分析力学讲义

2010－2011 学年秋季学期

基科 91－98 使用

2011－09

目　　录

分析力学 2010，9－2011，1

绪 论

§0．1．经典力学发展简史

经典力学（力学）的研究对象是宏观物体机械运动的规律；而牛顿力学，即以牛顿建立的理论框架表述的经典力学，研究宏观物体的低速机械运动的规律。宏观物体系指和人体大小可比拟或比人体大得多的物体；低速系指远小于光速的运动速度。至于高速（宏观）物体的运动规律则为爱因斯坦（1879－1955）建立的相对论（经典）力学所表述；微观物体的运动规律则为（非相对论的和相对论的）量子力学所表述。

伽利略（1564-1642）继承了古代原子论和数理哲学的优秀遗产，并在实验实践的基础上发扬光大，使物理学成为一门精密的实验科学。伽利略也因而被誉为实验物理学之父。

牛顿（1643－1727）集前人之大成，在总结前人成果的基础上，以 $\vec{F}=m\ddot{\vec{r}}$ 为核心，创立了公理化的经典力学理论体系。牛顿的《自然哲学的数学原理》奠定了经典力学的理论基础，（参阅[1]§1.1）（这个理论体系特点为：以直观的几何的图像为基础，以三维空间的矢量代数和矢量分析为基本数学工具；因而被称为矢量力学）为整个物理学的发展提供了一个坚实的起点平台。牛顿建立了万有引力定律，是使得人类彻底摆脱了神界的一次思想大解放。

牛顿的贡献当然也有其局限性，这也体现了科学发展过程中人类认识的历史局限性。特别是，牛顿的初衷，是希望把他的理论框架发展成为“自然哲学”——广义的物理学的基础，随着时间的推移，日益显出其局限性来。经过人类长期的生产实践活动，经过众多科学家实验和理论的研究，拉格朗日，哈密顿等人发展了牛顿力学，广泛地运用数学分析微分几何等数学工具，深刻揭示经典力学的规律，完善并突破了以 $\vec{F}=m\ddot{\vec{r}}$ 为核心的牛顿力学的理论框架（矢量力学）；构建起了现代形式的理论体系，称为分析力学。分析力学的建立和发展，对牛顿的理论体系进行了脱胎换骨的改造，使牛顿的理论框架变得“面目全非”，却使得现代形式的理论体系日益成为自然哲学（物理学）的理论基础。

我们通常所说的牛顿力学，就其形式而言，是指矢量力学；但就其实质而言，就是经典力学；因为经典力学后来的发展，都能在牛顿力学中找到明确的源头。甚至几乎所有近代物理学的发展都可直接或间接地在牛顿力学中找到渊源，牛顿力学的发展，以至于物理学许多领域的发展，与其说是对牛顿理论缺陷的揭示，倒不如说是对牛顿理论内在价值的追认。

从牛顿、伽利略到拉格朗日，哈密顿，从矢量力学到分析力学，经典力学虽然已经有了长足的发展，有了相当完整的理论体系，但是这决不意味着经典力学已经发展到顶了。作为一门基础学科，人类实践和相关各学科实验与理论的研究不断给经典力学提出各种新问题，不断拓展着经典力学新的研究领域。

还应指出，经典力学的理论体系与经过高度抽象的数学的公理体系还是有所不同，物理学本质上是一门实验科学，物理理论的直接的深厚基础是丰富的实验事实。

早年人们认为，经典力学是确定性的理论（在相当一般的条件下，牛顿方程的解是存在唯一的），庞卡莱（Poincaré 1854－1913）早在一个世纪前就发现，确定性理论中存在着随机性。现在人们认识到，在非线性问题中，由于绝大多数问题的不可积性，随机性是普遍存在的。

§0．2． 理论力学和本课程的内容简介

目前理工科大学里设置的介绍经典力学的课程通常称为理论力学，按其内容分为运动

学、静力学和动力学。运动学研究对机械运动的描述方法，不涉及机械运动变化的原因；动力学则是研究机械运动变化的原因。静力学研究机械运动的一种特殊状态——平衡的理论。（参见表 0－1）

表 0－1 理论力学课程的内容概要

理论力学	矢量力学	分析力学
运动学	几种常用的坐标系	广义坐标（任意曲线坐标系）
静力学	力系的平衡	（静力学）虚功原理
动力学	牛顿定律（动力学定理）	达朗贝尔方程（动力学虚功原理） （拉格朗日方程，哈密顿理论等）

由于各专业的不同要求，同样名为理论力学的课程有不同的类型；同样名为理论力学的教材或专著也有不同的侧重面。除了力学专业的理论力学课程有其自身的专业要求以外，工科专业的理论力学课程是工程力学的组成部分；对于物理专业而言，阐述经典力学普遍规律的理论力学课程，是物理专业的专业基础课四大力学之一，是普通物理课程力学部分的继续和加深，也是许多后续课程的必备基础。目前许多理论力学教材分为矢量力学和分析力学两部分来阐述。前者以几何方法（矢量的运算）为基础，当然也要用微积分、微分方程等数学工具，后者采用更多数学分析的方法。

由于矢量力学大部分内容已在普通物理课程中讲授，本课程内容以分析力学为主，主要讲授分析力学的基本概念和基本原理、拉格朗日力学和哈密顿力学等内容，课程名称也改称分析力学。但也要讲一些矢量力学的内容，既为梳理矢量力学的基础知识，又作内容上的必要补充，但更着重于方法上的更新，为学习分析力学作好准备。

根据数学、物理等理科专业的需要，静力学作为动力学的一个特例，不作为教学的重点。因此本课程也以分析动力学为重点，而把分析静力学作为分析动力学的一个特例。

由于课时的关系，在本课程里不涉及相对论力学和非线性力学。

§0．3．分析力学的特点

数学工具用得较多，特别是数学分析；当然，我们也不必刻意回避几何方法。

分析力学的理论概括性比较强，能用统一的形式表达各种具体情形下的力学规律，也能对多样化的力学问题作统一的程式化的处理；因而便于阐述力学的普遍原理，也便于处理更复杂的力学问题，特别是系统具有各种比较复杂的约束的情形。正因为如此，分析力学也比较抽象。学习时应加强对其物理意义的理解，同时应注重其在实际问题中的应用。如果自己能构造一些实例以加深理解当然更好。

分析力学侧重于能量（而矢量力学侧重于力），因此分析力学的方法便于推广，对于物理学其他领域的理论，也有重要的意义，特别是对量子力学的建立与发展起了重要的作用。

分析力学着眼于整个力学体系（而矢量力学中往往采用隔离体图，着眼于各个组成部分的受力和运动情况），因而界定一个力学体系的范围，分清体系的内和外显得格外重要。

分析力学和矢量力学是同一研究对象的两种研究方法，所得结果当然应该一致。在矢量力学中很难求解的问题可能在分析力学中变得比较容易求解，但是两者不可能得到相互矛盾的结论。例如，在矢量力学中，单摆（振幅不很小的情况下）的解不能用初等函数来精确表示，那么用分析力学的方法同样不可能用初等函数来精确表示。

§0．4．经典力学的基本概念

1．经典力学的时空观　参考系

经典力学的任务是研究机械运动的规律。机械运动是物体在空间的位置和取向随时间发生变化，是物理学所研究的各种运动形式中最简单，也是最基本的一种。为此我们先对经典力学的时空观作一简单的说明。（参阅[3]32 页）

空间和时间不仅是一个物理概念，而且具有深刻的哲学意义。空间和时间是物质存在的

客观形式，不存在脱离物质的绝对空间和绝对时间。牛顿力学中的现实空间是三维欧几里得空间，时间是一维的。空间和时间的变化都是连续的。

既然不存在脱离物质的绝对空间，为了描述物体在空间的机械运动，必须选定一个物体或一些物体的集合作参考标准，称为参考系，由参考物体的刚性延伸得到的三维空间称为参考空间；为了描述时间的变化，必须选定一些事件或变化着的物体的状态作为时间零点和时间进程的参考标准。

参考系有无限多种可能的选取方式，在相互作任意相对运动的不同参考系中,在给定的时刻给定空间间隔的大小是相同的（空间两点间的距离不因参考系的不同而变化）；某一给定的时间间隔的持续时间是相同的。（时间的绝对性）因此在不同的参考系中可以选取同样的时间零点和时间进程。时间的这种“绝对性”是牛顿力学的一个基本假定。随着物理学的发展，空间和时间的观念是在不断变化和发展的。牛顿力学的时空观反映了人类在一定历史阶段对空间和时间的认识。按照爱因斯坦的相对论，这样的时空观只是在运动速度不大，引力场不强的情况下近似正确。

从运动学的观点来看，各个参考系是相互平等的。但是，适当选择参考系能使运动状态的描述变得简单，因而问题变得容易解决。从动力学的观点来看，有一类参考系具有特殊的地位，那就是惯性参考系。参考系没有静止与运动之分，只存在参考系之间的相对运动，当然也就不存在绝对静止的参考系。有时为了叙述的方便, 说惯性系是静止的，其实相对于一个惯性系作匀速直线运动的参考系都是惯性系。最常用的参考系是以地球为参考物的参考系，这是一个近似的惯性系。

当两个参考系以恒定速度作相对运动时，有伽利略变换。从一个惯性系到另一个惯性系的变换是伽利略变换。质点的加速度是伽利略变换下的不变量。

2．力学体系

我们把经典力学的研究对象称为力学体系。一般的力学体系都可以视作质点系，质量连续分布的力学体系也可离散化而处理成质点系，因此质点系是经典力学最一般的研究对象。质点是组成力学体系的最小单元，也是最简单的力学体系。刚体是一类特殊的质点系。质点、刚体、若干个质点组成的质点系以及若干质点和刚体组成的力学体系是我们这门课程的研究对象。大量质点组成的质点系是统计力学的研究对象。一般的质量连续分布的可以产生形变的质点系是流体力学或弹性力学的研究对象。

质点和刚体都是实际的宏观物体的抽象；不存在绝对的质点或刚体。一个宏观物体能否视作质点或刚体，不仅取决于物体本身的特点，而且取决于所研究问题的特点。

分析力学中，我们一般着眼于整个力学体系；因此界定力学体系的范围，分清力学体系的“内”和“外”尤为重要。为什么要把力学体系作为整体来进行研究？组成力学体系的各部分之间往往存在着约束，存在着相互作用力（包括约束力）；从而使单个质点或刚体的运动情况的描述变得复杂起来，而对力学体系整体地进行研究却提供了简化问题的可能性。

3．坐标系

为了对机械运动进行定量的精确的描述，不仅要选用确定的参考系，而且需要在参考系上选择一个适当的计算系统（在参考空间建立合适的坐标系，再配以记载时间的方法。）

坐标系和参考系是不同的。参考系是物理概念，是讨论机械运动的一个参考标准；而坐标系则是数学工具，以某个数组和质点位置间的一一对应关系来描述质点位置及其变化。在确定的参考系中，坐标系仍有无限多种可能的方式，可以任意选取（适当选取坐标系也能使问题变得简单）；特别是，坐标系可以不固定于参考系。坐标系不存在惯性和非惯性的问题；但是固定于参考系的坐标系就可以代表这个参考系，因而有时也有惯性坐标系和非惯性坐标系这样的说法。

4．质量和力

矢量力学中的质点动力学就是利用牛顿动力学方程 $m\ddot{\vec{r}}=\vec{F}$ 研究质点机械运动及其变化的规律。在动力学方程中，我们遇到了两个新的概念：一个是质量，质量是质点的惯性的度量；另一个是力，力是物体之间的相互作用，是机械运动发生变化的原因。关于后者，在这里作些补充说明：

质点所受的力可以分为主动力和约束力。约束力是由于约束的存在而出现，不仅与约束本身的特点有关，而且与相关质点的运动和所受的主动力有关，因而往往是未知的，约束力也称约束反作用力或约束反力。主动力和约束无关，因而往往是已知的。力也可以分为真实力和惯性力。惯性力是由于力学体系处于非惯性系而出现的一种虚假的力，我们称之为“虚假”，是因为惯性力不是物体之间的相互作用，它没有施力主，也不存在反作用力。力还可以分为内力和外力：内力是我们所研究的力学体系内的各质点之间的相互作用力，外力是我们所研究的力学体系以外的物体对力学体系的作用力，惯性力也按外力来处理。

力和质量的概念，在分析力学中，将得到进一步的推广和深化。

§0．5．关于教材和教学方法的说明和学习方法方面的建议

我们力争以较小的篇幅包括本课程的主要内容，自然难以面面俱到。因此我们同时开列一些参考书供同学们选用，希望同学们在读好教材的基础上阅读一些参考书，逐步培养阅读参考书的习惯和能力。不要只读教材，也不要同时读过多参考书，分散了精力。也不必总是一本书从头读到尾，要善于从参考书中查阅自己所需要的内容。

我们的讲义以系统地讲述分析力学为重点。至于矢量力学部份，不求系统完整，以免不必要的重复。我们在讲述矢量力学时，除了补充一些普通物理中未讲的内容以外，特别注意尽量用系统的理论方法来处理问题，以为学习分析力学作好准备。

也正是由于这些特点，与传统的理论力学课程或教材相比，有时我们会感到有较大的“跳跃性”。这虽然给我们带来某些不便，也给我们一种有益的训练。因为，严谨性固然是必须具备的良好的学习品质，但带有“跳跃性”地来学习某些内容也是一种必需具备的能力。至于“跳跃性”带来的困难和不足之处，可以通过课堂教学和阅读其它参考资料加以弥补。

根据以往经验，理论力学或分析力学的初学者往往感到，“听课容易，作业困难”，力学习题有些固然比较困难，其实还是有规律可循；听课，特别是要听好课，也未必容易。感到“作业困难”往往正是由于没有听好课，或者没有很好消化讲课和教材上的内容。什么叫“听好课”，什么叫“认真阅读教材”，什么叫“很好消化”，首先当然是要弄懂面上的意思，即已经讲出来写出来的意思；进一步要设法挖掘深一层的意思；（为什么要这样讲，这样写，这样论证，这样推导，能不能换一种方法？）更进一步则是问自己，我还能给自己提出些什么问题？当然不是说对每个问题都要这样深究，的确也不是每一个问题都值得这样深究；但要努力学会发现值得深究的问题，学会深究问题的方法。

不少同学希望通过做更多的习题来解决‘作业困难’的问题。这种学习积极性无疑是应该肯定的，做一定数量的习题也是完全必要的。但是过分看重做题未必是一种好的学习方法，大量做题在时间安排上也是不现实的。与其匆匆忙忙甚至似懂非懂地做十个八个题，不如仔仔细细做两三个题。这里仔仔细细是指多思考，做深做透，举一反三，做一个题要想到一系列题，几个题就变成几个系列的题，几个系列的题交织成网，派生出更多的题，以掌握更多的题；更重要的是，不能为做题而做题，更不能被题目束缚了自己的思维，而要通过做题，培养思考的习惯和科学研究的初步能力。后面也将通过若干例题来说明“仔仔细细”的含义。

这门课对准备主攻物理、数学、信息等各门学科的同学都会有一定用处。对于有志于攻读理论物理或应用数学的同学可能更为重要。

小论文：这是为确有兴趣并确有余力的同学安排的一项自选作业。自选讲座：不属于

考试范围。但对于加深理解基本内容是有积极作用的。

参考资料

近年来国内出版的教材和专著：

1．金尚年 马永利　编著 理论力学（第二版）　高等教育出版社（2002 年 7 月）

2．李德明 陈昌民　经典力学　高等教育出版社　2006 年 5 月第一版

3．张建树 孙秀泉 张正军　理论力学　科学出版社　2005 年 8 月第一版

4．沈惠川 李书民　经典力学　中国科技大学出版社　2006 年 8 月第一版

5．李书民　经典力学概论　中国科技大学出版社　2007 年 8 月第一版

6．张启仁著　经典力学　科学出版社　2002 年 1 月

其他参考资料：

7．H. Goldstein　Classical　Mechanics　(Third Edition)　2002

8．梅凤翔　刘桂林 编著 分析力学基础　西安交通大学出版社　1987

9．周衍柏　理论力学教程 （1986 年 3 月第二版）

10．D.T.Greenwood　Classical Dynamics　Englewood Cliffs　Prentice—Hall　1977

11．甘特马赫　分析力学讲义　北京　高等教育出版社　1964

12．涅符兹格利亚多夫　理论力学 （上，下册）

13．朗道　栗弗席兹　力学　高等教育出版社　1959

14．V.I.Arnold　Mathematical　Methods　of　Mechanics　New　York　Springer—Verlag　1978

15．R.Abraham and J.E.Marsden　Foundation of Mechanics　second ed.　The Benjaming Cummings　Publishing Company　1978

16．G. Godbillon　Géometrie　Différentielle　et　Mécanique　Analytique　Paris : Hermann　1969

17．梅凤翔　刘瑞　罗勇　高等分析力学　北京理工大学出版社　1991

18．方言　刚体对瞬心的转动方程　大学物理　1982 年第 1 期 23 页

19．黄惟承　关于瞬心速度的两种含义　大学物理　1986 年第 7 期 33 页

20．刚体绕瞬心的转动方程讨论专栏　大学物理　1986 年第 7 期 19—40 页

第一部分　矢量力学

第一章 质点力学

质点是最简单的力学体系。质点力学的任务就是研究质点机械运动的规律。在矢量力学中，质点运动学借助矢量等数学工具引入位矢，速度和加速度等物理概念研究描述质点机械运动及其变化的方法；质点动力学则运用牛顿动力学方程研究质点机械运动的规律和机械运动发生变化的原因。

§1．1．质点运动学　　位矢，速度和加速度

在参考系中选一个固定点 O 作为描写质点运动的参考点，则质点 M 的位置可以用矢量 $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ 来表示，称为位置矢量（位矢）。随着质点在空间运动，位矢随时间变化，因此位矢是时间的函数 $\vec{r}=\vec{r}\left(t\right)$；这个方程，一方面描述了质点的运动规律，称为质点的运动学方程，另一方面，也是质点轨道的一种参数方程。这样质点的元位移、速度和加速度可以分别用矢量 $d\vec{r}=\vec{r}\left(t+dt\right)-\vec{r}\left(t\right)$，$\vec{v}=\dot{\vec{r}}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ 和 $\vec{a}=\ddot{\vec{r}}=\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ 表示。显然，位矢是依赖基点的选择的，而位移、速度和加速度是不依赖基点的选择的。

§1．2．直角坐标系

为了对质点的机械运动作具体的描述，我们还必须引入坐标系和基矢。

在三维空间建立一个坐标系，就是建立空间的点和三元有序数组（称为坐标）之间的一种一一对应关系。一个坐标取定值的点的集合是一个曲面，称为坐标曲面；两个坐标取定值的点的集合是一条曲线，称为坐标曲线。任一坐标曲线实际上是某两个坐标曲面的交线。对于空间的每一点（可能有若干特殊点除外），有且仅有三条坐标曲线相交于此，有且仅有三个坐标曲面相交于此。我们可以对于空间的每一点建立由三个沿坐标曲线的正向（坐标增加的方向）的切矢量（称为基矢）组成的坐标架；我们可以利用这个坐标架为基矢来表达三维空间中的矢量。

我们最熟悉的直角坐标系（O-XYZ）是三维欧氏空间中最简单也是最重要的坐标系。由通过原点 O 三个相互垂直的坐标轴（OX,OY,OZ）组成，通常采用右手系（满足右手螺旋法则）。空间的点和坐标即有序数组（x,y,z）之间建立起一一对应的关系。

直角坐标系的坐标曲面实际上是三个互相垂直的平行平面族；坐标曲面两两相交的交线为坐标曲线，是三个互相垂直的平行直线族。

对于每一点我们选取分别平行于坐标曲线正向（坐标增加的方向）的一组单位矢量 $\left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$ 为基矢。容易看出，直角坐标系的基矢平行于对应的坐标轴正向，是不随点的位置变化的，是一组正交（满足 $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$）归一（满足 $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$）的常矢量。在右手系中：$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$，等等；且取逆时针转向为计算角度的正向。

在直角坐标系中，空间中的点 P 可以用与之对应的直角坐标（x,y,z）表示，也可用位矢 $\vec{r}=\overline{OP}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\equiv\vec{r}\left(x,y,z\right)$ 来表示。§1．1．中的那几个矢量式也就可以具体表

出。质点P的运动学方程可以表为$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} = \vec{r}\left(x(t), y(t), z(t)\right) \equiv \vec{r}(t)$

质点的元位移：$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial x}dx + \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial y}dy + \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial z}dz$

速度矢量：$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(x, y, z) = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial x}\dot{x} + \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial y}\dot{y} + \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial z}\dot{z}$

加速度矢量：$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}(x, y, z) = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$

从而可得基矢$\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$与位矢的偏导数之间的关系：$\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \vec{i}, \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \vec{j}, \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \vec{k}$，其实这一组式子的几何意义就是：基矢分别沿着坐标曲线切线的正方向（坐标增加的方向）。还可以得到关系式：$\dfrac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{x}} = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial x}$，$\dfrac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{y}} = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial y}$，$\dfrac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{z}} = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial z}$，以上这两组关系式都可以推广到一般的曲线坐标系。

在直线上、平面上，在高维欧氏空间上，都可以仿上建立直角坐标系。

如果两个参考系及其直角坐标系在初始时刻重合，作相对运动时的恒定速度$\vec{V}$沿 x 轴方向，则伽利略变换$\begin{cases} \vec{r} = \vec{V}t + \vec{r}' \\ t = t' \end{cases}$可以表为：$\begin{cases} x = Vt + x' \quad y = y' \quad z = z' \\ \qquad\qquad t = t' \end{cases}$

§1．3．约束和广义坐标

点和数组之间的任何一种一一对应关系，都可以成为坐标系（以后称为广义坐标系）。直角坐标系是这种对应关系的最简单的一种实现，但应用起来并不总是最方便，特别是当约束存在而直角坐标不再独立时。此时我们宁肯采用看来复杂一些的广义坐标，却可以用较少的独立的广义坐标来代替不独立的直角坐标，使问题得到简化。

如何选用各种不同的坐标系？根据问题的特点（包括：力、势能、约束等的对称性以及其它特点），选用适当的坐标系比较方便。（当然，采用别的坐标只是“不够方便”而不是原则上“不可能”。）例如：约束在球面上的质点的运动，约束方程$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$，若采用球坐标，质点的径向坐标$r = R$成为常数，用另两个球坐标 θ, φ 作为独立坐标描述即可。若采用直角坐标或柱坐标，就没有这样方便了。又如：讨论中心力作用下的质点的运动，质点作平面运动，采用平面极坐标最为方便；如果中心力是有势的（势能只与r有关），则很容易化为一维问题，优越性更为明显（见§1．8．中心力场）。

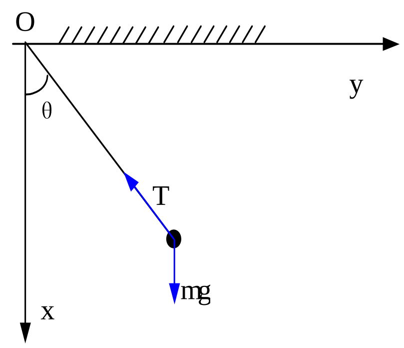
我们来看一个简单的实例：

【例 1】单摆：以悬挂点为原点，建立 x 轴向下的直角坐标系。在振幅不很大时，摆绳长为l，保持张紧。摆锤的位矢为$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$；约束方程可表为$\vec{r} \cdot \vec{r} = x^2 + y^2 = l^2$；（由此得$\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = x\dot{x} + y\dot{y} = 0$）约束力可表为$\vec{T} = -T\dfrac{\vec{r}}{l} = -T\dfrac{x}{l}\vec{i} - T\dfrac{y}{l}\vec{j}$, $T = \left|\vec{T}\right|$；主动力（重力）$m\vec{g} = mg\vec{i}$；矢量式的动力学方程$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{T}$可以写成分量式：

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -T\dfrac{x}{l} + mg & (1) \\ m\ddot{y} = -T\dfrac{y}{l} & (2) \end{cases}$$

通过变形、重新组合和积分，并利用约束方程 $x^2+y^2=l^2$ 及其推论 $x\dot{x}+y\dot{y}=0$，

$$\begin{cases} m(\ddot{x}x+\ddot{y}y) = -m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) = -Tl+mgx & \text{即} \quad -m\dfrac{v^2}{l} = -T+mg\dfrac{x}{l} & (3) \\ m(\ddot{y}x-\ddot{x}y) = \dfrac{d}{dt}\left[m(x\dot{y}-y\dot{x})\right] = -mgy & \text{即} \quad \dfrac{d}{dt}\left[\vec{r}\times m\vec{v}\right] = \vec{r}\times m\vec{g} & (4) \\ m(\ddot{x}\dot{x}+\ddot{y}\dot{y}) = mg\dot{x} & \text{即} \quad \dfrac{1}{2}mv^2 - mgx = E & (5) \end{cases}$$



其中 $\vec{v}=\dot{\vec{r}}=\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}$，$v^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2$，我们看到，后两式为消去约束力以后得到的结果，分别为角动量定理和能量守恒定律。由于约束的存在，出现未知的约束力，x 和 y 相互不独立，使问题变得复杂。如果我们采用平面极坐标(r, θ)，在本题的约束条件下 $r\equiv l$，只有一个独立的坐标 θ，我们称之为广义坐标。坐标变换式 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ 简化为 $\begin{cases} x = l\cos\theta \\ y = l\sin\theta \end{cases}$，约束方程化为恒等式；动力学方程（1）（2）化为用 θ 表述的形式：

$$\begin{cases} ml\left(-\ddot{\theta}\sin\theta - \dot{\theta}^2\cos\theta\right) = -T\cos\theta + mg & (1') \\ ml\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right) = -T\sin\theta & (2') \end{cases}$$

对（1’）（2’）变形、重新组合，就得到平面极坐标系中径向和横向的动力学方程

$$\begin{cases} (1')\cos\theta + (2')\sin\theta & -ml\dot{\theta}^2 = -T + mg\cos\theta & (3') \\ (2')\sin\theta - (1')\cos\theta & ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta & (4') \end{cases}$$

对（4’）积分，就可以得到能量积分，

$$\int(4')ld\theta \qquad \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta = E \qquad (5')$$

以上结果也可以通过对(3)(4)(5)进行坐标变换得到。进一步积分，可求得运动规律。在求得运动规律以后，利用（3’）可求得约束力。由此可见，选用适当的广义坐标，把约束方程化为恒等式，从动力学方程中消去不独立的坐标和约束力，以简化动力学方程的有效手段。

一般地，作平面运动的质点受到平面上的曲线约束 $F(x,y)=0$ 时，独立坐标数目从 2 减少为 1，可以选用 x 或 y 为独立坐标，也可以引入参数 u，选用函数 $x=f(u), y=g(u)$，使之满足 $F(f(u),g(u))\equiv 0$ 于是约束方程自动消去；我们可选用 u 作为独立的广义坐标，

以代替不独立的两个直角坐标 x，y，记为 $q=u$ 此时约束于一条曲线上的动点，可以用依赖于一个参数的位矢来刻画：$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}=f(u)\vec{i}+g(u)\vec{j}=\vec{r}(u)$

在空间运动的质点受曲面约束：$F(x,y,z)=0$ 独立坐标数目从 3 减少为 2 ，可选用 x，y，z 中的任意两个为广义坐标，也可以引入参数 u，v，选用函数，$x=f(u,v), y=g(u,v)$，$z=h(u,v)$，使之满足 $F\left(f(u,v),g(u,v),h(u,v)\right)\equiv 0$ 于是约束方程自动消去；我们可选用 u,v 作为独立的广义坐标，以代替三个不完全独立的直角坐标，记为 $q_1=u,q_2=v$.此时约束于一个曲面上的动点，可以用依赖于两个相互独立的参数的位矢来刻画：

$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=f(u,v)\vec{i}+g(u,v)\vec{j}+h(u,v)\vec{k}=\vec{r}(u,v)$，

在空间运动的质点受曲线约束 $\begin{cases}F_1(x,y,z)=0\\F_2(x,y,z)=0\end{cases}$ 独立坐标数从 3 减少为 1，可选用 x 或 y 或 z 为独立的广义坐标；也可以引入参数 u，选用函数 $x=f(u),y=g(u),z=h(u)$，使之满足 $\begin{cases}F_1\left(f(u),g(u),h(u)\right)\equiv 0\\F_2\left(f(u),g(u),h(u)\right)\equiv 0\end{cases}$ 于是约束方程自动消去；我们可选用 u 作为独立的广义坐标，以代替三个不独立的直角坐标 x，y，z，记为 $q=u$.. 此时约束于一条曲线上的动点，可以用依赖于一个参数的位矢来刻画：

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=f(u)\vec{i}+g(u)\vec{j}+h(u)\vec{k}=\vec{r}(u)$$

§1．4．曲线坐标系（参阅[1]5 页－9 页）

在 **§1．3.【例 1】**中，我们看到，利用平面极坐标系可以使问题变得简单易解。这说明，我们有必要选用适当的广义坐标系。除了直角坐标系，广义坐标系的坐标曲面一般为曲面族（当然也不完全排除平面族或半平面族）；坐标曲线一般为曲线族（当然也不完全排除直线族或射线族）；因而称为曲线坐标系。最常用的曲线坐标系有：

平面极坐标系(r,θ)（当质点在平面运动时，可以选用）；

柱坐标系 (ρ,ϕ,z)；

球坐标系（球极坐标系）(r,θ,ϕ)；

我们将看到：在这几种曲线坐标系中，在过同一点的各基矢依然是相互垂直的，因而总可选取它们依然是正交归一的，（满足 $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_k=\delta_{ik}$）。但是一般说，它们随点的位置而变动，不再为常矢量。

对于正交归一基矢，如果矢量 $\vec{A}=\sum_i A_i\vec{e}_i$ 则有 $A_i=\vec{A}\cdot\vec{e}_i$；反之亦然。此论断对于一般的基矢不成立。

关于方向变化的单位矢量，有以下两条定理成立：（请同学们自行证明）

【定理 1】若单位矢量 $\vec{e}_l=\vec{e}_l(\theta)$ 依赖于任意参数 θ，则 $\dfrac{d\vec{e}_l}{d\theta}\perp\vec{e}_l$。

【定理 2】在平面情形，若参数θ为$\vec{e}_l$与某一固定方向的夹角，则有$\left|\dfrac{d\vec{e}_l}{d\theta}\right|=1$。

关于利用平面极坐标系来研究平面运动质点的运动学，我们已经很熟悉了（例如参阅[1]5 页），下面我们介绍的方法，尽可能多利用分析工具而少依赖几何图形，因而易于推广：

平面极坐标系： $(r,\theta)\quad r\ge 0,\ \ 0\le\theta<2\pi$

①由平面直角坐标系和平面极坐标系之间的坐标变换出发

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\qquad \begin{cases}r=\sqrt{x^2+y^2}\\ \tan\theta=y/x\end{cases}$$

可求得有关的偏导数和雅可比行列式：

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\theta=\frac{x}{r},\ \frac{\partial y}{\partial r}=\sin\theta=\frac{y}{r},\ \frac{\partial x}{\partial\theta}=-r\sin\theta=-y,\ \frac{\partial y}{\partial\theta}=r\cos\theta=x,\quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r,$$

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}=\cos\theta,\ \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}=\sin\theta,\ \frac{\partial\theta}{\partial x}=-\frac{y}{r^2}=-\frac{\sin\theta}{r},\ \frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{x}{r^2}=\frac{\cos\theta}{r},\quad \frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)}=\frac{1}{r},$$

②平面极坐标系的坐标曲线分别为以极点为圆心的同心圆族和以极点为始点的射线族。仿照

$\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial x}=\vec{i},\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial y}=\vec{j},\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial z}=\vec{k}$，我们可以求得基矢（径向和横向）：

$$\begin{cases}\vec{\varepsilon}_r=\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial r}=\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j}=\vec{e}_r\\ \vec{\varepsilon}_\theta=\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}=-r\sin\theta\vec{i}+r\cos\theta\vec{j}=r\vec{e}_\theta\end{cases}\quad \begin{cases}\vec{e}_r=\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j}\\ \vec{e}_\theta=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}=-\sin\theta\vec{i}+\cos\theta\vec{j}\end{cases}\quad \vec{e}_\theta=\vec{e}_r\left(\theta\Rightarrow\theta+\frac{\pi}{2}\right)$$

基矢$\{\vec{e}_\alpha\}$是已经归一化了的，而基矢$\{\vec{\varepsilon}_\alpha\}$还没有归一化。位矢可以分别利用两种坐标系和两组基矢$\{\vec{i},\vec{j}\}$ $\{\vec{e}_r,\vec{e}_\theta\}$表为：

$$\vec{r}=\vec{r}(x,y)=x(r,\theta)\vec{i}+y(r,\theta)\vec{j}=r\cos\theta\vec{i}+r\sin\theta\vec{j}=r\vec{e}_r$$

③基矢$\{\vec{e}_r,\vec{e}_\theta\}$仍然是正交归一的，但它们不再是常矢量：$\vec{e}_r=\vec{e}_r(r,\theta)$，$\vec{e}_\theta=\vec{e}_\theta(r,\theta)$

可求得基矢随坐标的变化$\dfrac{\partial\vec{e}_r}{\partial r}=0\quad \dfrac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta}=\vec{e}_\theta\quad \dfrac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial r}=0\quad \dfrac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\theta}=-\vec{e}_r$ ；

