说明：

- 本文 `1~5` 小节内容主要参考于资料 `1,2`；
- 本文只是作为作者另一篇博客《基于四元数的无人机姿态控制》的基础；

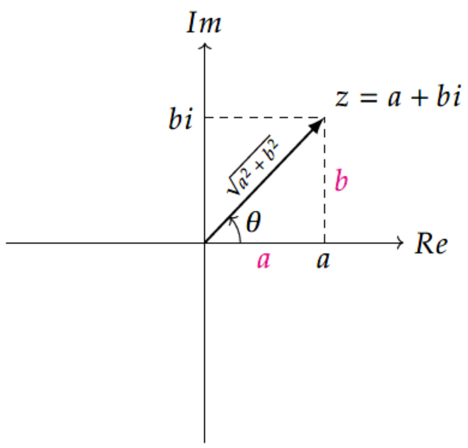
---

1. 复数、向量、矩阵三者之间的关系

- 复数是一种二维向量到二维向量的线性变换，即一个二阶矩阵；
- 单位实数1等价于恒等变换，单位虚数i相当于把向量绕原点旋转$\pi/2$，所以每一个复数都对应于这两种变换的线性叠加；
- $z = a + bi \iff \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. 复数与二维旋转的关系

- $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \sqrt{a^2+b^2}\begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{bmatrix}$



$||z|| = \sqrt{a^2+b^2}$

$\theta = atan2(b, a)$

$cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ||z|| & 0 \\ 0 & ||z|| \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} = 缩放矩阵 * 旋转矩阵$

- 根据复数与二阶矩阵的关系可得：$\begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} = cos(\theta) + sin(\theta)i$

- 旋转的复合

  已知**单位复数**z_1和z_2 以及 向量v

  $v' = z_1 v$，$v'' = z_2 v' = z_2(z_1 v) = (z_2 z_1)v$

  复数的相乘满足交换律：$z_2 z_1 = z_1 z_2$

  $z_1 z_2 = (cos\theta_1 + sin\theta_1 i)(cos\theta_2 + sin\theta_2 i)$

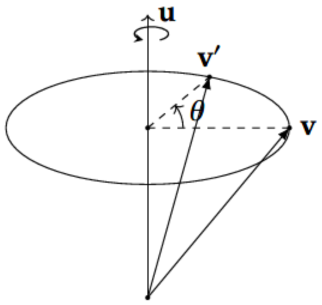
$= (cos\theta_1 cos\theta_2 - sin\theta_1 sin\theta_2) + (cos\theta_1 sin\theta_2 + cos\theta_2 sin\theta_1)i$

$= cos(\theta_1 + \theta_2) + sin(\theta_1 + \theta_2)i$

当我们对两个二维旋转进行复合时，所得到的变换仍是一个旋转，而且与施加的次序无关，这个等效变换的旋转角是两个旋转角之和.

3. 轴角法表示三维空间的旋转

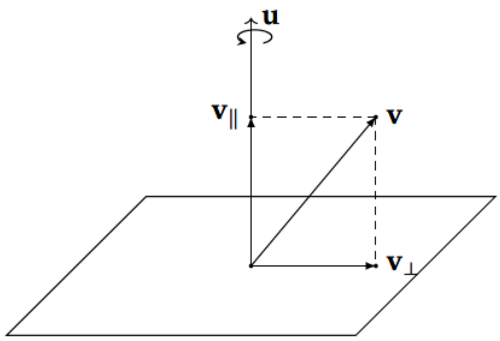
- 不考虑**欧拉角**来表示旋转，因为其依赖于三个坐标轴的选择，从而选择了固定的旋转顺序，继而导致 `Gimbal Lock`。
- 轴角(Axis-angle)式表示



