GTSP 转换为 TSP

文档作者： 李拥祺

Noon-Bean Transformation详解

论文

> C. E. Noon and J. C. Bean, “An efficient transformation of the generalized traveling salesman problem,” INFOR, vol. 31, no. 1, pp. 39 – 44, 1993.

转换过程

定义一个 asymmetric GTSP 实例 P，节点集 $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_m = N$，边集记为 A， A中只包含不同节点集合之间的边，每条边都具有非负的 cost，用一个向量表示记为 c 。

整个转换过程分为两部：

- 将 asymmetric GTSP 转换为 clustered TSP；
    - clustered TSP 的**可行解必须是将一个簇里面所有节点遍历之后再去遍历其他簇的节点**；
    - 定义一个 clustered TSP 实例 P' ,节点集 $C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_m = N'$ ，边集记为 A', 边权记为 c' ；
    - 转换过程：
        - $N' = N$；
        - 假设每一个簇中的节点都有一个任意的顺序，$i^1, i^2, \ldots, i^r$ ，$r = |S_i| = |C_i|$；
        - 在每一个簇中添加边 $(i^1, i^2), (i^2, i^3), (i^3, i^4), \cdots, (i^{r-1}, i^r), (i^r, i^1)$；
        - 新添加的边都赋权值 0 ，即$c'_{i^1 i^2} = c'_{i^2 i^3} = \cdots = c'_{i^{r-1} i^r} = c'_{i^r i^1} = 0$；
        - 对于 A 中的边 $(i^j, k^l) \in A, 其中 j > 1$ ，在 A' 中变为 $(i^{j-1}, k^l) \in A'$ ，且 $c'_{i^{j-1} k^l} = c_{i^j k^l}$ ；
        - 对于 A 中的边 $(i^1, k^l) \in A$ 在 A' 中变为 $(i^r, k^l) \in A'$ ，且 $c'_{i^r k^l} = c_{i^1 k^l}$ ；
    - 证明 $P = P'$

      证：

        - 假设问题 P 有一个可行解 $x = \{i^j, k^l, \cdots, p^q, i^j\}$

          我们可以构造出问题 P' 的一个可行解 $y = \{i^j, i^{j+1}, \cdots, i^{j-1}, k^l, k^{l+1}, \cdots, k^{l-1}, \cdots, p^q, p^{q+1}, \cdots, p^{q-1}, i^j\}$

          因为 y 中的不同簇之间的边权值都等于 x 中的不同簇之间相对应的边的权值，所以 $cost(y) = cost(x)$；

        - 问题 P' 的任意可行解，如果是从节点 i^j， $j \neq 1$ 进入簇 C_i ,那么其必然从节点 i^{j-1} 离开 C_i； 如果是从节点 i^1 进入簇 C_i ，那么其必然从节点 i^r 离开；（这是很显然的，因为clustered TSP的可行解就是需要遍历簇节点）

          这也就意味着如果问题 P' 有一个可行解通过了边 (i^j, k^l) ，那么这个可行解也必然包括以节点 i^{j+1} 为进簇点的簇间边和以节点 k^{l-1}为出簇点的簇间边。

          因此，如果给定问题 P' 的任意可行解 y ，我们可以构造出问题 P 的一个可行解 x ：对 y 中的所有簇间边 (i^j, k^l) ，在 x 中都对应边 $(i^{j+1}，k^l)$ ，因为 $c_{i^{j+1}, k^l} = c'_{i^j, k^l}$ ，所以 $cost(x) = cost(y)$；

Lyq

- 将将 asymmetric GTSP 转换为 clustered TSP问题之后可以直接求解 clustered TSP，也可以将 clustered TSP问题转换为 standard asymmetric TSP 问题再求解。

