



机器人学中的状态估计

Timothy Barfoot 著 高翔, 谢晓佳等 译

Slides by Xiang Gao

2020年春



第7讲 位姿估计问题

- 点云对准
- 点云跟踪
- 位姿图松弛化



内容回顾

- 前面我们介绍了
 - 通常向量空间的状态估计理论
 - 三维空间的矩阵李群
- 本节课与下节课
 - 该领域内的一些典型问题比如点云配准/SLAM等
- 本章重点将放在前两个问题上，尤其是第二个问题
- 由于书本没有课后习题，我们将这里的一些推导作为习题



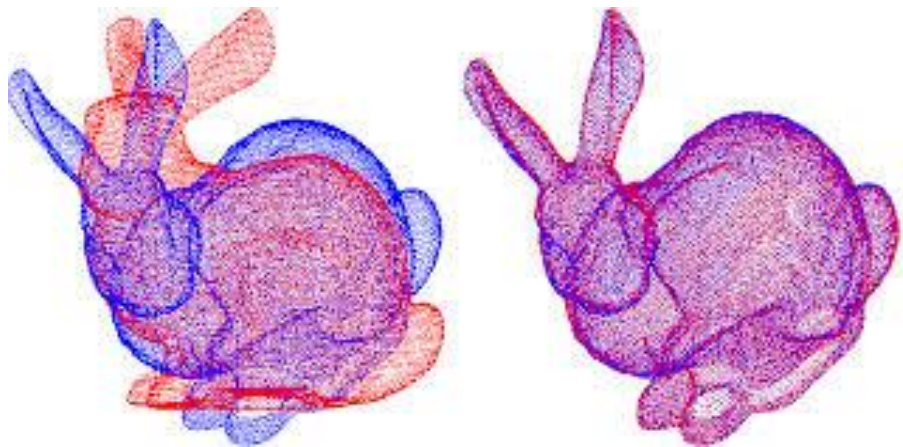
第7讲 位姿估计问题

- 点云对准
- 点云跟踪
- 位姿图松弛化



点云对准

- 点云对准：通过最小二乘来解决两个三维点云之间的对准问题
- 常见的场景：激光Odom，点云拼接等



常见的解法是ICP

不过旋转部分可以用各种不同方式来表达

- 四元数
- 旋转矩阵
- 变换矩阵



点云对准

- 点云对准问题

- 背景:

惯性系: \mathcal{F}_i

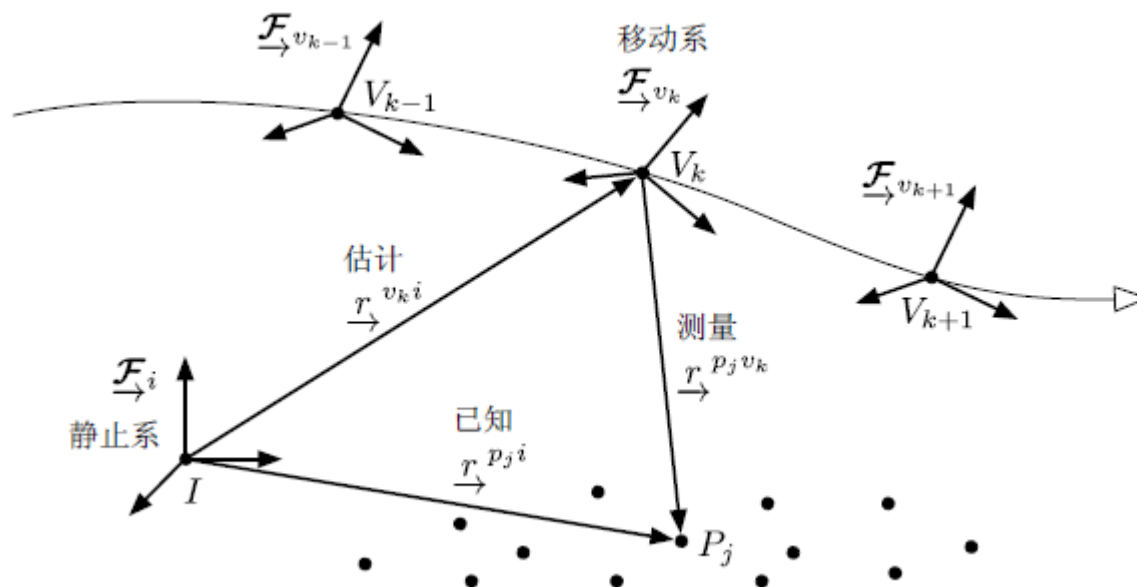
机器人系: \mathcal{F}_{v_k} 并随时间运动

存在M个点: P_j , $j=1, \dots, M$

这些点在i系下坐标已知: $r_i^{p_j^i}$

机器人对M个三维点观测: $r_{v_k}^{p_j^{v_k}}$

希望推断机器人本体的旋转和平移





点云对准

- 单位四元数解法
- 定义齐次坐标

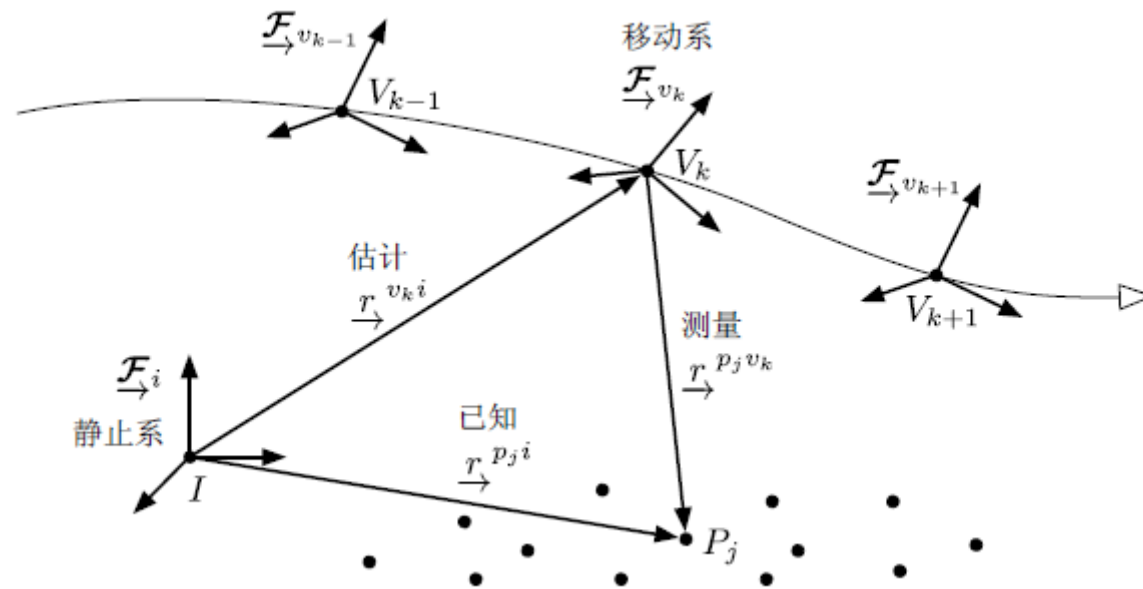
$$y_j = \begin{bmatrix} r_{v_k}^{p_j v_k} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad p_j = \begin{bmatrix} r_i^{p_j i} \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 那么它们满足：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} r_{v_k}^{p_j v_k} \\ 1 \end{bmatrix}}_{y_j} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_{v_k i} & 0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}}_{q^{-1} + q^\oplus} \left(\underbrace{\begin{bmatrix} r_i^{p_j i} \\ 1 \end{bmatrix}}_{p_j} - \underbrace{\begin{bmatrix} r_i^{v_k i} \\ 0 \end{bmatrix}}_r \right)$$

- 写成四元数坐标变换形式：

$$y_j = q^{-1} + (p_j - r)^+ q$$



- 此问题中，四元数 q 和平移 r 可看成 v 系到 i 系的变换
- +算符把四元数乘法变成矩阵乘法

$$q = \begin{bmatrix} \epsilon \\ \eta \end{bmatrix} \quad q^+ = \begin{bmatrix} \eta 1 - \epsilon^\times & \epsilon \\ -\epsilon^T & \eta \end{bmatrix}, \quad q^\oplus = \begin{bmatrix} \eta 1 + \epsilon^\times & \epsilon \\ -\epsilon^T & \eta \end{bmatrix}$$



点云对准

□ 由于 q 为单位四元数，这个处理不影响目标函数

- 误差项: $e_j = y_j - q^{-1+}(p_j - r)^+ q$ 处理一下: $e'_j = q^+ e_j = (y_j^\oplus - (p_j - r)^+) q$
- 那么目标函数为:

$$J(q, r, \lambda) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M w_j e_j'^T e'_j - \underbrace{\frac{1}{2} \lambda (q^T q - 1)}_{\text{拉格朗日乘子项}} \quad \square \text{ } w \text{ 为权重}$$

- 写开:
$$J(q, r, \lambda) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M w_j q^T (y_j^\oplus - (p_j - r)^+)^T (y_j^\oplus - (p_j - r)^+) q - \frac{1}{2} \lambda (q^T q - 1)$$

拉格朗日乘子
使得 q 为单位四元数



点云对准

- 求上式对各变量导数并令其为零：

$$J(\mathbf{q}, \mathbf{r}, \lambda) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M w_j \mathbf{q}^T (\mathbf{y}_j^{\oplus} - (\mathbf{p}_j - \mathbf{r})^+) {}^T (\mathbf{y}_j^{\oplus} - (\mathbf{p}_j - \mathbf{r})^+) \mathbf{q} - \frac{1}{2} \lambda (\mathbf{q}^T \mathbf{q} - 1)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{q}^T} = \sum_{j=1}^M w_j (\mathbf{y}_j^{\oplus} - (\mathbf{p}_j - \mathbf{r})^+) {}^T (\mathbf{y}_j^{\oplus} - (\mathbf{p}_j - \mathbf{r})^+) \mathbf{q} - \lambda \mathbf{q}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{r}^T} = \mathbf{q}^{-1 \oplus} \sum_{j=1}^M w_j (\mathbf{y}_j^{\oplus} - (\mathbf{p}_j - \mathbf{r})^+) \mathbf{q}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda} = -\frac{1}{2} (\mathbf{q}^T \mathbf{q} - 1)$$

