение искусственных спутников Земли. Под ред. В.Г.Дёмина. М., 1980, т.15, с.82-113.
- [136] Поляхова Е.Н. Роль светового давления в астрономии и космических исследованиях. /Столкновения в околоземном пространстве. Сборник научных трудов. М., Космосинформ, 1995, с.173-252.
- [137] Проскурин В.Ф., Батраков Ю.В. Возмущения в движении искусственных спутников, вызываемые сжатием Земли. //Бюллетень Института теоретической астрономии АН СССР, 1960, т.7, номер 7, с.537-548.
- [138] Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Том 1. Перевод с французского под ред. В.И.Арнольда. М., Наука, 1971.
- [139] Романова Г.В. Использование данных лазерной дальнометрии спутников для определения приливного числа Лява. //Труды Государственного астрономического института им. П.К.Штернберга, 1988, т.60, с.16-19.
- [140] Савров Л.А. Разложение аномалий силы тяжести в ряды по эллипсоидальным функциям Ламе. //Труды Государственного астрономического института им. П.К.Штернберга, 1972, т.43, номер 2, с.18-29
- [141] Сикорский Ю.С. Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике. М.-Л., ОНТИ, 1936.
- [142] Сорокин Н.А. Короткопериодические возмущения второго порядка в движении искусственных спутников. //Научные информации Астрономического совета АН СССР, 1972, вып.25, с.62-73.

- [143] Сорокин Н.А. Долгопериодические возмущения второго порядка в движении ИСЗ. //Научные информации Астрономического совета АН СССР, 1977, вып.35, с.123-132.
- [144] Сорокин Н.А. Уравнения Энке в обобщённой задаче двух неподвижных центров. //Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъёмка. М., 1994, номер 4, с.88-95.
- [145] Сорокин Н.А. Вычисление полиномов Каннингема при численном интегрировании уравнений движения ИСЗ. //Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъёмка. М., 1999, номер 4, с.73-90.
- [146] Сорокин Н.А. Возмущения от планет Солнечной системы в движении искусственных спутников Земли. //Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъёмка. М., 2000, номер 2, с.80-91.
- [147] Сорокин Н.А. Влияние несферичности Луны на движение искусственного спутника Земли. //Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъёмка. М., 2003, номер 4, с.48-67.
- [148] Сорокин Н.А., Абрикосов О.А., Марченко А.Н. Об использовании точечных масс при вычислении орбит ИСЗ. //Наблюдения искусственных спутников Земли, 1982, т.21, номер 1, с.116-128.
- [149] Сочилина А.С. О влиянии резонансных возмущений от гравитационного поля планеты на движение спутника. //Бюллетень Института теоретической астрономии АН СССР, 1981, т.15, номер 2, с.114-123.
- [150] Сочилина А.С. О движении геостационарных спутников в гравитационном поле Земли. //Бюллетень Института теоретической астрономии АН СССР, 1982, т.15, номер 4, с.225-233.
- [151] Сочилина А.С. Об эволюции высоких почти круговых орбит спутников с критическим наклоном. //Бюллетень Института теоретической астрономии АН СССР, 1984, т.15, номер 5, с.278-283.
- [152] Сочилина А.С., Гаязов И.С. Об одном способе вычисления возмущений в движении спутника от лунных неравенств. //Бюллетень Института теоретической астрономии АН СССР, 1984, т.15, номер 5, с.284-287.
- [153] Стандартная Земля. Под ред. К.Лундквиста и Г.Вейса. Перевод с английского П.П.Медведева. М., Мир, 1969.