基矢随时间的变化$\dot{\vec{e}}_r=\dfrac{d\vec{e}_r}{dt}=\dfrac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta}\dot{\theta}=\dot{\theta}\vec{e}_\theta$，$\dot{\vec{e}}_\theta=\dfrac{d\vec{e}_\theta}{dt}=\dfrac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\theta}\dot{\theta}=-\dot{\theta}\vec{e}_r$ ；

④进而可通过对矢径求导数得到速度和加速度的表达式。利用平面极坐标系中位矢表达式：

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(r\vec{e}_r\right)=\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\vec{e}}_r\ =\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \text{ 或 } \vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\dot{r}+\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\dot{\theta}=\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\frac{d^2}{dt^2}\left(r\vec{e}_r\right)=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r+\left(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\theta$$

也可以利用直角坐标系中位矢的表达式求速度加速度表达式再经过坐标变换得：

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\dot{x}\,\vec{i}+\dot{y}\,\vec{j}=\left(\dot{r}\cos\theta-r\dot{\theta}\sin\theta\right)\vec{i}+\left(\dot{r}\sin\theta+r\dot{\theta}\cos\theta\right)\vec{j}\ =\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

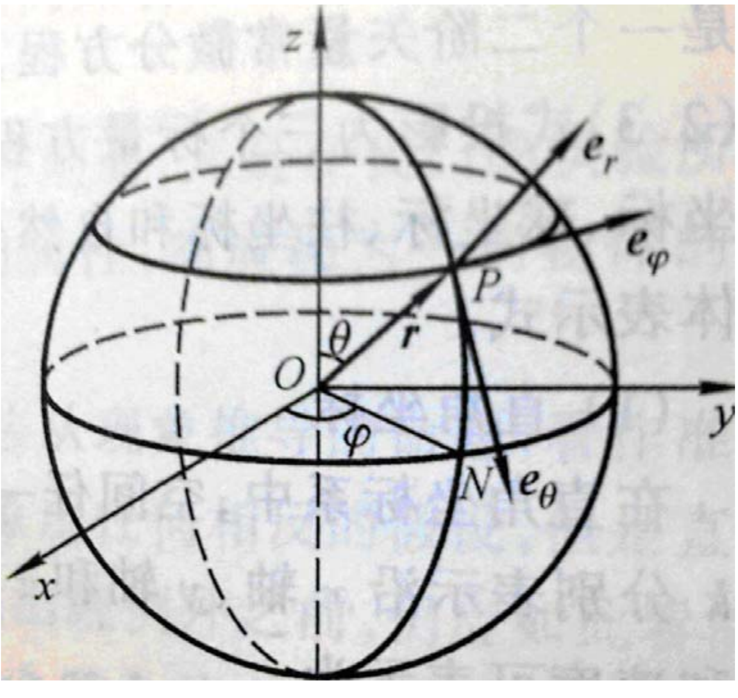
$$\vec{a}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\ddot{x}\,\vec{i}+\ddot{y}\,\vec{j}=\left(\ddot{r}\cos\theta-2\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta-r\ddot{\theta}\sin\theta-r\dot{\theta}^2\cos\theta\right)\vec{i}$$
$$+\left(\ddot{r}\sin\theta+2\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta+r\ddot{\theta}\cos\theta-r\dot{\theta}^2\sin\theta\right)\vec{j}=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r+\left(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\theta$$

后面这种方法避免了对基矢求导数，但要利用坐标导数间的变换；而前面这种方法避免了坐标导数间的变换，但要对基矢求导数。两种方法的繁简程度相差不多。

与直角坐标系中的公式相仿，我们得到$\left(\frac{\partial\dot{\vec{r}}}{\partial\dot{r}}\right)_{r,\theta,\dot{\theta}}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}=\vec{e}_r$， $\left(\frac{\partial\dot{\vec{r}}}{\partial\dot{\theta}}\right)_{r,\theta,\dot{r}}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}=r\vec{e}_\theta$，这样的关系式还可以推广到任意的曲线坐标和广义坐标中去，称为第一个经典 *Lagrange* 关系。

上述方法推广到柱坐标系是直截了当的（参阅[1]7 页）。（请同学们自行练习。）

推广到球坐标系（参阅[1] 6 页），过程稍复杂些。（参阅补充习题：补 1－1）



（*推广到任意曲线坐标系：可参阅附录 A．1；参考资料[12]上册第一章§9）

§1．5．“自然坐标系”

“自然坐标系”不同于前述的几种坐标系，实际上并未给出与点对应的三元数组，只给出了一组基矢，而且这组基矢是与速度的方向有关的。我们限于讨论轨道为平面曲线的情形：（*轨道为空间曲线的情形：参阅[1]8－9 页）

通常以弧长 s 为参数，可任意选定 s 的零点和正向，这样矢径$\vec{r}=\vec{r}\left(s\right)$，取坐标基矢如

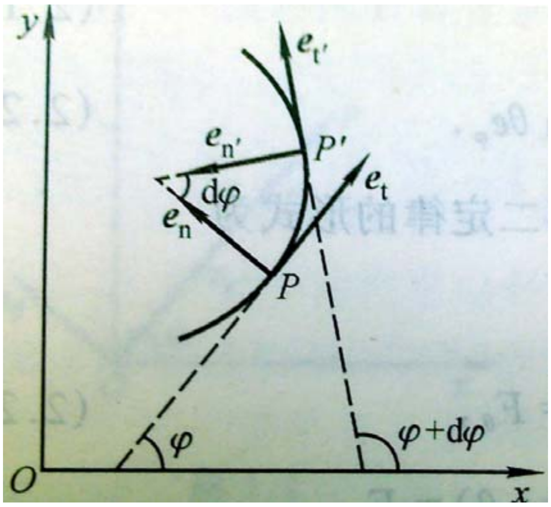
下：由于 $ds=\pm|d\vec{r}|$，$\left|\dfrac{d\vec{r}}{ds}\right|=1$，可以定义切向单位矢量 $\vec{e}_t=\dfrac{d\vec{r}}{ds}$，指向 s 增加的方向（不一定是质点运动的方向）；从而 $\dfrac{d\vec{e}_t}{d\varphi}\perp\vec{e}_t,\ \left|\dfrac{d\vec{e}_t}{d\varphi}\right|=1$，因此可以定义法向单位矢量 $\vec{e}_n=\pm\dfrac{d\vec{e}_t}{d\varphi}\perp\vec{e}_t$，正负号选得使 $\vec{e}_n$ 指向曲线凹侧。

矢径的微分 $d\vec{r}=\dfrac{d\vec{r}}{ds}ds=ds\vec{e}_t$，速度：$\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=\dfrac{ds}{dt}\vec{e}_t=v\vec{e}_t$　注意：$v=\dfrac{ds}{dt}$ 为速度在切向单位矢量上的投影，可正可负，不一定是速度的大小。加速度：

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{dv}{dt}\vec{e}_t+v\frac{d\vec{e}_t}{dt}=\frac{dv}{dt}\vec{e}_t+\frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n=a_t\vec{e}_t+a_n\vec{e}_n$$

$a_t=\dfrac{dv}{dt},\ a_n=\dfrac{v^2}{\rho}$ 分别为切向加速度和法向加速度。其中 $\dfrac{d\vec{e}_t}{dt}=\dfrac{d\vec{e}_t}{d\varphi}\dfrac{d\varphi}{ds}\dfrac{ds}{dt}=\vec{e}_n\cdot\dfrac{1}{\rho}\cdot v$

（$\dfrac{ds}{d\varphi}=\pm\rho,\ \rho>0$ 为曲率半径，$\dfrac{d\vec{e}_t}{d\varphi}=\pm\vec{e}_n$ 两个 $\pm$ 号恰消去。曲率半径的公式的证明：参阅[1]9 页和有关微分几何的书籍。）



§1．6．质点动力学　质量和力

我们从牛顿动力学方程 $m\ddot{\vec{r}}=\vec{F}$ 出发研究质点动力学。

一般说，如果力 $\vec{F}=\vec{F}\left(\vec{r},\dot{\vec{r}},t\right)$ 不依赖高阶导数，则经典力学的动力学方程（牛顿方程）：$m\ddot{\vec{r}}=\vec{F}\left(\vec{r},\dot{\vec{r}},t\right)$　（其中 $m,\vec{r},\vec{F},t$ 分别为质量，位矢，力和时间）是一个二阶常微分方程组。由某一时刻质点的坐标和速度可以确定该时刻质点的加速度，对动力学方程逐次求导数可以由所得的新的方程逐次求得坐标的任意阶导数；对动力学方程积分或利用泰勒公式可以得到其它时刻的坐标、速度、加速度和更高阶的导数，从而可以求得任何时刻的任何力学量的值；因此，知道了某一时刻的坐标和速度的值，利用动力学方程就足以决定这个力学体系的运动状态和运动状态的变化，即任何时刻的任何力学量的值。由此我们也就理解了，为什么解动力学方程时给出的定解条件（初条件）是初位置和初速度。而不需要也不可能独立地另行给出初加速度。

在各种坐标系中的牛顿动力学方程参阅[1]5－9 页，我们在此只对“自然坐标系”的牛顿动力学方程（本性方程，内乘方程）略加说明：

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt}=F_t & \text{切线方向} \\ m\dfrac{v^2}{\rho}=F_n & \text{法线方向} \end{cases}$$

F_t 是 $\vec{F}$ 在切线方向上的投影，F_t 正负均可能。

F_n 是 $\vec{F}$ 在法线方向上的投影，$\vec{F}$ 指向凹侧（曲率中心所在一侧），F_n 肯定为正。

§1．7．质点的三个动力学定理　动量 角动量 机械能（动能和势能）

引入动量 $\vec{p}=m\dot{\vec{r}}$，角动量 $\vec{L}=\vec{r}\times m\dot{\vec{r}}$，动能 $T=\dfrac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2$ 和力矩 $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$ 等概念，我们可以从牛顿动力学方程导出质点的动力学定理：

	导数形式	微分形式	积分形式
动量定理	$\dfrac{d}{dt}\vec{p}=\vec{F}\left(\vec{r},\dot{\vec{r}},t\right)$	$d\vec{p}=\vec{F}\left(\vec{r},\dot{\vec{r}},t\right)dt$	$\vec{p}(t)-\vec{p}(t_0)=\int_{t_0}^{t}\vec{F}\left(\vec{r},\dot{\vec{r}},t\right)dt$
角动量定理	$\dfrac{d}{dt}\vec{L}=\vec{M}$	$d\vec{L}=\vec{M}dt$	$\vec{L}(t)-\vec{L}(t_0)=\int_{t_0}^{t}\vec{M}dt$
动能定理	$\dfrac{d}{dt}T=\vec{F}\cdot\dot{\vec{r}}$	$dT=\vec{F}\cdot d\vec{r}$	$T-T_0=\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\vec{F}\cdot d\vec{r}$

进而得到三个守恒定律：（参阅[1]§1．4．－§1．6．特别可阅读 11，13，16 页）

如果 $\vec{F}\left(\vec{r},\dot{\vec{r}},t\right)=0$，从而 $\int_{t_0}^{t}\vec{F}\left(\vec{r},\dot{\vec{r}},t\right)dt=0$，则有 $\vec{p}(t)=\vec{p}(t_0)=\vec{p}_0$，动量守恒定律。

如果 $\vec{M}=0$，　　从而 $\int_{t_0}^{t}\vec{M}dt=0$，　　则有 $\vec{L}(t)=\vec{L}(t_0)=\vec{L}_0$，角动量守恒定律。

如果 $\vec{F}=-\nabla V\left(\vec{r}\right)$　从而 $\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\vec{F}\cdot d\vec{r}=-V\left(\vec{r}\right)$　则 $T+V=E$，　能量(机械能)守恒定律。

守恒定律是指物理量在某一有限时间间隔内保持不变，而不是指物理量在某一特定时刻的值与初值相等。例如：如果 $\vec{F}\left(\vec{r},\dot{\vec{r}},t\right)\neq 0$，而对某时刻 t,有 $\int_{t_0}^{t}\vec{F}\left(\vec{r},\dot{\vec{r}},t\right)dt=0$，则有 $\vec{p}(t)=\vec{p}(t_0)=\vec{p}_0$ 对该特定时刻成立,这是由动量定理推得的一个结果。不是动量守恒定律。

动力学三个定理的导出，使动量、能量等概念逐步代替力和质量成为经典力学的基本概念和物理量。这件事对物理学各领域的发展产生了深刻的影响。

从求解动力学问题的角度来看，动力学三个定理和动力学方程原则上是等价的。可以互相导出，互相代替。只是在不同的情况下，用某种方法，可能比较方便。我们可以根据问题的特点和要求，选用适当的方法。一般说，如果在积分形式中的积分易于计算，则对应的动力学定理用起来是比较方便的。（此时动力学定理的积分形式就是动力学方程的初积分）例如：力只是时间的函数，用动量定理往往比较方便；力只是空间坐标的函数，用动能定理可能比较方便。又如：如果要求某个时刻的力学量，或者所讨论的问题涉及与时间的关系，可能用动量定理比较方便；如果要求某个空间位置的力学量，或者所讨论的问题涉及与坐标的关系，可能用动能定理比较方便。

在一定条件下得到的三个运动积分（守恒定律），也是与牛顿动力学方程等价的。如果能判定某个守恒定律成立，则可直接利用，以代替某个动力学方程。

在学习过程中，应注意积累经验，提高灵活运用各种方法的能力。

我们已经学过一些基本的实例：抛射体　单摆　简谐振动等。我们再举几个实例。

【例 1】质量为 m 的质点以初速 v_0 竖直上抛，空气阻力与速率的一次方成正比：$f=-mkv$，（k>0,负号表示空气阻力与速度方向相反）试证明：质点回到投掷点的速度等于同样时间内在真空中以同样的初速作上抛运动所达到的速度。

证明：建立坐标系 y 轴竖直向上，以投掷点为原点。初条件：$t=0,\ y(0)=0,\ \dot{y}(0)=v_0$

真空中：$m\ddot{y}=-mg \qquad \dot{y}=v_0-gt \qquad y=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$　　（0）

达到最高点：$\dot{y}=0,\ t=\frac{v_0}{g},\ y_M=\frac{{v_0}^2}{2g}$　回到投掷点：$y=0,\ t=\frac{2v_0}{g},\ \dot{y}=-v_0$

有阻力：$m\ddot{y}=-mg-mk\dot{y}$　即　$\ddot{y}+k\dot{y}=-g$　积分并用初条件定解，

得 $y=\frac{g+kv_0}{k^2}\left[1-e^{-kt}\right]-\frac{g}{k}t$，　并得 $\dot{y}=\frac{g+kv_0}{k}e^{-kt}-\frac{g}{k}$　　（1）

达到最高点：$\dot{y}=0 \quad t=\frac{1}{k}ln\frac{g+kv_0}{g} \quad y_M=\frac{v_0}{k}-\frac{g}{k^2}ln\frac{g+kv_0}{g}<\frac{v_0^2}{2g}$

回到投掷点：$\left(g+kv_0\right)e^{-kt}=g+k\left(v_0-gt\right)$　　（2）

（2）式中的 t 不必解出，也不易解出。（1）式对整个过程成立，（2）式仅对回到投掷点时刻成立，从（1）（2）消去 e^{-kt}，得 $\dot{y}=v_0-gt$ 与（0）一致，即原命题得证。但应注意在有阻力时，此式仅对回到投掷点时刻成立。

【例 2】质量为 m 的质点以初速 v_0 竖直上抛，空气阻力与速率的二次方成正比：$R=\pm mgk^2\dot{y}^2$，试证明：质点回到投掷点的速度等于 $v_1=v_0\left(1+k^2{v_0}^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

证明：上升阶段：$m\ddot{y}=-mg-mgk^2\dot{y}^2$　　利用动能定理 $\frac{d\left(\dot{y}^2\right)}{g\left(1+k^2\dot{y}^2\right)}=-2dy$

积分，$ln\left(1+k^2\dot{y}^2\right)=-2k^2gy+C$ 利用初条件 $y=0,\ \dot{y}=v_0$

定积分常数，$C=ln\left(1+k^2{v_0}^2\right)$ 然后令 $\dot{y}=0$ 得最大高度 $y_M=\frac{1}{2k^2g}ln\left(1+k^2v_0^2\right)$

下降阶段：$m\ddot{y}=-mg+mgk^2\dot{y}^2$ 利用动能定理 $\dfrac{d\left(\dot{y}^2\right)}{g\left(1-k^2\dot{y}^2\right)}=-2dy$

积分，$ln\left(1-k^2\dot{y}^2\right)=+2k^2gy+C_1$ 利用初条件 $y=y_M$，$\dot{y}=0$

定积分常数，$C_1=-2k^2gy_M$ 然后令 $y=0$，$\dot{y}=v_1, v_1$ 是回到投掷点的速度。

得 $ln\left(1-k^2v_1^{\ 2}\right)=-2k^2gy_M=-ln\left(1+k^2v_0^2\right)$

因此回到投掷点的速度 $v_1=v_0\left(1+k^2v_0^{\ 2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

以上两题可利用牛顿动力学方程，也可利用动力学定理。力是时间的函数，便于利用动量定理；力是坐标的函数，便于利用动能定理。【例 1】讨论速度与时间的关系，利用动量定理较方便。以上解法实际上利用了动量定理，（1）式即速度与时间的关系。【例 2】讨论速度与位置的关系，（从已知条件到求证结论未显现时间）宜于利用动能定理。还应注意，【例 1】可用同一个动力学微分方程概括上升和下降阶段；而【例 2】则必须分阶段（上升和下降）建立动力学微分方程。

§1．8．中心力场

①中心力场：力场中力的作用线保持通过一固定点 O (力心)，质点 P 的位矢 $\vec{r}=\overrightarrow{OP}$

中心力场可以表为：$\vec{F}=F\dfrac{\vec{r}}{r}=\lambda\vec{r}=F\vec{e}_r$ （$F=\lambda r$ 是 $\vec{r}$ 的数量函数）即中心力沿径向。

【注意】这里 $F=\vec{F}\cdot\dfrac{\vec{r}}{r}$ 是中心力在径向单位矢量上的投影，与力 $\vec{F}$ 的大小 $\left|\vec{F}\right|$（非负）含义不同。$F>0$（$\lambda>0$）对应于斥力； $F<0$ （$\lambda<0$）对应于引力。

②中心力场的特点：由于中心力场对力心的力矩 $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=0$，利用角动量定理 $\dfrac{d}{dt}\vec{L}=\vec{M}$ 即得对于力心的角动量守恒 $\vec{L}=\vec{r}\times m\dot{\vec{r}}=\vec{C}$；这是中心力场的基本特点。进一步我们得到 $\vec{L}\cdot\vec{r}=\left(\vec{r}\times m\dot{\vec{r}}\right)\cdot\vec{r}=\vec{C}\cdot\vec{r}=0$，这是用矢量表示的过力心平面方程的法线式，所以在中心力场中运动的质点必作平面运动；由此可见，中心力场的定义和特点的证明，都是不依赖坐标系的。我们可以利用各种坐标系来表述，例如，如果采用直角坐标系，我们可以从角动量守恒 $\vec{L}\cdot\vec{r}=\vec{C}\cdot\vec{r}=C_1x+C_2y+C_3z=0$ 得到我们最熟悉的平面方程，从而证明了中心力场中的质点作平面运动。以下我们在平面上建立平面极坐标系，基矢为 $\vec{e}_r,\vec{e}_\theta$；平面的单位法向矢量记为 $\vec{k}=\vec{e}_r\times\vec{e}_\theta$，从而得到：$\vec{L}=r\vec{e}_r\times m\left(\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\theta}\vec{e}_\theta\right)=mr^2\dot{\theta}\vec{k}$，$\vec{F}=F\vec{e}_r$，角动量守恒可表为 $mr^2\dot{\theta}=L$ 或 $r^2\dot{\theta}=h$（面积速度守恒，h 为 2 倍面积速度）

③采用了平面极坐标系，在中心力场中质点运动的动力学微分方程 $\vec{F}=m\vec{a}$ 可按径向和

横向表为分量式：

$$\begin{cases} m\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)=F & (1) \\ m\left(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}\right)=0 & (2) \end{cases}$$

横向分量式（2）的初积分就是角动量守恒定律。

④有势中心力场：在平面极坐标系中，有势力场应表为：（参阅附录 A2【例 1】）

$$\vec{F}=-\nabla V\left(r,\theta\right)=-\left(\frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta\right)$$

和中心力场表达式 $\vec{F}=F\vec{e}_r$ 相比较，得：$\dfrac{\partial V}{\partial \theta}=0$ 即有势中心力场的势能 $V=V\left(r\right)$，从而有势中心力场应表为：$\vec{F}=-\nabla V=-\dfrac{dV}{dr}\vec{e}_r$，$\vec{F}$ 在 $\vec{e}_r$ 上的投影 $F=\vec{F}\cdot\vec{e}_r=-\dfrac{dV}{dr}$

⑤在中心势场中质点的动力学方程的解：（参阅[1]70—71 页）

对动力学微分方程

$$\begin{cases} m\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)=F=-\dfrac{dV}{dr} & (1) \\ m\left(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}\right)=0 & (2) \end{cases}$$

进行两次积分，可解得运动方程（运动规律）$r=r(t),\theta=\theta(t)$，进一步消去 t，就得轨道方程。在有势的情形，我们可以分别利用（1）（2）求得两个初积分，也可利用守恒定律直接写出两个初积分，以简化过程：

角动量守恒 $\qquad mr^2\dot{\theta}=L=mh.$ （3）

和能量守恒 $T+V=\dfrac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)+V\left(r\right)=E$

或利用（3）式化为一维问题的微分方程 $\dfrac{m}{2}\dot{r}^2+\dfrac{L^2}{2mr^2}+V\left(r\right)=E$ （4）

（4）式第一项为径向动能，利用角动量守恒，第二项横向动能可表为 $\dfrac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2=\dfrac{L^2}{2mr^2}$，

所以可理解为离心势能，归入有效势能。有效势能定义为：$V_{eff}\left(r\right)=\dfrac{L^2}{2mr^2}+V\left(r\right)$，再积分一次，得运动方程

$$t=\pm\int_{r_0}^{r}\frac{mrdr}{\sqrt{2m\left[E-V\left(r\right)\right]r^2-L^2}}+t_0=\pm\int_{r_0}^{r}\frac{mdr}{\sqrt{2m\left[E-V_{eff}\left(r\right)\right]}}+t_0 \qquad (5)$$

$$\theta=\int_{t_0}^{t}\frac{L}{mr^2(t)}dt+\theta_0 \qquad (6)$$

从（5）（6）消去 t，得轨道方程：

$$\theta = \pm\int_{r_0}^{r} \frac{Ldr}{r\sqrt{2m\left[E-V\left(r\right)\right]r^2-L^2}} + \theta_0 = \pm\int_{r_0}^{r} \frac{Ldr}{r^2\sqrt{2m\left[E-V_{eff}\left(r\right)\right]}} + \theta_0 \quad (7)$$

（5）、（7）式中的±取决于坐标的建立和初始条件。

由（7）、（5）或（4）式可见，当且仅当满足 $E > \frac{L^2}{2mr^2} + V\left(r\right) = V_{eff}\left(r\right)$ 的区域才有解。

不失一般性，我们可以取 $V\left(r\right)$ 满足 $V\left(\infty\right)=0$。这样，如果 $E<0$，则质点的运动只可能局限在力心附近的有限范围内，不可能到达无穷远，这是束缚态；如果 $E>0$，则质点可能到达无穷远，这是散射态。

⑥比耐公式：在 F 不显含 t 的条件下，我们很容易从动力学微分方程消去 t，得到轨道满足的微分方程，直接求轨道方程。（见[1]80 页）具体方法如下： 利用 $mr^2\dot{\theta}=L$（这是关键所在）可将运动微分方程（2）中的 $\frac{d}{dt}$ 消去.(并记 $\frac{1}{r}=u$)事实上,

$$\frac{d}{dt} = \dot{\theta}\frac{d}{d\theta} = \frac{Lu^2}{m}\frac{d}{d\theta}$$

$$\therefore \dot{r} = \frac{L}{mr^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{L}{m}\frac{du}{d\theta}$$

$$\ddot{r} = \frac{L}{m}u^2\frac{d}{d\theta}\left(-\frac{L}{m}\frac{du}{d\theta}\right) = -\frac{L^2}{m^2}u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

于是由（2）得到：$$u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right) = -\frac{m}{L^2}F \qquad (8)$$

（8）式称为比耐(Binet)公式，也就是轨道微分方程。由（8）式可解得到轨道方程 $u=u(\theta)$ 或 $r=r(\theta)$，进一步可求得运动方程（5）（6）。在中心力有势的条件下，$F=-\frac{dV}{dr}$，由比耐公式（8）可导出能量积分：（或由（4）式经变换得到）

$$\frac{L^2}{2m}\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right]+V=E \qquad (9)$$

由（9）可导出轨道方程（7）或 $$\theta = \mp\int_{u_0}^{u}\frac{Ldu}{\sqrt{2m\left[E-V_1\left(u\right)\right]-L^2u^2}}+\theta_0 \qquad (7')$$

其中 $V_1\left(u\right)\equiv V\left(r\right)$；（7’）中右边积分式前面的正负号记法只是为了和（7）式一致。

推导比耐公式的关键是消去 t，得到轨道微分方程。引入变量 u 并非必要，事实上轨道满足的微分方程也可以表为 $$r\frac{d^2r}{d\theta^2}-2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2-r^2=-\frac{mr^5F}{L^2}$$

能量积分可以表为 $\dfrac{L^2}{2m}\left[\dfrac{1}{r^4}\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2+\dfrac{1}{r^2}\right]+V=E$

只是形式不如（8）、（9）两式简洁。依然可以直接得到轨道方程（7）。

§1．9．与距离平方成反比的有势中心力场

这是一类重要的有势中心力场，牛顿引力势和库仑静电势均属此类型。表达式为：

$F=\pm\dfrac{\alpha}{r^2}=\pm\alpha u^2$ 或 $V=\pm\dfrac{\alpha}{r}=\pm\alpha u \quad \alpha>0$，（设定 ∞ 处的势能值为零）

下面的符号对应吸引力，上面的符号对应排斥力。利用比耐公式：

$$u^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right]=-\frac{m}{L^2}F=-\frac{m}{L^2}\left(\pm\frac{\alpha}{r^2}\right)=\mp\frac{m\alpha}{L^2}u^2$$

解得轨道方程：$u=C\cos\left(\theta-\theta_0\right)\mp\dfrac{m\alpha}{L^2}$ 或

$$r=\frac{\mp L^2/\alpha m}{1\mp C\left(L^2/m\alpha\right)\cdot\cos(\theta-\theta_0)}=\frac{L^2/\alpha m}{\mp1+C\left(L^2/m\alpha\right)\cdot\cos(\theta-\theta_0)} \quad (10)$$

其中 C,θ_0 为积分常数。利用能量积分（9）得到 $C^2=\dfrac{m^2\alpha^2}{L^4}+\dfrac{2mE}{L^2}$ （11）

（11）式表明：能量的取值范围为：$E\geq-\dfrac{m\alpha^2}{2L^2}$；不失一般性，我们总可取 C 非负：

$$C=+\sqrt{\frac{m^2\alpha^2}{L^4}+\frac{2mE}{L^2}}\geq0$$

或者以 $V_1\left(u\right)\equiv V\left(r\right)=\pm\alpha u$ 代入（7）或（7）’积分可得同样结果（参阅[1]76 页）。轨道方程（10）式可表为

$$r=\frac{p}{\mp1+e\cos\left(\theta-\theta_0\right)} \quad (10')$$

其中半通径 $p=\dfrac{L^2}{m\alpha}$ 偏心率 $e=Cp=C\dfrac{L^2}{m\alpha}=\sqrt{1+\dfrac{2EL^2}{m\alpha^2}}$；这是圆锥曲线，力心位于一个焦点。＋号对应于吸引势，随着能量取值的符号不同，轨道可能为椭圆、抛物线或双曲线的与力心所在焦点同侧的一支；—号对应于排斥势，能量必须为正值，轨道必定为双曲线的另一支。

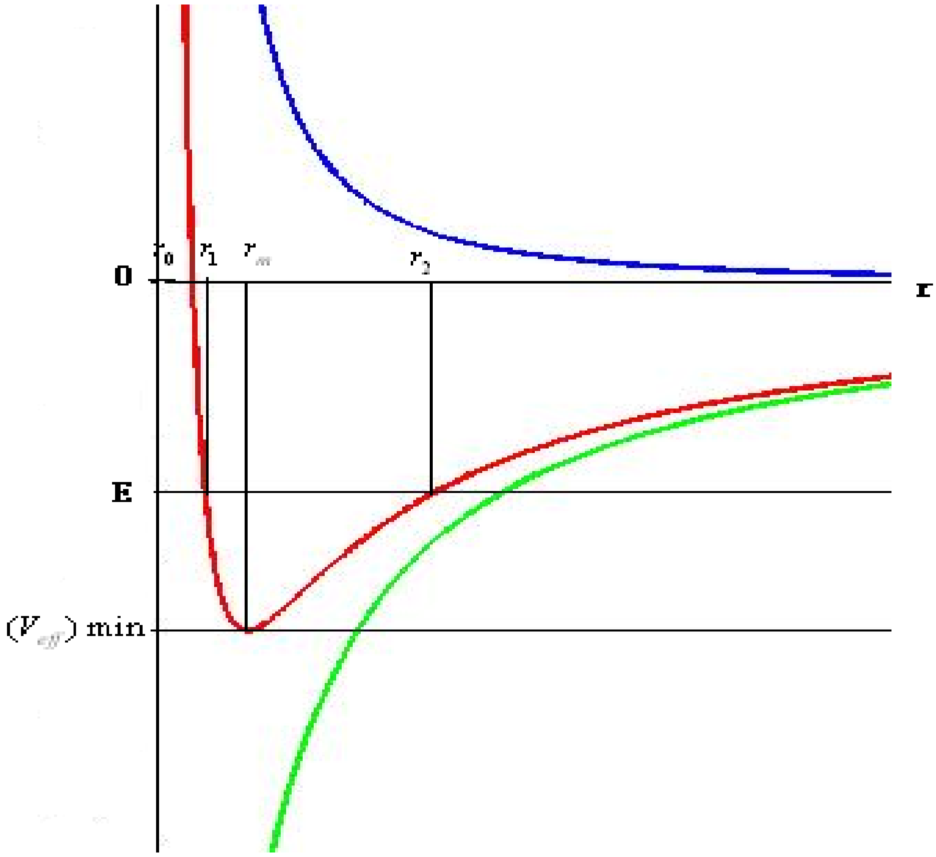
先讨论吸引势，万有引力就是一个实例 $F=-\dfrac{GMm}{r^2}=-\dfrac{k^2m}{r^2}=-mk^2u^2$，引力势

$V(r)=-k^2mu=-\alpha u \quad \alpha=mk^2$；以太阳系为例：$M$:太阳质量；$m$:行星质量；$G$:万有引力常数；$k^2=GM$ 太阳的高斯常数。对于吸引势，轨道方程（10）表为：

$u = C\cos(\theta-\theta_0)+\dfrac{m\alpha}{L^2}$ 或 $\quad r=\dfrac{L^2/\alpha m}{1+C\left(L^2/m\alpha\right)\cdot\cos(\theta-\theta_0)}$ 适当选择极轴,使 $\theta_0=0$，$C>0$ 即 $\theta=0$ 对应于近日点。即圆锥曲线的标准方程 $r=\dfrac{p}{1+e\cos\theta}$

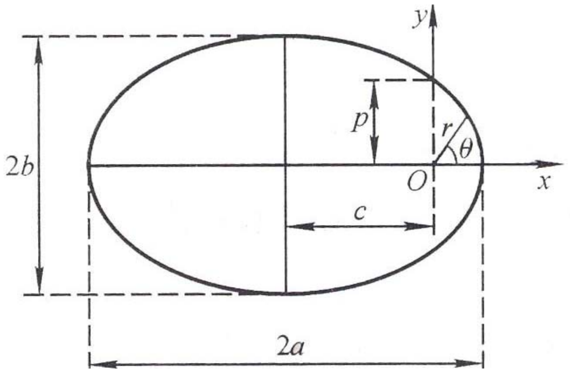
利用对有效势能 $V_{eff}=-\dfrac{\alpha}{r}+\dfrac{L^2}{2mr^2}$ 的分析，可以得到对粒子运动情况的定性描述。（参阅[1]74—75 页以及图 3．5）有效势能必有一负的极小值，事实上，由 $\dfrac{dV_{eff}}{dr}=\dfrac{\alpha}{r^2}-\dfrac{L^2}{mr^3}=0$ 可以求得有效势能最小值的 $r=r_m=\dfrac{L^2}{\alpha m}$，$V_{eff}\left(r_m\right)=-\dfrac{\alpha^2 m}{2L^2}$；把满足 $V_{eff}=0$ 的 r 的值记为 r_0，得 $r_0=\dfrac{L^2}{2\alpha m}=\dfrac{1}{2}r_m$；考虑总能量为负的情形：$0>E>V_{eff}\left(r_m\right)$ 方程 $V_{eff}\left(r\right)=E$ 有两个根 $r_{1,2}$ 即 $\left.\begin{matrix}r_1\\ r_2\end{matrix}\right\}=\dfrac{\alpha m\mp\sqrt{\alpha^2m^2+2mEL^2}}{-2mE}$，轨道有界：$0<r_1\le r\le r_2$ 偏心率 $e=\sqrt{1+\dfrac{2EL^2}{m\alpha^2}}<1$ 即轨道为椭圆，且 $\theta=0$，$\theta=\pi$ 分别对应于近日点和远日点。

