

Configuration Space (下)

文档作者：李拥祺

注：本文大部分内容来源于这本书：

Principles of Robot Motion: Theory, Algorithms, and Implementations[M]. MIT Press, 2005.

由于内容较多，我将笔记分为上下两个部分

4. 构型空间的拓扑 (topology)

- 拓扑是数学上用来研究当物体受到任意连续的变化后那些不变的属性；
- 举个例子：橡胶板上画了一个多边形，无论怎么拉扯这个橡胶板，这个多边形的有一些性质是不变的，比如多边形里面的点不会跑到多边形外边。
- 如果一个构型空间无法通过**连续变换**（剪切、黏贴等变换都不是连续变换）变为另一个构型空间，那么就可以认为它们**拓扑不同**。
- 例子：
 - 平面二连杆的构型空间 T^2 可以想象成一个橡胶甜甜圈表面，无论我们怎么拉伸和变形（除非撕开）这个甜甜圈，它始终有一个洞；
 - 圆形移动机器人的构型空间 R^2 可以想象成一个无限大的橡胶板，无论我们无论我们怎么拉伸和变形（除非撕裂）它，始终不会出现一个洞；
 - 对于拓扑学来说，所有橡胶甜甜圈都是一样的，同样所有橡胶板也是一样的；
 - 书上图片 3-10 所示的那个咖啡杯表面和圆环表面是拓扑等价的。
- 我们关注构型空间的拓扑结构的原因：
 - 影响我们对构型空间的表示；
 - 如果我们的路径规划算法在某一个构型空间上有效，那么在其拓扑等价的构型空间上也基本有效；
- 拓扑学中的两种连续变换：同胚 (Homeomorphisms) 和微分同胚 (Diffeomorphisms)

4.1 Homeomorphisms and Diffeomorphisms

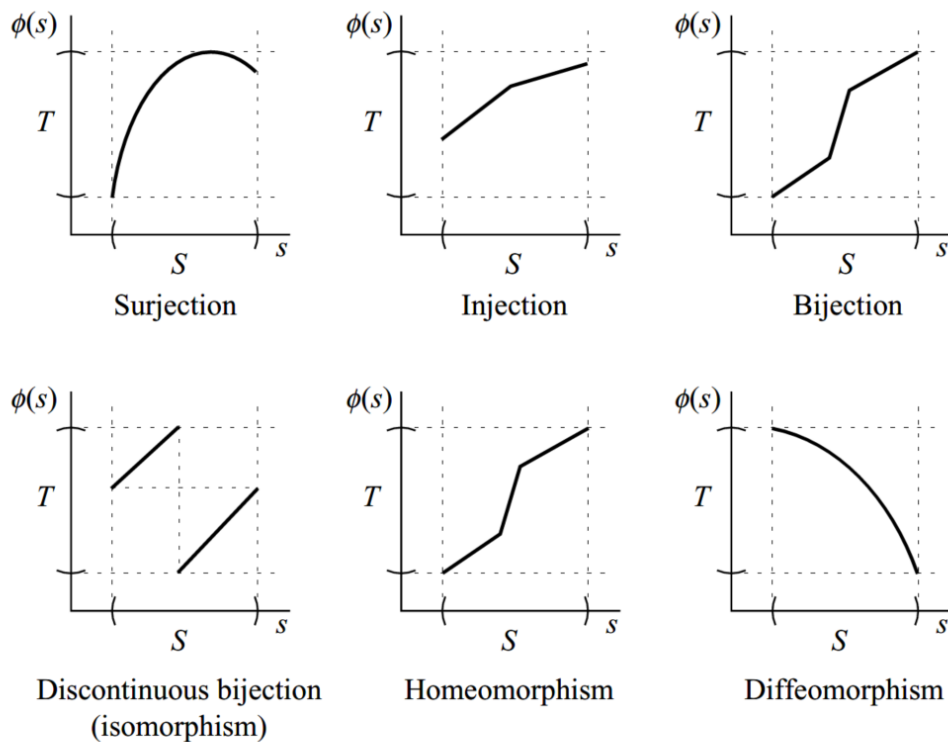


Figure 3.11 Representative ways of looking at surjective, injective, and bijective mappings. Bijections may become homeomorphisms or diffeomorphisms if they are sufficiently differentiable.

- 定义一个映射 $\phi : S \rightarrow T$, 有 $\phi(S) = \{\phi(s) | s \in S\}$ 和 $\phi^{-1}(T) = \{s | \phi(s) \in T\}$
 - 满射 (surjection) : 陪域 (可达域) 与值域相等的映射, 即 $\phi(S) = T$;
 - 单射 (injection) : 不同的变量取值映射到不同的值;
 - 双射 (bijection) : 一一对应, 既是满射, 又是单射;
 - 例子:
 - $\sin : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (-1, 1)$ 是双射
 - $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ 是满射
 - 双射具有很好的性质, 如在集合 T 上的所有点都存在逆, 我们可以在空间 S 和 T 之间来来回回。
- 定义一个**双射** $\phi : S \rightarrow T$, 并且 ϕ 和 ϕ^{-1} 是连续的
 - 称 ϕ 是一个同胚的或 S 和 T 是同胚的;
- 定义一个映射 $\phi : U \rightarrow V$, 如果该函数 ϕ 具有任意阶可导, 并且导函数都连续, 则称其为**光滑函数**, 记为 $\phi \in C^\infty$;
- 如果映射 ϕ 光滑且双射, 同时 ϕ^{-1} 光滑, 我们就称 U 和 V 微分同胚;
- 因为**光滑是一个比连续更强的条件**, 所以所有的微分同胚都是同胚;
- 例子: 三个**一维** 曲面