- [154] Стэндиш Е.М. Численные теории движения Солнца, Луны и планет, созданные в Лаборатории реактивного движения США. //Труды Института прикладной астрономии Российской академии наук, С.Пб., 2002, вып.8, с.166-169.
- [155] Тамаров В.А. Периодические возмущения 2-го и 3-го порядков в движении спутника несферичной планеты. //Астрономический журнал, 1986, т.64, номер 4, с.774-783.
- [156] Тамаров В.А., Черницов А.М. Аналитический алгоритм вычисления возмущений в движении ИСЗ, обусловленных сопротивлением атмосферы. //Астрономия и геодезия. Томск: Изд-во ТГУ, 1998, вып.16., с.134-148.
- [157] Татевян С.К., Сорокин Н.А., Залёткин С.Ф. Об одном методе численного интегрирования дифференциальных уравнений первого и второго порядка в астродинамике и космической геодезии. //Пакеты прикладных программ. Москва. Изд-во Московского государственного университета, 1997, с.60-119.
- [158] Татевян С.К., Сорокин Н.А., Залёткин С.Ф. О построении многочленных приближений при численном решении дифференциальных уравнений в орбитальном методе космической геодезии. //Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъёмка. М., 2000, номер 1, с.91-107.
- [159] Тимошкова Е.И. Об определении орбиты эллиптического типа в обобщённой задаче двух неподвижных центров. //Бюллетень Института теоретической астрономии АН СССР, 1968, т.11, номер 7, с.465-473.
- [160] Тимошкова Е.И. Уравнения возмущённого движения спутника. //Астрономический журнал, 1971, т.48, номер 5, с.1061-1066.
- [161] Тимошкова Е.И. К вопросу о разложении пертурбационной функции. //Астрономический журнал, 1972, т.49, номер 4, с.879-885.
- [162] Тимошкова Е.И. Вековые возмущения от несферичности центрального тела с точностью до членов третьей степени относительно динамического сжатия. //Вестник Ленинградского государственного университета, 1974, номер 19, с.145-150.
- [163] Тимошкова Е.И. Приближённая аналитическая теория движения стационарного ИСЗ. //Учёные записки Ленинградского государственного университета, 1977, номер 390, с.77-90.

- [164] Тимошкова Е.И., Холшевников К.В. Лунно-солнечные возмущения в движении спутников планеты. //Учёные записки Ленинградского государственного университета, 1974, номер 373, с.141-156.
- [165] Тупикова И.В. Построение на ЭВМ аналитической теории движения резонансных ИСЗ в гравитационном поле Земли. //Наблюдения искусственных спутников Земли, 1982, т.21, номер 1, с.21-24.
- [166] Тупикова И.В. Некоторые модификации метода Хори – Депри для построения полуаналитической теории третьего порядка для резонансных ИСЗ. //Наблюдения искусственных спутников Земли, 1984, т.23, с.240-242.
- [167] Уральская В.С. Полярные орбиты искусственных небесных тел. //Вестник Московского государственного университета. Физика, астрономия. 1964, т.6, номер 4, с.34-44.
- [168] Уральская В.С. Эволюция орбит околополярных спутников под влиянием лунно-солнечных возмущений. //Вестник Московского государственного университета. Физика, астрономия. 1969, т.11, номер 1, с.91-99.
- [169] Уральская В.С. Движение околополярных спутников. //Вестник Московского государственного университета. Физика, астрономия. 1969, т.11, номер 2, с.38-46.
- [170] Уральская В.С., Журавлёв С.Г. Движение искусственных спутников в гравитационном поле Земли. //Итоги науки и техники. Исследование космического пространства. Под ред. В.Г.Дёмина. М., 1980, т.15, с.3-43.
- [171] Филенко Л.Л. Буквенная теория движения ИСЗ в поле тессеральных гармоник потенциала притяжения Земли при малых эксцентриситетах. //Бюллетень Института теоретической астрономии АН СССР, 1972, т.13, номер 4, с.246-257.
- [172] Фоминов А.М. Движение спутника Земли. 1. Линейные возмущения. //Бюллетень Института теоретической астрономии АН СССР, 1980, т.14, номер 10, с.621-654.
- [173] Фоминов А.М. Движение спутника Земли. 2. Нелинейные возмущения. //Бюллетень Института теоретической астрономии АН СССР, 1981, т.15, номер 1, с.53-58.
- [174] Холшевников К.В. Асимптотические методы небесной механики. Ленинград. Изд-во Ленинградского государственного университета, 1985.