- 将 clustered TSP 转换为 standard asymmetric TSP.
  - 定义一个standard asymmetric TSP 实例 P''，节点集记为 N''，边集记为 A'', 边权记为 c''；
  - $N'' = N', \quad A'' = A'$;
  - $c''_{ij} = \begin{cases} c'_{ij} + \beta & \text{,if } i \in N' \quad and \quad j \in N' \text{,并且属于不同簇} \\ c'_{ij} & \text{,if } i \in N' \quad and \quad j \in N' \text{,并且属于相同的簇} \end{cases}$

    $+\infty > \beta > \sum_{(i,j) \in A'} c'_{ij}$

Heterogeneous MTSP 转换为 GTSP

- MTSP 问题是 n 个目标点中的任意一个必须仅且被 v 个 旅行商中的某一个经过；

  > the problem is to determine a set of v distinct salesman routes such that each customer is visited by exactly one salesman and the total travel costs are minimized.

- `homogeneous` 表示对所有旅行商而言，任意两个目标点之间的成本都是相同的，`heterogeneous` 则表示不同；
- a single-depot heterogeneous MTSP 转换为 asymmetric GTSP:
  - d^r_{ij} 表示旅行商 r 从城市 i 到城市 j 的成本，其中 $r = 1, \cdots, v \quad i = 0, \cdots, n \quad j = 0, \cdots, n \quad i \neq j$;
  - 构建 $v + n$ 个互斥的节点集
    - 节点集合 $S_r \quad r = 1, 2, \cdots, v$ 只包含一个节点，我们将其标识为 $0^r \quad r = 1, 2, \cdots, v$，这些节点是 `depot` 的副本，对应特定的旅行商；

      > node $0^r \in S_r$ represents "salesman r's depot".

    - 节点集合 $S_i \quad i = v + 1, \cdots, v + n$ 每一个都包含 v 个节点，i^r 表示位于节点集合 S_i 中被旅行商 r 访问的节点；
  - 定义各种边：
    - $(0^r, i^r) \ \ i = 1, 2, \cdots, n \quad r = 1, 2, \cdots, v \quad c_{0^r i^r} = d^r_{0i}$

      表示旅行商 r 从他自己的 `depot` 到节点集合 S_i 的第 r 个节点；
    - $(i^r, j^r) \ \ i \ or \ j = 1, 2, \cdots, n \quad r = 1, 2, \cdots, v \quad i \neq j \quad c_{i^r j^r} = d^r_{ij}$

      表示旅行商 r 从节点集合 S_i 的第 r 个节点到节点集合 S_j 的第 r 个节点，即旅行商 r 在节点集之间只能通过第 r 个节点移动；
    - $(j^r, 0^{r+1}) \ \ j = 1, 2, \cdots, n \quad r = 1, 2, \cdots, v - 1 \quad c_{j^r 0^{r+1}} = d^r_{j0}$

      表示旅行商 r 从节点集合 S_j 的第r 个节点到旅行商 $r + 1$ 的 `depot`；
    - $(j^v, 0^1) \ \ j = 1, 2, \cdots, n \qquad c_{j^v 0^1} = d^v_{j0}$

      旅行商 v 完成了旅行回到了旅行商 1 的 `depot`
- 旅行商 r 从自己的 `depot` 0^r 出发，通过一些节点集的第r 个节点之后回到旅行商 $r + 1$ 的`depot` 0^{r+1} 依次类推直到旅行商 v 走完。

补充

- 下面这篇论文也是介绍了一种将 GTSP 转换为 TSP 的方法，不过这篇论文中提到的方法主要是通过增加节点的方式来完成，感兴趣的也可以看看。

  > Dimitrjevic, Vladimir, Saric, et al. An efficient transformation of the generalized traveling salesman problem into the traveling. [J]. Information Sciences, 1997, 102(1-4):105-105.

- 更多关于 MTSP 问题转换为 TSP 问题的资料可以参考下面这篇论文

  > Bektas T . The multiple traveling salesman problem: an overview of formulations and solution procedures[J]. Omega, 2006, 34(3):209-219.

  论文中有一段专门讲解了 MTSP 转换为 TSP问题的各种方法的发展过程。