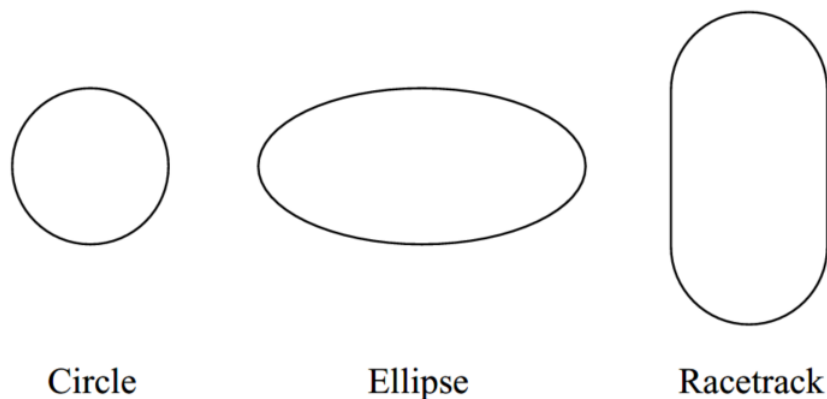


Figure 3.12 A circle, an ellipse, and a racetrack.

- 圆 $M_c = \{(x, y) | f_c(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0\}$
- 椭圆 $M_e = \{(x, y) | f_e(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0\}$
- 跑道 $M_r = \{(x, y) | f_r(x, y) = 0\}$, 其中 $f_r(x, y)$ 是一个分段函数, 具体表达方程可以见书;
- M_c , M_e 和 M_r 三者是同胚的, M_c 和 M_e 是微分同胚的;
- M_c 和 M_e 两者与 M_r 都不是微分同胚的, 因为 $f_r(x, y)$ 不是连续可微的;
- 如果 $\forall p \in S$, 在邻域 $\mathcal{U}, p \in \mathcal{U}$ 存在一个微分同胚 (同胚) $f: S \rightarrow T$, 我们就称 S 是 T 的局部微分同胚 (同胚);
 - 在球体上的任意一点都存在一个邻域与平面微分同胚;
 - 前面例子中的圆形移动机器人的工作空间与构型空间是微分同胚的, 恒等映射 $\phi(x) = x$ 就是一个全局微分同胚映射;
 - 平面二连杆的构型空间 T^2 与 \mathbb{R}^2 不是微分同胚, 只是局部微分同胚, 如果关节旋转角度有大小限制 $\theta_i^l < \theta_i < \theta_i^u$, 那么平面二连杆的构型空间就成为了 T^2 的一个**开子集**, 它与 \mathbb{R}^2 是微分同胚的。
 - **你可以这么理解**: 限制了关节的旋转角度之后, 每个关节的旋转角是 \mathbb{R}^1 的一个**开区间**, 我们可以**拉伸**这个开区间使其覆盖整条直线 \mathbb{R}^1 ;
 - 例如 $\tan: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ 就可作为一个拉伸函数;

4.2 可微流形 (Differentiable Manifolds)

4.2.1 流形

- 集合 S 中的任意一点都存在一个邻域与 \mathbb{R}^k 中的一个开集是同胚的, 即集合 S 与 \mathbb{R}^k 局部同胚, 我们称集合 S 为一个 **k 维流形 (Manifolds)**。
- 在构型空间上我们更希望看到其与 \mathbb{R}^k 局部微分同胚, 因为这种关系更强。

4.2.2 (坐标) 卡

- 如果集合 U 是 k 维流形上的一个开集, 并且在映射 ϕ 下, 集合 U 和集合 \mathbb{R}^k 上的一些开集微分同胚, 那么我们称 (U, ϕ) 是一个**卡 (Chart)**。
- 卡可以看成是坐标系统 (所以也可以叫做坐标卡), 集合 U 上的每一个点在欧几里得空间都被分配了一组坐标; 同时, 逆微分同胚 $\phi^{-1}: \mathbb{R}^k \rightarrow U$ 被认为是流形的参数化。
- 例子: 平面圆
 - 考虑一个一维流形 $S^1 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 = 1\}$
 - $\forall x \in S^1$, 我们都可以找到其一个邻域与 \mathbb{R} 微分同胚
 - 例如考虑这个圆的上半部分 $U_1 = \{x \in S^1 | x_2 > 0\}$, 卡 $\phi_1: U_1 \rightarrow (0, 1)$, 其中 $\phi_1(x) = x_1$, 这时候 x_1 就可以作为上半圆的一个局部坐标系。