旋转轴 $u = [x, y, z]^T$ ，旋转角 θ

  - 任意三维空间的旋转只需要三个自由度就可以表示（欧拉角），但是**轴角法表示却用到了四个自由度?**
    - 多出来的自由度是旋转轴 u 的模长，向量可以同时表示方向和大小，但是旋转轴的大小在这里对我们并没有用处；
    - **在三维空间中只需要知道与任意两个坐标轴之间的夹角就可以确定方向**，例如在地球上我们只需要通过经度和维度两个自由度就可以确定地球上任意一个方位，但是要确定这个方位上特定的位置则还需要加上海拔这一个自由度；
    - 为了消除这个多余的自由度，我们定义旋转轴为单位向量，即 $||u|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1$ 。
    - 为了计算方便，我们需要将非单位长度的旋转轴进行单位化：$\hat{u} = \frac{u}{||u||}$ 。
  - 旋转的分解
    - 为什么进行旋转分解?

      我觉得主要是便于分析理解。



$v = v_{||} + v_\perp$

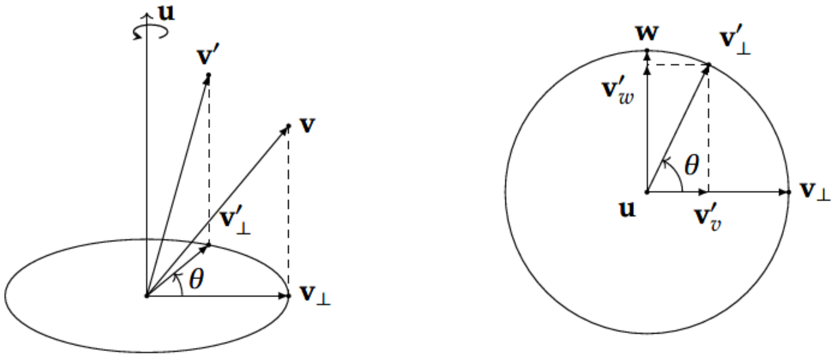
$v_{||} = proj_u(v) = \frac{u \cdot v}{||u||}u = (u \cdot v)u$ （u为单位向量，第二个等号用到了正交投影公式)

$v_\perp = v - v_{||} = v - (u \cdot v)u$

- $v_{||}$ 旋转

  因为 $v_{||}$ 与 u 平行重合，所以旋转 θ 角度之后 $v'_{||} = v_{||}$ 。

- $v_{\perp}$旋转



  向量 $v_{\perp}$ 不足以表示旋转，构造向量 $w = u \times v_{\perp}$ ；

  $v'_{\perp} = v'_v + v'_w = cos\theta v_{\perp} + sin\theta w = cos\theta v_{\perp} + sin\theta(u \times v_{\perp})$

- 合并

  $v' = v'_{||} + v'_{\perp} = v_{||} + cos\theta v_{\perp} + sin\theta(u \times v_{\perp})$

  $(u \times v_{\perp}) = u \times (v - v_{||}) = u \times v - u \times v_{||} = u \times v$ ，(u与$v_{||}$平行重合)

  $v' = (u \cdot v)u + cos\theta[v - (u \cdot v)u] + sin\theta(u \times v)$

  $= cos\theta v + (1 - cos\theta)(u \cdot v)u + sin\theta(u \times v)$ ，（`Rodrigues’ Rotation Formula`）

4. 四元数

- 四元数乘法不满足交换律，即$q_1 q_2 \neq q_2 q_1$ ，从而有了左乘和右乘的区别；**但是四元数与其共轭四元数的乘法满足交换律**，即 $q^* q = qq^* = ||q||^2$ 。（*共轭四元数与原四元数的区别就是虚部符号相反*）
- 我们可以将任意三维向量转变为**纯四元数**；（*纯四元数就是只有虚部的四元数*）
- 右乘q_1的逆运算就是右乘q_1^{-1}，即$q_2 q_1 q_1^{-1} = q_2$；左乘同理。
- 四元数的逆 $q^{-1} = \frac{q^*}{||q||^2}$ 。
- 虚数 i, j, k 三者关系：$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.
  - $ij = k, ik = -j; ji = -k, jk = i; ki = j, kj = -i$. (这里不需要硬记，你以 ijk 为坐标轴画一个三维坐标系，然后用右手法则就可以得到)
- `Graßmann积`：$q_1 = [s, \mathbf{v}], q_2 = [t, \mathbf{u}]$