总能量非负的情况下，轨道是无界的。



综上所述，我们得到了轨道曲线（包括椭圆和双曲线两种情况）的动力学参量 E , L 和几何参量 p ,e 之间的关系：

$$\begin{cases} p=\dfrac{L^2}{\alpha m}=\dfrac{\alpha}{2E}\left(e^2-1\right) \\ e=\sqrt{1+\dfrac{2EL^2}{m\alpha^2}} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} L=\sqrt{pm\alpha} \\ E=\dfrac{m\alpha^2}{2L^2}(e^2-1)=\dfrac{\alpha}{2p}(e^2-1) \end{cases}$$



当 $e<1$， $E<0$，轨道为椭圆。太阳系中行星绕日运动就是一个很好的实例。与直角坐标系中的椭圆标准方程（其中 a，b 分别为半长轴和半短轴）$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 相比较，(注意：直角坐标系中的椭圆标准方程的对称中心是原点，而平面极坐标系的原点是椭圆的一个焦点）以 c 记焦距，得：当 $\theta=0\,,\pi$， $r=\dfrac{p}{1\pm e}=a\mp c=a(1\mp e)$，分别对应于近日点和远日点。于是得：$a=\dfrac{p}{1-e^2}=-\dfrac{\alpha}{2E}=\dfrac{L^2}{m\alpha\left(1-e^2\right)}$， $b^2=a^2\left(1-e^2\right)=-\dfrac{L^2}{2mE}$，

$$E=-\frac{\alpha}{2a}, \quad L^2=-2mEb^2=\frac{\alpha m}{a}b^2=m\alpha\left(1-e^2\right)$$

当 $e>1,\ E>0$ 轨道方程 $r=\dfrac{p}{1+e\cos\theta}$ 为（与力心所在的焦点同侧的一支）双曲线。双曲线的渐近线的斜率为 $k=\pm\sqrt{e^2-1}$ 此时，质点以速度 $\vec{v}_\infty$ 沿这一支双曲线自无穷远来，经过最接近 O 的 A 点，$\left(OA=c-a\right)$ 偏转了一个角 $\pi-2\arccos\left(e^{-1}\right)$（散射角），又向∞飞去。由于能量守恒，速度的大小仍为 v_∞，但是速度的方向改变了，散射前后的出射速度入射速度分别平行于双曲线的两条渐近线。与直角坐标系中的双曲线标准方程 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 相比较，可得：当 $\theta=0$， $r=\dfrac{p}{1+e}=c-a=a(e-1)$

$$a=\frac{p}{e^2-1}=\frac{\alpha}{2E}=\frac{L^2}{m\alpha\left(e^2-1\right)}, \quad b^2=a^2\left(e^2-1\right)=\frac{L^2}{2mE}, \quad E=+\frac{\alpha}{2a},$$

$L^2 = 2mEb^2 = \dfrac{\alpha m}{a} b^2 = ma\alpha\left(e^2 - 1\right)$

当 $e = 1,\quad E = 0$ 轨道方程 $r = \dfrac{p}{1 + \cos\theta}$ 为抛物线。与直角坐标系中的抛物线标准方程 $y^2 = 2px$ 相比较，可得：焦顶距 $q = \dfrac{p}{2}$，$L = \sqrt{2m\alpha q}$

有了轨道方程，可以进一步推导运动方程（[1]78 页）。以椭圆轨道情形为例：
$E < 0$，$e < 1$

$$t = \pm\sqrt{\frac{m}{2|E|}}\int_{r_0}^{r}\frac{rdr}{\sqrt{-r^2 + \dfrac{\alpha}{|E|}r - \dfrac{L^2}{2m|E|}}} + t_0 = \pm\sqrt{\frac{ma}{\alpha}}\int_{r_0}^{r}\frac{rdr}{\sqrt{a^2e^2 - (r-a)^2}} + t_0$$

取 $t = t_0 = 0$ 时，$r = r_0 = a - c = a(1-e)$，则 $t = +\sqrt{\dfrac{ma}{\alpha}}\displaystyle\int_{a-c}^{r}\frac{rdr}{\sqrt{a^2e^2 - (r-a)^2}}$

引入参数 ξ，令 $r - a = -ae\cos\xi$ 则 $dr = ae\sin\xi d\xi$，$r = a(1 - e\cos\xi)$ （1）

$$t = +\sqrt{\frac{ma}{\alpha}}\int_{a-c}^{r}\frac{rdr}{\sqrt{a^2e^2 - (r-a)^2}} = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}\int_0^{\xi}(1 - e\cos\xi)d\xi = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(\xi - e\sin\xi) \qquad (2)$$

$$\cos\theta = \frac{p-r}{er} = \frac{a\left(1-e^2\right) - a(1 - e\cos\xi)}{ea(1 - e\cos\xi)} = \frac{\cos\xi - e}{1 - e\cos\xi} \qquad (3)$$

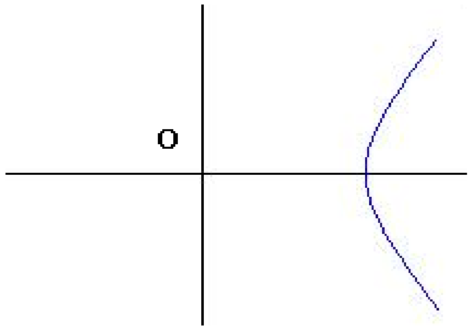
（1）（2）构成运动方程 $r = r(t)$ 的参数表示式；（2）（3）构成运动方程 $\theta = \theta(t)$ 的参数表示式；（1）（3）构成轨道方程 $r = r(\theta)$ 的参数表示式。变换到以焦点为原点的直角坐标系中，轨道方程还可以表为：

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a(\cos\xi - e) \\ y = a\sqrt{1-e^2}\sin\xi \end{cases} \text{或} \frac{(x-ea)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

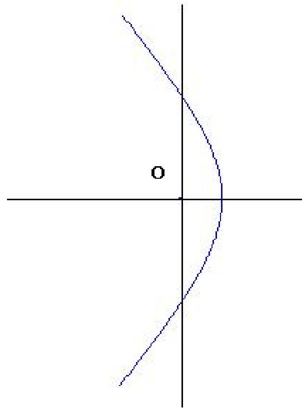
下面讨论排斥势（[1]78—79 页）$V = +\dfrac{\alpha}{r}$，轨道方程仍为圆锥曲线：

$r = \dfrac{-L^2/\alpha m}{1 + C\left(-L^2/m\alpha\right)\cdot\cos\theta} \Rightarrow r = \dfrac{-p}{1 - e\cos\theta}$ 从数学上分析，为使 $r > 0$，必有 $e > 1$ 且 $|\theta| < \arccos(e^{-1})$；从物理意义来分析，在排斥势的情况下，$E$ 必须大于零，因而也得到 $e > 1$ 事实上，这是与力心所在的焦点不同侧的另一支双曲线。此时，质点以速度 $\vec{v}_\infty$ 沿这一支双曲线自无穷远来，经过最接近 O 的 A 点 $(OA = c + a)$，也偏转了一个角（散射角），又向∞飞去。由于能量守恒，速度的大小仍为 v_∞，但是速度的方向改变了。

平方反比斥力



平方反比引力



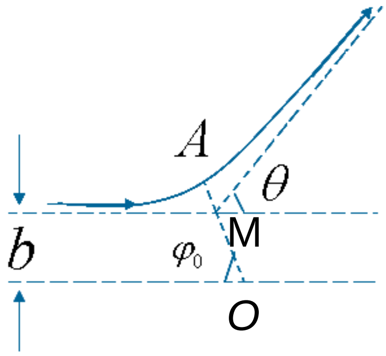
§1．10．散射截面：

在微观物理中，各种微观粒子间的碰撞（散射）实验，是获取微观粒子的性质、结构及其运动规律等信息的重要手段。两个粒子从相距无穷远飞来，逐渐接近到小距离范围内才有明显的相互作用，致使粒子经很短时间改变运动状态，又飞向无穷远；这种过程称为碰撞（散射）。如果进行碰撞的两个质点的质量相差很多，较重的质点（称为靶）可以认为近似固定于力心，于是两质点碰撞的问题就近似简化为单质点在固定中心力场中运动的问题（散射态）。

这里所说的“碰撞”不限于象宏观物体那样的直接接触，例如：带电质点间的库仑散射过程，两质点只是相互接近又远离，并不直接接触。这里“无穷远”是指比有显著相互作用的小距离范围的尺度大得多。例如：核力的作用范围约为10^{-15}米，那么数十厘米的距离完全可以认为是无穷远了。两质点在相距无穷远时，均可视作自由质点，作匀速直线运动，因此其轨道必有渐近线。

下面我们以有势中心排斥力场中的弹性散射为例来分析这个问题，并且我们已经假定取$V\left(\infty\right)=0$，此时由于能量守恒，入射和出射粒子在无穷远处沿渐近线作匀速直线运动，动能相等，速度大小相等，记为v_∞，方向偏转了一个角，称为散射角，记为θ（暂时我们不用θ来记平面极坐标）轨道散射前后的两部分成轴对称图形。为了以后叙述的方便，我们把平面极坐标的极轴选取得与入射粒子的速度（沿渐近线）平行且同向的位置，（如图所示）但极轴与渐近线一般不重合，（即力心可能不在入射粒子轨道的渐近线上，粒子入射的方向可能不对准力心），而有一个距离，称为瞄准距离，记为 b；轨道的对称轴与渐近线所夹的锐角记为φ_0 ，则有$2\varphi_0+\theta=\pi.$此时用入射速度v_∞和瞄准距离 b 代替参数 E,L 比较方便，这些参数间的关系如下：

$$\begin{cases} L = mbv_\infty \\ E = \dfrac{1}{2}mv_\infty^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_\infty = \sqrt{\dfrac{2E}{m}} \\ b = \dfrac{L}{\sqrt{2mE}} \end{cases}$$



在平方反比有势中心排斥力场中的弹性散射的情况下（例如：α-粒子和重原子核间的散射，即库仑势场中的弹性散射），势能为：$V(r)=+\frac{\alpha}{r}$，$(\alpha>0)$（这里我们已经取$V(\infty)=0$，因而必有 $E>0$）轨道为双曲线，参数 **p , e** 与参数 **b , v∞** 之间的关系为

$$\begin{cases} e=\sqrt{\dfrac{m^2v_\infty^4b^2}{\alpha^2}+1} \\ p=\dfrac{mv_\infty^2b^2}{\alpha} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_\infty=\sqrt{\dfrac{\alpha\left(e^2-1\right)}{pm}} \\ b=\dfrac{p}{\sqrt{e^2-1}} \end{cases}$$

由圆锥曲线的知识　$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{b^2+a^2}}{a^2}=\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2+1}=\sqrt{\tan^2\varphi_0+1}=\left(\cos\varphi_0\right)^{-1}$

得到$\varphi_0=\arccos\left(e^{-1}\right)$；这个结果也可以通过对比内公式$(7')$积分获得（注意各符号的意义）：

$$\varphi_0=\int_{r_{\min}}^{\infty}\frac{b\dfrac{dr}{r^2}}{\sqrt{1-\dfrac{2\alpha}{mv_\infty{}^2r}-\dfrac{b^2}{r^2}}}=-\int_{r_{\min}}^{\infty}\frac{d\left(\dfrac{b}{r}\right)}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\alpha}{bmv_\infty{}^2}\right)^2-\left(\dfrac{b}{r}+\dfrac{\alpha}{bmv_\infty{}^2}\right)^2}}$$

$$=\arccos\frac{\dfrac{b}{r}+\dfrac{\alpha}{bmv_\infty{}^2}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\alpha}{bmv_\infty{}^2}\right)^2}}\Bigg|_{r=r_{\min}}^{r\to\infty}=\arccos\frac{\dfrac{\alpha}{bmv_\infty{}^2}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\alpha}{bmv_\infty{}^2}\right)^2}}$$

其中$r_{\min}$ 由$E=\frac{L^2}{2mr_{\min}{}^2}+V(r_{\min})=\frac{L^2}{2mr_{\min}{}^2}+\frac{\alpha}{r_{\min}}$ 解得。利用 $E=\frac{1}{2}mv_\infty{}^2, L=mbv_\infty$

$$mv_\infty{}^2 r_{\min}{}^2 - 2\alpha r_{\min} - mb^2 v_\infty{}^2 = 0$$

$$r_{\min} = \frac{1}{2mv_\infty{}^2}\left[2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 + 4b^2 v_\infty^4}\right] \quad 取＋号 \quad r_{\min} = b\left[\frac{\alpha}{mbv_\infty^2} + \sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{mbv_\infty^2}\right)^2}\right]$$

$$\frac{b}{r_{\min}} = \sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{mbv_\infty^2}\right)^2} - \frac{\alpha}{mbv_\infty^2}, \qquad \frac{b}{r_{\min}} + \frac{\alpha}{mbv_\infty^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{mbv_\infty^2}\right)^2}$$

积分下限值为零。$\arccos\dfrac{\dfrac{b}{r_{\min}} + \dfrac{\alpha}{bmv_\infty{}^2}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\alpha}{bmv_\infty{}^2}\right)^2}} = \arccos\dfrac{\sqrt{1+\left(\dfrac{\alpha}{bmv_\infty{}^2}\right)^2}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\alpha}{bmv_\infty{}^2}\right)^2}} = \arccos 1 = 0$

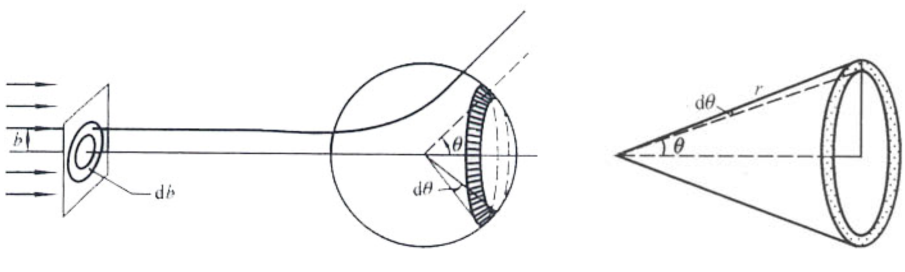
由以上积分得 $\cos\varphi_0 = \dfrac{\dfrac{\alpha}{bmv_\infty{}^2}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\alpha}{bmv_\infty{}^2}\right)^2}} = \dfrac{1}{e}$

进一步可以求得偏转角和这些参数的关系：

$$\sin\frac{\theta}{2} = \cos\varphi_0 = \frac{a}{c} = \frac{1}{e} \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \sin\varphi_0 = \frac{1}{e}\sqrt{e^2-1}$$

$$\cot\frac{\theta}{2} = \tan\varphi_0 = \sqrt{e^2-1} = \sqrt{\frac{2EL^2}{m\alpha^2}} = \frac{mbv_\infty^2}{\alpha} \qquad \therefore b = \frac{\alpha}{mv_\infty{}^2}\cot\frac{\theta}{2}$$

原则上上述公式中各量均可测量，可通过实验检验上述理论。但实际上有困难：一是很难观测单个粒子；二是 $b \approx 10^{-10} - 10^{-14}$ 米，不仅难以测量控制，而且在理论上受到量子力学测不准关系的限制。因此我们一般不是研究一个粒子的散射而是粒子束的散射，研究粒子束散射后粒子的分布情况，这就不是平面问题，而是具有旋转对称性的空间问题了。



我们以力心为原点，以入射粒子速度方向为 Z 轴，建立描述入射粒子的柱坐标系(ρ, φ, z)和描述散射后粒子分布情况的球坐标系(r, θ, φ)；前者在入射粒子的横截面上的投影相当于平面极坐标系(ρ, φ)，因此入射粒子的坐标 ρ 就是瞄准距离：$\rho = b$。我们以 n 记单位时间内通过入射粒子的单位横截面的粒子数(质点束流密度)。单位时间内通过横截面上(ρ, φ)处面积元 $d\sigma = \rho d\rho d\varphi$ 的粒子数为 $dN = nd\sigma = n\rho d\rho d\varphi$，这些粒子在单位时间内散射

到（ θ , φ）方向的立体角元 $d\Omega=\sin\theta d\theta d\varphi$ 内，因此可以表为 $dN=n\sigma\left(\theta,\varphi\right)d\Omega$ 其中 $\sigma\left(\theta,\varphi\right)$ 为与质点束流密度 n 无关的比例系数，由上述诸式，得

$$n\rho d\rho d\varphi=nd\sigma=dN=n\sigma\left(\theta,\varphi\right)d\Omega=n\sigma\left(\theta,\varphi\right)\sin\theta d\theta d\varphi$$

于是 $d\sigma=\dfrac{dN}{n}=\rho d\rho d\varphi=\sigma\left(\theta,\varphi\right)d\Omega=\sigma\left(\theta,\varphi\right)\sin\theta d\theta d\varphi$

$$\sigma\left(\theta,\varphi\right)=\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\rho}{\sin\theta}\frac{d\rho}{d\theta}$$

$$\sigma_t=\int d\sigma=\int\sigma\left(\theta,\varphi\right)d\Omega=\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}\sigma\left(\theta,\varphi\right)d\varphi$$

$d\sigma=\sigma\left(\theta,\varphi\right)d\Omega$ 是单位束流密度 $\left(n=1\right)$ 情况下单位时间内散射到立体角 $d\Omega$ 内的粒子数；$\sigma\left(\theta,\varphi\right)$ 是单位束流密度 $\left(n=1\right)$ 情况下单位时间内散射到单位立体角内的粒子数； σ_t 是单位束流密度 $\left(n=1\right)$ 情况下单位时间内被散射的粒子总数。这几个量刻划了被散射粒子在空间各方向上的分布，　其物理意义是一种几率。
它们的量纲是面积，$d\sigma$ 本身就是入射粒子横截面上的面积元，因此它们被称为微分散射截面，σ_t 称为散射总截面。

事实上，由于旋转对称性，$\sigma\left(\theta,\varphi\right)\equiv\sigma\left(\theta\right)$，依赖于 θ 而不依赖于 φ ，对于环形的横截面积元 $d\sigma_1=\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}d\sigma=2\pi\rho d\rho$ 和环形的立体角元 $d\Omega_1=\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}d\Omega=2\pi\sin\theta d\theta$ 有

$$d\sigma_1=2\pi\rho\frac{d\rho}{d\theta}d\theta=\sigma\left(\theta\right)d\Omega_1\qquad\sigma\left(\theta\right)=\frac{d_1\sigma}{d_1\Omega}=\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\rho}{\sin\theta}\frac{d\rho}{d\theta}$$

散射总截面也可表为：

$\sigma_t=\int d\sigma_1=\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\sigma\left(\theta\right)d_1\Omega=2\pi\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\sigma\left(\theta\right)\sin\theta d\theta=\int\dfrac{\rho}{\sin\theta}\dfrac{d\rho}{d\theta}d\Omega=2\pi\int_0^{\pi}\rho\dfrac{d\rho}{d\theta}d\theta$ 讲

在平方反比斥力的情况下 $\rho=\dfrac{\alpha}{2E}\cot\dfrac{\theta}{2}$，　$\dfrac{d\rho}{d\theta}=-\dfrac{\alpha}{4E\sin^2\dfrac{\theta}{2}}$

$$d\sigma = -\left(\frac{\alpha}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}} d\Omega = -\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{m{v_\infty}^2}\right)^2 \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^3\frac{\theta}{2}} d\theta d\varphi$$

$$或d\sigma_1 = -\left(\frac{\alpha}{2m{v_\infty}^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}} d\Omega_1 = -\pi\left(\frac{\alpha}{m{v_\infty}^2}\right)^2 \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^3\frac{\theta}{2}} d\theta$$

$$易见\sigma(\theta,\varphi) = \sigma(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_1}{d\Omega_1} = -\left(\frac{\alpha}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

上式中的负号由于在排斥力的情况下 $\frac{d\rho}{d\theta} < 0$ 所致。散射截面应为非负，可适当选取积分上下限，或迳直取

$\left|\frac{d\rho}{d\theta}\right| = \frac{\alpha}{2m{v_\infty}^2}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}$ 以取代 $\frac{d\rho}{d\theta}$ 使各微分截面的表达式非负。于是

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2m{v_\infty}^2}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{m{v_\infty}^2}\right)^2 \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^3\frac{\theta}{2}} d\theta d\varphi$$

$$或d\sigma_1 = \left(\frac{\alpha}{2m{v_\infty}^2}\right)^2 \frac{d\Omega_1}{\sin^4\frac{\theta}{2}} = \pi\left(\frac{\alpha}{m{v_\infty}^2}\right)^2 \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^3\frac{\theta}{2}} d\theta$$

散射总截面 $\sigma_t = \int d\sigma \to \infty$ 这个结果说明 Coulomb 力是长程力,作用范围是无穷大。

这是卢瑟福(Rutherford)公式（1911），是以原子的核模型为基础推导得到的，后来为盖革和马士登用实验所证实（1913）。以较重的原子核为靶，把 α-质点束射入进行散射。实验结果表明，当 v_∞ 足够大，ρ 足够小时，能使 α-质点接近原子核的距离缩小到 10^{-14} 米时，上述关系仍基本成立，从而证实了原子的核模型理论。

以上讨论都是在经典力学的理论框架中进行的，但是原子是微观粒子，遵循的是量子力学的规律。有意思的是，在非相对论量子力学中也得到同样的结果。

以上我们以α-粒子和重原子核间的散射（平方反比有势中心排斥力场中的弹性散射）为例分析了这个问题，但所用的方法可以推广到更一般的情况：吸引力场；非有势力场；非弹性散射（因粒子的内能改变而碰撞前后动能不再守恒）；甚至碰撞前后的粒子数也可以发生改变。

第二章　质点系力学

为什么要研究质点系力学？因为我们所研究的力学体系诸质点之间有联系。从运动学看，力学体系存在涉及多个质点的约束；从动力学看，质点间存在相互作用力。

我们可以利用质点力学的方法研究质点系。考虑全部约束和全部作用力(包括主动力和约束力)，对每个质点写出动力学方程；利用动力学方程，既可以求得各质点的运动规律，又可以求得未知的约束力。但这个过程包括消去约束力和不独立坐标的步骤，往往比较复杂，把质点系视作一个整体来进行研究，比较容易地获得一些整体的信息。例如：质心运动定理，守恒定律等。

一个力学体系看作一些独立的质点，还是看成质点系，或者把一部分看成质点系，不仅要看这个力学体系本身的特点，而且要看所研究问题的特点。

【例 1】太阳系：（参考资料[1]10 页的第一个实例）

（1）忽略太阳的运动$\left(M_s=\infty\right)$，忽略行星间相互作用：各行星分别视为在以太阳为力心的中心力场中运动的质点，按质点动力学的问题来处理。这当然只是初步的近似。

（2）考虑太阳和所有行星的运动和它们之间的相互作用：就是把整个太阳系作为一个质点系来处理。这当然比较精确，但却十分复杂而难以处理。

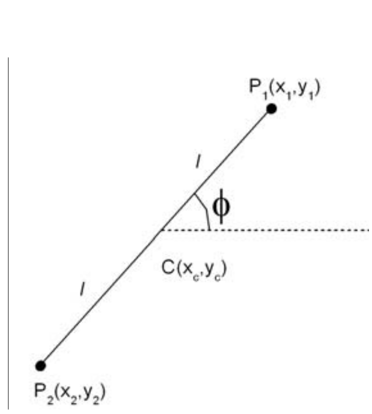
（3）考虑太阳的运动（太阳质量有限），但忽略其余行星对地球的作用力：即把地球与太阳处理成一个质点系。我们把由两个质点组成的质点系的力学问题称为两体问题。

在以后的分析力学部分，我们将对于一大类常见的约束（理想约束），采用系统的方法消去了约束力；着眼于整个质点系，引入广义坐标取代不完全独立的坐标，使约束方程成为恒等式，从而使解动力学问题的过程简化。

本章主要是梳理矢量力学中质点系力学的基础知识；并且在此提前讲述约束和广义坐标的概念，为以后学习分析力学做好准备。

§2．1．质点系运动学

质点系是若干个质点所组成的力学体系。如果质点系有 n 个质点，每个质点有三个坐标，用 $3n$ 个坐标描述他们的运动当然是从质点运动学到质点系运动学的最直接的推广；也可以改用另一组变量$\left\{u_1,u_2,\cdots u_{3n}\right\}$（称为广义坐标）来描述整个力学体系的位形。当质点系存在约束时，特别，当质点系存在涉及多个质点的约束时，对整个力学体系可能引入较少的独立的广义坐标，同时使约束方程化为恒等式，因而问题得到简化。因此讨论力学体系所受到的约束和选用适当的广义坐标，成为质点系运动学的重要论题之一。



【例 1】在平面上运动的以定长为 $2l$ 的刚性棒固连的两质点 $P_1\left(x_1,y_1\right),P_2\left(x_2,y_2\right)$。选用适当的广义坐标描述这个力学体系。

【解】1．写出约束方程：这个力学体系由在平面上运动的两质点组成，有四个坐标。受到一个约束，四个坐标中只有三个是独立的（4－1=3），约束方程为：

$$\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2=4l^2。$$

2．选定独立的广义坐标：可以任选两质点的四个坐标中的三个作为独立的广义坐标；也可以把独立的广义坐标选为：两质点连线中点 C 的坐标 (x_C, y_C) 和连线方向的角坐标 φ；这里所选的 x_C, y_C, φ 都不是某一质点的坐标，而是属于整个质点系的广义坐标。这样选取的 (x_C, y_C) 描述基点 C 的位置，φ 描述质点系相对于基点的位置。广义坐标的选取有很大的任意性，但必须把广义坐标选得是独立的，并且使约束方程成为恒等式。

3．写出原坐标和独立的广义坐标 (q_1, q_2, q_3) 之间的变换关系：

$$\begin{cases} q_1 = x_C = (x_1 + x_2)/2 \\ q_2 = y_C = (y_1 + y_2)/2 \\ q_3 = \varphi = \arctan\left[(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)\right] \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x_1 = q_1 - l\cos q_3 \\ y_1 = q_2 - l\sin q_3 \\ x_2 = q_1 + l\cos q_3 \\ y_2 = q_2 + l\sin q_3 \end{cases}$$

利用线性代数的知识可以判定，这样引入的广义坐标是独立的。

4．检验：用独立的广义坐标表达的约束方程确实成为恒等式：

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (2l\cos q_3)^2 + (2l\sin q_3)^2 \equiv 4l^2$$

§2．2．约束和广义坐标（续§1．3．）

1．约束的概念和数学表述：

我们已经看到了质点或质点系受到约束的一些实例。一般地说，对于力学系统的质点的位置和速度，事先（在没有解出动力学方程之前）加上的一些几何的或者运动学特性的限制，称为约束。在数学上，约束是用约束方程 $F(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \equiv F(\vec{r}_1, \cdots \vec{r}_n, \dot{\vec{r}}_1, \cdots \dot{\vec{r}}_n, t) = 0$ 或约束不等式 $F(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \equiv F(\vec{r}_1, \cdots \vec{r}_n, \dot{\vec{r}}_1, \cdots \dot{\vec{r}}_n, t) \geq 0$ 来表示的。

约束可以按不同标准分类如下：

一、用约束不等式描述的约束称为单面约束（可解约束，非固执约束）。用约束方程描述的约束称为双面约束（不可解约束，固执约束）。

【例 1】约束方程 $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ 限制质点在半径为 R 的球面上运动，这是双面约束；而约束不等式 $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \leq 0$ 则只是限制质点不能到球面以外，当质点在球内运动时是不受任何限制的，所以称为单面约束。又如§1．3．中的【例 1】单摆中：我们采用的双面约束 $x^2 + y^2 = l^2$ 适用于摆绳保持张紧，或用轻杆代替摆绳的情形；如果同时考虑摆绳可能不张紧的情况，则必须考虑单面约束 $x^2 + y^2 \leq l^2$. 在本课程中，以后我们只讨论双面约束。

二、如果约束方程不显含 t，称为稳定约束；如果约束方程显含 t，则称为非稳定约束。

【例 2】匀速膨胀的球面是非稳定约束的一个实例：$F(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$ 利用

球坐标 $\begin{cases} x = ct\sin\theta\cos\varphi \\ y = ct\sin\theta\sin\varphi \\ z = ct\cos\theta \end{cases}$ 可选独立的广义坐标为：$\begin{cases} q_1 = \theta \\ q_2 = \varphi \end{cases}$

另一个球坐标 $r = ct$ 虽然不是常数，但变化规律确定，不再作为独立的广义坐标。在独立的广义坐标下，约束方程成为恒等式。

【例 3】质点约束在平面上围绕原点作匀速转动的直杆上运动。约束方程：$y = x\tan\omega t$

利用平面极坐标，$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ 可选独立的广义坐标 $q = r$，另一个平面极坐标 $\theta = \omega t$ 变化规律确定，不能再作为独立的广义坐标。利用广义坐标可将原来的直角坐标表为 $\begin{cases} x = q\cos\omega t \\ y = q\sin\omega t \end{cases}$ 在独立的广义坐标下，约束方程成为恒等式。

三、约束方程不显含速度的，称为几何约束；显含速度的约束方程所描述的约束称为微分约束（或运动约束）。有的微分约束可以通过积分化成几何约束，称为可积微分约束。几何约束和可积微分约束统称为完整约束。不可积的微分约束称为非完整约束。几何约束方程 $F(\vec{r}, t) = 0$ 可以通过求导数得到线性（可积）微分约束 $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$，因此完整约束既是对质点的位矢施加的限制，也是对质点在每一位置的速度施加的限制，因而独立的广义坐标和独立的广义速度的数目一起减少。而非完整约束方程不存在对应的几何约束，因而对位矢没有限制，只是对质点在每一位置的速度施加限制，因此非完整约束不减少独立广义坐标的数目，只减少独立广义速度的数目。单面约束也不减少独立广义坐标的数目，因此也归入非完整约束这一类（参阅参考资料[1]39 页）。没有非完整约束的力学体系称为完整的力学体系，反之则称为非完整力学体系。在本课程中主要研究完整约束。

【例 4】沿直线（x 轴）作纯滚的圆轮（转角为 θ）受微分约束 $\dot{x} - R\dot{\theta} = 0$，这个约束可以通过积分化成几何约束 $x - R\theta - C = 0$，是一个可积微分约束。积分常数可由初条件确定。

【例 5】冰刀问题：冰刀在平面上运动，两端点坐标为 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2)，冰刀长度不变，有

几何约束：$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = l^2$ 中点速度沿冰刀方向，约束方程为：

$\frac{(\dot{y}_1 + \dot{y}_2)/2}{(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)/2} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \tan\varphi$ 即 $\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{x_1 - x_2} = \frac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{y_1 - y_2}$ 是一个不可积微分约束。

2．广义坐标的概念和数学表述：

直角坐标固然简单，但在某些情况下，选用适当的坐标系，往往可以简化问题。（参阅§2．1．【例 1】）.一般地，能确定地描述一个力学体系的位形的一个明确定义的有序数组，称为这个体系的一组广义坐标。直角坐标也是一种特殊的广义坐标。例如：一个包含 n 个质点的力学体系的位形可以用 $3n$ 个直角坐标，也可以用 $3n$ 个广义坐标 $(q_1, q_2, \cdots q_{3n})$ 确定地描述。广义坐标既称为坐标，当然要满足坐标的基本要求，即坐标的一组取值与质点系的位形之间有一一对应的关系。因此，直角坐标和广义坐标之间的坐标变换式

$$\begin{cases} x_1 = x_1(q_1,q_2,\cdots q_{3n},t) = \psi_1(q_1,q_2,\cdots q_{3n},t) \\ y_1 = y_1(q_1,q_2,\cdots q_{3n},t) = \psi_2(q_1,q_2,\cdots q_{3n},t) \\ \cdots\cdots \\ z_n = z_n(q_1,q_2,\cdots q_{3n},t) = \psi_{3n}(q_1,q_2,\cdots q_{3n},t) \end{cases} \text{应能解得} \begin{cases} q_1 = \varphi_1(x_1,y_1,z_1,\cdots z_n,t) \\ q_2 = \varphi_2(x_1,y_1,z_1,\cdots z_n,t) \\ \cdots\cdots \\ q_{3n} = \varphi_{3n}(x_1,y_1,z_1,\cdots z_n,t) \end{cases}$$

即要求满足$\dfrac{\partial(x_1,\cdots z_n)}{\partial(q_1,\cdots q_{3n})} \neq 0$

熟知的质点的曲线坐标如：球坐标，柱坐标，平面极坐标以至直角坐标都是广义坐标的例子。

如果n个质点组成的质点系受到k个完整约束：$f_i(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots,\vec{r}_n,t)=0, i=1,2,\cdots,k$，

此时$3n$个直角坐标之间满足k个约束方程，因而只有$s=3n-k$个直角坐标是独立的，那么$3n$个广义坐标之间也满足k个约束方程，因而也只有$s=3n-k$个是独立的。通常我们总是选取适当的坐标变换，可以使得k个广义坐标保持为常数，而同时使得k个约束方程自动成为恒等式，于是坐标变换式化为

$$\begin{cases} x_1 = \psi_1(q_1,q_2,\cdots q_s,t) \\ y_1 = \psi_2(q_1,q_2,\cdots q_s,t) \\ \cdots\cdots \\ z_n = \psi_{3n}(q_1,q_2,\cdots q_s,t) \end{cases}$$