- 反过来，圆的上半部分可以被 $z \in (0, 1)$ 参数化，通过映射 $\phi_1^{-1}(z) = (z, (1 - z)^{\frac{1}{2}})$ 将单位开区间映射到上半圆。
- S^1 与 \mathbb{R}^1 不是全局微分同胚，我们无法找到一个这样的坐标卡：它的域包含整个 S^1 。
- 例子：平面二连杆
 - 我们用两个参数 $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ 来表示构型空间 T^2 （它是一个流形）上的一个点；
 - 当我们用参数对 (θ_1, θ_2) 来表示一个构型时，实际上是在生成一个从 T^2 子集到 \mathbb{R}^2 子集的坐标卡；
 - 在从 T^2 到 \mathbb{R}^2 的映射过程中，会在 $\theta_i = \{0, 2\pi\}$ 的时候碰到连续性的问题，即我们无法只用一个坐标卡包含整个构型空间；
 - 碰到这种无法通过一个坐标卡来覆盖的问题，我们可以通过构造多个坐标卡来覆盖整个构型空间，但是需要注意以下几点：
 - 坐标卡的选取不是任意的；
 - 我们构造的这些坐标卡在重叠部分必须是兼容的；
 - 两个坐标卡如果具备这种兼容性，就被称为 C^∞ - related。

4.2.3 C^∞ - related

- 定义 k 维流形上两个坐标卡 (U, ϕ) 和 (V, ψ) ，定义两个集合 X, Y ：

$$X = \{\phi(x) \in \mathbb{R}^k | x \in U \cap V\}$$

$$Y = \{\psi(x) \in \mathbb{R}^k | x \in U \cap V\}$$
 如果复合函数 $\psi \circ \phi^{-1} : X \rightarrow Y$ 和 $\phi \circ \psi^{-1} : Y \rightarrow X$ 都是 C^∞ ，就称这两个坐标卡是 C^∞ - related。

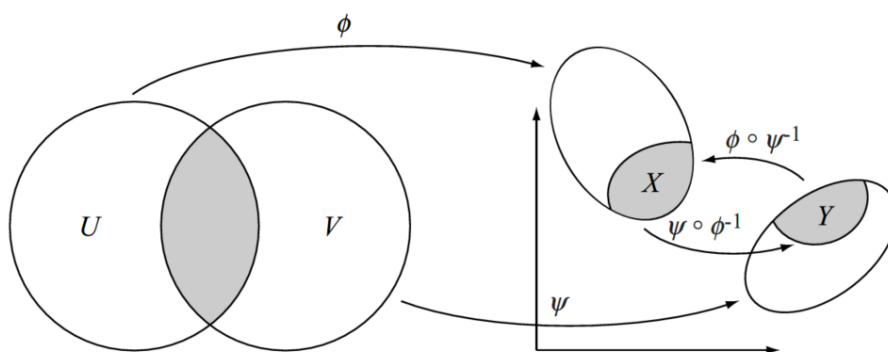


Figure 3.13 The charts (U, ϕ) and (V, ψ) map open sets on the k -dimensional manifold to open sets in \mathbb{R}^k .

- 如果一组互相 C^∞ - related 的坐标卡覆盖了整个构型空间 Q ，那么就称这组坐标卡为 Q 的一个**图册 (atlas)**。
- 例子：考虑一维流形 $S^1 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 = 1\}$
 - 定义四个坐标卡

$$U_1 = \{x \in S^1 | x_2 > 0\}, \quad \phi_1(x) = x_1$$

$$U_2 = \{x \in S^1 | x_2 < 0\}, \quad \phi_2(x) = x_1$$

$$U_3 = \{x \in S^1 | x_1 > 0\}, \quad \phi_3(x) = x_2$$

$$U_4 = \{x \in S^1 | x_1 < 0\}, \quad \phi_4(x) = x_2$$
 - 参数化 $\phi_i^{-1} : (-1, 1) \rightarrow U_i$

$$\phi_1^{-1} = (z, 1 - z^2)$$

$$\phi_2^{-1} = (z, z^2 - 1)$$

$$\phi_3^{-1} = (1 - z^2, z)$$

$$\phi_4^{-1} = (z^2 - 1, z)$$

- U_i 显然是覆盖了 S^1 的，所以我们只需要证明这些坐标卡是 C^∞ - related 就可以构造出一个图册。

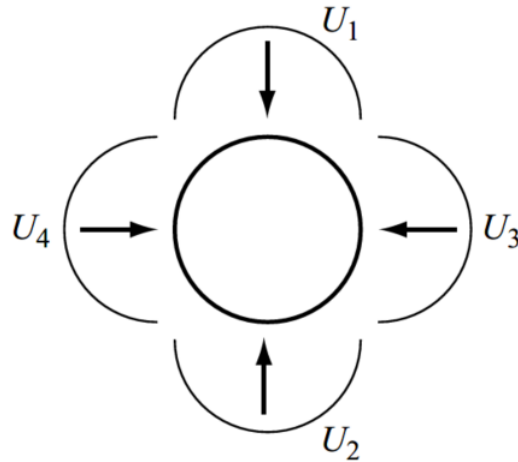


Figure 3.14 Four charts covering the circle S^1 .