- [175] Холшевников К.В., Питьев Н.В., Титов В.Б. Притяжение небесных тел. СПб.: Изд-во СПб ун-та, 2005, 104с.
- [176] Холшевников К.В., Тимошкова Е.И. Построение аналитической теории движения спутника в нецентральной поле тяготения. //Учёные записки Ленинградского государственного университета, 1971, номер 359, с.97-118.
- [177] Хокинг Ст. Краткая история времени. С.-Пб., Амфора/Эврика, 2001.
- [178] Чеботарёв Г.А. Аналитические и численные методы небесной механики. М., Наука, 1965.
- [179] Чепурова В.М. Качественный анализ движения в гиперболическом случае задачи двух неподвижных центров. //Сообщения Государственного астрономического института им. П.К.Штернберга, 1968, номер 154, с.14-34.
- [180] Черницов А.М., Тамаров В.А. О способе построения аналитического алгоритма вычисления влияния светового давления на движение ИСЗ. // Астрономия и геодезия. Томск: Изд-во ТГУ, 1998, вып.16. с.239-245.
- [181] Шарлье К. Небесная механика. Перевод с немецкого под ред. Б.М.Щиголева. М., Наука, 1966.
- [182] Штифель Е., Шейфеле Г. Линейная и регулярная небесная механика. Перевод с английского под ред. В.А.Брумберга. М., Наука, 1975.
- [183] Эльясберг П.Е. Введение в теорию полёта искусственных спутников Земли. М., Наука, 1965.
- [184] Эльясберг П.Е. Информация, сколько её надо, как её обрабатывать? М., Наука, 1983.
- [185] Яров-Яровой М.С. Об одном способе исследования поступательного и вращательного движений спутников планет, имеющих ось симметрии. //Бюллетень Института теоретической астрономии АН СССР, 1962, т.8, номер 9, с.647-659.
- [186] Яров-Яровой М.С. Работы в области небесной механики в МГУ за 50 лет (1917 – 1967 гг.). /История и методология естественных наук. Москва. Изд-во Московского государственного университета, 1968, вып.7, Астрономия и радиофизика.

- [187] Яров-Яровой М.С. О применении уточнённых методов численного интегрирования в небесной механике. //Труды Государственного астрономического института им. П.К.Штернберга, 1974, т.45, с.178-200.
- [188] Яров-Яровой М.С. О выводе формул ускоренных и уточнённых методов численного интегрирования. /Современные проблемы математического моделирования. Теория и приложения. Москва. Изд-во Московского государственного университета, 1983, с.52-64.
- [189] Яров-Яровой М.С. О приближении прямоугольных координат, составляющих скорости и кеплеровых элементов орбит больших планет многочленами по времени. //Труды Государственного астрономического института им. П.К.Штернберга, 1986, т.58, с.23-49.
- [190] Яшкин С.Н. Возмущения в элементах орбиты ИСЗ от тессеральных и секториальных гармоник потенциала Земли. //Астрономический журнал, 1970, т.47, номер 5, с.1112-1120.
- [191] Яшкин С.Н. Случаи резонанса в элементах орбиты ИСЗ. //Астрономический журнал, 1970, т.47, номер 6, с.1289-1295.
- [192] Яшкин С.Н. Один вид дифференциальных уравнений возмущённого движения в канонических элементах. //Астрономический журнал, 1974, т.51, номер 3, с.635-640.
- [193] Aksnes K. A second order artificial satellite theory based on intermediate orbit. //Astronomical Journal, 1970, v.75, number 9, pp.1066-1076.
- [194] Allan R.R. The critical inclination problem: a simple treatment. //Celestial Mechanics, 1970, v.2, number 1, pp.121-122.
- [195] Andrlé P. On the solution of the generalized problem of the two fixed centres by Weierstrassian functions. //Bull. astron. inst. Czechosl., 1976, v.27, number 2, pp.118-125.
- [196] Balmino G. Contribution à l'amélioration du potentiel terrestre. /CNES Groupe de Recherches de Géodésie Spatiale Bull., 1974, number 12, p.1.
- [197] Balmino G., Moynot B., Reigber C. The GRIM-2 terrestrial gravitational potential model. Determination and evaluation. //Ann. Geophys., 1978, v.34, pp.145-161.