□ 这个并不是非常直观，留作习题

□ 提示：使用书本(6.19)-(6.21)帮助证明

- 第二式为零得到： $\mathbf{r} = \mathbf{p} - \mathbf{q}^+ \mathbf{y}^+ \mathbf{q}^{-1}$ 其中： $\mathbf{y} = \frac{1}{w} \sum_{j=1}^M w_j \mathbf{y}_j$, $\mathbf{p} = \frac{1}{w} \sum_{j=1}^M w_j \mathbf{p}_j$, $w = \sum_{j=1}^M w_j$

□ 物理意义：y为观测质心，p为世界质心



点云对准

- r 代入第1式并使之为零，得：

$$Wq = \lambda q$$

- 其中：

$$W = \frac{1}{w} \sum_{j=1}^M w_j ((y_j - y)^{\oplus} - (p_j - p)^+)^T ((y_j - y)^{\oplus} - (p_j - p)^+)$$

□ 这步可以用上一步结果

- 可见这是一个特征值问题， q 是特征向量， λ 为特征值
- 如果 W 特征值为正且无重根，取 q 为最小特征值对应的单位特征向量，使得 q 长度为1
 - W 是半正定的，它的特征值至少非负

$$\frac{\partial J}{\partial q^T} = \sum_{j=1}^M w_j (y_j^{\oplus} - (p_j - r)^+)^T (y_j^{\oplus} - (p_j - r)^+) q - \lambda q$$

$$\frac{\partial J}{\partial r^T} = q^{-1\oplus} \sum_{j=1}^M w_j (y_j^{\oplus} - (p_j - r)^+) q$$

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda} = -\frac{1}{2}(q^T q - 1)$$

$$r = p - q^+ y^+ q^{-1}$$



点云对准

- 代入原目标函数:
$$J(q, r, \lambda) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M w_j q^T (y_j^\oplus - (p_j - r)^+)^T (y_j^\oplus - (p_j - r)^+) q - \frac{1}{2} \lambda (q^T q - 1)$$

$$J(q, r, \lambda) = \frac{1}{2} q^T \underbrace{W}_{\lambda q} q - \frac{1}{2} \lambda (q^T q - 1) = \frac{1}{2} \lambda$$

- 因此, 选择最小特征值时使得原问题最小化
- 当W奇异时, 问题退化, 将在后面讨论
- 解得q后, 转为矩阵表达即得旋转矩阵:

$$\begin{bmatrix} \hat{C}_{v_k i} & 0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} = q^{-1+} q^\oplus, \quad \begin{bmatrix} \hat{r}_i^{v_k i} \\ 0 \end{bmatrix} = r$$



点云对准

- 旋转矩阵解法
- 类似前文，定义点云的观测和世界坐标：

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{r}_{v_k}^{p_j v_k}, \quad \mathbf{p}_j = \mathbf{r}_i^{p_j i}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_i^{v_k i}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}_{v_k i}$$

- 同时把质心、权重和也定义出来：

$$\mathbf{y} = \frac{1}{w} \sum_{j=1}^M w_j \mathbf{y}_j, \quad \mathbf{p} = \frac{1}{w} \sum_{j=1}^M w_j \mathbf{p}_j, \quad w = \sum_{j=1}^M w_j$$

- 这和上文大同小异，但符号使用3x1的非齐次坐标。



点云对准

- 每个点的误差: $e_j = y_j - C(p_j - r)$

- 整体误差:

$$J(C, r) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M w_j e_j^T e_j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M w_j (y_j - C(p_j - r))^T (y_j - C(p_j - r))$$

s.t. C 为旋转矩阵

- 首先分离平移量: $d = r + C^T y - p$

- 写成 r 的表达式并代入目标函数: □ 代入后有一个交叉项, 但求和后为零

$$J(C, d) = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^M w_j ((y_j - y) - C(p_j - p))^T ((y_j - y) - C(p_j - p))}_{\text{仅依赖于 } C} + \underbrace{\frac{1}{2} d^T d}_{\text{仅依赖于 } d}$$

- 这允许我们: (1) 找 C 使得第一项最小化; (2) 计算 d 使得第二项为零;



点云对准

- 对C的部分，有：

$$\begin{aligned}
 & ((y_j - y) - C(p_j - p))^T ((y_j - y) - C(p_j - p)) \\
 &= \underbrace{(y_j - y)^T (y_j - y)}_{\text{独立于 } C} - 2 \underbrace{((y_j - y)^T C(p_j - p))}_{\text{tr}(C(p_j - p)(y_j - y)^T)} + \underbrace{(p_j - p)^T (p_j - p)}_{\text{独立于 } C}
 \end{aligned}$$

- 中间项求和后：

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{w} \sum_{j=1}^M w_j ((y_j - y)^T C(p_j - p)) &= \frac{1}{w} \sum_{j=1}^M w_j \text{tr}(C(p_j - p)(y_j - y)^T) \\
 &= \text{tr} \left(C \frac{1}{w} \sum_{j=1}^M w_j (p_j - p)(y_j - y)^T \right) = \text{tr}(CW^T)
 \end{aligned}$$