$U_1 \cap U_2 = U_3 \cap U_4 = \emptyset$ ，所以我们只需要对比以下四组复合函数：

$$\phi_1 \circ \phi_3^{-1}: (0, 1) \rightarrow (0, 1), \quad \phi_3 \circ \phi_1^{-1}: (0, 1) \rightarrow (0, 1)$$

$$\phi_1 \circ \phi_4^{-1}: (0, 1) \rightarrow (-1, 0), \quad \phi_4 \circ \phi_1^{-1}: (-1, 0) \rightarrow (0, 1)$$

$$\phi_2 \circ \phi_3^{-1}: (-1, 0) \rightarrow (0, 1), \quad \phi_3 \circ \phi_2^{-1}: (0, 1) \rightarrow (-1, 0)$$

$$\phi_2 \circ \phi_4^{-1}: (-1, 0) \rightarrow (-1, 0), \quad \phi_4 \circ \phi_2^{-1}: (-1, 0) \rightarrow (-1, 0)$$

$\phi_i \circ \phi_j^{-1}(z)$ 在这四个复合函数的单位开区间域上都是光滑的，例如 $\phi_1 \circ \phi_3^{-1}(z) = 1 - z^2$

- 这四个坐标卡构成的图册不是最小的，覆盖 S^1 最少只需要两个坐标卡。

4.3 连通性和紧致性 (Connectedness and Compactness)

4.3.1 连通性

- 如果在流形中任意两点都存在一条路径，那么我们就称其为**路径连通 (path-connected)** 或者**连通 (connected)**；
 - 需要注意的是，在一般空间里，路径连通与连通并不是等价的概念，**路径连通是比连通更强的条件**，即路径连通的空间一定是连通的，但是连通的空间不一定是路径连通的；
 - 在流形里，可以认为两者是等价的；
- **所有自由构型空间都是连通的**，但是障碍物可以断开自由构型空间；
- 障碍物可能将自由构型空间断开成多个具有连通性的子空间，如果起始构型 q_{start} 和目标构型 q_{goal} 分别位于不同的子空间中将会导致运动规划问题无解；

4.3.2 紧致性

- 当一个空间是 \mathbb{R}^n 上一个**封闭的、有界的**子集，我们认为这个空间是紧致的；
- 封闭表示该空间包含空间内所有点，包括边界点，如 $[0, 1]$ ；
- 例子：
 - \mathbb{R}^n 没有界，所以不是紧致的；

- 单位圆 S^1 是 \mathbb{R}^2 的子集，同是也是封闭且有界的，所以它是紧致的；
- 在有障碍物（或角度限制）的构型空间中，障碍物的建模可能会影响该空间多紧致性；例如一个 `revolute joint` 关节是一个角度受限的关节，其是否可以旋转到临界角度决定了其关节构型空间是否紧致；
- 紧致的 `C-space` 相乘之后任然是紧致的；
- 对于一个非紧致空间 $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ 中，如果 \mathcal{M}_1 是紧致的，那么称 \mathcal{M}_1 是该空间的**紧致因子**；
- 紧致和非紧致空间之间是不能微分同胚的。

4.4 并不是所有构型空间都是流形

- 虽然我们喜欢符合流形（微分流形更好）定义的构型空间，但是我们必须明白一点：**并不是所有构型空间都是流形**；
- 例如：封闭的单位正方形空间 $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ 就不是一个流形，我的理解是点 $[0, 0]$ 的领域不与 \mathbb{R}^2 同胚；
- 请记住：如果你不能证明一个构型空间是一个流形，那么它就可能不是；

5. 流形如何嵌入到 \mathbb{R}^n

- 我们可以通过 k 个参数来描述一个 k 维流形，但是这样做可能会需要多个坐标卡，从而导致奇异性和不连续性；
- 另一种描述方法就是通过**引入更多的受约束的参数**来得到一个全局的描述；
 - 一维流形 $S^1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$ ，我们无法找到一个坐标卡完全覆盖整个 S^1 ，即无法将 S^1 嵌入到 \mathbb{R}^1 ；
 - 同理，二维流形 T^2 也无法嵌入到 \mathbb{R}^2 ，这也是为什么我们总是将其描述为三维空间中的甜甜圈的表面；
 - 流形 S^1 和 T^2 可以分别看成是 \mathbb{R}^2 和 \mathbb{R}^3 的**子流形**；
 - 子流形是**环绕空间**的光滑子集，继承了环绕空间的微性质；
 - 这种描述方法更有利于我们进行操作，例如用四元数来描述姿态，用矩阵来描述一个平面（或空间）中的刚体的构型。

5.1 矩阵描述刚体的构型

- 我们常用一个 $m \times m$ 的实数矩阵来描述一个刚体的位姿（位置和姿态），并且矩阵中的数需要满足一定的**光滑等式约束**，以使得这个矩阵表示的流形是 \mathbb{R}^{m^2} 的子流形。
- 用矩阵来描述的一个优点是，可以通过矩阵之间的相乘来得到流形中的其他矩阵，即这些矩阵构成了**群（group）**结构。
- 直观上来讲，简单的矩阵乘法可以被用来表示**变换描述刚体的参考系**或者**旋转和平移某一个构型**。
- 我们用**矩阵群** $SO(n)$ ， $n = 2 \text{ or } 3$ 来描述一个 n 维空间中的刚体的姿态；
- 我们用**矩阵群** $SE(n)$ ， $n = 2 \text{ or } 3$ 来描述一个 n 维空间中的刚体的位姿；