或表为矢量式$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1,q_2,\cdots,q_s,t), i=1,2,\cdots,n$其中$q_1,q_2\cdots q_s$是$s=(3n-k)$个独立的广义坐标。有时广义坐标也可以选取得不完全独立。称为有多余坐标的情形。（参阅参考资料[8]第 12 页例 3，以及附录 A.7.第一段）一般情况下我们总是考虑独立的广义坐标；因此在不发生混淆时就简称为广义坐标。

广义坐标之所以称为“广义”，其含义：不仅可以是长度、角度，而且可以是面积、体积等；不仅可以是几何量，而且可以是其他物理量；不仅可以从各质点的坐标中选取，而且可以引入不是属于任一质点，而是属于整个质点系的物理量。广义坐标的优越性在于能简化问题，这就要求选取得适当。“适当”是指：和系统所受的约束互相协调，能使约束方程化为恒等式，便于解决我们的问题。

如果约束是稳定的，我们就可能（并不是必须）采用不显含t的坐标变换；如果约束是非稳定的，一般说，必须采用显含t的变换式 $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1,q_2\cdots q_s,t)$，$i=1,2,\cdots n$ 才能使非稳定约束化为恒等式。

在不致引起混淆的情况下，符号可以适当简化，例如：位矢简记为 $\{\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3,\cdots\vec{r}_n\} \equiv \vec{r}$；直角坐标简记为$\{x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,\cdots x_n,y_n,z_n,\} \equiv \{x_1,x_2,\cdots x_{3n}\} \equiv \{x,y,z\} \equiv x$；广义坐标简记为$\{q_1,q_2,\cdots q_s\} \equiv q$；坐标变换公式可以简记为：

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q,t) \quad \begin{cases} x_i = x_i(q,t) \\ y_i = y_i(q,t) \\ z_i = z_i(q,t) \end{cases} \; i=1,2,\cdots n \quad \text{或} \quad x_l = x_l(q,t) = \psi_l(q,t) \quad l=1,2,\cdots 3n$$

$q_\alpha=\varphi_\alpha\left(x,y,z,t\right)\quad q_\alpha=\varphi_\alpha\left(x,t\right)\quad q_\alpha=\varphi_\alpha\left(\vec r_1,\vec r_2,\cdots\vec r_n,t\right)\quad q_\alpha=\varphi_\alpha\left(\vec r,t\right)\quad \alpha=1,2,\cdots s$

由上述可见，包含 n 个质点的质点系的广义坐标就是 3n 维欧氏空间中的曲线坐标；在存在约束的情况下，独立的广义坐标，就是在某个超曲面上的曲线坐标。为了理论上分析的方便，我们有时要考虑以广义坐标为直角坐标构成的 s 维欧氏空间，称为位形空间。（configuration space）

3．完整力学体系的自由度

一般地说，如果质点系有 n 个质点，有 k 个完整约束 $f_j\left(\vec r_1,\vec r_2,\cdots,\vec r_n,t\right)=0\quad j=1,2,\cdots k$，

则应有 $\left(3n-k\right)$ 个独立的广义坐标。我们把 $s=3n-k$ 叫做这个完整力学体系的自由度。也就是说，完整力学体系的自由度数目就是独立的广义坐标的数目 $3n-k$。

4．广义速度和广义加速度的数学表述：

广义坐标对时间的导数称为广义速度。对上述坐标变换式求导数，可得速度变换式：

$\vec v_i=\dot{\vec r}_i=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\vec r_i}{\partial q_\alpha}\dot q_\alpha+\frac{\partial\vec r_i}{\partial t}\quad i=1,2,\cdots,n$ 其中 $\dot q_i$ 为广义速度。进一步可得 $\frac{\partial\dot{\vec r}_i}{\partial\dot q_\alpha}=\frac{\partial\vec r_i}{\partial q_\alpha}$

即第一个经典 *Lagrange* 关系。（注意：$\vec r_i=\vec r_i\left(q,t\right)$，$\frac{\partial\vec r_i}{\partial q_\alpha}=\frac{\partial\vec r_i\left(q,t\right)}{\partial q_\alpha}$，$\vec v_i=\dot{\vec r}_i=\dot{\vec r}_i\left(q,\dot q,t\right)$）；

在进行偏导数运算时，我们把 $q_\alpha,\dot q_\alpha$ 视作相互独立的变量。） 对上式继续求导数，可得加速度变换式：

$$\vec a_i=\dot{\vec v}_i=\ddot{\vec r}_i=\frac{d}{dt}\left[\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\vec r_i}{\partial q_\alpha}\dot q_\alpha+\frac{\partial\vec r_i}{\partial t}\right]=\sum_{\alpha=1}^{s}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec r_i}{\partial q_\alpha}\right)\dot q_\alpha+\frac{\partial\vec r_i}{\partial q_\alpha}\ddot q_\alpha\right]+\frac{d}{dt}\frac{\partial\vec r_i}{\partial t}$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\vec r_i}{\partial q_\alpha}\ddot q_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial^2\vec r_i}{\partial q_\alpha\partial q_\beta}\dot q_\alpha\dot q_\beta+2\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial^2\vec r_i}{\partial q_\alpha\partial t}\dot q_\alpha+\frac{\partial^2\vec r_i}{\partial t^2}$$ $\ddot q_\alpha$ 为广义加速度。

以上推导过程中实际上已经导出了第二个经典 *Lagrange* 关系：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\vec r_i}{\partial q_\alpha}=\frac{\partial\dot{\vec r}_i}{\partial q_\alpha}\qquad\left(\because=\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial^2\vec r_i}{\partial q_\beta\partial q_\alpha}\dot q_\beta+\frac{\partial^2\vec r_i}{\partial q_\alpha\partial t}=\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial\vec r_i}{\partial q_\beta}\dot q_\beta+\frac{\partial\vec r_i}{\partial t}\right)\right)$$

§2．3．质点系的牛顿动力学方程组

1．质点的牛顿动力学方程可以直接推广为质点系的牛顿动力学方程组。

$$m_j\ddot{\vec r}_j=\vec F_j\quad j=1,2,\cdots,n$$

其中下标 i , j 标志质点的编号。进一步，引入质点系的动量、动量矩、动能和质点系所受力矩等概念：

动量：	角动量：	动能：	力矩：
$\vec p=\sum_{j=1}^{n}m_j\dot{\vec r}_j$	$\vec L=\sum_{j=1}^{n}\vec r_j\times m_j\dot{\vec r}_j$	$T=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}m_j\dot{\vec r}_j^{\,2}$	$\vec M=\sum_{j=1}^{n}\vec r_j\times\vec F_j$

由于力可以分为内力和外力： $\vec F_j=\vec F_j^{(e)}+\vec F_j^{(i)}\quad j=1,2,\cdots,n$

其中上标$^{(e)}$标志“外”，$^{(i)}$ 标志“内”。力矩也可以作相应的划分：

$$\vec{M}_j = \vec{M}_j^{(e)} + \vec{M}_j^{(i)} \qquad \vec{M}_j^{(e)} = \vec{r}_j \times \vec{F}_j^{(e)} \qquad \vec{M}_j^{(i)} = \vec{r}_j \times \vec{F}_j^{(i)} \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$

它们的矢量和也可以作相应的划分：

$$\vec{F} = \vec{F}^{(e)} + \vec{F}^{(i)} \qquad \vec{F}^{(e)} = \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_j^{(e)} \qquad \vec{F}^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_j^{(i)}$$

$$\vec{M} = \vec{M}^{(e)} + \vec{M}^{(i)} \qquad \vec{M}^{(e)} = \sum_{j=1}^{n} \vec{r}_j \times \vec{F}_j^{(e)} \qquad \vec{M}^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} \vec{r}_j \times \vec{F}_j^{(i)}$$

由于牛顿第三定律成立，我们还可以得到内力、内力矩的矢量和分别为零：

$$\vec{F}^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_j^{(i)} = 0 \qquad \vec{M}^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} \vec{M}_j^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} \vec{r}_j \times \vec{F}_j^{(i)} = 0$$

前者证明如下： $\vec{F}_i^{(i)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \vec{F}_{ji} \qquad \vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$

其中以$\vec{F}_{ji}$表示第j个质点作用于第i个质点的力，于是得

$$\therefore \vec{F}^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \vec{F}_{ji} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \vec{F}_{ji} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \vec{F}_{ij} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(\vec{F}_{ji} + \vec{F}_{ij} \right) = 0$$

后者安排为补充作业。由此我们可以得到质点系的动力学定理

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(e)} = \vec{F}^{(e)} \\ \dfrac{d}{dt}\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i^{(e)} = \vec{M}^{(e)} \\ dT = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(i)} \right) \cdot d\vec{r}_i \end{cases}$$

以及相应的守恒定律：

$$\begin{cases} \text{合外力为零} \vec{F}^{(e)} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(e)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{质点系的动量守恒} \vec{p} = \vec{p}_0 \\ \text{合外力矩为零} \vec{M}^{(e)} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{i_i} \times \vec{F}_i^{(e)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{质点系的角动量守恒} \vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i = \vec{L}_0 \\ \text{外力和内力均有势（或不做功）} \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(i)} \right) \cdot d\vec{r}_i = -dV \Rightarrow \text{质点系的能量守恒} T + V = E \end{cases}$$

以上计算利用了公式：$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \dfrac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \right) \qquad \ddot{\vec{r}} \cdot d\vec{r} = d\left(\dfrac{1}{2} \dot{\vec{r}}^2 \right)$

以上相关诸概念的引入，相关表达式的建立，与这些物理量相关的动力学定理和守恒定律的推导都是直截了当的。重要的是：对于质点系而言，有一个特殊的点：质心。质心的

位矢 $\vec{r}_C$ 由下式定义：$m_s\vec{r}_C=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{r}_i$，其中$m_s=\sum_{i=1}^{n}m_i$ 为质点系的总质量；各质点的位矢可表为质心的位矢与相对于质心的位矢之和 $\vec{r}_i=\vec{r}_C+\vec{r}_i'$ 其中$\vec{r}_i'$满足$\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{r}_i'=0$；以质心为基点，可以把这些物理量分解为两部分：假想质量集中于质心的部分和相对于质心的部分；它们满足的动力学定理有相似的简洁形式。如下式所示：（其中 C 为质心，并以下标 C 标志与质心有关的量，以上标'标志相对于质心的量）

$$\left\{\begin{aligned}&\vec{p}=\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\vec{r}}_C+\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\vec{r}}_i'=m_s\dot{\vec{r}}_C+0\equiv\vec{p}_C+\vec{p}'\\&\vec{L}=\vec{r}_C\times m_s\dot{\vec{r}}_C+\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_{i_i}'\times m_i\dot{\vec{r}}_i'\equiv\vec{L}_C+\vec{L}'\\&T=\frac{1}{2}m_s\dot{\vec{r}}_C^{\,2}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\vec{r}}_i'^{2}\equiv T_C+T'\\&\vec{M}=\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_C+\vec{r}_i'\right)\times\left(\vec{F}_i^{(e)}+\vec{F}_i^{(i)}\right)\\&\quad=\vec{r}_C\times\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{(e)}+\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i'\times\vec{F}_i^{(e)}\\&\quad\equiv\vec{M}_C^{(e)}+\vec{M}'^{(e)}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}&\frac{d\vec{p}_C}{dt}=\sum_{i=1}^{n}m_i\ddot{\vec{r}}_C=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{(e)}=\vec{F}^{(e)}\qquad\qquad\left(\vec{p}'\equiv0\right)\\&\frac{d}{dt}\vec{L}_C=\vec{M}_C^{(e)}\qquad\qquad\qquad\qquad\frac{d}{dt}\vec{L}'=\vec{M}'^{(e)}\\&dT_C=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{(e)}\cdot d\vec{r}_C\qquad dT'=\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i^{(e)}+\vec{F}_i^{(i)}\right)\cdot d\vec{r}_i'\end{aligned}\right.$$

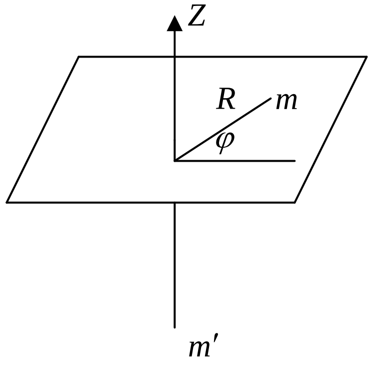
由上式可见，质点系各质点相对于质心的动量之和为零，质点系动量定理与质量集中于质心的单质点的动量定理形式相同；称为质心运动定理。

由于质点间约束和相互作用力（包括由涉及两个或多个质点的约束产生的约束力）的存在，使动力学方程组变得异常复杂，而作为整个力学体系来进行研究，可以使问题得到简化。这正是分析力学所要研究的问题。

2．有约束的情形：质点系的牛顿动力学方程组

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i=\vec{F}_i\qquad i=1,2,\cdots\cdots n$$ 共$3n$个方程，含$3n$个未知函数$\vec{r}_i(t)$，正好求解。

如果还有 k 个约束 $f_j\left(\vec{r}_1,\cdots,\vec{r}_n;\dot{\vec{r}}_1,\cdots,\dot{\vec{r}}_n;t\right)=0,\ j=1,2,\cdots,k$ 则 $\vec{F}_i$ 包含主动力（一般为已知的）和未知的约束力。这样方程多了 k 个，未知函数也增加 k 个（一个约束一般地提供一个未知的约束力）。由此可见约束越多，方程个数越多，未知函数个数也越多，问题也就越复杂。用牛顿定律解有约束的力学问题时，通常总要先消去未知的约束力和不独立的坐标。



【例 1】我们来讨论参考资料[1]第 10 页的第二个实例（参阅[1] 10 页图 1．7；33 页）

牛顿动力学方程为
$$\begin{cases}m\left(\ddot{R}-R\dot{\varphi}^2\right)=-F_T & (1)\\ m\left(R\ddot{\varphi}+2\dot{R}\dot{\varphi}\right)=0 & (2)\\ m'\ddot{z}=F_T-m'g & (3)\end{cases}$$

1 个约束方程为 $R-z-l=0$　　　　(4)　　　（参阅[1]33 页）

一般说，在没有约束的情况下，未知函数和动力学方程数目相等。有了约束，未知函数和方程都增加了：4 个未知量（3 个未知坐标函数 R,φ,z 和 1 个未知约束力 F_T），由 4 个方程（3 个动力学方程和 1 个约束方程）决定；约束的存在也使 3 个坐标 R,φ,z 不再完全独立（意即：在对动力学方程积分前，就可利用约束方程(4) 将其中之一，例如：$z=R-l$ 消去，同时使约束方程自动成为恒等式。）再将（1）（3）两式相加，可以消去未知的约束力 F_T。这样化简为含两个未知的独立广义坐标 R,φ 的两个方程（见[1]33 页（5），（6）式）。

$$\begin{cases}(m+m')\ddot{R}-mR\dot{\varphi}^2+m'g=0 & (5)\\ \quad m\left(R\ddot{\varphi}+2\dot{R}\dot{\varphi}\right)=0 & (6)\end{cases}$$

消去不独立的广义坐标，消去未知的约束力——这是解牛顿动力学方程时常用的方法，但在较复杂情况下，对质点系中每个质点写出动力学方程组是很不方便的。我们将在分析力学部分（第四及以后各章）系统地讨论寻找消去未知约束力的比较方便的方法。

§2．4．两体问题

1．两体问题通常可以得到严格的解。这里“严格”意味着两体问题能够分解为单粒子问题，并不意味着可用初等函数来表示精确的解；“通常”是因为对势能还有些限制条件。任何质点系的运动都可分解为质心运动和相对于质心的运动，而且质心运动总是相当于质量集中于质心的一个单粒子的运动；但只有在两体问题中，相对于质心的运动才可以约化为用相对矢径刻划的单粒子运动 (相对运动)。例如按两体问题处理地球围绕太阳的运动，可以分解为两个单体问题：太阳和地球组成的力学体系的质心的运动；和地球围绕太阳的转动（相对运动）。在三体问题中，相对于质心的运动无法精确分解为单粒子运动。更不用说质点更多的情况了。下面我们从坐标变换、动力学量的分解、动力学方程的变换等方面来讨论两体问题的分解。

2．坐标变换：（参阅[1]67－69 页，但符号略有不同，以与[1]14－17 页一致）

坐标系的取法和记法：以 *O-XYZ* 记固定坐标系（实验室坐标系），*C* 为质心，质心坐标系 *C-X'Y'Z'*为以 *C* 为原点，各坐标轴分别与固定坐标系对应轴平行（质心坐标系相对于固定坐标系作平动）。

质点的质量 m_i，矢径 $\vec{r}_i=\vec{r}_C+\vec{r}_i'$, $(i=1,2)$ $\vec{r}_i=\overrightarrow{OM_i}$, $\vec{r}_C=\overrightarrow{OC}\equiv\vec{R}$, $\vec{r}_i'=\overrightarrow{CM_i}$ （1）

引入质心的矢径 $\vec{r}_C$ 和相对矢径 $\vec{r}$，

$$\begin{cases}m_s\vec{r}_C=(m_1+m_2)\vec{r}_C=m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2 & (2)\\ \vec{r}=\vec{r}_1-\vec{r}_2=\vec{r}_1'-\vec{r}_2'=\overrightarrow{M_2M_1} & (3)\end{cases}$$

实际上这是从各质点的坐标$(\vec{r}_1,\ \vec{r}_2)$到广义坐标$(\vec{r}_C,\ \vec{r})$的变换。$(\vec{r}_C,\ \vec{r})$分别刻划了质心运动和相对运动（即质点 1．相对于质点 2．的运动）。利用（2）和（3）可以求得逆变换

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r}_C + \dfrac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{r}_C - \dfrac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r} \end{cases} \tag{4}$$

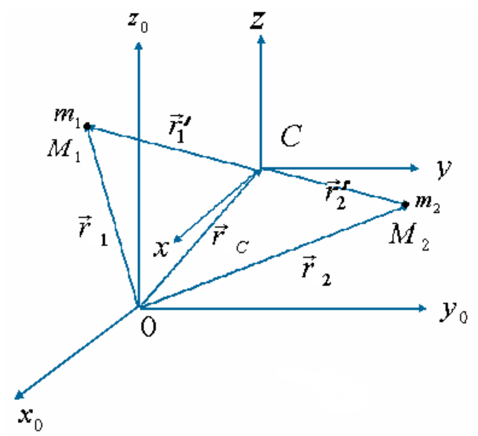
这样，两体运动就可以看成质心运动和相对运动的合成。

由(2)或由质心的定义还可以得到 $$m_1\vec{r}_1' + m_2\vec{r}_2' = 0 \tag{5}$$

由（3）、（5）还可求得各质点相对于质心的矢径：

$$\begin{cases} \vec{r}_1' = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r} \\ \vec{r}_2' = -\dfrac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r} \end{cases} \tag{6}$$

（6）式表明： M_1、C、M_2三点共线。



3．由上述坐标变换可见，两体问题分解为两个单粒子问题，还要求势能满足一定条件（即势能也可作相应的分解$V(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=V^{(e)}(\vec{r}_C)+V^{(i)}(\vec{r})$）。当外场相对很弱,以致可以忽略，总可认为此条件成立。例如微观粒子相互碰撞的问题中，外场（例如重力）比起粒子间的相互作用力（电磁力、核力等）总是弱得多。此时，质心近似作惯性运动。只需研究相对运动部分。重要的一类情况是，内力为中心势场，$V^{(i)}(\vec{r})=V(r)$；相对运动可以看成一个质量为折合质量的质点在中心势场中的运动。（以上讨论见[1]69 页）这样，两体问题确实可以化为两个单粒子问题。

4．质点系的动量、角动量和动能均可表为质心的与相对于质心的两部分之和。质心部分已经表为单粒子的物理量（参阅§2．3．或[1]§1．4．§1．5．§1．6.；在两体问题中：$m_s = m_1 + m_2$）， 相对于质心的部分，在两体问题的特殊情况下，也可以表为单粒子的物理量的形式：

$$\vec{p}'=0,\ \vec{L}'=\vec{r}\times m_r\dot{\vec{r}},\ T'=\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i'^2=\frac{1}{2}m_r\dot{\vec{r}}^2,\text{其中}m_r=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\equiv m\text{为折合质量}$$

5．两体问题的牛顿动力学方程。为简单起见，只考虑不受外力的情形。设内力

$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \equiv \vec{F} = \lambda\vec{r}$，其中 $\lambda = \lambda\left(x, y, z\right)$ 为 $\vec{r}$ 的标量函数。牛顿动力学方程为：

$$\begin{cases} m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \lambda\vec{r} = \lambda\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) = \vec{F} & (1) \\ m_2\ddot{\vec{r}}_2 = -\lambda\vec{r} = -\lambda\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) = -\vec{F} & (2) \end{cases}$$

（1）+（2）得 $m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 = m_s\ddot{\vec{r}}_C = 0$ （质心运动：匀速直线运动）。 （3）

（1）$\dfrac{m_2}{m_1 + m_2}$—（2）$\dfrac{m_1}{m_1 + m_2}$ 得 $m_r\left(\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2\right) = m_r\ddot{\vec{r}} = \lambda\vec{r} = \vec{F}$ （相对运动） （4）

两体问题的牛顿动力学方程确实可化为两个单粒子问题的动力学方程（3）（4）。

（4）$\dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\left(\text{或} -\dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\right)$ 得 $\vec{r}_i'$ 满足的方程：

$$m_r\ddot{\vec{r}}_1' = \lambda\vec{r}_1' = \frac{m_r}{m_1}\vec{F} \quad \text{或} \, m_r\ddot{\vec{r}}_2' = \lambda\vec{r}_2' = -\frac{m_r}{m_2}\vec{F} \qquad \text{（相对于质心的运动）} \qquad (5)$$

比较（4）和（5），我们发现，相对运动和相对于质心的运动所满足的动力学方程形式相似。这是因为 $m_1\vec{r}_1' = -m_2\vec{r}_2' = m_r\vec{r}$，$\vec{r}, \vec{r}_1', \vec{r}_2'$ 之间只差一常数倍数。

比较（1）（2）和（5）发现 $\vec{r}_i'$ 和 $\vec{r}_i (i = 1, 2)$ 满足相同的方程，这个结果只在没有外场（因而 $\ddot{\vec{r}}_C = 0$）的条件下成立。

比较（1）和（4），$\vec{r}_1$ 和 $\vec{r}$ 满足几乎相同的方程，差别只在于 m_1 和 m_r 不同。

如果两个粒子质量相差很大，例如：m_2 很大，且 $m_2 >> m_1$（相当于可视作 $m_2 = \infty$），则 $m_r \approx m_1$；粒子 2 近似固定，质心 C 近似与粒子 2 重合，也近似固定。此时质心系和实验室系近似相同。可取粒子 2 所在之点为固定坐标系和质心坐标系的公共原点 O，则 $\vec{r}_C \approx \vec{r}_2 \approx \vec{r}_2' \approx 0, \vec{r}_1 \approx \vec{r}_1' \approx \vec{r}, m_r \approx m_1$，比较（4）、（5）与（1）可见，相对运动（或相对于质心的运动）部分与质点 1 的运动近似相同。此时只需研究粒子 1 的运动即可（两体问题化为单质点问题）。特别，在内力为中心势场的情况下，质点 2 只是提供了一个中心势场。上述情况是物理上经常碰到的，这就是在§1．8．中讨论的中心势场中单粒子运动。

实际上，$m_2 \neq \infty$，粒子 2 不可能不动，当粒子 2 的运动不能忽略时，我们必须研究质心的运动和相对运动（或相对于质心的运动）。（参阅[1]§3．1．）

§2．5．碰撞与散射

在第一章里，我们讨论了在固定有势中心力场中单质点散射的问题。实际上，中心力场往往也是由另一个质点提供的（例如质子被重原子核散射），作为靶的质点，质量不可能为无穷大，因而不可能是精确地静止的。所以应该按两体问题处理。

外场一般很弱，无论在碰撞前后，还是在碰撞过程的短时间内，其影响均可忽略，（例

如；在重力场中的水平面内进行散射，重力的影响一般可忽略）；质心作惯性运动，质心的速度 $\vec{v}_{0C}$ 为常矢量，碰撞前后 $\vec{v}_{0C}=\vec{v}'_{0C}$，因此动量和角动量都是守恒的。碰撞前后两粒子远离时均可视作自由粒子。

弹性碰撞（弹性散射）：碰撞前后每个粒子的内部状态不变（内能不变）。质点系的能量（包括动能、势能和内能）总是守恒的，内能不变就有机械能守恒；在忽略外场条件下，碰撞前后又是处于自由粒子状态，我们说弹性散射能量守恒实际上是指碰撞前后动能相等。既然体系的初终态均为相距无穷远且作相互运动，总能量应大于无穷远处的势能，即 $E>V(\infty)$。

弹性碰撞（弹性散射）：碰撞前后每个粒子的内部状态不变（内能不变）。质点系的能量（包括动能、势能和内能）总是守恒的，内能不变就有机械能守恒；在忽略外场条件下，碰撞前后又是处于自由粒子状态，我们说弹性散射能量守恒实际上是指碰撞前后动能相等。既然体系的初终态均为相距无穷远且作相互运动，总能量应大于无穷远处的势能，即 $E>V(\infty)$。

在研究碰撞问题时，测量通常是在实验室参考系进行的，靶粒子在碰撞前是静止的；而理论上，在质心参考系（随质心平动的参考系）进行分析往往比较方便；因此我们需要讨论两个参考系之间的转换。建立实验室坐标系和质心坐标系分别固定于实验室参考系和质心参考系。实验室参考系一般可认为是惯性系，在外场很弱，可忽略的情形下，质心作匀速直线运动，质心参考系同样为惯性系。

研究碰撞问题包括两个方面：碰撞的运动学问题：只利用守恒定律决定碰撞前后物理量必须满足的关系，不涉及相互作用的细节。

碰撞的动力学问题：研究相互作用 $V(r)$ 细节对运动状态改变的影响，及其逆问题。

1．在质心系和实验室系中碰撞前后质点的速度、动量和动能

质心坐标系和实验室坐标系（参阅 1]69 页）分别固定于质心系（参阅[1]15 页；即质心参考系，和实验室系（参阅[1]68 页；即实验室参考系，一般为惯性系）。有关各物理量的表达式列在表 2－1 中。

其中：用下标 0 标记实验室系中的物理量，下标 i＝1，2 标记碰撞粒子的编号，下标 C 标记与质心相关的量；不带下标 i,C 的 v 标记相对速度；m_r 标记折合质量，m_s 标记碰撞质点质量之和。 用上标’标记碰撞后的物理量； 用带箭头的字母标记矢量，而用不带箭头的同一字母标记这个矢量的长度；$\vec{e}$ 表示沿质心系中第一个粒子碰撞后速度方向的单位矢量（利用守恒定律不能确定）；

在质心系中，由于动量的矢量和为零，且动量守恒，即可求得碰撞前后各速度和动量的表达式。（碰撞前 $m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=0$，$\vec{v}_1-\vec{v}_2=\vec{v}$；可求得 $\vec{v}_1=\dfrac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v}$，$\vec{v}_2=-\dfrac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}$ 进一步可求得动量；相仿可求得碰撞后各物理量）

进一步，在弹性散射条件下，由于能量守恒也成立，从而推得，碰撞前后粒子的速率不变，即 $v_1'=v_1$，$v_2'=v_2$，这样由上表中碰撞前后动量表达式可进一步推得 $v'=v$ 于是

$\vec{v}_1'=\dfrac{m_2}{m_1+m_2}v\vec{e}$，$\vec{v}_2'=-\dfrac{m_1}{m_1+m_2}v\vec{e}$， 即 $m_1\vec{v}_1'=m_rv\vec{e},m_2\vec{v}_2'=-m_rv\vec{e}$ 就得到上表左

栏中的各公式；并进一步可写出动量守恒和能量守恒的表达式。

把公式中各速度由质心系变换到实验室系，就得到上表右栏中的对应各公式。

表 2－1　碰撞前后质心系和实验室系各物理量的公式对照表

		质心系	实验室系
碰撞前	速度	$\vec{v}_1=\dfrac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v}$，$\vec{v}_2=-\dfrac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}$	$\vec{v}_{0i}=\vec{v}_{0C}+\vec{v}_i$，$(i=1,2)$
	相对速度	$\vec{v}=\vec{v}_1-\vec{v}_2$	$\vec{v}_0=\vec{v}_{01}-\vec{v}_{02}=\vec{v}_1-\vec{v}_2=\vec{v}$，
	动量	$m_1\vec{v}_1=m_r\vec{v}$　$m_1\vec{v}_1=-m_2\vec{v}_2$ $m_2\vec{v}_2=-m_r\vec{v}$　$m_1v_1=m_2v_2$	$\begin{cases}m_1\vec{v}_{01}=m_1\vec{v}_{0C}+m_1\vec{v}_1\\m_2\vec{v}_{02}=m_2\vec{v}_{0C}+m_2\vec{v}_2\end{cases}$
碰撞后	速度	$\vec{v}_1'=\dfrac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v}'$，$\vec{v}_2'=-\dfrac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}'$	$\vec{v}_{0i}'=\vec{v}_{0C}+\vec{v}_i'$，$(i=1,2)$
	相对速度	$\vec{v}'=\vec{v}_1'-\vec{v}_2'=v'\vec{e}$	$\vec{v}_0'=\vec{v}_{01}'-\vec{v}_{02}'=\vec{v}_1'-\vec{v}_2'=\vec{v}'=v'\vec{e}$
	动量	$m_1\vec{v}_1'=m_rv'\vec{e}$　$m_1\vec{v}_1'=-m_2\vec{v}_2'$ $m_2\vec{v}_2'=-m_rv'\vec{e}$　$m_1v_1'=m_2v_2'$	$\begin{cases}m_1\vec{v}_{01}'=m_1\vec{v}_{0C}+m_rv\vec{e}\\m_2\vec{v}_{02}'=m_2\vec{v}_{0C}-m_rv\vec{e}\end{cases}$
动量守恒		$m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=m_1\vec{v}_1'+m_2\vec{v}_2'=0$	$m_1\vec{v}_{01}+m_2\vec{v}_{02}=m_1\vec{v}_{01}'+m_2\vec{v}_{02}'=m_s\vec{v}_{0C}$
能量守恒		$\dfrac{1}{2}m_1{v_1}^2+\dfrac{1}{2}m_2{v_2}^2=\dfrac{1}{2}m_1v_1'^2+\dfrac{1}{2}m_2v_2'^2$	$\dfrac{1}{2}m_1{v_{01}}^2+\dfrac{1}{2}m_2{v_{02}}^2=\dfrac{1}{2}m_1{v_{01}'}^2+\dfrac{1}{2}m_2{v_{02}'}^2$

2．质心系和实验室系能量之间的关系

质心系中的动能$T'=\sum\limits_{i=1}^{2}\dfrac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i'^2=\dfrac{1}{2}m_r\dot{\vec{r}}^2$, 其中$m_r=\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}\equiv m$

实验室系中的动能$T=\sum\limits_{i=1}^{2}\dfrac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i^2=\dfrac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{\vec{r}}_C^2+\dfrac{1}{2}m_r\dot{\vec{r}}^2$

碰撞前，$\dot{\vec{r}}_2=0$　$\therefore\dot{\vec{r}}_C=\dfrac{m_1}{m_1+m_2}\dot{\vec{r}}_1$，$\dot{\vec{r}}=\dot{\vec{r}}_1$所以　$T=\dfrac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^2$

$$T'=\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i'^2=\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\dot{\vec{r}}_1^2=\frac{m_2}{m_1+m_2}T$$

3．质心系和实验室系偏转角之间的关系

实验室系中碰撞前质点m_2固定，$\vec{v}_{02}=0$因而$v_{01}=v$　$v_{0C}=\dfrac{m_1}{m_1+m_2}v_{01}$

在弹性散射条件下，$v' = v$，所以 $v_1' = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} v' = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} v$

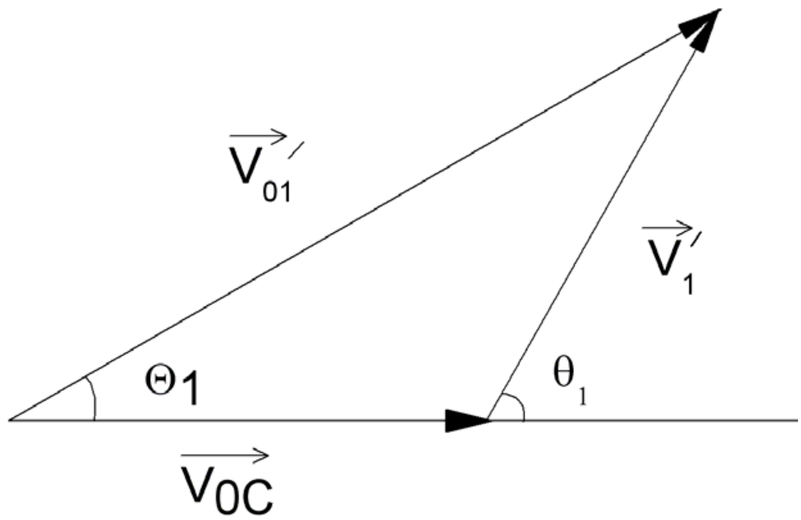
$\vec{v}_{01}' = \vec{v}_{0C} + \vec{v}_1'$ 写成分量式 $\begin{cases} v_{01}' \cos\Theta_1 = v_{0C} + v_1' \cos\theta_1 \\ v_{01}' \sin\Theta_1 = v_1' \sin\theta_1 \end{cases}$