其中：

$$W = \frac{1}{w} \sum_{j=1}^M w_j (y_j - y)(p_j - p)^T$$



点云对准

- 那么，定义仅关于C的代价函数，既能最小化原问题，又保证C满足旋转矩阵约束：

$$J(C, \Lambda, \gamma) = -\text{tr}(CW^T) + \underbrace{\text{tr}(\Lambda(CC^T - 1)) + \gamma(\det C - 1)}_{\text{拉格朗日乘子项}}$$

- 求目标函数关于各变量导数：

$$\frac{\partial J}{\partial C} = -W + 2\Lambda C + \gamma \underbrace{\det C}_1 \underbrace{C^{-T}}_C = -W + LC$$

$$\frac{\partial J}{\partial \Lambda} = CC^T - 1$$

$$\frac{\partial J}{\partial \gamma} = \det C - 1$$

其中 $L = 2\Lambda + \gamma 1$

□ 用到的矩阵求导公式：

$$\frac{\partial}{\partial A} \det A = \det(A) A^{-T}$$

$$\frac{\partial}{\partial A} \text{tr}(AB^T) = B$$

$$\frac{\partial}{\partial A} \text{tr}(BAA^T) = (B + B^T)A$$

- 第一项为零给出： $LC = W$



点云对准

- 也可以不使用拉格朗日乘子，得到李群的方法

- 设旋转矩阵左扰动： $C' = \exp(\phi^\wedge)C$

- 利用左扰动的定义式：
$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial \phi_i} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{J(C') - J(C)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\text{tr}(C'W^T) + \text{tr}(CW^T)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\text{tr}(\exp(h1_i^\wedge)CW^T) + \text{tr}(CW^T)}{h} \\ &\approx \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\text{tr}((1 + h1_i^\wedge)CW^T) + \text{tr}(CW^T)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\text{tr}(h1_i^\wedge CW^T)}{h} \\ &= -\text{tr}(1_i^\wedge CW^T)\end{aligned}$$

设导数为零，得到：

$$(\forall i) \text{tr}(\underbrace{1_i^\wedge L}_{L} CW^T) = 0$$

此式说明L为对称矩阵
取转置右乘C后得到：

$$LC = W$$



点云对准

- 之后的推导有简略版和完整版两个版本，我们课上推导简略版，完整版留给同学自己阅读
- 假设： $\det W > 0$ 根据： $LC = W$ ，那么它自乘自己转置时，得：

$$L \underbrace{CC^T}_I L^T = WW^T$$

- 相当于对 WW^T 做Cholesky分解，于是：

$$L = (WW^T)^{\frac{1}{2}}$$

- 矩阵平方根：将矩阵对角化，然后对特征值矩阵求平方根即可
- 实对称矩阵有效

- 于是： $C = (WW^T)^{-\frac{1}{2}} W$
- 这和我们之前提到把R转到SO(3)上的投影是一致的： $R = (CC^T)^{-\frac{1}{2}} C$



点云对准

- 完整版（思路）
 - 不假设 $\det(W) > 0$ 的条件（ $\det(W) > 0$ 意味着点云的形状正常且不退化）
 - 讨论 W 的奇异值情况
-
- 完整版的详细推导留给同学课后完成



点云对准

- 完整版结论
- 如果 W 满足下列三种条件之一：
 1. $\det(W) > 0$
 2. $\det(W) < 0$, W 的最小奇异值不重复
 3. $\text{rank}(W) = 2$

- 那么解法为：

1. W 作奇异值分解： $W = UDV^T$
2. 设 $S = \text{diag}(1, 1, \det U \det V)$
3. 那么 $C = USV^T$

- 如果 C 存在唯一全局解，那么它的解必为此式
- 如果不存在唯一全局解，那么 C 存在无数种解

- 平移部分由质心给出



点云对准

- 变换矩阵解法
- 使用之前定义好的变量：

$$\mathbf{y}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_j \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{v_k}^{p_j v_k} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_j \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_i^{p_j i} \\ 1 \end{bmatrix} \quad T = T_{v_k i} = \begin{bmatrix} C_{v_k i} & -C_{v_k i} \mathbf{r}_i^{v_k i} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix}$$

- 注意使用SE(3)时，要用齐次坐标
- 误差定义为： $\mathbf{e}_j = \mathbf{y}_j - T\mathbf{p}_j$
- 目标函数：

$$J(T) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M w_j \mathbf{e}_j^\top \mathbf{e}_j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M w_j (\mathbf{y}_j - T\mathbf{p}_j)^\top (\mathbf{y}_j - T\mathbf{p}_j)$$



点云对准

- 使用SE(3)上的左扰动，在工作点附近添加左扰动为：

$$T = \exp(\epsilon^\wedge) T_{\text{op}} \approx (1 + \epsilon^\wedge) T_{\text{op}}$$