5.2 矩阵群

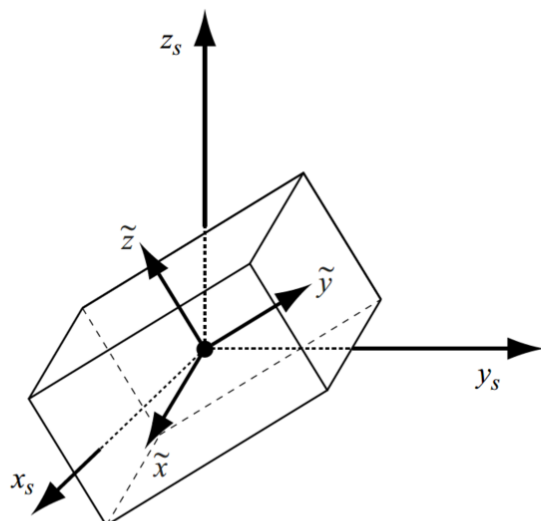


Figure 3.15 The rotation matrix for a body is obtained by expressing the unit vectors \tilde{x} , \tilde{y} , and \tilde{z} of the body x - y - z frame in a stationary frame x_s - y_s - z_s .

- 姿态: $SO(2)$ 和 $SO(3)$

- 用一个 3×3 **旋转矩阵**表示刚体的朝向

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 & \tilde{y}_1 & \tilde{z}_1 \\ \tilde{x}_2 & \tilde{y}_2 & \tilde{z}_2 \\ \tilde{x}_3 & \tilde{y}_3 & \tilde{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \in SO(3) \quad (\text{特殊正交群})$$

其中, $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3]$ 是刚体坐标系 x 轴方向的单位向量在惯性坐标系 $x_s - y_s - z_s$ 下的坐标表示, \tilde{y} 和 \tilde{z} 同理;

$$R_{11} = \tilde{x} \cdot x_s, \quad R_{21} = \tilde{x} \cdot y_s, \quad R_{31} = \tilde{x} \cdot z_s, \quad \cdot \text{表示点乘}$$

- 旋转矩阵用了 9 个数来表示姿态 (三个自由度), 那么就有 6 个独立约束:

- 每一列 (行) 是单位向量 $\|\tilde{x}\| = \|\tilde{y}\| = \|\tilde{z}\| = 1$
- 各列 (行) 之间是相互正交的 $\tilde{x}^T \tilde{y} = \tilde{y}^T \tilde{z} = \tilde{z}^T \tilde{x} = 0$

- 旋转矩阵的行列式 $\det(\mathbf{R}) = +1$, 特殊正交群的**特殊**就是指行列式为 $+1$, 而不是 -1 ;

- 平面二维情况下, 旋转矩阵是一个 2×2 的矩阵

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 & \tilde{y}_1 \\ \tilde{x}_2 & \tilde{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \in SO(2) \quad (\text{特殊欧几里得群})$$

其中, θ 是两个坐标系的夹角。

- **更一般的情况**, n 维空间下的姿态可以记为:

$$SO(n) = \{\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n} | \mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}, \det(\mathbf{R}) = 1\}$$

其中, \mathbf{I} 是单位矩阵, 同时, $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$

- 位姿: $SE(2)$ 和 $SE(3)$

- 如果刚体坐标系不仅仅进行了旋转 $\mathbf{R} \in SO(3)$, 而且还做了平移 $\mathbf{p} = [p_1, p_2, p_3]^T \in \mathbb{R}^3$, 我们可以用一个 4×4 的**转换矩阵**来描述:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SE(3)$$

- 一般来说, n 维空间下的刚体**位姿**可以看成是**特殊欧几里得群**的元素:

$$SE(n) = \begin{bmatrix} SO(n) & \mathbb{R}^n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 矩阵群 $SO(n)$ 和 $SE(n)$ 常被用于:

- 描述刚体的构型；
- 改变一个构型或一个点的参考系；
- 变换（移动）一个构型或一个点；
- **注意**：当我们用矩阵来描述一个构型时，我们喜欢称之为 `frame(坐标系)`；而如果我们用矩阵来表示变换或坐标改变时，我们喜欢称其为 `transform(转换)`。

- 矩阵乘以向量其实就是改变向量的基，而新的基就是这个矩阵的列向量空间

例子（单位间距的规则网格）

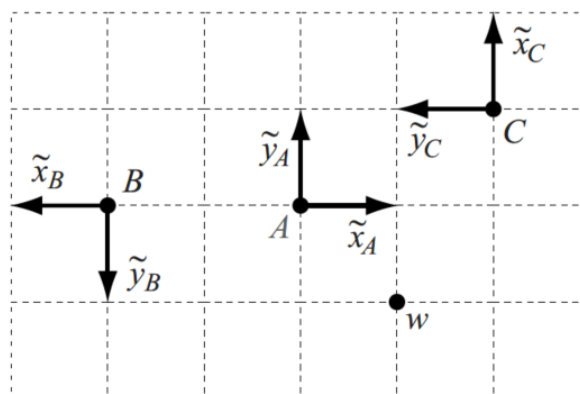


Figure 3.17 Three frames in a plane with their z -axes pointing out of the page.