其中 Θ_1 为实验室系质点 1 在散射前后的偏转角（散射角），θ_1 是相对位矢 $\vec{r}$ 在散射前后的偏转角（质心系中的散射角）。于是得

$$\tan\Theta_1 = \frac{v_1' \sin\theta_1}{v_{0C} + v_1' \cos\theta_1} = \frac{\sin\theta_1}{\dfrac{m_1}{m_2} + \cos\theta_1}$$

当两质点质量相等时，$m_1 = m_2$，就有 $\Theta_1 = \dfrac{1}{2}\theta_1$

当质点在 m_2 散射过程中始终保持不动时，（$m_2 \gg m_1$），有 $\Theta_1 = \theta_1$



第三章　刚体力学

§3．1．刚体运动学

刚体是大小和形状都不改变的物体；这是一种直观的描述。精确地说，刚体可以定义为一类特殊的质点系：任意两个质点间的距离都保持不变的质点系。和质点相仿，刚体也是根据研究问题的特点，从实际物体中抽象得到的一个理想化的概念，绝对的刚体是不存在的。例如：地球实际上既非质点，又非刚体。但在研究地球的公转时，一般把地球视作质点就可以了；研究地球的自转，则必须把地球视作刚体；而在研究地壳的运动时，则必须把地球视作变形体。

在质点系力学中，我们曾经把质点系的运动分解为基点的运动和相对于基点的运动；（在质点系动力学中，通常以质心为基点）刚体既然是一类特殊的质点系，当然也能够这样做。而且由于刚体内部各质点所受的约束，刚体不同于一般的质点系，其在空间的位形可以通过（固定于刚体的）基点的位置，和整个刚体的取向来确定。基点位置的变化表现为刚体的平动，而取向的变化则表现为刚体相对于基点的定点运动。刚体的一般运动可分解为以基点为代表的平动和相对于基点的定点运动两部分的叠加。

关于刚体的定点运动，欧拉（Euler）曾进行深入的研究，并证明了：刚体相对于基点所作的定点运动的任何位移都可以通过绕过该点某轴的一次转动来实现（欧拉定理）。由此推得，刚体的最一般位移可以视作刚体上任意一点（基点）的平移和绕该点的一个转动的叠加（蔡斯尔 Chasles 定理）。这个结论对于无限小的位移也是成立的，因此虽然刚体的一般的定点运动的有限位移未必是经过上述的一次转动完成的，但总是相继经过一系列上述的（绕经过该点的不同轴的）无限小转动而完成的，因而刚体的一般运动可分解为以基点为代表的平动和围绕基点所作的定点转动两部分的叠加。在本章，我们将利用上述分解的方法讨论刚体的一般运动。平动既以基点为代表，就可以按质点运动学的方法来处理；因此重点是讨论刚体的定点转动。我们已经学过的刚体的平动、定轴转动和平面平行运动，都是刚体一般运动的特殊情况。

刚体一般可以认为由无限多个质点组成，需要无限多个坐标，但是刚体内同时又有无限多个完整约束；因此并不意味着刚体有无限多个自由度。事实上，为确定刚体在空间的位形，只需要确定刚体上（或者和刚体固连的）不共线的三点的位置，也就是 9 个坐标；而三点两两之间的距离不变，有 3 个约束，因此作一般运动的刚体有 6 个独立的坐标，即有六个自由度。

刚体还可能受到其它的约束而作某些特殊形式的运动，自由度数也会相应地减少。例如作平动的刚体相当于一个质点，有三个自由度；作平面平行运动或定点转动也只有三个自由度；至于作定轴转动的刚体则只有一个自由度。

刚体还可能受到更多的约束，自由度数还会进一步减少。例如圆轮在铅直平面内沿直线作纯滚动，是平面平行运动，有三个自由度；但因为轮心约束在一直线上，还受到纯滚动这个条件的约束，只有一个自由度。一般说，由 n 个质点和 m 个刚体组成的力学体系，如果受到 k 个完整约束，则有$(3n+6m-k)$ 个自由度。刚体还可能受到非完整约束。

上面提到的刚体运动的一些特殊形式并非简单的并列关系，有些是一般和特殊的关系。有些形式之间有重叠的部分。例如：定轴转动既是平面平行运动的特殊情形，又是定点转动的特殊情形。

一般运动按上述方法分解，如果没有转动部分，那就是平动（方法是唯一的），实际上不必分解了。除了这种特殊情况以外，分解的具体方法不是唯一的。由于基点 C 的不同选择，平动部分（基点 C 的速度和轨迹的形状）和转动部分（刚体上各点相对于基点的速度）

可能很不相同。例如：如果刚体上有固定于空间的点，就把它选为基点，这样就没有了平动部分，那就是定点转动或定轴转动。但是，如果选择别的动点为基点，则刚体的运动仍可以看成是基点代表的平动和围绕基点的定点转动的叠加。

§3．2．转动公式　角速度

我们在研究定轴转动和平面平行运动时，引入了角速度来描述其转动。把这个量推广到刚体的定点转动和一般运动是不困难的，因为角速度概念本来就是瞬时的概念，现在只要考虑转动轴随时间变动（既不固定于空间，也不固定于刚体）就可以了。

为此我们首先推导刚体定点转动的转动公式(刚体上任意一点的位矢在刚体绕基点转动任意角时的位移)

设基点为O，刚体上一点转动前位矢$\vec r=\overrightarrow{OP}$，转动后位矢$\vec r'=\overrightarrow{OQ}$，

转轴(ON)方向单位基矢$\vec n$，平面$NPQ\perp ON$，转角$\Phi=\angle PNQ$，

$QT\perp NP$，T为垂足，$\vec r'=\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NT}+\overrightarrow{TQ}$　　$\vec r=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NP}$

利用　$\overrightarrow{ON}=\vec n(\vec n\cdot\vec r)$　$\overrightarrow{NP}=\left[\vec r-\vec n(\vec n\cdot\vec r)\right]$

$$\overrightarrow{NT}=\left|\overrightarrow{NQ}\right|\cos\Phi\frac{\overrightarrow{NP}}{\left|\overrightarrow{NP}\right|}=\overrightarrow{NP}\cos\Phi=\left[\vec r-\vec n(\vec n\cdot\vec r)\right]\cos\Phi$$

$$\overrightarrow{TQ}=\left|\overrightarrow{NQ}\right|\sin\Phi\frac{\vec n\times\vec r}{|\vec n\times\vec r|}=|\vec n\times\vec r'|\sin\Phi\frac{\vec n\times\vec r}{|\vec n\times\vec r'|}=(\vec n\times\vec r)\sin\Phi$$

就得到转动公式$\vec r'=\vec n(\vec n\cdot\vec r)+\left[\vec r-\vec n(\vec n\cdot\vec r)\right]\cos\Phi+(\vec n\times\vec r)\sin\Phi$

位矢的位移$\overrightarrow{PQ}=\vec r'-\vec r=\left[\vec n(\vec n\cdot\vec r)-\vec r\right](1-\cos\Phi)+(\vec n\times\vec r)\sin\Phi$

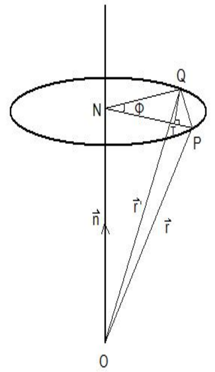
在转角为无限小时，略去无穷小角位移的二阶和更高阶小量，无穷小角位移可以用矢量来表示，事实上：

无穷小角位移引起的位矢的位移$d\vec r=\vec r'-\vec r=(\vec n\times\vec r)d\Phi=(\vec n d\Phi\times\vec r)$

$\therefore$可以定义无穷小角位移矢量　$\overrightarrow{d\Phi}\equiv\vec n d\Phi$

从而定义角速度矢量$\dfrac{\overrightarrow{d\Phi}}{dt}=\vec n\dfrac{d\Phi}{dt}\equiv\omega\vec n\equiv\vec\omega$　$\omega=\dfrac{d\Phi}{dt}$，注意：$\dfrac{\overrightarrow{d\Phi}}{dt}$不能写成$\dfrac{d\vec\Phi}{dt}$

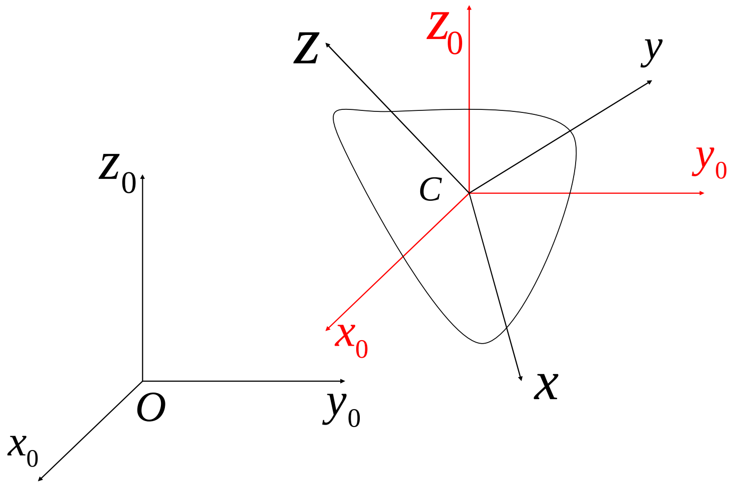
于是得到作定点转动刚体上任意点的线速度公式　$\vec v=\dfrac{d\vec r}{dt}=\vec\omega\times\vec r$



由于以上的讨论是对刚体上的任意点进行的，转角Φ对于刚体上的任意点是相同的，也就是刚体的转角，$\vec\omega$就是刚体的角速度，$\vec v$就是作定点转动的刚体上任意点的线速度矢量，或者作一般运动的刚体上任意点相对于基点的线速度矢量；这个公式和普通物理中学过的，作定轴转动的刚体上任一点线速度公式是相同的，只是在一般情况下转动轴可能随时间而变动。

以上论述可以认为是用数学语言表述了：角速度或无限小角位移是矢量这一事实。而上述利用矢量的描述不适用于有限大角位移的情形，这和我们已经知道的有限转动不是矢量的论断一致。关于对此问题的进一步讨论，可参阅附录 A．3，在那里我们将从坐标变换下的变换规则的角度来讨论角速度是矢量这个问题。

§3．3．描述刚体运动的坐标系　欧拉角　刚体的欧拉运动学方程



可以建立两个坐标系：固定在空间的坐标系$Ox_0y_0z_0$（坐标基矢为$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$）；和固定在刚体上的坐标系$Cxyz$（坐标基矢为$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$，随刚体一起运动)。这样我们就可以用坐标系$Cxyz$相对于坐标系$Ox_0y_0z_0$的运动来描述刚体在空间的运动，$C$点为基点。在运动学中，$Ox_0y_0z_0$和$Cxyz$这两个坐标系的选择有很大的任意性。但是，我们可以选择在$t=0$时，两个坐标系互相重合；如果刚体在运动过程中有固定在空间的点（定点转动或定轴转动)，我们可把两个坐标系的原点都选在这一点，即C与O重合；如果刚体作平面平行运动，我们可以使两个坐标系各有一个坐标平面选得与刚体的代表平面平行；上面这些选法，一般说来都是比较方便的。在动力学中，一般选取质心为基点是比较方便的。

有时还可以建立介乎两者之间的另一个坐标系$Cx_0y_0z_0$。C固定于刚体，但坐标系$Cx_0y_0z_0$一般并不固定于刚体，而是相对于坐标系$Ox_0y_0z_0$作平动。刚体的一般运动可以表示为坐标系$Cx_0y_0z_0$相对于坐标系$Ox_0y_0z_0$的运动（平动）和坐标系$Cxyz$相对于坐标系$Cx_0y_0z_0$的运动（定点转动）的叠加（平面平行运动总可以分解为平动和定轴转动的叠加，是其特例)。

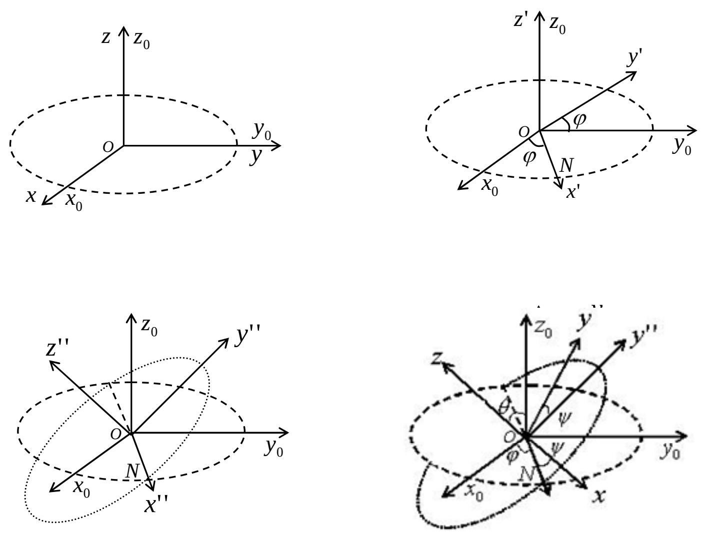
值得注意的是，虽然引入了多个坐标系，目前我们是在空间这一个参考系中讨论问题的。这是在§0．4．中指出的“坐标系可以不固定于参考系”的一个很好的实例。但是，由于固定于某一参考系的坐标系可以代表这个参考系，在§3．5．里，我们将通过不同坐标系间的变换公式来研究不同参考系间的变换公式。

我们可以这样来选取六个广义坐标：用基点 C 在空间坐标系$Ox_0y_0z_0$的三个坐标以描

述刚体在空间的位置；用三个角刻划坐标系 $Cxyz$ 相对于坐标系 $Cx_0y_0z_0$ 的取向以描述刚体在空间的取向。前者是我们已经熟知的，后者有多种方法，最常用的方法是欧拉角。具体说来就是：（为叙述方便，我们定义欧拉角时假定 C 与 O 重合）

以 θ 记从坐标轴 Oz_0 到 Oz 的转角，$0 \le \theta \le \pi$，称为章动角。当 $\theta \ne 0, \pi$，坐标平面 x_0y_0 与 xy 有唯一确定的交线，称为节线，按转角 θ 的转轴方向确定节线的正方向 ON；在坐标平面 x_0y_0 内围绕 Oz_0 从坐标轴 Ox_0 到 ON 的转角记为 φ，$0 \le \varphi < 2\pi$，称为进动角；在坐标平面 xy 内围绕 Oz 从 ON 到坐标轴 Ox 的转角记为 ψ，$0 \le \psi < 2\pi$，称为自转角。这三个角 $\{\varphi, \theta, \psi\}$ 合称为欧拉角。

我们也可以利用把坐标系 $Ox_0y_0z_0$ 转动到坐标系 $Oxyz$ 的过程给出了欧拉角的定义：



按以下步骤转动（把这种转动方法称为方法一，见上图）：

(1)坐标系 $Oxyz$ 绕 Oz_0 轴转过一个角度 φ. 进动角

Ox 轴转到 ON 的位置。

（2）把经过了转动（1）的坐标系 $Oxyz$ 绕轴 ON 转过一个角度 θ； 章动角

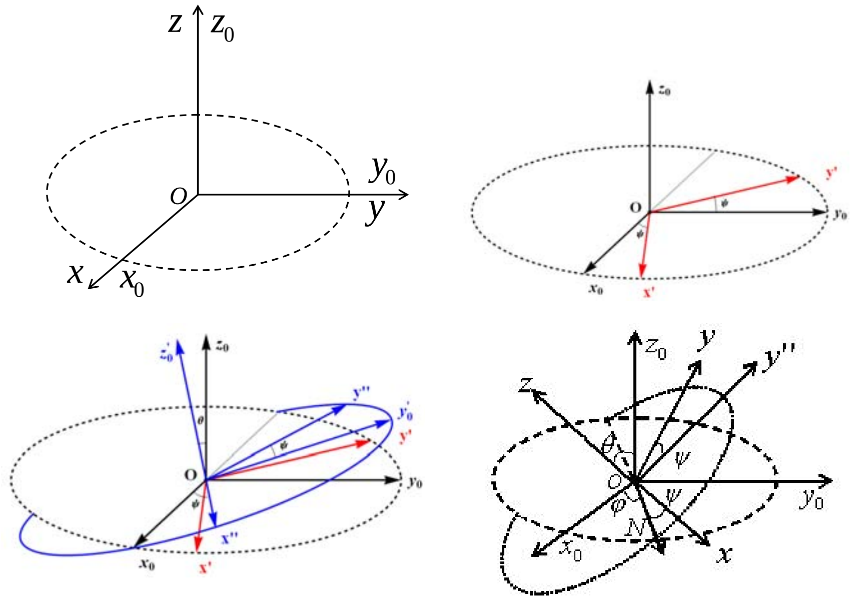
（3）把经过了转动（1）和（2）的坐标系 $Oxyz$ 绕轴 Oz 转过一个角度 ψ； 自转角

也可按另一种步骤转动（把这种转动方法称为方法二，见下页图）：

(1)坐标系 $Oxyz$ 绕 Oz_0 轴转过一个角度 ψ； 自转角

（2）把经过了转动（1）的坐标系 $Oxyz$ 绕 Ox_0 轴转过一个角度 θ；　　　　章动角

（3）把经过了转动（1）和（2）的坐标系 $Oxyz$ 绕 Oz_0 轴转过一个角度 φ.　　　进动角



这两种方法是等价的，但方法二的三步转动的转轴均为同一坐标系 $Ox_0y_0z_0$ 的坐标轴，写出表示转动的矩阵比较方便。

附注：目前使用的欧拉角，定义方法也不唯一。例如章动角也可绕 Oy_0 轴转动产生。这些定义之间并无本质上的区别，当然有关的公式会有所不同。

我们既已引入六个广义坐标以描述刚体的位形，自然就可以用广义速度来描述刚体的运动。这样就遇到一个问题，就是：如何用广义速度来表达角速度矢量？

按照§3．3．中的方法一，如果我们取 $\vec{\omega}=\vec{\dot{\psi}}+\vec{\dot{\theta}}+\vec{\dot{\varphi}}$，

$$\vec{\dot{\psi}}=\dot{\psi}\vec{k}=\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi\vec{e}_1-\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi\vec{e}_2+\dot{\psi}\cos\theta\vec{e}_3$$

$$\vec{\dot{\theta}}=\dot{\theta}\frac{\overrightarrow{ON}}{ON}=\dot{\theta}\cos\varphi\vec{e}_1+\dot{\theta}\sin\varphi\vec{e}_2=\dot{\theta}\cos\psi\vec{i}-\dot{\theta}\sin\psi\vec{j}$$

$$\vec{\dot{\varphi}}=\dot{\varphi}\vec{e}_3=\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi\vec{i}+\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi\vec{j}+\dot{\varphi}\cos\theta\vec{k}$$

$$\begin{cases}\vec{\dot{\psi}}=\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi\vec{e}_1-\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi\vec{e}_2+\dot{\psi}\cos\theta\vec{e}_3\\ \vec{\dot{\theta}}=\dot{\theta}\cos\varphi\vec{e}_1+\dot{\theta}\sin\varphi\vec{e}_2\\ \vec{\dot{\varphi}}=\dot{\varphi}\vec{e}_3\end{cases}\qquad\begin{cases}\vec{\dot{\varphi}}=\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi\vec{i}+\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi\vec{j}+\dot{\varphi}\cos\theta\vec{k}\\ \vec{\dot{\theta}}=\dot{\theta}\cos\psi\vec{i}-\dot{\theta}\sin\psi\vec{j}\\ \vec{\dot{\psi}}=\dot{\psi}\vec{k}\end{cases}$$

从而可以得到 $\vec{\omega}$ 在固定于空间的坐标系（基矢 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$）中的分量：

$$\begin{cases} \omega_{0x} = \omega_1 = \dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi \\ \omega_{0y} = \omega_2 = \dot{\theta}\sin\varphi - \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \\ \omega_{0z} = \omega_3 = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta \end{cases}$$

和 $\vec{\omega}$ 在固定于刚体的坐标系（基矢 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ ）中的分量：（见[1]105 页）

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ \omega_y = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \\ \omega_z = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{cases}$$

这就是刚体转动的欧拉运动学方程。

在定轴转动和平面平行运动的情况下，有 $\omega = \dot{\varphi}$，角速度是某个转角的导数，ω 是对应于广义坐标 φ 的广义速度。这是我们所熟知的。但是在一般情况下，由欧拉运动学方程给出的角速度不能成为某个广义坐标的导数，因此它不能成为广义速度。

§3．4．刚体任一点的线速度和线加速度

我们在§3．1．中已经得到，作定点转动（包括定轴转动作为特殊情况））的刚体上任一点 P 的线速度是 $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{r}$ ，其中 $\vec{r} = \overrightarrow{CP}$，$C$ 是定点（基点），$\vec{\omega}$ 是刚体的角速度。但是对于作一般运动的刚体来说，一般找不到固定于空间的基点，因此刚体上任一点 P 相对于空间的线速度的表达式，还应考虑基点 C 的运动，即：$\vec{v} = \vec{v}_C + \vec{\omega}\times\vec{r}$ ，其中 $\vec{v}_C$ 是基点 C 的速度。这个公式也可以从矢径的一般表达式 $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} = \vec{r}_C + \vec{r}$ 出发，通过微分得到：$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}_0}{dt} = \dfrac{d\vec{r}_C}{dt} + \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_C + \vec{\omega}\times\vec{r}$；这个公式是普遍成立的，而且基点 C 的选择是任意的。这样自然出现一个问题：基点的选择会不会影响对刚体运动的描述呢？

对于平动的刚体，由于 $\vec{\omega} = 0$，相对于基点的线速度为零，线速度公式化简为 $\vec{v} = \vec{v}_C$；任一点的线速度是相同的，因此可以以刚体上任一点的运动情况代表作平动的刚体的运动情况。基点选得不同对刚体运动的描述没有影响。在平动的刚体，不改变在空间的取向，也就是没有转动。

至于在一般情况下，我们选择不同的基点 C ，平动部分的速度可能不同，从而 C 点的轨迹的形状也各不相同；而转动部分的描述也可因基点不同而不同，但刚体上各点相对于空间的速度 $\vec{v}$ 理应是相同的，由此可证得角速度矢量 $\vec{\omega}$ 是唯一确定的，即基点的选择不影响角速度，（参阅[1]§4．2．107—108 页）也就是说角速度矢量可以在空间平行移动。

对速度公式 $\vec{v} = \vec{v}_C + \vec{\omega}\times\vec{r}$ ，再微分一次，得到加速度公式（参阅[1]108－109 页。）

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_C}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{a}_C + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)$$

其中 $\dot{\vec{\omega}} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \dfrac{d\omega}{dt}\vec{n} + \omega\dfrac{d\vec{n}}{dt} \equiv \vec{\beta}$ 为角加速度矢量

以上采用的方法，基点 C 是固定在刚体上的，因此称为固定基点法。

另一种方法是瞬时转轴法（参阅[1]108—109 页）。对于平面平行运动，利用瞬时转心（瞬

时转动中心）；对于一般运动，则利用瞬时转轴。把基点C选在瞬时转心或瞬时转轴上，由于在该瞬时，基点C的速度为零，$\vec{v}_C=0$刚体上任一点P的速度$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$，$\vec{r}=\overrightarrow{CP}$注意，这里的基点$C$既不固定于刚体，又不固定于空间；只是刚体上在某一瞬时成为瞬时转心的那个点在该瞬时相对于空间的速度为零。但如果利用瞬时转轴法求得的速度公式，进一步求加速度，由于基点不固定，求导数时应特别小心。

上面这段话中，涉及瞬时转心的运动和速度的不同含义。关于这个问题的进一步讨论可参阅附录Ａ．４．作平面平行运动的刚体对瞬时转动中心的角动量定理。

我们刚得到的公式$\dfrac{d\vec{r}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{r}$，不仅表达了以角速度$\vec{\omega}$转动的刚体上任一点$P$相对于基点$C$的线速度（其中$\vec{r}=\overrightarrow{CP}$，基点$C$固定于空间），而且还可推广到（以$\vec{\omega}$转动的）常模矢量$\vec{A}$（长度不变的矢量。这里，$\vec{A}$的始点不限于在固定点，$\vec{A}$的量纲也不限于长度）：

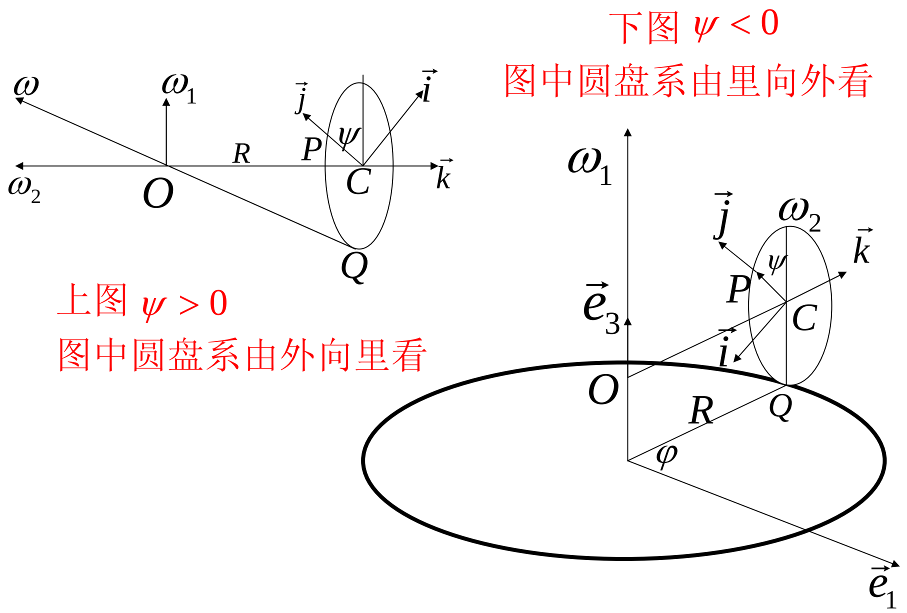
$\dfrac{d\vec{A}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{A}$　其中$\vec{\omega}$为常模矢量$\vec{A}$的瞬时角速度。上式也可表为算符关系：$\dfrac{d}{dt}=\vec{\omega}\times$（作用于以$\vec{\omega}$转动的常模矢量时成立）例如：$\dfrac{d\vec{i}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{i}$，$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$为坐标系$Cxyz$的基矢量。

【例 1】（参阅[1]110 页【例 2】）半径为l的圆盘垂直于地面作纯滚动，圆盘中心C以速率$v_C=\omega_1 R$沿着半径为R的圆周运动，求圆盘边缘上任一点P的速度。

我们取固定于空间的坐标系$Ox_0y_0z_0$：$\vec{e}_3$垂直地面向上，水平面上相应的极坐标的极角为φ；　固定于刚体的坐标系可以取坐标系$Cxyz$，也可以取坐标系$Oxyz$；两者的差别只是原点不同，坐标轴是对应互相平行的，基矢$\vec{k}\,//\,\overrightarrow{OC}$同向，$\vec{j}\,//\,\overrightarrow{CP}$同向，圆盘面上竖直向上方向到$\vec{j}$的转角为$\psi$。由于要进行矢量积的运算，坐标系的基矢必须按右手法则设定。由上面所取的坐标系，若圆盘作圆周运动为逆时针（围绕$\vec{e}_3$），则圆盘自转为顺时针（围绕$\vec{k}$），所以$\dot{\varphi}$和$\dot{\psi}$异号。我们记圆盘的自转角速度为ω_2，则可取$\dot{\psi}=-\omega_2<0$和$\dot{\varphi}=+\omega_1>0$，纯滚约束表为$R\dot{\varphi}=-l\dot{\psi}=v_C$

为了确定，设$t=0$时，　C对应于$\varphi=0,P$对应于$\psi=0,$即P点在最高处。于是我们得$\varphi=\int_0^t\omega_1dt,\psi=-\int_0^t\omega_2dt$纯滚约束可表为$R\varphi=-l\psi$，利用这些关系，我们可得：

$$\begin{cases} \vec{i} = \cos\psi\left(-\sin\varphi\vec{e}_1 + \cos\varphi\vec{e}_2\right) + \sin\psi\vec{e}_3 \\ \vec{j} = -\sin\psi\left(-\sin\varphi\vec{e}_1 + \cos\varphi\vec{e}_2\right) + \cos\psi\vec{e}_3 \\ \vec{k} = \cos\varphi\vec{e}_1 + \sin\varphi\vec{e}_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{d\vec{i}}{dt} = -\omega_1\cos\psi\vec{k} - \omega_2\vec{j} \\ \dfrac{d\vec{j}}{dt} = \omega_1\sin\psi\vec{k} + \omega_2\vec{i} \\ \dfrac{d\vec{k}}{dt} = \omega_1\left(\cos\psi\vec{i} - \sin\psi\vec{j}\right) \end{cases}$$



写出 P 点的矢径，$\vec{r}_P = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} = R\vec{k} + l\vec{j}$，以下可采用不同方法：

方法一：O 点既固定于空间，又固定于刚体，我们可按绕 O 点的定点转动来处理，$\vec{v}_P = \vec{\omega}\times\vec{r}_P$

先求角速度矢量 $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \omega_1\vec{e}_3 - \omega_2\vec{k} = \omega_1\left(\sin\psi\vec{i} + \cos\psi\vec{j}\right) - \dfrac{R}{l}\omega_1\vec{k}$ 代入速度的公式得：$\vec{v}_P = \vec{\omega}\times\left(R\vec{k} + l\vec{j}\right) = R\omega_1\left(1+\cos\psi\right)\vec{i} - R\omega_1\sin\psi\vec{j} + l\omega_1\sin\psi\vec{k}$ （参阅[1]）

方法二：我们也可按 C 点的平动加上绕 C 点的定点转动来处理。

$$\vec{v}_P = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OC} + \vec{\omega}\times\overrightarrow{CP} = R\dot{\vec{k}} + l\vec{\omega}\times\vec{j}$$

方法三：直接由 $\vec{r}_P = R\vec{k} + l\vec{j}$ 求导数即得，（此法避免了求角速度矢量，也不必考虑刚体运动的分解）$\vec{v}_P = \dfrac{d\vec{r}_P}{dt} = R\omega_1\left(1+\cos\psi\right)\vec{i} - R\omega_1\sin\psi\vec{j} + l\omega_1\sin\psi\vec{k}$

注意：1．作为求导数运算的出发点的表达式，必须是在一段时间间隔内成立的函数式，而不能是仅在某一瞬时成立的表达式，或某一时刻的函数值。

注意：2．本题中 ω_1, ω_2, v_c 未说明是常量还是变量，应按变量这种一般情况进行处理。其实，

速度的表达式，无论ω_1, ω_2, v_c是常量还是变量，具有相同的形式。如果要进一步求加速度，这两种情况的表达式就很不相同，ω_1, ω_2, v_c是常量时（匀速转动），表达式要简单得多。

注意：3．本题还可以引入另一种坐标系$Cx'y'z'$，其基矢$\vec{k}'=\vec{k}, \vec{j}'=\vec{e}_3, \vec{i}'$由右手法则确定$\vec{i}'=\vec{j}'\times\vec{k}'$为水平。可自行研究利用这个坐标系的解法。并研究这三个坐标系之间的关系。

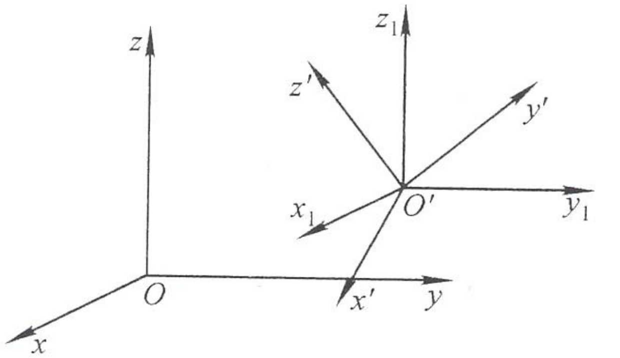
注意：4．方法一、方法二中都涉及定点转动，比较两种情况下基点的运动，瞬时转动轴和定点转动的角速度。

§3．5．不同参考系的速度加速度间的关系（参阅[1]§5．1．）

1．几点说明：

（1）本节在运动学的范围里讨论不同参考系的速度、加速度之间的变换关系。各个参考系是相互平等的，因此暂时不必区分惯性系和非惯性系。

（2）由于固定于某一参考系的坐标系可以代表这个参考系，我们可以利用物理量在不同坐标系之间的变换关系，导出该物理量在不同参考系之间的变换关系。但是我们得到的用矢量表述的不同参考系之间的变换关系是不依赖坐标系的。



（3）一个刚体或某些相对静止的刚体总可以作为某个参考系的参考物。刚体的最一般的运动总可视为基点的平动和围绕基点的转动两部分的叠加，因此两个参考系之间的最一般的相对运动也总可视为基点的平动和围绕基点的转动两部分的叠加。研究刚体的运动时，我们引入了固定于地球和刚体的两个不同的坐标系 *Oxyz* 和 *O'x'y'z'*，（基矢分别为$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$和$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$）以及随刚体作平动的坐标系 $O'x_1y_1z_1$，（坐标系 $O'x_1y_1z_1$ 和坐标系 *Oxyz* 的对应坐标轴互相平行。这里与§3．2．中的符号稍有不同）。现在我们通过坐标系 *Oxyz* 和 *O'x'y'z'*之间的变换式来讨论这两个参考系 *S* 和 *S* 之间的变换式。