- 那么目标函数变为：
$$J(T) \approx \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M w_j ((y_j - z_j) - z_j^\odot \epsilon)^\top ((y_j - z_j) - z_j^\odot \epsilon)$$
- 其中 $z_j = T_{\text{op}} p_j$, 并且 $\epsilon^\wedge z_j = z_j^\odot \epsilon$
- 整个问题是一个无约束优化问题（且是二次的）



点云对准

- 直接用目标函数对扰动求导: $\frac{\partial J}{\partial \epsilon^T} = - \sum_{j=1}^M w_j z_j^{\odot T} ((y_j - z_j) - z_j^{\odot} \epsilon)$
- 令其为零, 得到最优的扰动量: $\left(\frac{1}{w} \sum_{j=1}^M w_j z_j^{\odot T} z_j^{\odot} \right) \epsilon^* = \frac{1}{w} \sum_{j=1}^M w_j z_j^{\odot T} (y_j - z_j)$
- 该式给出了迭代步长的解法, 但公式里z是依赖于T的工作点的
- 下面进行化简



点云对准

$$\left(\frac{1}{w} \sum_{j=1}^M w_j z_j^{\odot T} z_j^{\odot} \right) \epsilon^{\star} = \frac{1}{w} \sum_{j=1}^M w_j z_j^{\odot T} (y_j - z_j)$$

• 左侧:
$$\frac{1}{w} \sum_{j=1}^M w_j z_j^{\odot T} z_j^{\odot} = \underbrace{\mathcal{T}_{\text{op}}^{-T}}_{>0} \underbrace{\left(\frac{1}{w} \sum_{j=1}^M w_j p_j^{\odot T} p_j^{\odot} \right)}_{\mathcal{M}} \underbrace{\mathcal{T}_{\text{op}}^{-1}}_{>0}$$

• 其中:

$$\mathcal{T}_{\text{op}} = \text{Ad}(T_{\text{op}}), \quad \mathcal{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -p^{\wedge} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & p^{\wedge} \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$w = \sum_{j=1}^M w_j, \quad p = \frac{1}{w} \sum_{j=1}^M w_j p_j, \quad I = -\frac{1}{w} \sum_{j=1}^M w_j (p_j - p)^{\wedge} (p_j - p)^{\wedge}$$

• 花体M形如广义质量矩阵，为常量



点云对准

$$\left(\frac{1}{w} \sum_{j=1}^M w_j z_j^{\odot T} z_j^{\odot} \right) \epsilon^{\star} = \frac{1}{w} \sum_{j=1}^M w_j z_j^{\odot T} (y_j - z_j)$$

• 右侧:
$$a = \frac{1}{w} \sum_{j=1}^M w_j z_j^{\odot T} (y_j - z_j) = \begin{bmatrix} y - C_{\text{op}}(p - r_{\text{op}}) \\ b - y^{\wedge} C_{\text{op}}(p - r_{\text{op}}) \end{bmatrix}$$

• 其中:
$$b = [\text{tr}(1_i^{\wedge} C_{\text{op}} W^T)]_i, \quad T_{\text{op}} = \begin{bmatrix} C_{\text{op}} & -C_{\text{op}} r_{\text{op}} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

$$W = \frac{1}{w} \sum_{j=1}^M w_j (y_j - y)(p_j - p)^T, \quad y = \frac{1}{w} \sum_{j=1}^M w_j y_j$$

- 那么每一次迭代可由: $\epsilon^{\star} = \mathcal{T}_{\text{op}} \mathcal{M}^{-1} \mathcal{T}_{\text{op}}^T a$ 给出
- 该解法只和当时工作点取值相关, 因此可以不断迭代至收敛



点云对准

- 小结
- 关于点云对准问题，我们从四元数、旋转矩阵、SE3流形三种角度来进行了推导
- 它们的结果大同小异，四元数和旋转矩阵可以一步得到，SE3流形则以迭代方式得到
- 常用的推导以旋转矩阵为主，我们需要关心它通常的解与退化条件



