0. 说明

本 PDF 文档为自动生成，如有遗漏的格式错误但不影响阅读请见谅，若影响了阅读请告知！

问1：考虑离散时间系统：

$$x_k = x_{k-1} + v_k + w_k \qquad , w_k \backsim \mathcal{N}(0,Q)$$

$$y_k = x_k + n_k \qquad , n_k \backsim \mathcal{N}(0,R)$$

这可以表示一辆沿 x 轴前进或后退的汽车。初始状态 $\check{x}_0$ 未知。请建立批量最小二乘的状态估计方程：

$$(\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{H})\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{H}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{z}$$

即推导 $\boldsymbol{H},\boldsymbol{W},\boldsymbol{z},\hat{\boldsymbol{x}}$ 的详细形式。令最大时间步数为 $K=5$，并假设所有噪声相互无关。该问题存在唯一的解吗?

解：

根据运动方程可以得到：

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + v_1 + w_1 \\ x_2 = x_1 + v_2 + w_2 \\ \cdots \\ x_k = x_{k-1} + v_k + w_k \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} v_1 = x_1 - x_0 - w_1 \\ v_2 = x_2 - x_1 - w_2 \\ \cdots \\ v_k = x_k - x_{k-1} - w_k \end{cases} \qquad (1-1)$$

根据观测方程可以得到：

$$\begin{cases} y_0 = x_0 + n_1 \\ y_1 = x_1 + n_2 \\ \cdots \\ y_k = x_k + n_k \end{cases} \qquad (1-2)$$

结合式子（1-1）和 （1-2）写成矩阵形式 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{Hx} + \boldsymbol{W}$

令 $\boldsymbol{x} = [x_0, x_1, \cdots, x_K]^T$ 可得：

$$\boldsymbol{z} == [v_1, v_2, \cdots, v_K, y_0, y_1, \cdots, y_K]$$

$$
\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}
-1 & 1 & & & & \\
 & -1 & 1 & & & \\
 & & & \ddots & & \\
 & & & & -1 & 1 \\
- & - & - & - & - & - \\
1 & & & & & \\
 & 1 & & & & \\
 & & 1 & & & \\
 & & & \ddots & & \\
 & & & & & 1
\end{bmatrix}_{(2K+1)\times(K+1)}
$$

$$
\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}
Q & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & Q & & & & \\
 & & & R & & & \\
 & & & & R & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & R
\end{bmatrix}_{(2K+1)\times(2K+1)}
$$

$\hat{\boldsymbol{x}}=\arg\max\limits_{\boldsymbol{x}} p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{v},\boldsymbol{y})=\arg\max\limits_{\boldsymbol{x}} J(\boldsymbol{x})$

其中 $J(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}\boldsymbol{(z-Hx)^T W^{-1}(z-Hx)}$

当 $K=5$ 时，

$$
H^T=\begin{bmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}_{6\times 11}
$$

显然可得 $rank(H^T)=6 \Longrightarrow \boldsymbol{H^T W^{-1} H}$ 可逆

$\hat{\boldsymbol{x}}$ 存在唯一解：$\boldsymbol{(H^T W^{-1} H)^{-1} H^T W^{-1} z}$

问2：使用问题1中的系统，令 $Q=R=1$，证明：

$$
\boldsymbol{H^T W^{-1} H}=\begin{bmatrix}
2 & -1 & & & & \\
-1 & 3 & -1 & & & \\
 & -1 & 3 & -1 & & \\
 & & -1 & 3 & -1 & \\
 & & & -1 & 3 & -1 \\
 & & & & -1 & 2
\end{bmatrix}
$$

此时 Cholesky 因子 $\boldsymbol{L}$ 是什么，才能满足 $\boldsymbol{LL^T}=\boldsymbol{H^T W^{-1} H}$？

证：

$\because \boldsymbol{Q}=\boldsymbol{R}=\boldsymbol{1}$

$\therefore \boldsymbol{W}=\boldsymbol{I}_{11\times 11}$ ，其中 $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵

通过计算可得 $\boldsymbol{H^TW^{-1}H}=\boldsymbol{H^TH}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 3 & -1 & & & \\ & -1 & 3 & -1 & & \\ & & -1 & 3 & -1 & \\ & & & -1 & 3 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$

定义 **Cholesky** 因子 $\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix} L_0 & & & & & \\ L_{10} & L_1 & & & & \\ & L_{21} & L_2 & & & \\ & & L_{32} & L_3 & & \\ & & & L_{43} & L_4 & \\ & & & & L_{54} & L_5 \end{bmatrix}$

式子 $\boldsymbol{LL^T}=\boldsymbol{H^TW^{-1}H}$ 将等号两边展开，通过矩阵对应位置的元素相等可分别将矩阵 $\boldsymbol{L}$ 中的元素计算出来：

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix} \sqrt{2} & & & & & \\ -\sqrt{1/2} & \sqrt{5/2} & & & & \\ & -\sqrt{2/5} & \sqrt{13/5} & & & \\ & & -\sqrt{5/13} & \sqrt{34/13} & & \\ & & & -\sqrt{13/34} & \sqrt{89/34} & \\ & & & & -\sqrt{34/89} & \sqrt{144/89} \end{bmatrix}$$

问3：证明：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{1} & & & & & \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{1} & & & & \\ \boldsymbol{A^2} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{1} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \boldsymbol{A^{K-1}} & \boldsymbol{A^{K-2}} & \boldsymbol{A^{K-3}} & \cdots & \boldsymbol{1} & \\ \boldsymbol{A^K} & \boldsymbol{A^{K-1}} & \boldsymbol{A^{K-2}} & \cdots & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{1} \end{bmatrix}^{\boldsymbol{-1}}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{1} & & & & & \\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{1} & & & & \\ & -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{1} & & & \\ & & -\boldsymbol{A} & \ddots & & \\ & & & \ddots & \boldsymbol{1} & \\ & & & & -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{1} \end{bmatrix}$$

证：

记等号左边的矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}$，等号右边的矩阵为 $\boldsymbol{B}$

- 通过计算可知 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$ ，所以 $\boldsymbol{A^{-1}}=\boldsymbol{B}$
- 我觉得题目的意思应该是要我们计算矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆，而不是验算矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆。

  下三角矩阵的行列式就是其对角线元素乘积： $det(\boldsymbol{A})=1$

  根据 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{\boldsymbol{A^*}}{|\boldsymbol{A}|}$ ，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A^*}$ 中每一项对应的那个矩阵都是下三角矩阵，很容易得到 $\boldsymbol{A^*}=\boldsymbol{B}$

  所以 $\boldsymbol{A^{-1}}=\boldsymbol{B}$