（4）要分清某一物理量在不同参考系之间的变换关系和这一物理量在同一参考系中不同坐标系中的表达式之间的变换关系。例如：一质点在参考系S, S'中的速度分别为$\vec{v}, \vec{v}'$，一般并不相等，即$\vec{v}\neq\vec{v}'$，其间变换关系是本节要讨论的问题。而在S中可建立不同的坐标系，设基矢分别为：$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$和$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$，则同一速度$\vec{v}$可分别表为$v_1\vec{e}_1+v_2\vec{e}_2+v_3\vec{e}_3$和$v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}$，其中各对应分量一般不相等，即$v_1\neq v_x,\cdots$等等，但是有：$\vec{v}=v_1\vec{e}_1+v_2\vec{e}_2+v_3\vec{e}_3=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}$，诸分量之间的变换关系由坐标系之间的变换关系决

定。（对于加速度可以同样进行讨论。）

（5）对同一参考系中的物理量（矢量）可按矢量相加法则进行相加。例如：$\vec{v}=\vec{v}_{\parallel}+\vec{v}_{\perp}$，$\vec{a}=\vec{a}_t+\vec{a}_n$；但涉及不同参考系的物理量就不能如此简单地处理。例如：参考系S'的基点C以速度$\vec{v}_0$相对于参考系S运动，一质点以速度$\vec{v}'$相对于参考系S'运动，则此质点相对于参考系S的运动速度$\vec{v}$一般不等于$\vec{v}_0+\vec{v}'$；对于加速度也可以相仿进行讨论，只是情况更加复杂。

2．考虑任意一动点 *P*,在参考系 *S* 和 *S'* (*S'*相对于 *S* 的运动：随着基点 *O'*平动，围绕 *O'* 以角速度$\vec{\omega}$转动。)中的位矢分别为$\vec{r}=\overrightarrow{OP}$和$\vec{r}'=\overrightarrow{O'P}$,记$\vec{r}_0=\overrightarrow{OO'}$；它们之间的关系为

$$\vec{r}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P}=\vec{r}_0+\vec{r}'$$

P 点在参考系 S 中的速度 $\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=\dfrac{d}{dt}\left(x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3\right)=\dot{x}\vec{e}_1+\dot{y}\vec{e}_2+\dot{z}\vec{e}_3$

P 点在参考系 S’中的速度$\vec{v}'=\dfrac{\tilde{d}\vec{r}'}{dt}=\dfrac{\tilde{d}}{dt}\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}\right)=\dot{x}'\vec{i}+\dot{y}'\vec{j}+\dot{z}'\vec{k}$

这里我们用两个不同的符号来标记不同参考系中矢量对时间求导数的运算。我们有：

$$\frac{d\vec{e}_1}{dt}=\frac{d\vec{e}_2}{dt}=\frac{d\vec{e}_3}{dt}=0\quad \frac{\tilde{d}\vec{i}}{dt}=\frac{\tilde{d}\vec{j}}{dt}=\frac{\tilde{d}\vec{k}}{dt}=0\quad \text{但是}\quad \frac{d\vec{i}}{dt}=\vec{\omega}_0\times\vec{i}\quad \frac{d\vec{j}}{dt}=\vec{\omega}_0\times\vec{j}\quad \frac{d\vec{k}}{dt}=\vec{\omega}_0\times\vec{k}$$

其中$\vec{\omega}_0$为参考系 *S'*相对于参考系 *S* 的角速度，下标 o 表示参考系 *S* 中的量，并不表示常量。

如果 *P* 相对于 *S'*静止，则$\dfrac{d\vec{r}'}{dt}=\vec{\omega}_0\times\vec{r}'$，刚体上任意一点的速度、加速度公式就可以移植过来而得到两个参考系之间的速度、加速度的变换公式。如果 *P* 相对于 *S'*不静止，则

$$\vec{r}'=x'(t)\vec{i}+y'(t)\vec{j}+z'(t)\vec{k}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{r}'}{dt}&=\dot{x}'\vec{i}+\dot{y}'\vec{j}+\dot{z}'\vec{k}+x'\dot{\vec{i}}+y'\dot{\vec{j}}+z'\dot{\vec{k}}=\dot{x}'\vec{i}+\dot{y}'\vec{j}+\dot{z}'\vec{k}+x'\vec{\omega}_0\times\vec{i}+y'\vec{\omega}_0\times\vec{j}+z'\vec{\omega}_0\times\vec{k}\\&=\frac{\tilde{d}\vec{r}'}{dt}+\vec{\omega}_0\times\vec{r}'=\vec{v}'+\vec{\omega}_0\times\vec{r}'\end{aligned}$$

仍以上标圆点记参考系*S*中对时间的导数$\dot{\vec{i}}=\dfrac{d\vec{i}}{dt}=\vec{\omega}_0\times\vec{i}$等等。

上式也可表为算符关系：$\dfrac{d}{dt}=\dfrac{\tilde{d}}{dt}+\vec{\omega}_0\times$，（以上推导借助坐标系，只是为了方便。结论是不依赖于坐标系的。)从而得到 *P* 点在参考系 *S* 中的速度

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\vec{r}_0}{dt}+\frac{d\vec{r}'}{dt}=\vec{v}+\frac{\tilde{d}\vec{r}'}{dt}+\vec{\omega}_0\times\vec{r}'=\vec{v}_0+\vec{v}'+\vec{\omega}_0\times\vec{r}'$$

其中：$\vec{v}$ 为 S 参考系中的速度，$\vec{v}'$ 为相对速度（相对于参考系 *S’* 的速度）；$\vec{v}_t=\vec{v}_0+\vec{\omega}_0\times\vec{r}'$ 为牵连速度（前项由平动引起，后项由转动引起）。这就是两个参考系之间的速度变换公式。再求一次导数，就得到加速度的变换公式：

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}_0}{dt}+\frac{d\vec{v}'}{dt}+\frac{d\vec{\omega}_0}{dt}\times\vec{r}'+\vec{\omega}_0\times\frac{d\vec{r}'}{dt}\qquad \vec{a}_0\equiv\frac{d\vec{v}_0}{dt}$$

$$=\vec{a}_0+\frac{\tilde{d}\vec{v}'}{dt}+\vec{\omega}_0\times\vec{v}'+\dot{\vec{\omega}}_0\times\vec{r}'+\vec{\omega}_0\times\left(\frac{\tilde{d}\vec{r}'}{dt}+\vec{\omega}_0\times\vec{r}'\right)$$

$$=\vec{a}_0+\vec{a}'+\dot{\vec{\omega}}_0\times\vec{r}'+\vec{\omega}_0\times\left(\vec{\omega}_0\times\vec{r}'\right)+2\vec{\omega}_0\times\vec{v}' \tag{2}$$

$$=\vec{a}'+\vec{a}_t+\vec{a}_{Cor.}$$

其中：$\vec{a}$ 为相对于参考系 S 的加速度；$\vec{a}'$ 为相对加速度（相对于参考系 S’的加速度）；

$\vec{a}_t=\vec{a}_0+\dot{\vec{\omega}}_0\times\vec{r}'+\vec{\omega}_0\times\left(\vec{\omega}_0\times\vec{r}'\right)$ 为牵连加速度(首项由平动引起,后两项由转动引起)；

$\vec{a}_{Cor.}=2\vec{\omega}_0\times\vec{v}'$ 为科里奥利加速度(由转动和相对运动引起)。

3．算符公式 $\frac{d}{dt}=\frac{\tilde{d}}{dt}+\vec{\omega}_0\times$ 给出了随时间变化的矢量在不同参考系（S' 以 $\vec{\omega}_0$ 相对于 *S* 转动）中对时间的导数之间的关系，例如：$\frac{\tilde{d}\vec{i}}{dt}=0$，$\frac{d\vec{i}}{dt}=\vec{\omega}_0\times\vec{i}$，相仿有 $\frac{d\vec{j}}{dt}=\vec{\omega}_0\times\vec{j}$，$\frac{d\vec{k}}{dt}=\vec{\omega}_0\times\vec{k}$；特别有 $\frac{d\vec{\omega}_0}{dt}=\frac{\tilde{d}\vec{\omega}_0}{dt}$，即参考系 *S’*相对于参考系 *S* 的角速度的两种导数没有区别。此外，不涉及转动的量，例如在通过对所取的基点 *O’*的位置矢量求导数，以求得基点的速度和加速度时，两种导数没有区别。

4．考虑几种特殊情况：

如果 $\left(x',y',z'\right)$ 不随时间变化，上述公式就归结为刚体上一点的速度加速度公式。

只有平动而无转动的情形，因有 $\vec{\omega}_0=0$；以上各式可大为简化。

恒角速度转动的参考系 S'：因为 *O’*与 *O* 重合 $\vec{r}_0=0,\therefore\vec{r}=\vec{r}',\ \vec{v}_0=0,\ \vec{a}_0=0,$ 而且

$$\frac{d\vec{\omega}_0}{dt}=0,\quad \vec{\omega}_0=\omega_0\vec{e},\quad \vec{\omega}_0\times\left(\vec{\omega}_0\times\vec{r}\right)=-\omega_0^2\vec{R}\text{，，}$$

其中：$\vec{R}=\vec{r}-\left(\vec{e}\cdot\vec{r}\right)\vec{e},\quad \vec{e}=\vec{\omega}_0/\omega_0,$

$$\therefore\vec{r}=\vec{r}',\quad \vec{v}=\vec{v}'+\vec{\omega}_0\times\vec{r}',\quad \vec{a}=\vec{a}'-\omega_0^2\vec{R}+2\vec{\omega}_0\times\vec{v}'$$ ，（参阅[1]152 页）

§3．6．刚体动力学的基本概念

1．刚体的动力学方程和动力学三大定理

刚体是一种特殊的质点系，质点系的动力学方程和动力学三大定理也适用于刚体，所得的刚体动力学三大定理就是（参阅 [1]111 页）：

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\sum_i m_i\ddot{\vec{r}}_i=\sum_i \vec{F}_i^{(e)}+\sum_i \vec{F}_i^{(i)}=\vec{F}^{(e)} \qquad (4.1)$$

$$\frac{d}{dt}\vec{L}=\sum_i \vec{r}_i\times m_i\ddot{\vec{r}}_i=\sum_i \vec{r}_i\times\vec{F}_i^{(e)}=\vec{M}^{(e)} \qquad (4.2)$$

$$dT=\sum_i\left(\vec{F}_i^{(e)}+\vec{F}_i^{(i)}\right)\cdot d\vec{r}_i=\sum_i \vec{F}_i^{(e)}\cdot d\vec{r}_i \qquad (4.3)$$

质点系动力学的三大定理有七个方程，对一般的质点系，动力学三大定理一般只能提供部分信息（关于系统的总动量，总角动量和总动能的情况）。由于刚体的自由度是 6，取其中六个方程就足以决定刚体的运动了。

和质点组的动力学定理相比较，动能定理(4. 3)式已经得到化简；这是由于刚体内部约束的特点(任意两质点间的距离保持不变)，内力所作的功为零，证明如下：

$\vec{F}_i^{(i)}=\sum_{j\neq i}\vec{F}_{ji}$， $\vec{F}_{ji}$ 是质点 j 作用于质点 i 的力，沿这两个质点的连线，满足 $\vec{F}_{ji}=-\vec{F}_{ij}$

因而可表为 $\vec{F}_{ji}=\lambda_{ji}\left(\vec{r}_i-\vec{r}_j\right)$，$\left(\lambda_{ji}=\lambda_{ij}\right)$；于是可计算成对内力所做的元功：

$$\begin{aligned}\vec{F}_{ji}\cdot d\vec{r}_i+\vec{F}_{ij}\cdot d\vec{r}_j&=\vec{F}_{ji}\cdot d\vec{r}_i-\vec{F}_{ji}\cdot d\vec{r}_j=\vec{F}_{ji}\cdot\left(d\vec{r}_i-d\vec{r}_j\right)=\vec{F}_{ji}\cdot d\left(\vec{r}_i-\vec{r}_j\right)\\&=\lambda_{ji}\left(\vec{r}_i-\vec{r}_j\right)\cdot d\left(\vec{r}_i-\vec{r}_j\right)=\frac{1}{2}\lambda_{ji}d\left[\left(\vec{r}_i-\vec{r}_j\right)^2\right]=0 \qquad \because\left(\vec{r}_i-\vec{r}_j\right)^2=const\end{aligned}$$

$$\therefore\sum_i\vec{F}_i^{(i)}\cdot d\vec{r}_i=\sum_i\sum_{j\neq i}\vec{F}_{ji}\cdot d\vec{r}_i=\frac{1}{2}\left[\sum_{\substack{i,j\\(j\neq i)}}\vec{F}_{ji}\cdot d\vec{r}_i+\sum_{\substack{j,i\\(i\neq j)}}\vec{F}_{ij}\cdot d\vec{r}_j\right]=\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\(i\neq j)}}(\vec{F}_{ji}\cdot d\vec{r}_i+\vec{F}_{ij}\cdot d\vec{r}_j)=0$$

于是证得：**刚体内力所作功的代数和为零。**

在动力学中，通常我们从惯性参考系出发来讨论，即我们假定坐标系 $O\,x_0y_0z_0$ 是惯性参考系中的固定坐标系。由于质心的特殊地位，在分解刚体的运动时，通常以质心为基点，即把固连于刚体的坐标系 $C\,x\,y\,z$ 的原点选在质心，使公式得到简化。这样，刚体的平动部分由质心代表，满足质心运动定理；刚体运动的转动部分就是相对于质心的运动，也就是在质心参考系（参阅[1]15 页）中刚体绕质心的定点转动，满足欧拉动力学方程（见下节）。

如果在我们讨论的动力学问题中，刚体有一个固定点，则刚体的运动也可以按围绕此固定点的定点转动来处理，而不必按平动和转动进行分解。

由于刚体内部的约束的特点，为了讨论刚体转动的运动学描述，我们已经在§3．3．中引入了角速度矢量；为了讨论刚体转动的动力学规律，我们将引入转动惯量张量。

2．转动惯量张量　刚体转动的角动量

一．转动惯量张量：为了计算作定轴转动和平面平行运动的某些具有较好对称性的刚体的角动量和动能，写出动力学方程，我们曾经引入了转动惯量 I，并且讨论了关于转动惯量的平行轴定理（[1]113 页）。但在本章中，对刚体的形状、结构及其运动状况均不加任何限制（除非特别说明），上述转动惯量的概念就不够了，必须把转动惯量推广为转动惯量张量。这个转动惯量张量和以前所学的转动惯量之间，有什么区别？有什么联系呢？我们学过的在某些情况下，利用转动惯量表达的刚体的角动量表达式 $\vec{L}=I\vec{\omega}$，和动能表达式

$T=\dfrac{1}{2}I\omega^2$ 怎样推广到一般的情况呢?

二．刚体转动的角动量(参阅 [1]121 页)

$$\vec{L}=\sum_i\left(\vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i\right)=\sum_i\left[\vec{r}_i\times m_i\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_i\right)\right]$$

$$=\sum_i m_i\left[r_i^2\vec{\omega}-\left(\vec{\omega}\cdot\vec{r}_i\right)\vec{r}_i\right]$$

$$=\sum_i m_i\left\{\left[\omega_x\left(y_i^2+z_i^2\right)-\omega_y x_i y_i-\omega_z x_i z_i\right]\vec{i}+\left[-\omega_x y_i x_i+\omega_y\left(z_i^2+x_i^2\right)-\omega_z y_i z_i\right]\vec{j}\right.,$$

$$\left.+\left[-\omega_x z_i x_i-\omega_y z_i y_i+\omega_z\left(x_i^2+y_i^2\right)\right]\vec{k}\right\}=\vec{\vec{I}}\vec{\omega} \qquad (1)$$

把其中的求和式分别记为：

$$I_{11}=\sum_i m_i\left(y_i^2+z_i^2\right) \quad I_{22}=\sum_i m_i\left(z_i^2+x_i^2\right) \quad I_{33}=\sum_i m_i\left(x_i^2+y_i^2\right)$$

$$I_{23}=I_{32}=\sum_i m_i y_i z_i \quad I_{31}=I_{13}=\sum_i m_i z_i x_i \quad I_{12}=I_{21}=\sum_i m_i x_i y_i$$

就得到

$$\vec{L}=\left[I_{11}\omega_x-I_{12}\omega_y-I_{13}\omega_z\right]\vec{i}+\left[-I_{21}\omega_x+I_{22}\omega_y-I_{23}\omega_z\right]\vec{j}+\left[-I_{31}\omega_x-I_{32}\omega_y+I_{33}\omega_z\right]\vec{k} \quad (1')$$

把（1’）式写成矩阵的形式：

$$\begin{pmatrix}L_x\\L_y\\L_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_{11}&-I_{12}&-I_{13}\\-I_{21}&I_{22}&-I_{23}\\-I_{31}&-I_{32}&I_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{pmatrix} \text{ 或 } \vec{L}=\vec{\vec{I}}\vec{\omega} \text{ 其中 } \vec{\vec{I}}=\begin{pmatrix}I_{11}&-I_{12}&-I_{13}\\-I_{21}&I_{22}&-I_{23}\\-I_{31}&-I_{32}&I_{33}\end{pmatrix} \quad (2)$$

$\vec{\vec{I}}$ 是一个二阶张量，称为惯量张量（转动惯量张量），可以表为一个实对称矩阵（满足 $I_{kl}=I_{lk}$）称为惯量矩阵，其中对角元分别为刚体绕各坐标轴的转动惯量，非对角元称为惯量积。由于惯量张量的张量性质，角动量和角速度的方向，一般说来，可以不相同。

惯量张量的物理意义是刚体作转动时惯性的度量，和平动时质量的概念相当；而其数学形式则是标量的推广。质量是一个标量，也可以看成是一个特别简单的张量：

$$m=\begin{pmatrix}m&0&0\\0&m&0\\0&0&m\end{pmatrix}$$

因而质点的动量和速度，刚体的动量和质心的速度，以至一般的质点系的总动量和质心的速度，方向总是相同的。

三．刚体的主轴（惯量主轴）：选择适当的直角坐标系能使惯量张量表为对角矩阵，这样的三个坐标轴称为刚体的主轴或惯量主轴。此时角动量可表为：

$$\begin{pmatrix}L_x\\L_y\\L_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_{11}&0&0\\0&I_{22}&0\\0&0&I_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{pmatrix} \qquad （3）$$

如果角速度沿主轴方向，例如：$\vec{\omega}=\omega_x\vec{i}$ $\omega_y=\omega_z=0$ 则 $\vec{L}=I_{11}\omega_x\vec{i}=L_x\vec{i}$ $L_y=L_z=0$

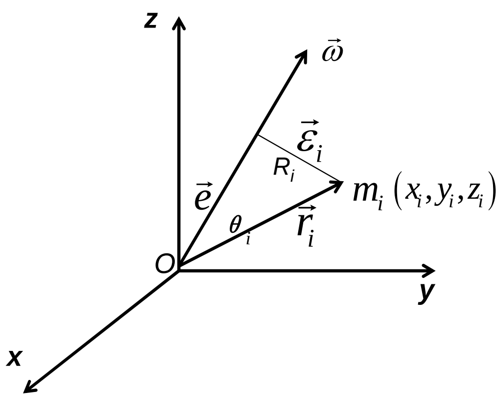
角动量也沿这个主轴方向，所以 $\vec{L}\|\vec{\omega}$，角动量和角速度方向相同。

寻找刚体的主轴和数学上寻找实对称矩阵的本征矢量或把矩阵对角化是等价的。惯量张量的主轴体现了刚体作转动时的惯性的某种对称性。如果刚体的密度是常数，或具有某种对称性，可从刚体形状的对称性找到主轴。无论刚体的形状有无对称性，刚体的密度分布规则有无对称性，刚体的主轴是一定存在的，因为实对称矩阵总是可以对角化的。

惯量张量一般在固定于刚体的坐标系中进行计算，这样惯量张量的分量不随时间变化；虽然基矢变化，但规律比较简单；因而计算角动量对时间的导数就比较方便。由于质点系的角动量定理只有在惯性系和质心系中才有简洁的形式，对固定点和对质心计算的惯量张量总是最有用的。

四．角动量在角速度方向上的投影。

设 $\vec{\omega}=\omega\vec{e}$，（$\vec{e}$ 是转动轴或瞬时转动轴方向即角速度方向上的单位矢量，）θ_i 是 $\vec{r}_i$ 与 $\vec{\omega}$ 之间的夹角。第 i 个质点的矢径 $\vec{r}_i=r_i\cos\theta_i\vec{e}+r_i\sin\theta_i\vec{\varepsilon}_i$ ，$\vec{\varepsilon}_i$ 是,与 $\vec{e}$ 垂直且与 $\vec{r}_i$ 共面的单位矢量。（径向单位矢量）记 $R_i=r_i\sin\theta_i$ 于是 $r_i\cos\theta_i=\sqrt{r_i^2-R_i^2}$



即 $\vec{r}_i=r_i\cos\theta_i\vec{e}+R_i\vec{\varepsilon}_i=\sqrt{r_i^2-R_i^2}\vec{e}+R_i\vec{\varepsilon}_i \qquad \vec{\omega}\cdot\vec{r}_i=\omega r_i\cos\theta_i$

（1）式可化为：

$$\begin{aligned}\vec{L}&=\sum_i m_i\left[r_i^2\vec{\omega}-\left(\vec{\omega}\cdot\vec{r}_i\right)\vec{r}_i\right]=\sum_i m_i\left[r_i^2\omega\vec{e}-\omega r_i\cos\theta_i\left(r_i\cos\theta_i\vec{e}+r_i\sin\theta_i\vec{\varepsilon}_i\right)\right]\\&=\sum_i m_ir_i^2\sin^2\theta_i\cdot\omega\vec{e}-\sum_i m_ir_i^2\cos\theta_i\sin\theta_i\vec{\varepsilon}_i\cdot\omega\\&=\sum_i m_iR_i^2\cdot\vec{\omega}-\sum_i m_ir_i^2\sin\theta_i\cos\theta_i\vec{\varepsilon}_i\cdot\omega=I\vec{\omega}-\sum_i m_ir_i^2\sin\theta_i\cos\theta_i\vec{\varepsilon}_i\cdot\omega \qquad (4)\end{aligned}$$

其中：$R_i=r_i\sin\theta_i$，$I=\sum_i m_iR_i^2$ 就是围绕这个瞬时转动轴的转动惯量。（4）式再次表明：角动量和角速度的方向，一般说来，可以不相同，只有当角速度沿刚体的主轴方向，即（4）式右端第二项为零时，才有 $\vec{L}=I\vec{\omega}$，$\vec{L}$ 与 $\vec{\omega}$ 的方向才相同。这正是由于刚体在转动情况下表现出来的惯性的张量特性（转动惯量张量）引起的。不过角速度与角动量的内积 $\vec{L}\cdot\vec{\omega}$ 却

总是有比较简洁的表达式，事实上，由（1）式和（4）式均可见：

$$\vec{L}\cdot\vec{\omega}=\sum_i m_i\left[r_i^2\omega^2-\left(\vec{\omega}\cdot\vec{r}_i\right)^2\right]=\sum_i m_i r_i^2\sin^2\theta_i\cdot\omega^2=\sum_i m_i R_i^2\cdot\omega^2=I\omega^2 \qquad (5)$$

于是就可以把角动量在转动轴或瞬时转动轴上的投影表为：$L_e=\vec{L}\cdot\vec{e}=I\omega$

或把角速度在角动量方向上的投影表为：$\omega_L=\vec{\omega}\cdot\frac{\vec{L}}{L}=\frac{I\omega^2}{L}$ 或利用下面的动能式表为 $\frac{2T}{L}$

3．刚体转动的动能

我们再来计算刚体转动的动能：$T=\frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2=\frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_i\right)\cdot\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_i\right)$ 以下可用不同的方法继续计算，所得到的各种不同形式的结果，它们应该是相等的。

利用角动量的表达式，得到

$$T=\frac{1}{2}\sum_i\left[\vec{r}_i\times m_i\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_i\right)\right]\cdot\vec{\omega}=\frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L}=\frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{\vec{I}}\cdot\vec{\omega} \qquad (6)$$

或利用转动惯量张量的矩阵元表为

$$T=\frac{1}{2}\left[I_{11}\omega_x^{\ 2}+I_{22}\omega_y^{\ 2}+I_{33}\omega_z^{\ 2}-2I_{12}\omega_x\omega_y-2I_{23}\omega_y\omega_z-2I_{31}\omega_z\omega_x\right] \qquad (7)$$

或利用矢量积的定义　$T=\frac{1}{2}\sum_i m_i\left|\vec{\omega}\times\vec{r}_i\right|^2=\frac{1}{2}\sum_i m_i r_i^2\sin^2\theta_i\cdot\omega^2=\frac{1}{2}\sum_i m_i R_i^2\cdot\omega^2$　(8)

（8）式中右边的求和式就是对于瞬时转动轴的转动惯量 $I=\sum_i m_i R_i^2$ 于是 $T=\frac{1}{2}I\omega^2$ （9）

可见刚体转动的动能这个表达式（9）是普遍成立的，只不过在一般情况下，因为瞬时转动轴可以随时间变动，转动惯量一般为变量，这点与定轴转动不同。

比较（7）和（9）式我们可以得到利用转动惯量张量表达围绕任意转动轴的转动惯量的公式。令 $\vec{\omega}=\omega\vec{e}$，单位矢量 $\vec{e}=\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}+\gamma\vec{k}$ 表示角速度的方向,其中 $\vec{e}$ 的三个方向余弦是 $\alpha=\cos\theta_1,\beta=\cos\theta_2,\gamma=\cos\theta_3$,满足 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$（$\theta_1,\theta_2,\theta_3$ 是 $\vec{e}$ 和坐标轴的三个夹角)，　又因为

$$\vec{\omega}=\omega_x\vec{i}+\omega_y\vec{j}+\omega_z\vec{k}=\omega\left(\frac{\omega_x}{\omega}\vec{i}+\frac{\omega_y}{\omega}\vec{j}+\frac{\omega_z}{\omega}\vec{k}\right)$$

$\therefore\alpha=\frac{\omega_x}{\omega},\beta=\frac{\omega_y}{\omega},\gamma=\frac{\omega_z}{\omega}$ 因而由（7）式，动能再一次表为(9)的形式：$T=\frac{1}{2}I\omega^2$

其中：$I=I_e=I\left(\alpha,\beta,\gamma\right)=I_{11}\alpha^2+I_{22}\beta^2+I_{33}\gamma^2-2I_{12}\alpha\beta-2I_{23}\beta\gamma-2I_{31}\gamma\alpha=\vec{e}\cdot\vec{\vec{I}}\cdot\vec{e}$ (10)

由上可见，围绕任意瞬时转动轴 $\vec{e}$ 的转动惯量 $I=\sum_i m_i R_i^2$ 可以由(10)式利用转动惯量

张量求出。特别，可以由(10)式求得围绕 X,Y,Z 轴的转动惯量。例如：取 $\vec{e}=\vec{i}$,于是

$\alpha=1,\beta=\gamma=0$ 得 $I_{11}=\vec{i}\cdot\vec{\vec{I}}\cdot\vec{i}$,相仿可得 $I_{22}=\vec{j}\cdot\vec{\vec{I}}\cdot\vec{j},I_{33}=\vec{k}\cdot\vec{\vec{I}}\cdot\vec{k}$ ；也可以利用（10）式把惯量积表为

$$I_{12}=I_{21}=-\vec{i}\cdot\vec{\vec{I}}\cdot\vec{j}\quad,\quad I_{23}=I_{32}=-\vec{j}\cdot\vec{\vec{I}}\cdot\vec{k}\ ,\quad I_{31}=I_{13}=-\vec{k}\cdot\vec{\vec{I}}\cdot\vec{i}$$

若选取坐标系使坐标轴沿着主轴,惯量积为零,角动量和动能的公式可以简化。([1]124 页)

$$I=I_e=I\left(\alpha,\beta,\gamma\right)=I_1\alpha^2+I_2\beta^2+I_3\gamma^2\quad I_1=I_{11}\ \ I_2=I_{22}\ \ I_3=I_{33}$$
$$\vec{L}=I_1\omega_x\vec{i}+I_2\omega_y\vec{j}+I_3\omega_z\vec{k}$$
$$T=\frac{1}{2}\left(I_1{\omega_x}^2+I_2{\omega_y}^2+I_3{\omega_z}^2\right)\qquad(11)$$

§3．7．欧拉动力学方程

欧拉动力学方程就是刚体作定点转动或刚体作一般运动时围绕质心作转动部分的动力学方程。

1．欧拉动力学方程的推导

为了使方程形式简单, 我们作以下选择：

①计算角动量的基点即坐标系原点选在固定点（如果刚体作定点转动）或质心；(如果刚体作一般运动)

②选用固定于刚体的坐标系；(保证转动惯量张量为常量)

③坐标轴选得和主轴一致；(惯量积为零)于是得欧拉动力学方程：

从角动量定理出发：

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}\qquad\vec{L}=I_1\omega_x\vec{i}+I_2\omega_y\vec{j}+I_3\omega_z\vec{k}\qquad\vec{M}=M_x\vec{i}+M_y\vec{j}+M_z\vec{k}\qquad(1)$$

由于基矢随刚体转动，

$$\begin{cases}\dot{\vec{i}}=\vec{\omega}\times\vec{i}=\omega_z\vec{j}-\omega_y\vec{k}\\ \dot{\vec{j}}=\vec{\omega}\times\vec{j}=\omega_x\vec{k}-\omega_z\vec{i}\\ \dot{\vec{k}}=\vec{\omega}\times\vec{k}=\omega_y\vec{i}-\omega_x\vec{j}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}}{dt}&=\frac{\tilde{d}\vec{L}}{dt}+\vec{\omega}\times\vec{L}=I_1\dot{\omega}_x\vec{i}+I_2\dot{\omega}_y\vec{j}+I_3\dot{\omega}_z\vec{k}+I_1\omega_x\dot{\vec{i}}+I_2\omega_y\dot{\vec{j}}+I_3\omega_z\dot{\vec{k}}\\&=I_1\dot{\omega}_x\vec{i}+I_2\dot{\omega}_y\vec{j}+I_3\dot{\omega}_z\vec{k}+I_1\omega_x\vec{\omega}\times\vec{i}+I_2\omega_y\vec{\omega}\times\vec{j}+I_3\omega_z\vec{\omega}\times\vec{k}\\&=I_1\dot{\omega}_x\vec{i}+I_2\dot{\omega}_y\vec{j}+I_3\dot{\omega}_z\vec{k}+I_1\omega_x\left(\omega_z\vec{j}-\omega_y\vec{k}\right)+I_2\omega_y\left(\omega_x\vec{k}-\omega_z\vec{i}\right)+I_3\omega_z\left(\omega_y\vec{i}-\omega_x\vec{j}\right)\end{aligned}$$

于是得

$$\begin{cases}I_1\dot{\omega}_x-\left(I_2-I_3\right)\omega_y\omega_z=M_x\\ I_2\dot{\omega}_y-\left(I_3-I_1\right)\omega_z\omega_x=M_y\\ I_3\dot{\omega}_z-\left(I_1-I_2\right)\omega_x\omega_y=M_z\end{cases}\qquad(2)$$

这就是欧拉动力学方程。由此可见，欧拉动力学方程就是刚体的角动量定理在一类特殊坐标系下的简洁形式。

2．欧拉动力学方程的应用

欧拉动力学方程是刚体运动的转动部分普遍适用的动力学方程。无论是定轴转动或定点转动，还是一般运动或平面平行运动的转动部分，欧拉动力学方程都是适用的。对于定轴转动或者平面平行运动的转动部分，如果转动轴就是刚体的一个主轴，那么方向不变的角速度和这个主轴方向保持一致，角动量也和这个主轴方向保持一致，欧拉动力学方程形式特别简单，如我们已经在普通物理中学过的那样。（关于刚体的平面平行运动，参阅[1]§4．5．112－115 页）如果角速度方向和主轴方向不一致,那么选择坐标轴沿主轴并不见得方便。在这种情况下，我们可以把固定于刚体的坐标系的一个坐标轴（例如 OZ 轴）选得与角速度的方向一致, $\vec{\omega}=\omega_z\vec{k}$，这时，虽然这不是主轴，惯量积 I_{13}, I_{23} 一般不等于零；但 $\omega_x=\omega_y=0$，

$$\vec{L}=-I_{13}\omega_z\vec{i}-I_{23}\omega_z\vec{j}+I_{33}\omega_z\vec{k}\quad,\quad T=\frac{1}{2}\vec{L}\cdot\vec{\omega}=\frac{1}{2}\vec{L}\cdot\omega_z\vec{k}=\frac{1}{2}I_{33}\omega_z^{\ 2}\quad,\quad \frac{d\vec{i}}{dt}=\omega_z\vec{j}\quad,$$

$$\frac{d\vec{j}}{dt}=-\omega_z\vec{i}\ ,\quad \frac{d\vec{k}}{dt}=0 \text{ 从而 } \frac{d\vec{L}}{dt}=\left(-I_{13}\dot{\omega}_z+I_{23}\omega_z^{\ 2}\right)\cdot\vec{i}+\left(-I_{23}\dot{\omega}_z-I_{13}\omega_z^{\ 2}\right)\vec{j}+I_{33}\dot{\omega}_z\vec{k}$$

转动部分的动力学方程仍可得到一定程度的简化

$$\begin{cases}-I_{13}\dot{\omega}_z+I_{23}\omega_z^{\ 2}=M_x\\-I_{23}\dot{\omega}_z-I_{13}\omega_z^{\ 2}=M_y\\\qquad I_{33}\dot{\omega}_z=M_z\end{cases}\qquad(3)$$