第7讲 位姿估计问题

- 点云对准
- 点云跟踪
- 位姿图松弛化



点云跟踪

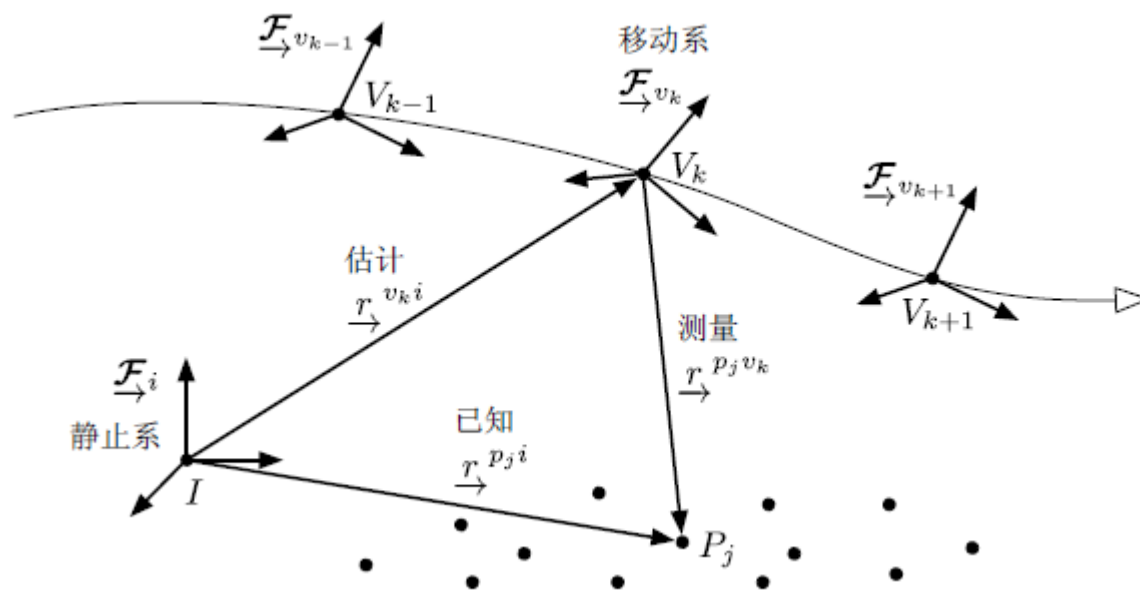
- 继续考虑上面提到的问题，但这时认为机器人在随时间运动

- 以SE(3)变量表达机器人变换矩阵：

$$T_k = T_{v_k i} = \begin{bmatrix} C_{v_k i} & -C_{v_k i} r_i^{v_k i} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

- 初始值： \check{T}_0 以及它的不确定性
- 下面我们给出运动方程与观测方程，并给出对应的EKF滤波算法与优化算法

□ 注意这时候T的平移部分不再是坐标





点云跟踪

- 运动方程（连续） 使用SE(3)的运动学

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \omega^\wedge r + \nu \\ \dot{C} &= \omega^\wedge C \end{aligned} \quad \varpi = \begin{bmatrix} \nu \\ \omega \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{线速度} \\ \text{角速度} \end{array} \quad \dot{T} = \varpi^\wedge T$$

- 广义速度也受噪声影响: $\varpi = \bar{\varpi} + \delta\varpi$
- 于是把这个运动分成两个部分:

$$\text{标称运动: } \dot{\bar{T}} = \bar{\varpi}^\wedge \bar{T}$$

$$\text{扰动运动: } \delta\dot{\xi} = \bar{\varpi}^\wedge \delta\xi + \delta\varpi$$

$$\text{标称运动: } \bar{T}_k = \underbrace{\exp(\Delta t_k \bar{\varpi}_k^\wedge)}_{\Xi_k} \bar{T}_{k-1}$$

离散化后:

$$\text{扰动运动: } \delta\xi_k = \underbrace{\exp(\Delta t_k \bar{\varpi}_k^\wedge)}_{\text{Ad}(\Xi_k)} \delta\xi_{k-1} + w_k$$

$$\text{真正的噪声: } w_k = \mathcal{N}(0, Q_k)$$



点云跟踪

- 测量模型: $y_{jk} = D^T T_k p_j + n_{jk}$

- 其中:

$$p_j = \begin{bmatrix} r_i^{p_j i} \\ 1 \end{bmatrix} \quad D^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

为齐次坐标

为齐次转非齐次的矩阵

- 测量噪声: $n_{jk} \sim \mathcal{N}(0, R_{jk})$

- 该方程相对于T的线性化: $\bar{y}_{jk} + \delta y_{jk} = D^T (\exp(\delta \xi_k^\wedge) \bar{T}_k) p_j + n_{jk}$

$$\delta y_{jk} \approx D^T (\bar{T}_k p_j)^\odot \delta \xi_k + n_{jk}$$



点云跟踪

• 推导过程中的符号：

下面先看EKF，然后看MAP估计

\hat{T}_k : 在时刻 k 的 4×4 的校正后位姿估计

\hat{P}_k : 在时刻 k 的 6×6 的校正后位姿估计协方差
(含平移量和旋转量)

\check{T}_k : 在时刻 k 的 4×4 的预测位姿估计

\check{P}_k : 在时刻 k 的 6×6 的预测位姿估计协方差
(含平移量和旋转量)

\check{T}_0 : 4×4 的先验输入，作为在时刻 0 的位姿

ϖ_k : 6×1 的先验输入，作为在时刻 k 的广义速度

Q_k : 6×6 的过程噪声协方差
(含平移量和旋转量)

y_{jk} : 机器人在时刻 k 对点 j 的 3×1 的测量

R_{jk} : 在时刻 k 的测量 j 的 3×3 的协方差



点云跟踪

- EKF预测: 均值 $\check{T}_k = \underbrace{\exp(\Delta t_k \varpi_k^\wedge)}_{\Xi_k} \hat{T}_{k-1}$ 方差 $\check{P}_k = E[\delta \check{\xi}_k \delta \check{\xi}_k^T]$

$$\delta \check{\xi}_k = \underbrace{\exp(\Delta t_k \varpi_k^\wedge)}_{F_{k-1} = \text{Ad}(\Xi_k)} \delta \hat{\xi}_{k-1} + w_k$$

- 线性化处系数矩阵为: $F_{k-1} = \exp(\Delta t_k \varpi_k^\wedge)$
- 于是预测的协方差变为: $\check{P}_k = F_{k-1} \hat{P}_{k-1} F_{k-1}^T + Q_k$