- T_{AB} ：坐标系 B 的构型在坐标系 A 中的表示， T_{BC} ：坐标系 C 的构型在坐标系 B 中的表示；

$$T_{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{AB} & \mathbf{p}_{AB} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_{AB} = \mathbf{R}_{BA}^T$$

$$T_{AB}T_{BC} = T_{AC}$$

- 点 w 在坐标系 C 中表示为 w_C ，注意要写成齐次坐标

$$w_B = T_{BC}w_C$$

$$w_A = T_{AB}T_{BC}w_C$$

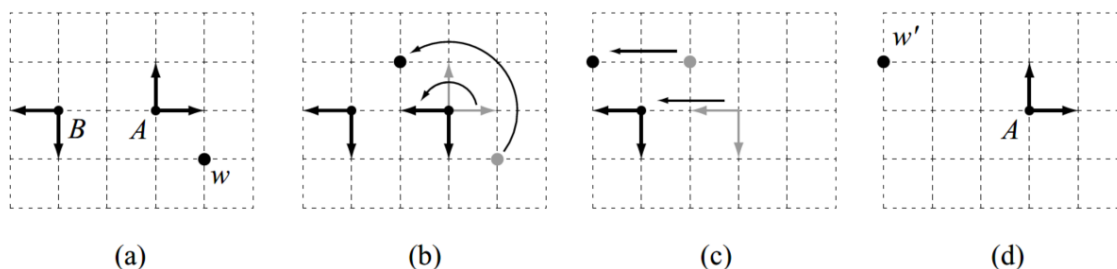


Figure 3.18 Displacing a point by the transformation T_{AB} . (a) The frames A and B and the point w . (b) Rotating frame A to the orientation of frame B , carrying the point w along with it. (c) Translating frame A to the location of frame B , carrying w along with it. (d) The final point $w'_A = T_{AB}w_A$.

- $SE(n)$ 中的元素也可以用来变换一个点。

$$w'_A = T_{AB}w_A$$

- 点 w 绕着坐标系 A 的原点旋转 \mathbf{R}_{AB} ；
- 然后，在坐标系 A 中沿着向量 \mathbf{p}_{AB} 平移；
- 整个变换过程与坐标系 A 变换为坐标系 B 一致；
- 前面都是坐标系的变换，点的位置没有变动，而这里是点的位置变动，而坐标系却没有动。

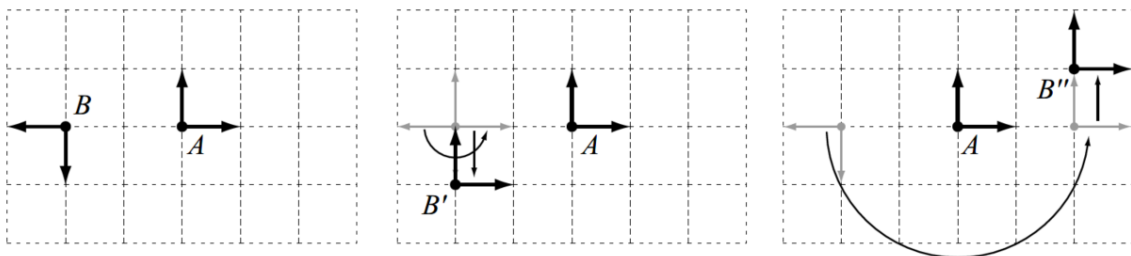


Figure 3.19 (a) The initial frame B relative to A . (b) B' is obtained by rotating about B and then translating in the original y_B -direction. (c) B'' is obtained by rotating about A and then translating in the y_A -direction.

- $SE(3)$ 中的元素也可以用来变换坐标系

假设有一个转换矩阵 $T_1 \in SE(3)$

$$T_{AB'} = T_{AB}T_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{AB}\mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_{AB}\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_{AB} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 坐标系 B 绕坐标系自己原点旋转 \mathbf{R}_1 ;
- 然后, 沿着坐标系 B 未旋转前的原点平移 \mathbf{p}_1 ;

$$T_{AB''} = T_1T_{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1\mathbf{R}_{AB} & \mathbf{R}_1\mathbf{p}_{AB} + \mathbf{p}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 坐标系 B 绕坐标系 A 原点旋转 \mathbf{R}_1 ;
- 然后, 在坐标系 A 中沿着 \mathbf{p}_1 平移;

$T_{AB'} \neq T_{AB''}$, 因为**矩阵乘法不满足交换律**。

- 如果坐标系 B 是固定在一个移动物体上, 如无人机, 那么我们称**右乘** T_1 为 **机体系转换**, 因为旋转和平移都是相对坐标系 B ;
- 如果坐标系 A 是惯性世界坐标系, 那么我们称**左乘** T_1 为 **世界系转换**, 因为旋转和平移都是相对坐标系 A ;

6. $SO(3)$ 参数化

- $SO(3)$ 只有三个自由度, 旋转矩阵却用了九个参数来表示, 那么能不能只用三个参数来表示呢?
- 通常情况下, 我们可以使用**欧拉角**来参数 $SO(3)$,但是, 只能**局部参数化**, 无法做到**全局参数化**, 所以欧拉角存在 Gimbal lock 问题;
- 下面以坐标系 \mathcal{F}_1 相对坐标系 \mathcal{F}_0 的姿态为例说明欧拉角的表示, 采用 $Z - Y - Z$ 的旋转顺序