  $q_1 q_2 = [st - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, s\mathbf{u} + t\mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{u}]$

  $q_2 q_1 = [st - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, s\mathbf{u} + t\mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}]$
- **四元数有关的更多内容可以参考资料1和2。**

5. 四元数与三维旋转的关系

5.1 如何用四元数来表示三维旋转

1. 首先用四元数来表示需要用到的向量

   $v=[0,\mathbf{v}]; \quad u=[0,\mathbf{u}]; \quad v_\perp=[0,\mathbf{v}_\perp]; \quad v_{||}=[0,\mathbf{v}_{||}]; \quad v'=[0,\mathbf{v}']; \quad v'_\perp=[0,\mathbf{v}'_\perp];$
   $v'_{||}=[0,\mathbf{v}'_{||}].$

   其中：$v=v_\perp+v_{||}$， $v'=v'_\perp+v'_{||}$

2. 平行分量的旋转

   $v'_{||}=v_{||}$

3. 垂直分量的旋转

   - 在前面轴角法的推导中我们知道
     $\mathbf{v}'_\perp=\mathbf{v}'_\mathbf{v}+\mathbf{v}'_\mathbf{w}=cos\theta\mathbf{v}_\perp+sin\theta\mathbf{w}=cos\theta\mathbf{v}_\perp+sin\theta(\mathbf{u}\times\mathbf{v}_\perp)$
   - 用四元数的形式来表示则得到：$v'_\perp=cos\theta v_\perp+sin\theta(uv_\perp)$ ，其中
     $uv_\perp=[0,\mathbf{u}\times\mathbf{v}_\perp]=(\mathbf{u}\times\mathbf{v}_\perp)$
   - 构造一个四元数 $q=cos\theta+sin\theta u=[cos\theta,sin\theta\mathbf{u}]$，则 $v'_\perp=qv_\perp$
   - 这里需要注意的是 $||q||=1$，即 q 是一个单位四元数，我们可以简单的理解为该变换只包含旋转，不包括缩放。

4. 合并

   - $v'=v'_\perp+v'_{||}=qv_\perp+v_{||}$
   - $q^2=qq=[cos2\theta,sin2\theta\mathbf{u}]$，表示绕旋转轴旋转两次同样的角度等价于一次旋转2倍的角度；
   - 构造一个四元数 $p^2=q,$ 则 $p=[cos\frac{\theta}{2},sin\frac{\theta}{2}\mathbf{u}]$，因为 $||p||=1,$ 则 $p^{-1}=p^*$；
   - $v'=qv_\perp+v_{||}=ppv_\perp+pp^{-1}v_{||}=ppv_\perp+pp^*v_{||}$
   - $p^*v_{||}=v_{||}p^*$； $pv_\perp=v_\perp p^*$
   - $v'=ppv_\perp+pp^*v_{||}=pv_\perp p^*+pv_{||}p^*=p(v_\perp+v_{||})p^*=pvp^*=pvp^{-1}$
   - 我们可以认为对平行分量进行了 pp^* 变换，互相抵消了；对垂直分量进行了 pp 变换，相当于旋转了 $2\times\frac{\theta}{2}=\theta$ 角度。

5. 所有旋转四元数的实部都是旋转角度一半的余弦值，假设有一个单位四元数 $[a,\mathbf{b}]$，则：

   - 对应旋转角度：$\frac{\theta}{2}=cos^{-1}a$；
   - 对应旋转轴：$\mathbf{u}=\frac{\mathbf{b}}{sin(cos^{-1}a)}$；

5.2 四元数与 Rodrigues’ Rotation Formula 关系

$$pvp^*=[0,cos\theta\mathbf{v}+(1-cos\theta)(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u}+sin\theta(\mathbf{u}\times\mathbf{v})]$$