点云跟踪

- 校正部分

- 测量模型线性化为: $\delta y_{jk} = \underbrace{D^T(\check{T}_k p_j)}_{G_{jk}} \delta \check{\xi}_k + n_{jk}$ 雅可比矩阵 $G_{jk} = D^T(\check{T}_k p_j)^\odot$

- 把M个点的观测写到一起:

$$y_k = \begin{bmatrix} y_{1k} \\ \vdots \\ y_{Mk} \end{bmatrix}, \quad G_k = \begin{bmatrix} G_{1k} \\ \vdots \\ G_{Mk} \end{bmatrix}, \quad R_k = \text{diag}(R_{1k}, \dots, R_{Mk})$$

- 那么校正部分给出: $K_k = \check{P}_k G_k^T (G_k \check{P}_k G_k^T + R_k)^{-1}$

$$\hat{P}_k = (1 - K_k G_k) \check{P}_k$$

- 此式用于迭代方差部分



点云跟踪

- 校正均值部分

- 先计算更新量: $\underbrace{\epsilon_k = \ln \left(\hat{T}_k \check{T}_k^{-1} \right)}_{\text{更新}} = K_k \underbrace{(y_k - \check{y}_k)}_{\text{革新量}}$

- 然后再更新到先验变换矩阵上:

$$\hat{T}_k = \exp(\epsilon_k^\wedge) \check{T}_k$$

综合起来:

预测: $\check{P}_k = F_{k-1} \hat{P}_{k-1} F_{k-1}^T + Q_k$
 $\check{T}_k = \Xi_k \hat{T}_{k-1}$

卡尔曼增益: $K_k = \check{P}_k G_k^T (G_k \check{P}_k G_k^T + R_k)^{-1}$

校正: $\hat{P}_k = (1 - K_k G_k) \check{P}_k$
 $\hat{T}_k = \exp((K_k(y_k - \check{y}_k))^\wedge) \check{T}_k$

这种计算方式保证状态变量一直在SE(3)上
协方差一直定义在李代数空间上



点云跟踪

- MAP解法
- 运动方程误差：

$$e_{v,k}(x) = \begin{cases} \ln(\check{T}_0 T_0^{-1})^\vee & k = 0 \\ \ln(\Xi_k T_{k-1} T_k^{-1})^\vee & k = 1, \dots, K \end{cases} \quad \text{其中: } \Xi_k = \exp(\Delta t_k \hat{\varpi}_k)$$

- 测量方程误差: $e_{y,jk}(x) = y_{jk} - D^T T_k p_j$
- 下面考察误差的协方差矩阵（噪声特性）



点云跟踪

- 运动方程:

- 初始值 $e_{v,0}(x) = \ln(\check{T}_0 T_0^{-1})^\vee = \ln(\check{T}_0 \check{T}_0^{-1} \exp(-\delta \xi_0^\wedge))^\vee = -\delta \xi_0$ $e_{v,0}(x) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \check{P}_0)$

- 后续:
$$\begin{aligned} e_{v,k}(x) &= \ln(\Xi_k T_{k-1} T_k^{-1})^\vee \\ &= \ln(\Xi_k \exp(\delta \xi_{k-1}^\wedge) \check{T}_{k-1} \check{T}_k^{-1} \exp(-\delta \xi_k^\wedge))^\vee & e_{v,k}(x) &\sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, Q_k) \\ &= \ln\left(\underbrace{\Xi_k \check{T}_{k-1} \check{T}_k^{-1}}_1 \exp((\text{Ad}(\Xi_k) \delta \xi_{k-1})^\wedge) \exp(-\delta \xi_k^\wedge)\right)^\vee \\ &\approx \text{Ad}(\Xi_k) \delta \xi_{k-1} - \delta \xi_k \\ &= -w_k \end{aligned}$$



点云跟踪

- 观测模型: $e_{y,jk}(x) = y_{jk} - D^T T_k p_j = n_{jk} \quad e_{y,jk}(x) \sim \mathcal{N}(0, R_{jk})$

- 于是目标函数为:

$$J_{v,k}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e_{v,0}(x)^T \check{P}_0^{-1} e_{v,0}(x) & k = 0 \\ \frac{1}{2} e_{v,k}(x)^T Q_k^{-1} e_{v,k}(x) & k = 1, \dots, K \end{cases}$$

$$J_{y,k}(x) = \frac{1}{2} e_{y,k}(x)^T R_k^{-1} e_{y,k}(x)$$

- 把M个点合写:

$$e_{y,k}(x) = \begin{bmatrix} e_{y,1k}(x) \\ \vdots \\ e_{y,Mk}(x) \end{bmatrix}, \quad R_k = \text{diag}(R_{1k}, \dots, R_{Mk})$$