应该指出，对于定轴转动或者平面平行运动的转动部分，角速度的方向不变，角动量的方向一般说，不同于角速度的方向，是可能变化的，为了使刚体作定轴转动或者平面平行运动，往往需要约束提供适当的约束力。因此方程右边的外力矩，除了主动力矩外，还应包括约束力矩在内。例如：刚体作定轴转动时，通常约束力通过轴承作用到转动轴上，对固定点的约束力矩与转动轴垂直。上述第三个方程解出角位移随时间变化的规律，再从前两个方程求出约束反力。对称刚体且转动轴过质心、沿主轴的定轴转动，求解运动规律和计算约束力都是不困难的（已在普通物理中学过）。但偏心或转动轴偏离主轴的刚体，或者高速转动部件的转轴需要变动方向时(例如轮船发动机上的转动部件)，约束力的计算往往比较复杂，这类问题对机器的设计，制造和安装都是很重要的。 (参阅[1]§4．12．)

又如，置于光滑水平面上的非对称的刚体作平面平行运动，角动量也有水平面内的分量,为使其变化满足刚体的动力学方程，作用于刚体底面非均匀分布的约束力, 在其合力与主动力平衡的同时，形成的合力矩能给出改变角动量矢量所需要的约束力矩。

当然，具有良好对称性的刚体在适当的条件下也可能在约束力矩的合力矩为零的情况下作定轴转动或平面平行运动。

还有一个问题：刚体作平面平行运动时,以瞬时转动中心为基点，角动量定理能否也表为 $\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}$ ？结论是：如果瞬时转动中心到质心的距离保持不变，答案是肯定的；否则答案是否定的。关键的一点是：瞬时转动中心的速度虽然为零，但加速度不为零。（参阅附录 A4，参考资料[18],[19],[20]和参考资料[1]117 页例 2）

对于刚体的定点转动或一般运动的转动部分，选用了符合前述条件的坐标系已使方程在很大程度上得到化简，因而是比较方便的。但是，即便如此，到现在为止，刚体在重力的作用下，定点转动可以有解析解的，我们只知道下列三种特殊情况(对外力矩或刚体形状作某

些限制)：(1)欧拉—潘索情况； (2)拉格朗日—泊松情况；(3)柯凡律夫斯卡雅情况。

§3．8．刚体定点转动的几种特殊情况（参阅[1] §4．7．－§4．9．125－134 页)

1．刚体的自由转动(欧拉—潘索情况)

自由转动是指外力矩为零的一种情形。地球上的刚体，不可避免地受到重力的作用。如果是定点转动，定点一定与质心重合，否则重力矩不能为零。如果是一般运动，因为在动力学中分解刚体的一般运动，基点总是选在质心，重力矩自动为零；因此它的转动部分是自由转动。

再以受太阳引力作用的地球为例，因地球的线度比起日地距离来要小得多，太阳的引力场可以认为是近似均匀的；太阳引力的合力可认为近似作用于地球的质心，以质心为基点分解地球的运动，平动部分系在太阳引力的作用下作公转（以质心为代表的质点运动)，转动部分系围绕质心作自转（质心参考系中的刚体定点转动）此时外力矩为零,地球作自由转动。

自由转动是因惯性而运动，不要一提到惯性就联想到匀速直线运动。对质点或刚体的平动部分，惯性运动就是匀速直线运动或静止。对刚体的转动部分就不是这样了。

我们用欧拉动力学方程来处理这个问题。由于外力矩为零,方程化简为：

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_x-\left(I_2-I_3\right)\omega_y\omega_z=0 & (1)\\ I_2\dot{\omega}_y-\left(I_3-I_1\right)\omega_z\omega_x=0 & (2)\\ I_3\dot{\omega}_z-\left(I_1-I_2\right)\omega_x\omega_y=0 & (3)\end{cases}$$

$(1)\vec{i}+(2)\vec{j}+(3)\vec{k}$ 得到 $\dot{\vec{L}}=0$ 积分，得到 $\vec{L}=I_1\omega_x\vec{i}+I_2\omega_y\vec{j}+I_3\omega_z\vec{k}=$常矢量,

$(1)2I_1\omega_x+(2)2I_2\omega_y+(3)2I_3\omega_z$ 积分，得到 $I_1{}^2\omega_x{}^2+I_2{}^2\omega_y{}^2+I_3{}^2\omega_z{}^2=L^2=$常量

$(1)2\omega_x+(2)2\omega_y+(3)2\omega_z$ 积分，得到 $I_1\omega_x{}^2+I_2\omega_y{}^2+I_3\omega_z{}^2=2E=$常量

这几个初积分，也可由角动量守恒和能量守恒直接得到。由此继续下去，虽然原则上可以积分求解，(参阅[1]127 页)但实际上是很困难的。

在对称欧拉陀螺的情况下，$\left(I_1=I_2\right)$计算可以简化，欧拉动力学方程可以简化为：

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_x-\left(I_1-I_3\right)\omega_y\omega_z=0\\ I_1\dot{\omega}_y-\left(I_3-I_1\right)\omega_z\omega_x=0\\ \qquad I_3\dot{\omega}_z=0\end{cases}$$

解得(参阅[1]130 页)：$\omega_z=$常数，从而$\begin{cases}\omega_x=\omega_0\cos\left(nt+\varepsilon\right)\\ \omega_y=\omega_0\sin\left(nt+\varepsilon\right)\end{cases}$,

其中ω_0, $n=\omega_z\left(I_3-I_1\right)/I_1$, ε 也均为常数，角速度矢量的模$\omega=\sqrt{\omega_0{}^2+\omega_z{}^2}$ 也是常数。

$$\vec{L}=I_1\omega_x\vec{i}+I_1\omega_y\vec{j}+I_3\omega_z\vec{k}=I_1\omega_0\cos\left(nt+\varepsilon\right)\vec{i}+I_1\omega_0\sin\left(nt+\varepsilon\right)\vec{j}+I_3\omega_z\vec{k}$$

因为$\vec{L}$为常矢量，所以总可选空间固定坐标轴$OZ_0\,//\,\vec{L}$

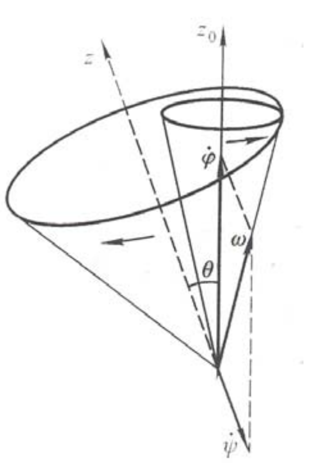
$$\vec{L}=L\vec{e}_3=L\left(\sin\theta\sin\psi\vec{i}+\sin\theta\cos\psi\vec{j}+\cos\theta\vec{k}\right)$$

比较以上两式,可以得到 $\begin{matrix} L\cos\theta = I_3\omega_z & \sin\psi = \cos(nt+\varepsilon) \\ L\sin\theta = I_1\omega_0 & \cos\psi = \sin(nt+\varepsilon) \end{matrix}$

进一步得到 $\cos\theta = \dfrac{I_3\omega_z}{L} = \cos\theta_0 = const$，$\dot{\theta} = 0$ 解为规则进动(没有章动)，以及

$\psi = \dfrac{\pi}{2} - (nt+\varepsilon) \quad \dot{\psi} = -n = const$；利用欧拉运动学方程 $\omega_z = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}$ 得到

$\dot{\varphi} = \sec\theta(\omega_z + n) \quad \varphi = \sec\theta(\omega_z + n)t + \varphi_0$



潘索（Poinsot）的几何方法（参阅[1]125—129 页）

为了学习潘索的几何方法，我们引入.惯量椭球的概念（参阅[1]§4．8.）。我们已经知道，刚体绕过刚体上某一确定点的任意方向的轴的转动惯量可以由该点的转动惯量张量求出。(见（*）式)现在我们要引入的惯量椭球，是用来表现围绕各不同方向的转动轴的转动惯量的一种几何手段。定义 $x = \dfrac{\alpha}{\sqrt{I_e}}, y = \dfrac{\beta}{\sqrt{I_e}}, z = \dfrac{\gamma}{\sqrt{I_e}}$ ，于是 $x^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{1}{I_e}$ (*)式就化为：

$$I_{11}x^2 + I_{22}y^2 + I_{33}z^2 - 2I_{12}xy - 2I_{23}yz - 2I_{31}zx = 1$$

在以 (x, y, z) 为直角坐标的空间里(这个空间是数学上的空间，不是现实的空间,甚至它的坐标的量纲都不是长度的量纲)，这个方程的曲面是一个中心在原点的椭球，称为惯量椭球。（以质心为中心的惯量椭球称为中心惯量椭球。）椭球面上任意点到原点的距离的平方等于以该点矢径方向(指现实空间中对应的方向)为转动轴的转动惯量的倒数。不管刚体的形状是什么样子，用上述方法表现转动惯量张量所得到的图形总是一个椭球。惯量椭球为我们提供了关于围绕各方向轴线的转动惯量之间的关系的一个形象的表示，有助于我们思考和研究一些问题。

2．拉格朗日陀螺

刚体绕固定点 O 转动，惯量椭球是一旋转椭球: $I_1 = I_2$ 质心 C 在 OZ 轴上, $OC = l$

$$\vec{M}=\vec{r}\times m\vec{g}=l\vec{k}\times\left(-mg\vec{e}_3\right)=-mgl\vec{k}\times\left[\sin\theta\left(\sin\psi\vec{i}+\cos\psi\vec{j}\right)+\cos\theta\vec{k}\right]$$
$$=mgl\sin\theta\left(\cos\psi\vec{i}-\sin\psi\vec{j}\right)$$

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_x-\left(I_1-I_3\right)\omega_y\omega_z=mgl\sin\theta\cos\psi & (1)\\ I_1\dot{\omega}_y-\left(I_3-I_1\right)\omega_z\omega_x=-mgl\sin\theta\sin\psi & (2)\\ I_3\dot{\omega}_z=0 & (3)\end{cases}$$

求运动积分：

$$(3)\Rightarrow I_3\omega_z=I_3\left(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}\right)=L_k=const$$

$$\omega_z=\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}=A=\frac{L_k}{I_3}=const \qquad (4)$$

$$(1)\omega_x+(2)\omega_y \qquad \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}I_1\left(\omega_x^2+\omega_y^2\right)+mgl\cos\theta\right]=0$$

$$\frac{1}{2}I_1\left(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2\right)+\frac{1}{2I_3}L_k^2+mgl\cos\theta=E=const \qquad (5)$$

利用欧拉运动学方程，

$$\begin{cases}\omega_x=\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi\\ \omega_y=\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi-\dot{\theta}\sin\psi\\ \omega_z=\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}\end{cases}$$

$$\dot{\omega}_x\sin\psi+\dot{\omega}_y\cos\psi=\ddot{\varphi}\sin\theta+\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta-\dot{\theta}\dot{\psi}$$

$$\omega_x\cos\psi-\omega_y\sin\psi=\dot{\theta}$$

$$(1)\sin\psi+(2)\cos\psi \qquad I_1\left(\ddot{\varphi}\sin\theta+2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\right)-I_3\left(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}\right)\dot{\theta}=0$$

乘以$\sin\theta$，化为 $\qquad \dfrac{d}{dt}\left[I_1\dot{\varphi}\sin^2\theta+I_3A\cos\theta\right]=0$

$$I_1\dot{\varphi}\sin^2\theta+I_3A\cos\theta=I_1\dot{\varphi}\sin^2\theta+I_3\left(\dot{\varphi}\cos^2\theta+\dot{\psi}\cos\theta\right)$$
$$=L_{e_3}=const=\vec{L}\cdot\vec{e}_3 \qquad (6)$$

有了三个初积分，可进一步积分求解。（参阅[1]132－133 页（9．4）－（9．10）式，）利用（7）和（9），得

$$\frac{d\varphi}{d\theta}=\frac{\dot{\varphi}}{\dot{\theta}}=\frac{L_{e_3}-L_k\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}\cdot\frac{1}{\sqrt{\dfrac{2}{I_1}\left[E'-V_{eff}\left(\theta\right)\right]}}$$

$$\varphi=\int\frac{L_{e_3}-L_k\cos\theta}{I_1\sin^2\theta\sqrt{\dfrac{2}{I_1}\left[E'-V_{eff}\left(\theta\right)\right]}}d\theta=\varphi\left(\theta\right)=\varphi\left(\theta\left(t\right)\right)\equiv\bar{\varphi}\left(t\right)$$

相仿可讨论$\psi\left(t\right)$。根据三个初积分，可分析三个欧拉角随时间变化的情况，研究刚体的运

动规律。

3．柯凡律夫斯卡雅情况比较特殊，有兴趣的读者可参阅有关书籍。

§3．9．非惯性参照系中的动力学方程　惯性力

我们已经在§3．5．中讨论了不同参照系的速度加速度间的关系（运动学范围的问题），本节讨论不同参照系的动力学方程之间的关系（动力学范围的问题）。

1．　牛顿动力学方程（[1]　§5．2．154---156 页）

由 $m\vec{a}=\vec{F}$ 和 $\vec{a}=\vec{a}'+\vec{a}_0+\dot{\vec{\omega}}_0\times\vec{r}'+\vec{\omega}_0\times\left(\vec{\omega}_0\times\vec{r}'\right)+2\vec{\omega}_0\times\vec{v}'$ 得

$$m\left[\vec{a}'+\vec{a}_0+\dot{\vec{\omega}}_0\times\vec{r}'+\vec{\omega}_0\times\left(\vec{\omega}_0\times\vec{r}'\right)+2\vec{\omega}_0\times\vec{v}'\right]=\vec{F}$$

其中 $\vec{F}$ 是真实力，引入两项惯性力：

牵连惯性力 $\vec{F}_t=-m\vec{a}_t=-m\left[\vec{a}_0+\dot{\vec{\omega}}_0\times\vec{r}'+\vec{\omega}_0\times\left(\vec{\omega}_0\times\vec{r}'\right)\right]$

科氏力 $\vec{F}_C=-m\vec{a}_C=-2m\vec{\omega}_0\times\vec{v}'$

就得非惯性系中的牛顿动力学方程 $m\vec{a}'=\vec{F}+\vec{F}_t+\vec{F}_C$

2．动力学定理　（参阅[1]156 页）

利用 $\vec{a}'=\dfrac{\tilde{d}\vec{v}'}{dt}$，非惯性系中质点动量的表达式 $\vec{p}'=m\vec{v}'$ 和 $m\vec{a}'=\vec{F}+\vec{F}_t+\vec{F}_C$

即得非惯性系中质点的动量定理：　$\dfrac{\tilde{d}\vec{p}'}{dt}=\vec{F}+\vec{F}_t+\vec{F}_C$

利用非惯性系中质点的角动量表达式 $\vec{L}'=\vec{r}'\times m\vec{v}'$ 和 $m\vec{a}'=\vec{F}+\vec{F}_t+\vec{F}_C$，

就得到非惯性系中质点的角动量定理：

$$\frac{\tilde{d}\vec{L}'}{dt}=\frac{\tilde{d}}{dt}\left(\vec{r}'\times m\vec{v}'\right)=\left(\vec{r}'\times m\vec{a}'\right)=\vec{r}'\times\left(\vec{F}+\vec{F}_t+\vec{F}_C\right)$$

利用 $m\vec{a}'\cdot\tilde{d}\vec{r}'=m\dfrac{\tilde{d}\vec{v}'}{dt}\cdot\tilde{d}\vec{r}'=m\vec{v}'\cdot\tilde{d}\vec{v}'=\tilde{d}\left[\dfrac{1}{2}m\vec{v}'^2\right]=\tilde{d}T'$ 和 $m\vec{a}'=\vec{F}+\vec{F}_t+\vec{F}_C$，

即得非惯性系中质点的动能定理：$\tilde{d}T'=d\vec{r}'\cdot\left(\vec{F}+\vec{F}_t+\vec{F}_C\right)$

3．地球自转的动力学效应（参阅[1]§5．4．）

地球半径 $R_e=6.4\times10^6m$　太阳轨道半径 $R_S=1.5\times10^{11}m$　　$\dfrac{R_S}{R_e}\approx\dfrac{1}{4}\times10^5$

地球自转角速度 $\omega_0=\dfrac{2\pi}{24\times3600}s^{-1}$　地球公转角速度 $\omega_s=\dfrac{1}{365}\omega_0$

地球自转惯性离心力 $F_0=m\omega_0^2R_e$　地球公转惯性离心力 $F_s=m\omega_s^2R_S$

地球自转引起的科氏力 $F_{0C}\approx2m\omega_0v'$ 地球公转引起的科氏力 $F_{sC}\approx2m\omega_sv'$

$$\frac{F_s}{F_0}=\frac{\omega_s^2}{\omega_0^2}\frac{R_S}{R_e}\approx\left(\frac{1}{365}\right)^2\times\frac{1}{4}\times10^5\approx0.2 \qquad \frac{F_{sC}}{F_{0C}}\approx\frac{\omega_s}{\omega_0}\approx\frac{1}{365}\approx0.003$$

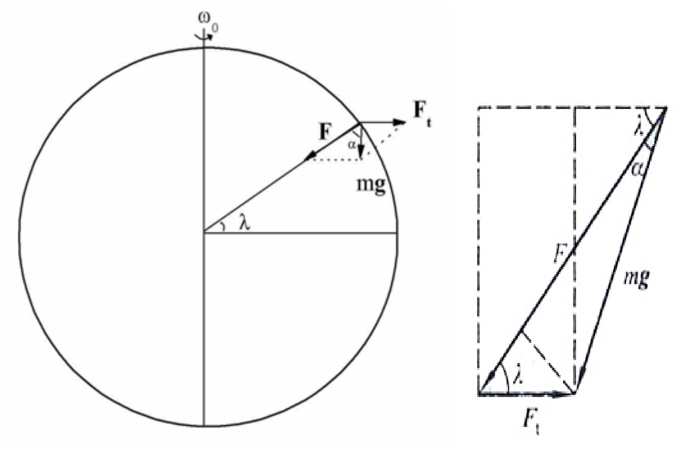
地球公转引起的非惯性效应一般说要比公转引起的非惯性效应要小 1－2 个数量级。至于科氏力与惯性离心力的比较，因前者与速度有关，情况比较复杂，视具体情况而定。

（1）重力加速度随纬度的变化；

这里讨论重力的大小随纬度的变化，不考虑物体的运动。所以不考虑科氏力。地球视作近似圆球。

$m\vec{g}=\vec{F}+\vec{F}_t$ $\quad\vec{F}$ 是地球引力，$\vec{F}_t$ 是地球自转引起的惯性离心力，$m\vec{g}$ 是观察到的重力

$$F_t=mR_e\omega_0^2\cos\lambda \qquad (1)$$
$$F_t\sin\lambda=mg\sin\alpha \qquad (2)$$
$$\frac{mg}{\sin\lambda}=\frac{F_t}{\sin\alpha}=\frac{F}{\sin(\lambda+\alpha)} \qquad (3)$$
$$F=mg\cos\alpha+F_t\cos\lambda \qquad (4)$$



$$\left.\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{R_e\omega_0^2\sin2\lambda}{2g}\approx\alpha \quad (5) \qquad \lambda=45^o \quad \alpha_{Max}\approx\frac{R_e\omega_0^2}{2g}\approx6' \quad (6)$$

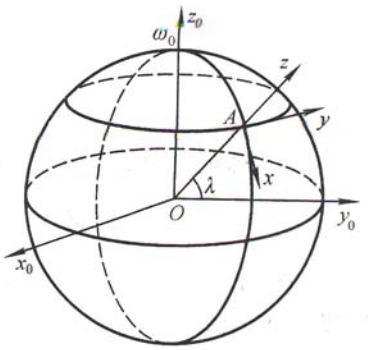
$$\left.\begin{matrix}(1)\\(4)\end{matrix}\right\}\Rightarrow F=m\left(g\cos\alpha+R_e\omega_0^2\cos^2\lambda\right)\xrightarrow[\lambda=0\Rightarrow\alpha=0]{}F=m\left(g_0+R_e\omega_0^2\right) \qquad (7)$$

$$(7)\Rightarrow g_0+R_e\omega_0^2=g\cos\alpha+R_e\omega_0^2\cos^2\lambda$$

$$\alpha\approx0 \quad \sin\alpha\approx\alpha \quad \cos\alpha\approx1\Rightarrow g\approx g_0+R_e\omega_0^2\sin^2\lambda\approx g_0\left(1+\frac{R_e\omega_0^2}{g_0}\sin^2\lambda\right) \qquad (10)$$

（7）中 g_0 为赤道上的重力加速度。由（6）可见重力偏角 α 在纬度 $\lambda=45^o$ 处最大，

$$\lambda=45^0 \quad g=9.8062m/s^2 \quad \omega_0=\frac{2\pi}{24\times3600}s^{-1} \quad R_e=6.4\times10^6m$$
$$(10)\Rightarrow g_0=9.7803m/s^2$$
$$g=9.7803\left(1+0.0053\sin^2\lambda\right)m/s^2$$



（2）落体偏东；这里讨论物体运动问题，需要考虑科氏力 $\dfrac{F_{0C}}{F_0}\sim\dfrac{2m\omega_0 v'}{m\omega_0^2 R_e}\sim\dfrac{2v'}{\omega_0 R_e}$ 动

力学方程 $m\vec{a}'=\vec{F}-2m\vec{\omega}_0\times\vec{v}'$

$\vec{\omega}_0=\omega_0\vec{e}_3=\omega_0\left(-\cos\lambda\vec{i}+\sin\lambda\vec{k}\right)\qquad \vec{a}'=\ddot{x}\vec{i}+\ddot{y}\vec{j}+\ddot{z}\vec{k}$

$$\begin{cases} m\ddot{x}=F_x+2m\omega_0\dot{y}\sin\lambda \\ m\ddot{y}=F_y-2m\omega_0\left(\dot{x}\sin\lambda+\dot{z}\cos\lambda\right) \\ m\ddot{z}=F_z+2m\omega_0\dot{y}\cos\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}=2\omega_0 y\sin\lambda \\ \dot{y}=-2\omega_0\left[x\sin\lambda+\left(z-h\right)\cos\lambda\right] \\ \dot{z}=-gt+2\omega_0 y\cos\lambda \end{cases}$$

以上对动力学方程积分时，重力采用实测值，看成常矢量 $\vec{F}=-mg\vec{k}$ （忽略大小和方向的变化）

初条件为：质点自有限高度 h 以初速 $v'=0$ 自由下落。将结果代入动力学方程，略去 ω_0 的高阶项，

得 $\begin{cases} \ddot{x}=0 \\ \ddot{y}=2gt\omega_0\cos\lambda \\ \ddot{z}=-g \end{cases}$ 　　积分两次得 $\begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{1}{3}gt^3\omega_0\cos\lambda \\ \ddot{z}=h-\dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$

（3）傅科摆（参阅[1] 164 页）

第二部分经典力学的拉格朗日理论

第四章 分析力学的基本概念和基本原理

§4．1． 分析力学的基本概念（参阅参考资料[1]第二章§2．1．§2．2．§2．3.）

我们已经在前一部分讨论矢量力学时，介绍了分析力学的一些基本概念：约束、约束力和约束方程，广义坐标和自由度等；现在继续介绍虚位移和理想约束等基本概念。

1． 虚位移

我们已经学过质点运动过程中经历的真实位移，称为实位移。虚位移是指在某一时刻 t 想象质点发生一个约束所允许的无限小位移 $\delta\vec{r}$；约束方程对虚位移所加的限制为 $\delta f\left(\vec{r},t\right)=\nabla f\cdot\delta\vec{r}=0$；我们把力与虚位移的内积 $\vec{F}\cdot\delta\vec{r}$ 称为虚功。

我们主要讨论完整约束。以受到不稳定曲面约束 $f\left(\vec{r},t\right)=0$ 的单个质点为例：质点的运动方程（运动规律）为 $\vec{r}=\vec{r}\left(t\right)$，我们把实位移和虚位移这两个概念列表比较如下：

实位移 $d\vec{r}$	虚位移 $\delta\vec{r}$ (不是由 t 变化引起)
在时间间隔 dt 真实发生的位移， $d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}=\dot{\vec{r}}dt$ 无限小实位移用微分表示 $\vec{r}$ 和 $\vec{r}+d\vec{r}$ 分别满足对应时刻的约束条件， $\begin{cases} f\left(x,y,z,t\right)=0 \\ f\left(x+dx,y+dy,z+dz,t+dt\right)=0 \end{cases}$ $\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial t}dt=0 \quad (*)$ 即 $df\left(\vec{r},t\right)=\nabla f\cdot d\vec{r}+\frac{\partial f}{\partial t}dt=0$ 由动力学方程唯一决定， 连接同一轨道不同 t 和 $t+dt$ 对应的两点。 $d\vec{r}$ 沿轨道切线，不存在改变轨道的问题。 力学中的概念（沿真实轨道的切线，真实发生的位移）	在某一时刻 t, 想象质点发生的无限小位移。 $\delta\vec{r}=\delta x\vec{i}+\delta y\vec{j}+\delta z\vec{k}$， $\left(\delta t=0\right)$ 无限小虚位移用变分（等时变分）表示 $\vec{r}$ 和 $\vec{r}+\delta\vec{r}$ 均满足同一时刻 t 的约束条件， $\begin{cases} f\left(x,y,z,t\right)=0 \\ f\left(x+\delta x,y+\delta y,z+\delta z,t\right)=0 \end{cases}$ $\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z=0 \quad (*)$ 即 $\delta f\left(\vec{r},t\right)=\nabla f\cdot\delta\vec{r}=0 \quad \delta t=0$ 不要求满足动力学方程，有无限多个。 一般地连接两不同轨道的同一时刻的对应点 各点的 $\delta\vec{r}$ 使轨道改变为 $\vec{r}+\delta\vec{r}$ 几何学中的概念（张成约束曲面的切平面）

当约束稳定时，虚位移和实位移满足同样的方程(*)，因此实位移和虚位移之一相同；
当约束不稳定时，实位移一般说不同于任一个虚位移。

光滑曲面约束 $f\left(\vec{r},t\right)=0$ 的约束力沿曲面的法向：$\vec{N}=\lambda\nabla f\left(\vec{r},t\right)$（无摩擦力），一般说，约束力的实功不为零 $\vec{N}\cdot d\vec{r}=\lambda\nabla f\cdot d\vec{r}=\lambda df-\lambda\frac{\partial f}{\partial t}dt=-\lambda\frac{\partial f}{\partial t}dt$（只有对稳定约束才为零）；但此时约束力的虚功总是为零（无论约束稳定与否）$\vec{N}\cdot\delta\vec{r}=\lambda\nabla f\cdot\delta\vec{r}=\lambda\delta f=0$（有摩擦力时此结论一般不成立）

【例 1】分析匀速膨胀的光滑球面上的实位移和虚位移。

约束方程 $F\left(x,y,z,t\right)=x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0$ 约束力 $\vec{N}=\lambda\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)$

实位移 $d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}$ 满足 $\vec{r}\cdot d\vec{r}=xdx+ydy+zdz=\frac{1}{2}dF+c^2tdt=c^2tdt\neq 0$

虚位移 $\delta\vec{r}=\delta x\vec{i}+\delta y\vec{j}+\delta z\vec{k}$ 满足 $\vec{r}\cdot\delta\vec{r}=x\delta x+y\delta y+z\delta z=\frac{1}{2}\delta F=0$

约束力的虚功为零 $\vec{N}\cdot\delta\vec{r}=\lambda\left(x\delta x+y\delta y+z\delta z\right)=\frac{1}{2}\lambda\delta F=0$

约束力的实功不为零 $\vec{N}\cdot d\vec{r}=\lambda\left(xdx+ydy+zdz\right)=\frac{1}{2}\lambda dF+\lambda c^2tdt=\lambda c^2tdt\neq 0$

【例 2】我们再来讨论 §**1．3．**中的【例 1】单摆。在那里很容易地消去了未知的约束力，关键就在于条件 $\vec{T}\cdot\delta\vec{r}=0$ 成立；事实上：

$$\delta\vec{r}=\delta x\vec{i}+\delta y\vec{j}=\left(-l\sin\theta\vec{i}+l\cos\theta\vec{j}\right)\delta\theta$$

$$\vec{T}\cdot\delta\vec{r}=\left(-T\cos\theta\vec{i}-T\sin\theta\vec{j}\right)\cdot\left(-l\sin\theta\vec{i}+l\cos\theta\vec{j}\right)\delta\theta=0$$

于是动力学方程就化为：

$$m\ddot{\vec{r}}=\vec{F}+\vec{T}\Rightarrow m\ddot{\vec{r}}\cdot\delta\vec{r}=\left(\vec{F}+\vec{T}\right)\cdot\delta\vec{r}=\vec{F}\cdot\delta\vec{r}\Rightarrow ml\ddot{\theta}=-mg\sin\theta$$

以上推导过程中我们利用了：

$$\vec{F}\cdot\delta\vec{r}=mg\vec{i}\cdot\left(-l\sin\theta\vec{i}+l\cos\theta\vec{j}\right)\delta\theta=-mgl\sin\theta\delta\theta$$

$$\ddot{\vec{r}}\cdot\delta\vec{r}=\left[l\left(-\ddot{\theta}\sin\theta-\dot{\theta}^2\cos\theta\right)\vec{i}+l\left(\ddot{\theta}\cos\theta-\ddot{\theta}\sin\theta\right)\vec{j}\right]\cdot\left[\left(-l\sin\theta\vec{i}+l\cos\theta\vec{j}\right)\delta\theta\right]=l^2\ddot{\theta}\delta\theta$$

2． 将虚位移的概念推广到质点系是直截了当的。质点系的虚位移就是其中各质点的虚位移的集合 $\left\{\delta\vec{r}_i,i=1,2,\cdots n\right\}=\left\{\delta\vec{r}_1,\delta\vec{r}_2,\cdots\delta\vec{r}_n\right\}$；虚功应表为各约束力虚功的代数和 $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i$．

一般说 n 个质点组成的质点系可用 3 n 个直角坐标来描述其位形，因此质点系的虚位移也可以看成 3 n 维欧氏空间中在某一时刻 t 想象质点系发生的一个约束所允许的无限小位移。如果受到 k 个完整约束（加在质点系上的约束可能涉及多个质点）

$f_l\left(x_1,y_1,z_1,\cdots,x_n,y_n,z_n,t\right)=0\quad l=1,2,\cdots k$，则可以认为质点系约束在 3n 维欧氏空间的一个（3 n－k）维超曲面上。约束方程对虚位移所加的限制为

$$\delta f_l\left(\vec{r},t\right)=\sum_{i=1}^{n}\nabla_i f_l\cdot\delta\vec{r}_i=0\qquad l=1,2,\cdots k$$

我们来分析一个实例：（§2．1.【例 1】的动力学问题）

【例 3】刚性连接的质点对，质量分别为 m_i, m_2，分别受外力 F_1, F_2

满足约束方程 $f\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\vec{r}_1-\vec{r}_2\right)^2-l^2\right]=0$；约束力：

$$\vec{N}_1=\lambda\nabla_1 f\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2\right)=\lambda\left[\left(x_1-x_2\right)\vec{i}+\left(y_1-y_2\right)\vec{j}+\left(z_1-z_2\right)\vec{k}\right]=\lambda\left(\vec{r}_1-\vec{r}_2\right)$$
$$\vec{N}_2=\lambda\nabla_2 f\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2\right)=-\lambda\left[\left(x_1-x_2\right)\vec{i}+\left(y_1-y_2\right)\vec{j}+\left(z_1-z_2\right)\vec{k}\right]=-\lambda\left(\vec{r}_1-\vec{r}_2\right)$$

写出牛顿动力学方程：

$$\begin{cases} m_1\ddot{\vec{r}}_1=\vec{N}_1+\vec{F}_1 \\ m_2\ddot{\vec{r}}_2=\vec{N}_2+\vec{F}_2 \end{cases}$$

消去约束力均不困难。其关键还是在于：虽然各个约束力的虚功未必为零，但约束力的虚功之和为零，即：

$$\sum_{i=1}^{2}\vec{N}_i\cdot\delta\vec{r}_i=\vec{N}_1\cdot\delta\vec{r}_1+\vec{N}_2\cdot\delta\vec{r}_2=\lambda\left(\vec{r}_1-\vec{r}_2\right)\cdot\delta\vec{r}_1-\lambda\left(\vec{r}_1-\vec{r}_2\right)\cdot\delta\vec{r}_2$$
$$=\lambda\left(\vec{r}_1-\vec{r}_2\right)\cdot\left(\delta\vec{r}_1-\delta\vec{r}_2\right)=\lambda\left(\vec{r}_1-\vec{r}_2\right)\cdot\delta\left(\vec{r}_1-\vec{r}_2\right)=\frac{1}{2}\lambda\delta\left[\left(\vec{r}_1-\vec{r}_2\right)^2\right]=0$$

于是得到 $\left(m_1\ddot{\vec{r}}_1-\vec{F}_1\right)\cdot\delta\vec{r}_1+\left(m_2\ddot{\vec{r}}_2-\vec{F}_2\right)\cdot\delta\vec{r}_2=0$

这个方程称为达朗贝尔方程，进一步的讨论参阅 §**4．3**.