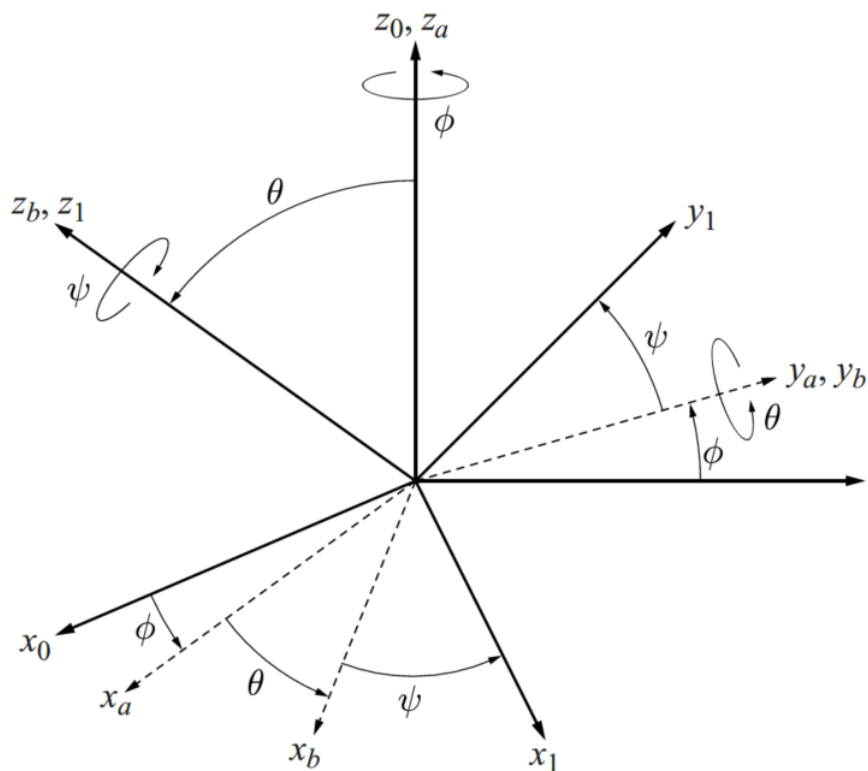


Figure 3.20 Euler angle representation.

- 绕坐标系 \mathcal{F}_0 的 Z 轴旋转 ϕ 角度得到坐标系 \mathcal{F}_a ;
- 绕坐标系 \mathcal{F}_a 的 Y 轴旋转 θ 角度得到坐标系 \mathcal{F}_b ;
- 绕坐标系 \mathcal{F}_b 的 Z 轴旋转 ψ 角度得到坐标系 \mathcal{F}_1 ;
- 得到欧拉角: (ϕ, θ, ψ) ;
- 欧拉角对应的旋转矩阵:

$$\begin{aligned}
 R &= R_{z,\phi} R_{y,\theta} R_{z,\psi} \\
 &= \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 \\ s_\phi & c_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi & 0 \\ s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c_\phi c_\theta c_\psi - s_\phi s_\psi & -c_\phi c_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta \\ s_\phi c_\theta c_\psi + c_\phi s_\psi & -s_\phi c_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi s_\theta \\ -s_\theta c_\psi & s_\theta s_\psi & c_\theta \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

需要注意的是： 这里都是右乘，因为旋转轴是定义在变化的机体系上；

7. C-Space 例子

- 一般情况下，我们可以将机器人建模为刚体，铰接链，或者两者的结合；
- 一些常见的机器人及其构型空间如下表所示：

机器人类型	构型空间
平面移动机器人（只能平移）	\mathbb{R}^2
平面移动机器人（既能平移也能旋转）	$SE(2)$ 或 $\mathbb{R}^2 \times S^1$
三维空间中的刚体（只能平移）	\mathbb{R}^3
航天器（空间机器人）	$SE(3)$ 或 $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$
n 关节旋转机械臂	T^n
一个平面移动机器人搭载一个 n 关节机械臂	$SE(2) \times T^n$

- 需要特别注意的点：
 - $S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1 (n \text{ times}) = T^n$ (n 维环面)
 - $S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1 (n \text{ times}) \neq S^n$ (\mathbb{R}^{n+1} 空间中的 n 维球面)
 - $S^1 \times S^1 \times S^1 \neq SO(3)$
 - $SE(2) \neq \mathbb{R}^3$
 - $SE(3) \neq \mathbb{R}^6$
- 流形 S^n , T^n 和 $SO(n)$ 都是紧致的，它们的乘积也是紧致的；
- 流形 \mathbb{R}^n 和 $SE(n)$ 都不是紧致的，它们与其他流形的乘积也是非紧致的，无论其他流形是否是紧致的；
- 构型空间与流形关系：
 - \mathbb{R}^1 和 $SO(2)$ 是一维流形；
 - \mathbb{R}^2 , S^2 和 T^2 是二维流形；
 - \mathbb{R}^3 , $SE(2)$ 和 $SO(3)$ 是三维流形；
 - \mathbb{R}^6 , T^6 和 $SE(3)$ 是六维流形；

8. 构型转换和速度表示

- 我们经常需要将一个机器人的构型表示转换为另一个构型表示，即 $q \in \mathcal{Q} \rightarrow x \in \mathcal{M}$ ；
- 以机械臂为例，构型 q 表示关节角度， x 表示末端执行器的构型（末端执行器可以看成是工作空间中的一个刚体）；
- 在真实世界里规划操作任务显然是用 x 这种表示更加方便，但是进行机械臂控制时显然用 q 这种表达方式更加简单，所以我们需要一种简便方法可以在两种表示之间来回切换。
- 定义正向运动学 (forward kinematics) 映射: $\phi: \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{M}$ ；
- 定义逆向运动学 (inverse kinematics) 映射: $\phi^{-1}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{Q}$ ；
- \mathcal{Q} , \mathcal{M} 的维度不一定相等，并且大部分情况下，这两种映射不是同胚的；
- $\dot{x} = \frac{\partial \phi}{\partial q} \dot{q} = J(q) \dot{q}$