- [198] Barrar R.B. Some remarks on the motion of a satellite of an oblate planet. //Astronomical Journal, 1961, v.66, number 1, pp.11-15
- [199] Brouwer D. Solution of the problem of artificial satellite theory without drag. //Astronomical Journal, 1959, v.64, number 9, pp.378-397.
- [200] Brumberg V.A. Essential Relativistic Celestial Mechanics. Hilger, Bristol. 1991.
- [201] Cok David R. On the perturbations of a close-earth satellite due to lunar inequalities. //Celestial Mechanics, 1977, v.16, number 4, pp.459-479.
- [202] Dehant et al. Report of the IAU Working group on Non-rigid Earth Nutation Theory. //Celestial Mechanics, 1999, v.72, number 4, pp.245-310.
- [203] Deprit A., Rom A. The main problem of artificial satellite theory for small and moderate eccentricities. //Celestial Mechanics, 1970, v.2, number 2, pp.166-206.
- [204] Doubochine G.N. Sur le Développement du Potentiel de la Terre par les Fonctions le Lamé. /Trajectories des Corps Céleste Artificiels. Berlin – New York, 1966, p.68-71.
- [205] Garfinkel B. The orbit of a satellite of an oblate planet. //Astronomical Journal, 1959, v.64, number 9, pp.353-367.
- [206] Eanes R.J., Bettadpur S. The CSR 3.0 global ocean tide model. /Technical Memorandum CSR-TM-95-06, 1995, Center for Space Research, University of Texas, Austin. **<ftp://csr.utexas.edu/pub/tide>**
- [207] Estes Ronald H. On the analytic lunar and solar perturbations of a near Earth satellite. //Celestial Mechanics, 1974, v.10, number 3, pp.253-276.
- [208] Everhart E. Implicit single-sequence methods for integrating orbits. //Celestial Mechanics, 1974, v.19, number 1, pp.35-55.
- [209] Felix R. Hoots, Ronald R. Roehrich. SPACETRACK REPORT number 3, 1980. **<http://celestrak.com/NORAD/documentation/>**
- [210] IERS Conventions (1996). Dennis D. McCarthy (ed.) /IERS Technical note 21, Paris, 1996.
- [211] IERS Conventions (2000). Dennis D. McCarthy (ed.) /IERS Technical note 29, Paris, 2000. **<http://maia.usno.navy.mil/conv2000.html>**
- [212] ILRS Normal Point Format. **<http://ilrs.gsfc.nasa.gov/>**