- 目标函数写为:

$$J(x) = \sum_{k=0}^K (J_{v,k}(x) + J_{y,k}(x))$$



点云跟踪

- 下面对各误差项进行线性化，并给出迭代求解方案
- 工作点设为： $T_{\text{op},k}$ ，我们每次求工作点上的一个扰动： $T_k = \exp(\epsilon_k^\wedge) T_{\text{op},k}$
- 每次迭代的工作点统一为： $x_{\text{op}} = \{T_{\text{op},1}, T_{\text{op},2}, \dots, T_{\text{op},K}\}$
- 初始误差项：
$$e_{v,0}(x) = \ln(\check{T}_0 T_0^{-1})^\vee = \ln \left(\underbrace{\check{T}_0 T_{\text{op},0}^{-1}}_{\exp(e_{v,0}(x_{\text{op}})^\wedge)} \exp(-\epsilon_0^\wedge) \right)^\vee \approx e_{v,0}(x_{\text{op}}) - \epsilon_0$$



点云跟踪

- 运动误差项:

$$\begin{aligned}
 e_{v,k}(x) &= \ln(\Xi_k T_{k-1} T_k^{-1})^\vee \\
 &= \ln(\Xi_k \exp(\epsilon_{k-1}^\wedge) T_{\text{op},k-1} T_{\text{op},k}^{-1} \exp(-\epsilon_k^\wedge))^\vee \\
 &= \ln\left(\underbrace{\Xi_k T_{\text{op},k-1} T_{\text{op},k}^{-1}}_{\exp(e_{v,k}(x_{\text{op}})^\wedge)} \exp((\text{Ad}(T_{\text{op},k} T_{\text{op},k-1}^{-1}) \epsilon_{k-1})^\wedge) \exp(-\epsilon_k^\wedge)\right)^\vee \\
 &\approx e_{v,k}(x_{\text{op}}) + \underbrace{\text{Ad}(T_{\text{op},k} T_{\text{op},k-1}^{-1})}_{F_{k-1}} \epsilon_{k-1} - \epsilon_k
 \end{aligned}$$

- 测量误差项:

$$\begin{aligned}
 e_{y,jk}(x) &= y_{jk} - D^T T_k p_j \\
 &= y_{jk} - D^T \exp(\epsilon_k^\wedge) T_{\text{op},k} p_j \\
 &\approx y_{jk} - D^T (1 + \epsilon_k^\wedge) T_{\text{op},k} p_j \\
 &= \underbrace{y_{jk} - D^T T_{\text{op},k} p_j}_{e_{y,jk}(x_{\text{op}})} - \underbrace{\left(D^T (T_{\text{op},k} p_j)^\odot\right)}_{G_{jk}} \epsilon_k
 \end{aligned}$$



点云跟踪

- 把k时刻所有测量点写在一起，有： $e_{y,k}(x) \approx e_{y,k}(x_{\text{op}}) - G_k \epsilon_k$

$$e_{y,k}(x) = \begin{bmatrix} e_{y,1k}(x) \\ \vdots \\ e_{y,Mk}(x) \end{bmatrix}, \quad e_{y,k}(x_{\text{op}}) = \begin{bmatrix} e_{y,1k}(x_{\text{op}}) \\ \vdots \\ e_{y,Mk}(x_{\text{op}}) \end{bmatrix}, \quad G_k = \begin{bmatrix} G_{1k} \\ \vdots \\ G_{Mk} \end{bmatrix}$$

- 于是得到了各个雅可比



点云跟踪

- Putting them together
- 在每次高斯-牛顿迭代中, 使用各矩阵:

$$\delta x = \begin{bmatrix} \epsilon_0 \\ \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_K \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ -F_0 & 1 & & & & \\ & -F_1 & \ddots & & & \\ & & \ddots & 1 & & \\ & & & -F_{K-1} & 1 & \\ G_0 & & & & & \\ & G_1 & & & & \\ & & G_2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & G_K & \end{bmatrix}, \quad e(x_{\text{op}}) = \begin{bmatrix} e_{v,0}(x_{\text{op}}) \\ e_{v,1}(x_{\text{op}}) \\ \vdots \\ e_{v,K-1}(x_{\text{op}}) \\ e_{v,K}(x_{\text{op}}) \\ e_{y,0}(x_{\text{op}}) \\ e_{y,1}(x_{\text{op}}) \\ \vdots \\ e_{y,K-1}(x_{\text{op}}) \\ e_{y,K}(x_{\text{op}}) \end{bmatrix} \quad (8.160)$$

$$W = \text{diag}(\check{P}_0, Q_1, \dots, Q_K, R_0, R_1, \dots, R_K)$$



点云跟踪

- 得到高斯-牛顿法的线性方程: $A\delta x^* = b$

- 其中:

$$A = \underbrace{H^T W^{-1} H}_{\text{三对角块}}, \quad b = H^T W^{-1} e(x_{\text{op}})$$

- 把扰动左乘到当前估计值即可: $T_{\text{op},k} \leftarrow \exp(\epsilon_k^{\star \wedge}) T_{\text{op},k}$



第7讲 位姿估计问题

- 点云对准
- 点云跟踪
- 位姿图松弛化（略）



习题

理论部分：

1. 推导第9页 r 的表达式；
2. 推导第23页第1个式子；
3. 推导第24页第1个式子；

编程部分

1. 写一段ICP程序，完成两个PCD文件的Pose计算，不允许使用PCL或第三方点云库