8.1 以平面二连杆 (RR) 为例

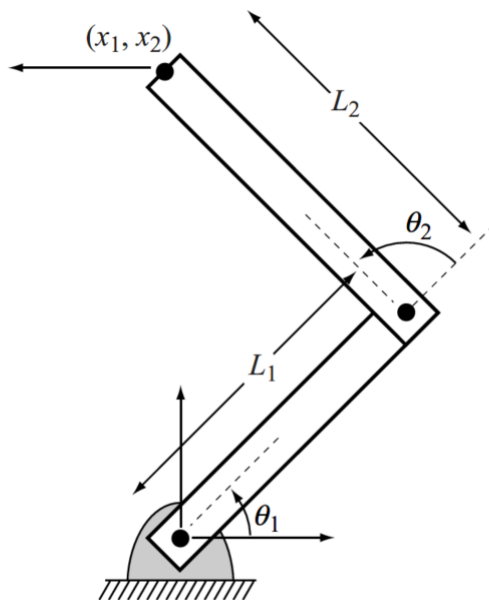


Figure 3.21 The 2R robot arm and the velocity at its endpoint.

- $q = [\theta_1, \theta_2]^T$ $\mathcal{Q} = T^2$
- $x = [x_1, x_2]^T$ $M \subset \mathbb{R}^2$
- $\dim(\mathcal{Q}) = \dim(\mathbb{R}^2)$
- $\phi(q) = \begin{bmatrix} \phi_1(q) \\ \phi_2(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$
- 逆运动学映射 ϕ^{-1} 在 \mathcal{M} 的大部分点都是一对二，即对应一个 x 取值，有两种 q 可选；
- **Jacobian 矩阵**

$$J(q) = \frac{\partial \phi}{\partial q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1 \sin \theta_1 - L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$
- 当 $\sin \theta_2 = 0$ 时，雅可比矩阵损失了秩，对机械臂来说就是处于一个**奇异构型**；
- 举个具体的例子： $L_1 = L_2 = 1$, $\theta_1 = \pi/4$, $\theta_2 = \pi/2$, $\dot{q} = [1, 0]^T$

$$\dot{x} = J(q)\dot{q} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

一个二维的 \dot{q} 映射为了一个一维的 \dot{x} ，显然是不可能的，因为末端执行器的瞬时速度不可能只在一个方向上；

8.2 以平面上的多边形为例

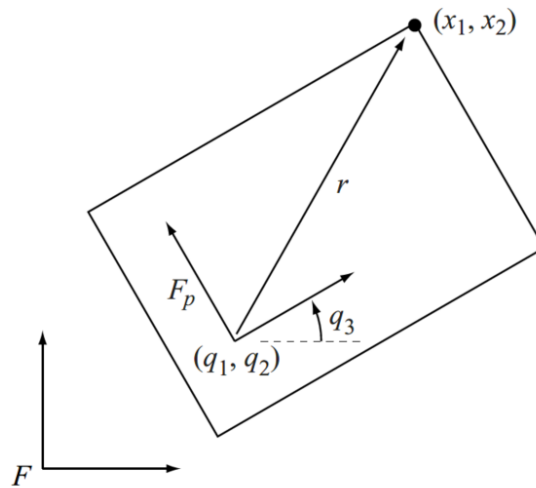


Figure 3.22 The point on the polygon is at r in the polygon frame \mathcal{F}_p and x in the world frame \mathcal{F} .

- $q = [q_1, q_2, q_3]^T \in \mathcal{Q} = \mathbb{R}^2 \times S^1$, 其中 (q_1, q_2) 用来表示多边形机体坐标系 \mathcal{F}_p 相对于世界坐标系 \mathcal{F} 的位置, q_3 用来表示相对姿态;
- 多边形上一个固定点 $r = [r_1, r_2]^T$ (机体坐标系下), 该点在平面的位置记为 $x = [x_1, x_2]^T \in \mathcal{M} = \mathbb{R}^2$;
- $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \phi(q) = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos q_3 & -\sin q_3 \\ \sin q_3 & \cos q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$
- 逆运动学映射 ϕ^{-1} 是一个**一对多**的映射, 因为 $\dim(\mathcal{Q}) > \dim(\mathcal{M})$;
- **Jacobian** 矩阵 $J(q) = \frac{\partial \phi}{\partial q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial q_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial q_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial q_3} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial q_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial q_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial q_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -r_1 \sin q_3 - r_2 \cos q_3 \\ 0 & 1 & r_1 \cos q_3 - r_2 \sin q_3 \end{bmatrix}$

参考资料

1. <https://www.zhihu.com/question/60108896> (构型空间的知乎回答)
2. <https://zhuanlan.zhihu.com/p/48662038> (完整约束与非完整约束的知乎回答)
3. <https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%B5%81%E5%BD%A2> (维基百科-流形)
- 4.