0. 说明
问1：证明对任意两个 3×1 向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$，都有 $\boldsymbol{u}^{\wedge}\boldsymbol{v}\equiv-\boldsymbol{v}^{\wedge}\boldsymbol{u}$
问2：请用下式证明 $\boldsymbol{C}^{-1}=\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}$：
问3：证明对任意 3×1 向量 v 和旋转矩阵 C，都有 $(\boldsymbol{Cv})^{\wedge}\equiv\boldsymbol{Cv}^{\wedge}\boldsymbol{C}^{T}$。

0. 说明

本 PDF 文档为自动生成，如有遗漏的格式错误但不影响阅读请见谅，若影响了阅读请告知！

问1：证明对任意两个 3×1 向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$，都有 $\boldsymbol{u}^{\wedge}\boldsymbol{v}\equiv-\boldsymbol{v}^{\wedge}\boldsymbol{u}$

证：

- 方1：设 $\boldsymbol{u}=[u_1,u_2,u_3]^T$，$\boldsymbol{v}=[v_1,v_2,v_3]^T$

$$\boldsymbol{u}^{\wedge}=\begin{bmatrix}0 & -u_3 & u_2\\ u_3 & 0 & -u_1\\ -u_2 & u_1 & 0\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{v}^{\wedge}=\begin{bmatrix}0 & -v_3 & v_2\\ v_3 & 0 & -v_1\\ -v_2 & v_1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}^{\wedge}\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}-u_3v_2+u_2v_3\\ u_3v_1-u_1v_3\\ -u_2v_1+u_1v_2\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{v}^{\wedge}\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}-v_3u_2+v_2u_3\\ v_3u_1-v_1u_3\\ -v_2u_1+v_1u_2\end{bmatrix}$$

显然可得：$\boldsymbol{u}^{\wedge}\boldsymbol{v}\equiv-\boldsymbol{v}^{\wedge}\boldsymbol{u}$

- 方2：$\boldsymbol{u}^{\wedge}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{v}^{\wedge}\boldsymbol{u}$

问2：请用下式证明 $\boldsymbol{C}^{-1}=\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}$：

$\boldsymbol{C}=\cos\theta\mathbf{1}+(1-\cos\theta)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}}+\sin\theta\boldsymbol{a}^{\wedge}$

证：

- 方1：根据式子我们可以知道 C 是旋转矩阵，所以其是一个正交矩阵，满足 $C^T=C^{-1}$
- 方2：设 $\boldsymbol{a}=[a_1,a_2,a_3]^T$

带入公式计算可得矩阵 C，然后就可以得到C^T，计算$\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T=\mathbf{1}\Longrightarrow\boldsymbol{C}^{-1}=\boldsymbol{C}^T$

- 方3：$C^T=[\cos\theta\mathbf{1}+(1-\cos\theta)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}}+\sin\theta\boldsymbol{a}^{\wedge}]^T$

$$=\cos\theta(\mathbf{1})^T+(1-\cos\theta)(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}})^T+\sin\theta(\boldsymbol{a}^{\wedge})^T$$
$$=\cos\theta\mathbf{1}+(1-\cos\theta)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}}-sin\theta\boldsymbol{a}^{\wedge}$$

如果我们用上旋转矩阵的性质，即 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{C}^{-1}$ 其实就是一个旋转方向相反，但是旋转角度大小相等的旋转，将 $-\theta$ 带入公式即可得证，但是如果我们认为矩阵 C 是旋转矩阵，那么直接方法1就可，所以我们这里不能用旋转矩阵的性质。

$$CC^T=[\cos\theta\mathbf{1}+(1-\cos\theta)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}}+\sin\theta\boldsymbol{a}^{\wedge}][\cos\theta\mathbf{1}+(1-\cos\theta)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}}-sin\theta\boldsymbol{a}^{\wedge}]$$
$$=\cos\theta^2\mathbf{1}+\cos\theta(1-\cos\theta)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}}-\cos\theta\sin\theta\boldsymbol{a}^{\wedge}$$
$$+\cos\theta(1-\cos\theta)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}}+(1-\cos\theta)^2\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}}-\sin\theta(1-\cos\theta)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{a}^{\wedge}$$
$$+\sin\theta\cos\theta\boldsymbol{a}^{\wedge}+\sin\theta(1-\cos\theta)\boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}}-\sin^2\theta\boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{a}^{\wedge}$$

这里需要用到的性质： 1）$\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{a}=1$； 2) $\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{a}^{\wedge}=\boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}}=0$； 3) $\boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{a}^{\wedge}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}}-\mathbf{1}$

将这几条性质带入上式化简可得：$\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}=\mathbf{1}\Longrightarrow\boldsymbol{C}^T=\boldsymbol{C}^{-1}$

问3：证明对任意 3×1 向量 v 和旋转矩阵 C，都有 $(\boldsymbol{Cv})^{\wedge} \equiv \boldsymbol{C}\boldsymbol{v}^{\wedge}\boldsymbol{C}^{T}$ 。

证：

- 方1：设 $\boldsymbol{v} = [v_1, v_2, v_3]^T$， $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$

  带入公式左右两边计算即可。

- 方2：因为已经知道矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是旋转矩阵，则可得 $\boldsymbol{C}^T = \boldsymbol{C}^{-1}$

  等式两边同乘以矩阵 $\boldsymbol{C}$ 可得 $(\boldsymbol{Cv})^{\wedge}\boldsymbol{C} \equiv \boldsymbol{C}\boldsymbol{v}^{\wedge}$

  记等式左边为 $\boldsymbol{A}$ ，等式右边为 $\boldsymbol{B}$

  $(\forall \boldsymbol{x}, if \quad \boldsymbol{Ax} \equiv \boldsymbol{Bx}) \Longleftrightarrow \boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{B}$

  我们在等式两边乘以一个任意向量 $\boldsymbol{u}$ 可得：$(\boldsymbol{Cv})^{\wedge}\boldsymbol{Cu} \equiv \boldsymbol{C}\boldsymbol{v}^{\wedge}\boldsymbol{u} \Longleftrightarrow (\boldsymbol{Cv})^{\wedge}(\boldsymbol{Cu}) \equiv \boldsymbol{C}(\boldsymbol{v}^{\wedge}\boldsymbol{u})$

  因为矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是旋转矩阵，并且向量叉乘旋转不变，所以上式可证

  https://en.wikipedia.org/wiki/Cross_product#Algebraic_properties （叉乘的旋转不变参考资料）

  几何理解： 向量 v 与向量 u 的叉乘得到一个向量 $v \times u$ ， 向量 $v \times u$ 与向量 v, u 垂直，且大小等于 $|v||u| \sin < v, u >$ ，三个向量经过同一旋转之后，显然三者之间的相对关系是不会改变的。