- [213] International Earth Rotation and Reference Systems Service.
<http://hpiers.obspm.fr/>
- [214] Kholshevnikov K.V. Le développement du potentiel dans le cas d'une densité analytique. //Celestial Mechanics, 1971, v.3, number 2, pp.232-240.
- [215] Kholshevnikov K.V. On convergence of an asymmetrical body potential expansion in spherical harmonics. //Celestial Mechanics, 1977, v.16, number 1, pp.45-60.
- [216] Kinoshita H. Third-order solution of an artificial satellite theory. //SAO Special Reports, 1979, number 379.
- [217] Kozai Y. The motion of a close Earth satellite. //Astronomical Journal, 1959, v.64, number 9, pp.367-377.
- [218] Kozai Y. Second – order solution of artificial satellite theory without drag. //Astronomical Journal, 1962, v.67, number 5, pp.275-292.
- [219] Lemoine F.G., Kenyon S.C., Factor J.K., Trimmer R.G., Pavlis N.K., Chinn D.S., Cox C.M., Klosko S.M., Luthke S.B., Torrance M.H., Wang Y.M., Williamson R.G., Pavlis E.C., Rapp R.H., and Olson T.R. The Development of the Joint NASA GSFC and National Imagery and Mapping Agency (NIMA) Geopotential Model EGM96. /NASA/TP-1998-206861, 1998, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland.
<http://www.nima.mil/GandG/wgs-84/egm96.html>
- [220] Lerch F.J., Klosko S.M., Laubsher R., Wagner C.A. Gravity model improvement using GEOS-3 (GEM-9 and GEM-10). //Journ. Geophys. Res., 1979, v.84, pp.3897-3916.
- [221] Lerch F.J., Klosko S.M., Patel G.B. A refined gravity model from LAGEOS (GEM-L2). //Geoph. Res. Lett., 1982, v.9, pp.1263-1266.
- [222] Lerch F.J., Nerem R.S., Putney B.H., Felsentreger T.L., Sanchez B.V., Klosko S.M., Patel G.B., Williamson R.G., Chinn D.S., Chan J.C., Rachlin K.E., Chandler N.L., McCarthy J.J., Marshall J.A., Luthcke S.B., Pavlis D.E., Robbins J.W., Kapoor S., Pavlis E.C. Geopotential models from satellite tracking, altimeter and surface gravity data: GEM-T3 and GEM-T3S. //Journ. Geophys. Res., 1994, v.99, number 82, pp.2815-2839.
- [223] Newton R. Motion of a satellite around an unsymmetrical central body. //Journ. Appl. Phys., 1959, v.30, number 2, pp.78-83.

- [224] NORAD two-line elements.
<http://celestrak.com/NORAD/elements/>
- [225] Pearlman, M.R., Degnan, J.J., and Bosworth, J.M., The International Laser Ranging Service. //Advances in Space Res., 2002, v.30, number 2, pp. 135-143.
- [226] Precise GPS orbits computed at the National Geodetic Service.
<http://www.ngs.noaa.gov/GPS/GPS.html>
- [227] Precise GPS orbits computed at the National Geodetic Service.
http://www.ngs.noaa.gov/GPS/SP3_format.html
- [228] Project Merit Standards /US Naval observatory, 1983, circular 167.
- [229] Resolutions of the XXIVth General Assembly. /Internat. Astron. Union, Information bulletin. 2001. № 88. P.28.
- [230] Seidelmann P.K., editor. Explanatory Supplement to the Astronomical Almanach. Sausalito, California, 1992.
- [231] Seidelmann P.K., Abalakin V.K., Bursa M., Davies M.E., de Bergh C. Lieske J.H., Oberst J., Simon J.-L., Standish E.M., Stooke P., Thomas P.C. Report of the IAU/IAG Working Group on cartographic coordinates and rotational elements of the planets and satellites: 2000. //Celestial Mechanics and Dynamic Astronomy, 2002, v.82, pp.83-111.
- [232] Standish E.M., Newhall X.X., Williams J.G. and Folkner W.F. JPL Planetary and Lunar Ephemeris, DE405/LE405. /JPL Inter office Memorandum. 1998. № 312.F-98-048. P.1-28.
- [233] Sterne T.E. The gravitational orbit of a satellite of an oblate planet. //Astronomical Journal, 1958, v.63, pp.28-40.
- [234] Tapley B.D., Schutz B.E., Eans R.J. Satellite laser ranging and its applications. //Celestial Mechanics, 1985, v.37, number 3, pp.247-261.
- [235] Tapley B.D., Watkins M.M., Ries J.C., Davis G.W., Eanes R.J., Poole S.R., Rim H.J., Schutz B.E., Shum C.K., Nerem R.S., Lerch F.J., Marshall J.A., Klosko S.M., Pavlis N.K., and Williamson R.G. The Joint Gravity Model 3. //Journ. Geophys. Res., 1996, v.101, pp.28029-28049.
<http://www.csr.utexas.edu>
- [236] Vinti J.P. Theory of an accurate intermediary orbit for satellite astronomy. //Journ. Res. Nat. Bur. Standards, 1961, v.B65, number 3, p.169-201.