证： $pvp^*=v'=qv_\perp+v_{||}=[cos\theta,sin\theta\mathbf{u}][0,\mathbf{v}_\perp]+[0,\mathbf{v}_{||}]$

$$=[-sin\theta\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_\perp,cos\theta\mathbf{v}_\perp+sin\theta\mathbf{u}\times\mathbf{v}_\perp+\mathbf{v}_{||}]$$

$$=[0,cos\theta(\mathbf{v}-\mathbf{v}_{||})+sin\theta\mathbf{u}\times(\mathbf{v}-\mathbf{v}_{||})+\mathbf{v}_{||}]$$

$$=[0,cos\theta\mathbf{v}+(1-cos\theta)\mathbf{v}_{||}+sin\theta(\mathbf{u}\times\mathbf{v})]$$

$$=[0,cos\theta\mathbf{v}+(1-cos\theta)(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u}+sin\theta(\mathbf{u}\times\mathbf{v})]$$

5.3 矩阵形式

- 左乘四元数 $q=a+bi+cj+dk$，等价于左边乘以矩阵 $L(q)$

$$L(q)=\begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix}$$

- 右乘单位四元数 q，等价于左边乘以矩阵 $R(q)$

$$R(q)=\begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix}$$

- $qvq^* = L(q)R(q^*)v = L(q)R(q)^T v$，注意这里面的四元数 q 是单位四元数，即 $a^2+b^2+c^2+d^2=1$。展开可得：

$$qvq^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2c^2-2d^2 & 2bc-2ad & 2ac+2bd \\ 0 & 2bc+2ad & 1-2b^2-2d^2 & 2cd-2ab \\ 0 & 2bd-2ac & 2ab+2cd & 1-2b^2-2c^2 \end{bmatrix} v$$

- 矩阵的第一行与第一列不会对 v 进行任何变换，所以通常也可以写成 3×3 的矩阵。
- 大批量的计算时，可以提前计算好矩阵，这样效率比较高。

5.4 指数形式

- $e^{u\theta} = cos\theta + sin\theta u = cos\theta + \mathbf{u} sin\theta = q$，其中$u=[0,\mathbf{u}], u^2=[-\mathbf{u}\cdot\mathbf{u},0]=-||u||^2=-1$
- $v' = pvp^* = e^{u\frac{\theta}{2}} v e^{-u\frac{\theta}{2}}$
- $log(q) = [0, \theta\mathbf{u}]$
- $q^t = (e^{u\theta})^t = e^{u(t\theta)} = [cos(t\theta), sin(t\theta)\mathbf{u}]$

5.5 其他

- 旋转复合
  - 假设有两个四元数 q_1, q_2，分别表示沿着不同轴旋转一定角度；
  - $v' = q_1 v q_1^*$； $v'' = q_2 v' q_2^*$； $v'' = q_2 q_1 v q_1^* q_2^* = (q_2 q_1) v (q_2 q_1)^*$；
  - 令$q_{com} = q_2 q_1$，则 $v'' = q_{com} v q_{com}^*$；**注意乘法顺序，从右往左。**
  - 注意复合四元数 q_{com} 表示沿着一条新的旋转轴旋转一定的角度，效果等价于依次旋转 q_1 和 q_2 。
- 双倍覆盖
  - **单位四元数与三维旋转并不是一一对应的（即单射），同一个三维旋转可以用两个不同的四元数表示。**（这里指的是旋转效果）
  - 四元数 q 表示沿着旋转轴 $\mathbf{u}$ 旋转 θ 角度，四元数 $-q$ 表示沿着旋转轴 $-\mathbf{u}$ 旋转 $2\pi-\theta$ 角度，但是两种旋转效果一样。
  - $(-q)v(-q^*) = qvq^*$；
  - 单位四元数与三维旋转是满射，即一个单位四元数一定对应一个三维旋转；
  - q 与 $-q$ 对应的矩阵形式一样，所以旋转矩阵不存在双倍覆盖问题。

参考资料

1. https://www.zhihu.com/question/23005815
2. https://github.com/Krasjet/quaternion