Именной указатель

- Абалакин В.К., 164, 167
Аксёнов Е.П., 6, 7, 52, 66, 74, 94, 96, 118, 140, 162
Акснес К., 61, 96
Алберт А., 166
Алексеев В.М., 96
Андрле П., 118
Антонов В.А., 30
Ахиезер Н.И., 118

Бадалян Г.К., 166
Балмино Г., 30
Баррар Р., 52
Батраков Ю.В., 74
Белецкий В.В., 96
Бордовицына Т.В., 96, 166, 167
Бормотов В.И., 74
Брауэр Д., 42–45, 52, 74, 85, 89, 140
Брумберг В.А., 74, 105

Вайнберг Ст., 167
Вар Д.М., 27
Вашковьяк М.А., 140
Вашковьяк С.Н., 6, 140, 162
Вернадский В.И., 168
Видякин В.В., 30
Винников Е.Л., 162
Винти Дж.Р., 52

Гапошкин Е.М., 140
Гарфинкель Б., 61, 74, 96
Гаязов И.С., 140, 176
Герасимов И.А., 118, 162
Гребеников Е.А., 6, 52, 74, 96
Губанов В.С., 140

Депри А., 74
Дёмин В.Г., 6, 52, 74, 96
Долгачёв В.П., 140
Доможилова Л.М., 96
Дубошин Г.Н., 30, 162

Емельянов Н.В., 6, 74, 96, 105, 118, 119, 140, 162

Жагар Ю.Х., 118
Журавлёв С.Г., 140

Залёткин С.Ф., 96
Зленко А.А., 171

Идельсон Н.И., 171

Кантер А.А., 140
Киношита Х., 74
Кислик М.Д., 52, 118
Клеменс Дж., 52, 140
Козаи И., 74
Копейкин С.М., 25, 172
Кудрявцев С.М., 74, 96, 172

- Кузьмин А.В., 172
Куимов К.В., 172
Кутузов А.Л., 74, 172
Лидов М.Л., 84
Лукьянов Л.Г., 172
Маррей К., 73
Маррини Дж., 73
Моисеев Н.Д., 173
Монтенбрук О., 174
Мориц Г., 173
Мукин Э.Э., 173
Мушаилов Б.Р., 162, 173
Мюллер И., 173
Насонова Л.П., 6, 162
Нестеров В.В., 74, 136
Носков Б.Н., 6, 162
Ньютон Р., 52
Орлов А.А., 174
Петкевич В.В., 174
Петровская М.С., 174
Плахов Ю.В., 96, 174
Поляхова Е.Н., 140, 175
Проскурин В.Ф., 74
Прохорова И.П., 6
Пуанкаре А., 74, 130, 140, 163
Пфлегер Т., 174
Ром А., 74
Романова Г.В., 74
Рябов Ю.А., 74
Савров Л.А., 30, 175
Свешников М.Л., 167
Сикорский Ю.С., 118
Сочилина А.С., 140, 176
Сорокин Н.А., 6, 96, 140, 162
Стэндиш Е.М., 177
Тамаров В.А., 118, 162
Татевян С.К., 96, 177
Тимошкова Е.И., 162, 177, 179
Тупикова И.В., 74, 178
Уральская В.С., 6, 96
Филенко Л.Л., 162
Фок В.А., 156
Фоминов А.М., 162
Холшевников К.В., 34, 62, 74
Хоукинг Ст., 179
Цайпель Х., 130, 163
Чепурова В.М., 6, 96, 179
Шарлье К., 142
Шейфеле Е., 179
Ширмин Г.И., 172
Штерн Т., 61, 96
Штифель Е., 179
Эверхарт Е., 96, 150
Эйнштейн А., 156
Эльясберг П.Е., 140, 179
Яров-Яровой М.С., 52, 96, 179
Яшкин С.Н., 140, 162

Предметный указатель

- Алгоритмы умножения и деления
многочленов, 119, 120, 122,
126, 127, 145
- Амплитуда эллиптической
функции, 98
- Аналитические методы небес-
ной механики, 5, 84
- Биномиальные коэффициенты,
103
- Возмущения в движении ИСЗ,
5, 140, 141, 149, 162
- Главная проблема, 5, 6, 8, 74
- Годдардовский центр космиче-
ских полётов, 33
- Гравитационное поле Земли, 30,
52
- График многочлена $F(\eta)$, 78
— — $\Phi(\xi)$, 77
- Зональные гармоники, 31, 104
- Канонические уравнения дви-
жения, 141, 146
- Корни многочлена $F(\eta)$, 78, 101
— — $\Phi(\xi)$, 77, 78, 83, 99
- Коэффициенты разложения
гравитационного поля
Земли, 15
- Критический угол наклона,
45, 140
- Неявный вид зависимости пере-
менных, 80, 127, 140, 147
- Международная служба враще-
ния Земли, IERS, 24
- Метод Гамильтона-Якоби, 54,
57, 74
— наименьших квадратов, 140
— Цайпеля, 74
- Многочлен $F(\eta)$, 57, 60, 76, 77,
79, 97
— $\Phi(\xi)$, 57, 60, 76, 79
- Модель геопотенциала, 8, 46
— — GEM-T3, 33
— — JGM3, 33
- Модуль эллиптического инте-
грала, 97, 99
- Обобщённая задача двух непо-
движных центров, 6, 38,
39, 52, 105, 141, 146
- Обобщённые импульсы, 56
- Обращение квадратур, 58, 100,
102, 118
- Общий интеграл, 57
- Определение координаты w ,
119, 124

- Переменные действие-угол, 62, 142, 145, 146
- Период аномалистический, 148
— драконический, 149
— сидерический, 149
- Полиномы Лежандра, 10, 12, 31
- Полный интеграл, 57
- Полный эллиптический интеграл первого рода, 98
- Полуаналитический метод, 84
- Присоединённые функции Лежандра, 10, 12
- Промежуточная орбита, 54, 56, 59, 62, 75, 79, 127, 141, 145
- Промежуточное гравитационное поле Земли, 38, 52, 60
- Прямоугольные координаты, 54, 62, 66
- Разложение по сферическим гармоникам, 17
- Резонансные возмущения, 140
- Связь времени t с угловыми переменными, 125, 127
- Секториальные гармоники, 32
- Смитсоновская астрофизическая обсерватория США, 33
- Стандартная Земля, 33
- Сфероидальные координаты, 54, 59, 63, 66
- Сходимость разложения геопотенциала, 17, 34, 35
- Теорема Виета, 83, 99, 101
— сложения, 13, 14
- Тессеральные гармоники, 32
- Угловая переменная E , 124, 126, 148
— — ψ , 100, 104, 105, 148
— — $\tilde{\varphi}$, 102, 104, 105, 148
— — $\tilde{\Omega}$, 123, 124, 127, 148
- Уравнения возмущённого движения, 53, 142, 146
— невозмущённого движения, 54
— промежуточного движения, 53, 56
- Формула Родрига, 10
- Частные производные, 144, 146, 147
- Численные методы небесной механики, 5, 84, 96
- Численно-аналитический метод, см. Полуаналитический метод
- Эллиптический интеграл, 97, 118, 119, 122, 125, 126, 143
- Эллиптические функции, 97, 98, 118

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М. В. ЛОМОНОСОВА

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
им. П. К. ШТЕРНБЕРГА

АКСЁНОВ Евгений Петрович
ЧАЗОВ Вадим Викторович

МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ИСЗ.

Главная проблема.

Основные алгоритмы.

7 лекций. 14 семинаров. +CD-ROM