如果采用广义坐标 $\left\{q_\alpha,\alpha=1,2,\cdots s\right\}$，则虚位移为 $\left\{\delta\vec{r}_i=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha, i=1,2,\cdots n\right\}$，

也可记为 $\left\{\delta q_\alpha,\alpha=1,2,\cdots s\right\}$，完整约束的约束方程对虚位移所加的限制为

$$\delta f_l\left(\vec{r},t\right)=\sum_{i=1}^{n}\nabla_i f_l\cdot\delta\vec{r}_i=\sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{i=1}^{n}\nabla_i f_l\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\overline{f}_l}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha=0 \quad l=1,2,\cdots k \text{ 其中}$$

$$f_l\left(\vec{r},t\right)=f_l\left(\vec{r}\left(q,t\right),t\right)\equiv\overline{f}_l\left(q,t\right),\quad \frac{\partial\overline{f}_l}{\partial q_\alpha}=\sum_{i=1}^{n}\nabla_i f_l\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\quad l=1,2,\cdots k,\ \alpha=1,2,\cdots s$$

对广义坐标的虚位移当然也不再有所限制。

主动力的虚功为 $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha=\sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha\equiv\sum_{\alpha=1}^{s}Q_\alpha\delta q_\alpha$，

其中 $Q_\alpha=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}$ 称为主动力对应于广义坐标 q_α 的广义力。

3．理想约束

“约束力的虚功之和为零”这个条件并非普遍成立，但是有一大类重要的约束满足这个

条件。如果约束力的虚功之和为零，即满足$\sum_{i=1}^{n}\vec{N}_i\cdot\delta\vec{r}_i=0$，则这样的约束称为理想约束。

哪些约束是理想约束？（证明参阅[11]）

①光滑曲面约束（上面已证）

②光滑曲线约束（可仿上法进行讨论）（质点和刚体光滑表面的接触也属于上两者）

③质量可忽略的刚性杆链接的两质点（刚体内部的约束也是理想约束）

④刚体间以光滑表面（无摩擦）或完全粗糙表面（无滑动）相接触

⑤轻软不可伸长的绳（保持张紧的情况下，否则这是个单面约束）

⑥理想的铰链（无摩擦）；等等。

综上所述，我们可以看到，理想约束是光滑曲面约束，曲线约束的推广。如果质点间连接是刚性的，轻的（可忽略质量）；刚体间用理想铰链相联结；质点与刚体或刚体与刚体间以理想光滑表面，或完全粗糙表面相接触（没有相对滑动），所受到的约束也是理想约束。因此理想约束涵盖了相当广泛的一大类（没有摩擦或摩檫力不做功的）复杂的由质点和刚体组成的力学体系。出现摩檫力做功不能忽略的情况时，可将摩檫力看作未知主动力，（通过其他关系求出）而约束仍可认为是理想的。但是，理想约束并不限于上述各种情况，在某些摩檫力做功的不稳定约束情形下，仍可能是理想约束。（参阅[8]．第 173 页习题 4．7．） 因此我们判断一个约束是不是理想约束，还是应该根据定义，即条件$\sum_{i}\vec{N}_i\cdot\delta\vec{r}_i=0$。

4．非完整约束的概念和数学表述：

完整约束是加在坐标上的限制。由 n 个质点组成的质点系受到 k 个完整约束：$f_l\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots,\vec{r}_n,t\right)=0,\quad l=1,2,\cdots,k$，此时独立坐标的数目相应减少为$s=\left(3n-k\right)$。由完整约束方程求全导数也可得到对应的线性可积微分约束$\sum_{i=1}^{n}\nabla_i f_l\cdot\dot{\vec{r}}_i+\frac{\partial f_l}{\partial t}=0$，求变分可以得到$\sum_{i=1}^{n}\nabla_i f_l\cdot\delta\vec{r}_i=0$，$\alpha=1,2,\cdots k$；因此完整约束又是在坐标取值确定之后，对速度和对虚位移所加的限制。从而，独立的速度的数目和独立的变分（虚位移）的数目也同样相应减少。

然而非完整约束（即不可积分的微分约束，我们不讨论单面约束）$f\left(\vec{r}_1,\cdots,\vec{r}_n;\dot{\vec{r}}_1,\cdots,\dot{\vec{r}}_n,t\right)=0$不能通过积分化为完整约束的形式$f\left(\vec{r}_1,\cdots,\vec{r}_n;t\right)=0$，因此对坐标取值没有限制，并不减少独立广义坐标的数目。有非完整约束的力学体系称为非完整体系。实际问题中我们遇到的非完整约束几乎都可表为速度的线性函数，因此我们只讨论线性的非完整约束：$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i\dot{x}_i+b_i\dot{y}_i+c_i\dot{z}_i\right)+h=0$其中$a_i,b_i,c_i,h$均为坐标和时间的函数。线性非完整约束可以按$h$是否恒等于零，区分为齐次的和非齐次的。

线性非完整约束加在实位移上的限制是：
$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i dx_i+b_i dy_i+c_i dz_i\right)+hdt=0$$

把d改成δ,并取$\delta t=0$，就得到线性非完整约束加在虚位移上的限制：

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i\delta x_i+b_i\delta y_i+c_i\delta z_i\right)=0$$

比较上两式可知，对于线性非完整约束，实位移是否与某一个虚位移相同，就看 h 是否为零。也就是约束方程对于速度是否是齐次的。

完整约束 (包括可积微分约束) 和线性非完整约束加在虚位移上的限制条件具有相似的形式（*Pfaff* 形式），使独立的坐标变分（虚位移）数目减少。不同点在于前者可以积分，得到 $f(x, y, z, t)=0$ 这样的方程， 对坐标加以限制，减少独立坐标的数目；后者不可积分，不能得到 $f(x, y, z, t)=0$ 这样的方程，对坐标没有限制，所以不能减少独立坐标的数目。

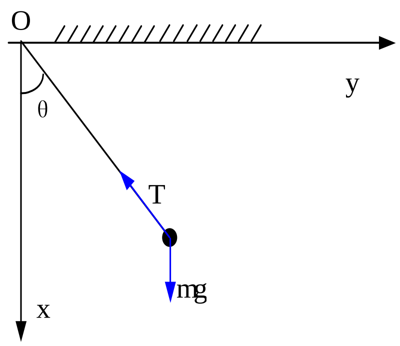
随着近代科技的发展，约束概念有了扩充。(参阅 [17]第 11－12 页)

5．力学体系的自由度

一般地说，如果质点系有 n 个质点，有 k 个完整约束 $f_j\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots,\vec{r}_n,t\right)=0 \quad j=1,2,\cdots k$，$g$ 个线性非完整约束 $\sum_{i=1}^{n}\left(a_{\beta i}\dot{x}_i+b_{\beta i}\dot{y}_i+c_{\beta i}\dot{z}_i\right)+h_\beta=0 \quad \beta=1,2,\cdots g$，则应有 $(3n-k)$ 个独立的广义坐标，($3n-k-g$)个独立的广义坐标的变分。我们把 $s=3n-k-g$ 叫做这个力学体系的自由度。也就是说，力学体系的自由度数就是独立的广义坐标的变分的数目。由于完整体系的独立广义坐标的数目和独立广义坐标的变分的数目是相等的，因此完整力学体系的自由度数目就是独立的广义坐标的数目 $3n-k$。

§4．2．变分法

1．应用举例



【例 1】求单摆的平衡位置：(静力学问题)

i)方法一：利用平衡位置应满足的平衡方程

$$\begin{cases} mg-T\cos\theta=0 \\ T\sin\theta=0 \end{cases}$$

求得平衡位置：$\theta=0 \qquad (T=mg)$

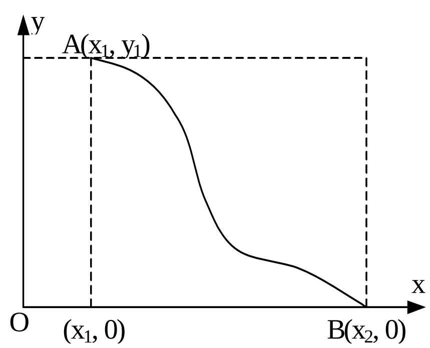
ii)方法二：利用势能 $V=-mgx=-mgl\cos\theta$ 最小

这个条件 $\dfrac{\partial V}{\partial\theta}=mgl\sin\theta=0$，同样可以得到平衡位置 $\theta=0$。这个条件也可表为 $\delta V=-mg\delta x=mgl\sin\theta\delta\theta=0$，这是静力学中的（微分形式的）变分原理。变分原理是将真实平衡位置与无限接近它的邻近位置比较，平衡位置将使动力学函数（势能）达到极值（确切地说是逗留值），满足 $dV=0$ 或 $\delta V=0$；而方法一则是着眼于一个单独的态（找出满足平衡条件的态）。

【例 2】最速落径问题（The brachistochrone problem）（动力学问题）

从静止出发，在重力作用下，沿光滑轨道由 A（x_1，y_1）滑到 B（x_2，0），问沿怎样的轨道 y＝f(x)所用时间 $T=\int_{(A)}^{(B)}dt=\int_{(A)}^{(B)}\frac{ds}{v}$ 最短。

注意：这里要求时间最短，而不是路程最短，因此结果不是直线。



$v=\sqrt{2g(y_1-y)}$， $ds=\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$

$$T=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(y_1-y)}}dx$$

T 不能是 x 的函数，因为它是上下限确定的对 x 的定积分。T 也不能是 y 的函数，因为如果 T 是 y 的“函数”，而 $y=f(x)$ 是 x 的函数，那么 T 就是 x 的复合函数，这显然也不对。上式应记为 $T=T[y]=T[f(x)]=T[f]$，不代表 x 与 T 之间的对应关系，而是函数关系 f（即 x 与 y 的对应关系）与 T 之间的对应关系。也就是无限多个函数值 $y=f(x)$与 T 之间的对应关系，即无限多个自变量 $y=f(x)$的多元函数 T；我们称 T 为 y 的泛函。把 $y=f(x)$的宗量 x 记成别的字母，例如 u，也不会改变 T 的值，在不会引起混淆时也可以略去不记，即 $T=T[f(x)]=T[f(u)]=T[f]$。上式中另外几个量：x_1，x_2，y_1 对这个泛函的定义是不可缺少的，也是不可随意改用别的字母来记。最速落径问题就是要求出使泛函 T 取极小值的函数 $f(x)$[也就是函数 $f(x)$的无限多个值]。

【例 3】均匀介质中光程是光的传播路程 l 与折射率 n 的乘积 nl，非均匀介质中光程应表为积分 $\int_{(A)}^{(B)}ndl$，这是路径函数的泛函。由于 $ndl=nvdt=n\frac{c}{n}dt=cdt$，光的传播时间是与光程成正比的。利用光程的概念，我们可以把几何光学的规律表述为费马原理（Fermat Principle)：（极端光程原理或时间极值原理）在介质内（一般可以不均匀），光从一点到另一点是沿光程取极值（逗留值）的路径传播的。或者说，是取所需时间为极值的路径传播的。均匀介质内光的直线传播定律、光的反射定律、光的折射定律都是费马原理的实例。

2．泛函

我们在此不来严格地阐述泛函的理论，只是与函数对比，给一个初步的描述。坐标作为时间的函数（运动方程），是从实数集（时间）到位形空间的映射；在增广的位形空间（q —t）中用曲线描述；增广的位形空间中的曲线在位形空间中的投影是其轨迹。

我们用一点来表示一个函数，满足一定条件的函数的全体组成函数空间（一般为无穷维的）。泛函则是从函数空间到实数集的映射。我们把泛函 F[q(t)]与有限个自变量的多元函数 $f(x_1\cdots x_n)$作一对比：

	F[q(t)]	$f(x_1\cdots x_n)$
自变量	∞个实数值 q(t)，∞维空间 H（函数空间）的点 $t_0\le t\le t_1, t$ 连续，∞个	n 个实数 x_k，n 维空间 R^n 的点 $k=1,2,\cdots n,\quad k$ 分立，有限个
因变量	F[q(t)]∈R（实数）	$f(x_1\cdots x_n)\in R$（实数）
映射	$H\xrightarrow{F}R$	$R^n\xrightarrow{f}R$
极值(逗留值)	当 $q(t)=q_e(t)$，$F[q(t)]=F_e$ 极值	当$(x_1, x_2, \cdots, x_n)=(x_{1e}, x_{2e}, \cdots, x_{ne})$，$f(x_1\cdots x_n)=f_e$ 极值
极值条件	δF=0	df=0
例	线性泛函 $F[q(t)]=\int_{t_0}^{t_1}C(t)q(t)dt$	线性函数 $f(x_1,x_2\cdots x_n)=\sum_{k=1}^{n}C_kx_k$

3．（等时）变分（与微分对比）：

函数的值取决于：自变量的值 和 函数值和自变量的值的函数对应关系。

函数的微分：自变量的值的微小改变量引起的函数值的改变量。在力学中我们经常运用的是自变量为 t 的函数 $q(t)$, $\dot{q}(t)$ 等等。我们曾研究，随 t 的变化引起的 q 的变化，在无限小情况下，用微分表示 $dq=\dot{q}dt$ 。

函数的变分：函数对应关系（函数形式）的微小改变（在对函数形式参数化的情况下表现为参数的微小改变量）引起的函数值的变更（对应于同一个 t）。函数 $q(t)$ 的变分 $\delta q(t)=\bar{q}(t)-q(t)$（即 $\bar{q}(t)=q(t)+\delta q(t)$），$\bar{q}(t)$，$q(t)$，代表两个相近的运动规律，$\delta q(t)$ 是同一时刻 t 的 $\bar{q}$ 与 q 的差。既然如此，自然有 $\delta t=0$。这种变分称为等时变分。作为泛函的自变量的函数 $q(t)$ ，其改变量应相当于 δq 而不是 dq。

我们还可以从另一个角度来理解 $\delta t=0$：一个确定的数（常数）C 是一维空间的一个点，一个确定的函数 $f(t)$ 是函数空间的一个点；确定的函数的变分对应于确定的数的微分。既然 $dC=0$ 是理所当然的，$\delta f(t)=0$ 也就不难理解了。我们把 t 看成一个确定的函数 $f(t)=t$，那么 $\delta t=0$ 也就是顺理成章的了。

【例 4】函数的变分的几个实例：

（1） $q(t)=at^2 \quad \bar{q}(t)=(a+\delta a)t^2$ 这里以 a 为函数形式的参数

$$dq=2atdt \quad \delta q(t)=\bar{q}(t)-q(t)=(\delta a)t^2=\frac{\partial q}{\partial a}\delta a,$$

(2) $q(t)=at^\alpha \quad \bar{q}(t)=at^{\alpha+\delta\alpha}$ 这里以 α 为函数形式的参数 $(\alpha>0)$

$$dq=\alpha at^{\alpha-1}dt \quad \delta q=\bar{q}(t)-q(t)=at^\alpha\left(t^{\delta\alpha}-1\right)\delta q=\frac{\partial q}{\partial\alpha}\delta\alpha\approx at^\alpha\cdot(\delta a)\ln t$$

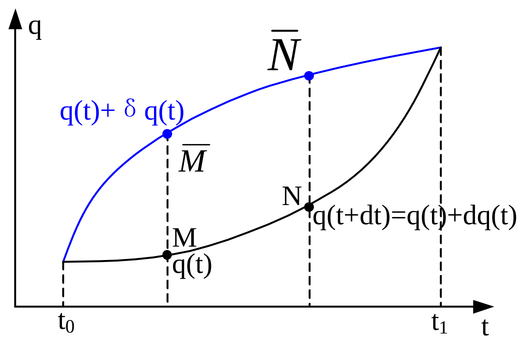
满足 $\delta q(0)=\delta q(1)=0$

(3) $q(t)=A\sin\omega t \quad \bar{q}(t)=(A+\delta A)\sin\omega t$ 以 a 为函数形式的参数

$$dq=\omega A\cos\omega t\cdot dt,\ \delta q=\bar{q}(t)-q(t)=\delta A\sin\omega t=\frac{\partial q}{\partial A}\delta A \text{满足} \delta q(0)=\delta q\left(\frac{\pi}{\omega}\right)=0$$

以上是某个参数引起的 δq 的几个实例；其实 δq 的形式是非常普遍的，并不限于某个或某些参数的改变所引起。

4．等时变分的运算法则： δ 与 d，$\dfrac{d}{dt}$ 的运算顺序的可交换性



考虑在 $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ 的两条曲线(代表两个运动规律，也称之为轨道。) $q(t)$（真实运动的规律）和 $\bar{q}(t)=q(t)+\delta q(t)$（与真实运动规律无限邻近的为约束所允许的规律)，两者起点和终点的时间、位置均相同，即 $q(t_0)=\bar{q}(t_0)$，$q(t_1)=\bar{q}(t_1)$。于是 $\delta q(t_0)$

$= \delta q(t_1) = 0$。(这个要求是下面讨论哈密顿原理所要求的。)考虑两曲线上的四个点 M, N, $\overline{M}$, $\overline{N}$ 分别对应于 $q(t)$, $q(t+dt)$, $\overline{q}(t) = q(t) + \delta q(t)$ 和

$\overline{q}(t+dt) = q(t+dt) + \delta q(t+dt)$。我们用两种不同方法计算 $\overline{q}(t+dt)$。

1. $M \to N \to \overline{N}$

$$q(t) \quad \to \quad q(t+dt) = q(t) + dq(t) \quad \to$$
$$\to \quad \overline{q}(t+dt) = q(t+dt) + \delta q(t+dt) = q(t) + dq(t) + \delta q(t) + \delta dq(t)$$

2. $M \to \overline{M} \to \overline{N}$

$$\overline{q}(t) \quad \to \quad \overline{q}(t) = q(t) + \delta q(t) \quad \to$$
$$\to \quad \overline{q}(t+dt) = \overline{q}(t) + d\overline{q}(t) = q(t) + \delta q(t) + dq(t) + d\delta q(t)$$

上述两个结果应相等，比较得 $\delta dq(t) = d\delta q(t)$ （1）

即：在等时变分 $\delta t = 0$ 的条件下，δ和 d 可以交换次序。

$$\delta \dot{q} = \delta\left(\frac{dq}{dt}\right) = \frac{\delta(dq)dt - dq\delta(dt)}{dt^2} = \frac{\delta(dq)}{dt} = \frac{d(\delta q)}{dt} = \frac{d}{dt}\delta q \qquad （2）$$

所以 δ 和 $\frac{d}{dt}$ 可交换次序。(在证明过程中用到了 $\delta(dt) = d(\delta t) = 0$)

5．我们进一步研究复合函数 $u = f(q(t), \dot{q}(t), t)$ 在某一瞬时 t，由于函数 $q = q(t)$ 形式的变化引起 q 的变化 $\delta q(t) = \overline{q}(t) - q(t)$（注意，$\delta q(t)$ 与 $dq = \dot{q}dt$ 不同)，也引起 $\dot{q}$ 的变化 $\delta\dot{q}(t) = \frac{d}{dt}\delta q = \frac{d}{dt}\left[\overline{q}(t) - q(t)\right]$，$q$ 和 $\dot{q}$ 的变化引起 u 的变化，但不考虑 f 的形式的改变(即 $q(t)$ 是函数空间的变点，而 f 是确定的函数关系)，这称为 u 的变分

$$\begin{aligned}
\delta u = \delta f(q, \dot{q}, t) &= f\left(q(t) + \delta q(t), \dot{q}(t) + \delta\dot{q}(t), t\right) - f\left(q(t), \dot{q}(t), t\right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial q}\delta q + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} = \frac{\partial f}{\partial q}\delta q + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}\delta q = \frac{\partial f}{\partial q}\delta q + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}}\delta q\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}}\right)\delta q \\
&= -\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial f}{\partial q}\right]\delta q + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}}\delta q\right) \qquad (3)
\end{aligned}$$

在此情况下，变分运算与微分的运算 $du = \left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)dq + \frac{\partial f}{\partial t}dt$ 是很相似的。但应注意 $\delta t = 0$。

6．泛函 $F\left[q(t)\right] = \int_{t_0}^{t_1} f(q, \dot{q}, t)dt$ 的变分 δ 与 $\int dt$ 的运算顺序的可交换性

泛函的变分应该是 q 的形式改变引起 F 的变化（函数 f 的形式不变)。因此

$$\delta F\left[q(t)\right]=\delta\int_{t_0}^{t_1} f\left(q,\dot{q},t\right)dt=F\left[q(t)+\delta q(t)\right]-F\left[q(t)\right]$$
$$=\int_{t_0}^{t_1} f\left(q(t)+\delta q(t),\dot{q}(t)+\delta\dot{q}(t),t\right)dt-\int_{t_0}^{t_1} f\left(q,\dot{q},t\right)dt$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\left[f\left(q(t)+\delta q(t),\dot{q}(t)+\delta\dot{q}(t),t\right)-f\left(q,\dot{q},t\right)\right]dt=\int_{t_0}^{t_1}\delta f\left(q,\dot{q},t\right)dt \quad (4)$$

至此得到，在等时变分的条件下（$\delta t=0$），δ 与 $\int dt$ 可以交换运算顺序。进一步，如果我们设定在积分区间端点函数 $q(t)$ 的值确定，即 $\delta q(t_0)=\delta q(t_1)=0$（例如【例 2】就是这样设定的），于是得，

$$\delta F\left[q(t)\right]=\int_{t_0}^{t_1}\left\{-\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{q}}\right)-\frac{\partial f}{\partial q}\right]\delta q+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{q}}\delta q\right)\right\}dt$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\left\{-\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{q}}\right)-\frac{\partial f}{\partial q}\right]\right\}\delta q dt+\frac{\partial f}{\partial\dot{q}}\delta q\bigg|_{t_0}^{t_1}$$
$$=-\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{q}}\right)-\frac{\partial f}{\partial q}\right]\delta q dt \quad (5)$$

7．上述关于泛函及其变分的表达式的讨论，推广到多个 q_α 的情况，是直截了当的。

$$\delta u=\delta f\left(q,\dot{q},t\right)=-\sum_{\alpha=1}^{s}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\right]\delta q_\alpha+\frac{d}{dt}\left(\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial f}{\partial\dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha\right) \quad (3')$$

$$\delta F\left[q(t)\right]=\delta\int_{t_0}^{t_1} f\left(q,\dot{q},t\right)dt=\int_{t_0}^{t_1}\delta f\left(q,\dot{q},t\right)dt$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\left\{-\sum_{\alpha=1}^{s}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\right]\delta q_\alpha+\frac{d}{dt}\left(\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial f}{\partial\dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha\right)\right\}dt$$
$$=-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\alpha=1}^{s}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\right]\delta q_\alpha dt \quad (5')$$

这里我们同样设定函数在积分区间端点的值确定，即

$$\delta q_\alpha(t_0)=\delta q_\alpha(t_1)=0 \quad \alpha=1,2,\cdots s$$

8．泛函的极值：

与函数 $f(x)$取极值的必要条件 $df=0$ 即 $f'(x)=0$ 相仿，泛函 $F[q(t)]=\int_{t_0}^{t_1} f(q,\dot{q},t)dt$ 取极值的必要条件为 $\delta F\left[q(t)\right]=0$；由（5）式，由于积分上下限 t_0, t_1 任意选定，δq 是任意的（$t_0<t<t_1$）所以 $\delta F=0$ 等价于 $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial f}{\partial\dot{q}}-\dfrac{\partial f}{\partial q}=0$，称为 *Euler* 方程（1744）。在多个 q_α 的情况下，如果再加上各个 δq_α 相互独立的设定条件，则同样得到 *Euler* 方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}=0 \qquad \alpha=1,2,\cdots s$$

【例 5】利用 *Euler* 方程解最速落径问题。

解：为求泛函 $T=\int_{x_1}^{x_2} f\left(y,y',x\right)dx=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2g\left(y_1-y\right)}}dx$ 的极值，*Euler* 方程为 $\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}-\frac{\partial f}{\partial y}=0$ 即由于 f 不显含 x，可以得初积分 $y'\frac{\partial f}{\partial y'}-f=C$ 整理得 $\left(y_1-y\right)\left(1+y'^2\right)=C_1>0$；令 $y'=-\cot\theta$ 则有 $y=y_1-C_1\sin^2\theta$ 进一步，$dx=\frac{dy}{y'}=2C_1\sin^2\theta d\theta$ 于是得

$$\begin{cases} x=\frac{C_1}{2}\left(2\theta-\sin 2\theta\right)+C_2 \\ y=y_1-\frac{C_1}{2}\left(1-\cos 2\theta\right) \end{cases}$$

这是摆线的参数方程。

起点：$x=x_1$，$y=y_1$　可取：$\theta=\theta_1=0$ 则 $C_2=x_1$

终点：$x=x_2$，$y=y_2=0$，记 $\theta=\theta_2$，

θ_2 满足 $\frac{x_2-x_1}{y_1}=\frac{\theta_2-\sin\theta_2\cos\theta_2}{\sin^2\theta_2}$　可得 $C_1=\frac{y_1}{\sin^2\theta_2}$

由图上坐标系可知，$x_1\le x\le x_2$，$y_1\ge y\ge 0$　从而 $C_1>0$，$0\le\theta\le\theta_2\le\frac{\pi}{2}$

$$T=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2g\left(y_1-y\right)}}dx=\int_0^{\theta_2}\frac{\csc\theta}{\sqrt{2gC_1}\sin\theta}\cdot 2C_1\sin^2\theta d\theta=\sqrt{\frac{2C_1}{g}}\theta_2=\sqrt{\frac{2y_1}{g}}\frac{\theta_2}{\sin\theta_2}$$

我们考虑路径为直线的情况，在这种情况下，路程最短，但时间未必最短。事实上，对于直线路径 AB，$y'=-\frac{y_1}{x_1-x_2}<0$ 为常数；$T_1=\int_{y_1}^{0}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2g}}\cdot\frac{1}{y'}\cdot\frac{dy}{\sqrt{y_1-y}}=\sqrt{\frac{2y_1}{g}}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y'^2}}$

$$\frac{1+y'^2}{y'^2}-\left(\frac{\theta_1}{\sin\theta_1}\right)^2=\frac{\theta_2^2-2\theta_2\sin\theta_2\cos\theta_2+\sin^2\theta_2}{\sin^4\theta_2}-\frac{\theta_2^2}{\sin^2\theta_2}=\left(\frac{\theta_2\cos\theta_2-\sin\theta_2}{\sin^2\theta_2}\right)^2>0$$

$$\therefore\frac{1+y'^2}{y'^2}>\left(\frac{\theta_2}{\sin\theta_2}\right)^2 \text{ 即 } \sqrt{\frac{1+y'^2}{y'^2}}>\frac{\theta_2}{\sin\theta_2}>0 \quad \therefore T_1>T$$

可见虽然直线距离最短，但所用时间却不是最短的。摆线情况下所用时间才是最短的。

§4．3．哈密顿原理

1．动力学方程的变分形式

质点系的牛顿动力学方程组为 $m_i\ddot{\vec r}_i=\vec F_i+\vec N_i \quad \left(i=1,2,\cdots,n\right)$ $\vec F_i$ 为主动力，$\vec N_i$ 为约束力。

对动力学方程移项，可得达朗贝尔原理 $\quad \vec F_i+\vec N_i-m_i\ddot{\vec r}_i=0 \qquad i=1,2,\cdots,n$

达朗贝尔原理的物理意义为：任一质点所受的主动力、约束力和惯性力的合力为零。质点在随自身平动的参考系中总是平衡的。此原理把动力学问题转化为静力学问题，(所以有动静法之称)。达朗贝尔原理更有重要的理论价值：从 $\vec F_i+\vec N_i-m_i\ddot{\vec r}_i=0$ 出发，两边点乘以 $\delta\vec r_i$，再对 i 求和，在理想约束条件下，可以消去约束力，得到达朗贝尔方程：

这个方程也称为达朗贝尔－拉格朗日方程，又称为达朗贝尔－拉格朗日原理，动力学虚功原理或动力学基本方程。这是动力学方程的一种微分形式的变分原理。

【例 1】我们已经用牛顿方程给出了[1]10 页图 1．7 例题的动力学方程，(参阅§2．3.【例 1】)现在讨论如何用达朗贝尔方程来建立动力学方程。由于

$m_1=m,\ m_2=m',\ \vec F_1=0,\ \vec F_2=-m'g\vec k,\ \vec N_1=-F_T\vec e_r,\ \vec N_2=F_T\vec k$，达朗贝尔原理可表为

$$\begin{cases} m_1\ddot{\vec r}_1-\vec F_1-\vec N_1=\left[m\left(\ddot R-R\dot\varphi^2\right)+F_T\right]\vec e_r+m\left(R\ddot\varphi+2\dot R\dot\varphi\right)\vec e_\varphi=0 \\ m_2\ddot{\vec r}_2-\vec F_2-\vec N_2=(m'\ddot z-F_T+m'g)\vec k=0 \end{cases}$$

轻软不可伸长的绳是理想约束，事实上，理想约束条件满足：

$$\vec N_1\cdot\delta\vec r_1+\vec N_2\cdot\delta\vec r_2=-F_T\vec e_r\cdot\delta\vec r_1+F_T\vec k\cdot\delta\vec r_2=-F_T\delta R+F_T\delta z=0$$

由此可以消去约束力，得到达朗贝尔方程 $(m_1\ddot{\vec r}_1-\vec F_1)\cdot\delta\vec r_1+(m_2\ddot{\vec r}_2-\vec F_2)\cdot\delta\vec r_2=0$

利用 $\vec r_1=x\vec i+y\vec j=R\,\vec e_r,\ \vec r_2=z\vec k$； $\quad \delta\vec r_1=\delta x\vec i+\delta y\vec j=\delta R\cdot\vec e_r+R\delta\varphi\cdot\vec e_\varphi,\ \delta\vec r_2=\delta z\vec k$

化为 $m\left(\ddot R-R\dot\varphi^2\right)\delta R+m\left(R\ddot\varphi+2\dot R\dot\varphi\right)R\delta\varphi+\left(m'\ddot z+m'g\right)\delta z=0$

利用约束方程 $f\left(\vec r_1,\vec r_2,t\right)=R-z-l=0$ 得 $z=R-l$，进一步得 $\delta z=\delta R$，消去不独立的坐标和变分，例如消去 $z,\ \delta z$，于是得 $\left[\left(m+m'\right)\ddot R-mR\dot\varphi^2+m'g\right]\delta R+m\left(R\ddot\varphi+2\dot R\dot\varphi\right)R\delta\varphi=0$

变分 $\delta R,\delta\varphi$ 完全独立，系数各自为零，就得到两个方程。(与牛顿动力学方程消去约束力以后的方程相同，见[1]33 页（5）（6）式。)

由此可见，建立牛顿动力学方程需要分析质点系的约束力，然后再消去未知的约束力，消去不独立的坐标，以求得一个尽可能简单的微分方程组。建立达朗贝尔方程，只要是理想约束，就不必去分析质点系的约束力，当然也不存在消去未知约束力的问题，只要化为独立的广义坐标，就可以得到这个同样简单的微分方程组。

2．积分形式的力学变分原理

我们从动力学基本方程 $\sum_{i=1}^{n}\left(\vec F_i-m_i\ddot{\vec r}_i\right)\cdot\delta\vec r_i=0$ 出发，其中惯性力的项可以化为：

$$\sum_{i=1}^{n}\left(-m_i\ddot{\vec{r}}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(-m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\delta\vec{r}_i\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(-m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\delta\dot{\vec{r}}_i\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(-m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\delta\vec{r}_i\right)+\delta\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i^{2}\right)=-\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot{\vec{r}}_i}\cdot\delta\vec{r}_i\right)+\delta T\qquad T=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i^{2}\right)$$

是力学体系的动能。如果主动力是有势力，V 为势能，则主动力项可以化为：

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i=\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\partial V}{\partial\vec{r}_i}\right)\cdot\delta\vec{r}_i=-\delta V$$

于是动力学基本方程就可以化为

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i-m_i\ddot{\vec{r}}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i=-\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\vec{r}}_i}\cdot\delta\vec{r}_i\right)+\delta\left(T-V\right)=-\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\left(T-V\right)}{\partial\dot{\vec{r}}_i}\cdot\delta\vec{r}_i\right)+\delta\left(T-V\right)=0$$

这个方程对一般的广义坐标有统一的形式，因为

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\left(T-V\right)}{\partial\dot{\vec{r}}_i}\cdot\delta\vec{r}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\left(T-V\right)}{\partial\dot{\vec{r}}_i}\cdot\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\left(T-V\right)}{\partial\dot{\vec{r}}_i}\cdot\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial\dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha\right)$$
$$=\sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\left(T-V\right)}{\partial\dot{\vec{r}}_i}\cdot\frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial\dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha\right)=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial\left(T-V\right)}{\partial\dot{q}_\alpha}\cdot\delta q_\alpha\right)$$

动力学基本方程就可以化为

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i-m_i\ddot{\vec{r}}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i=-\frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial\left(T-V\right)}{\partial\dot{q}_\alpha}\cdot\delta q_\alpha\right)+\delta\left(T-V\right)=0$$

对时间取积分，记 $L=T\left(q,\dot{q},t\right)-V\left(q,t\right)=L\left(q,\dot{q},t\right)$，是坐标和速度的函数（这里可以采用直角坐标，也可以采用任意广义坐标），称为 Lagrange 函数；在端点固定，即 $\delta\vec{r}_i\left(t_0\right)=\delta\vec{r}_i\left(t_1\right)=0$ 的条件下，得 $\delta\int_{t_0}^{t_1}Ldt=0$。于是动力学方程化为某一泛函取极值（逗留值）的条件，这是一种积分形式的力学变分原理，称为哈密顿（Hamilton）原理（1834），又称为哈密顿最小作用量原理，其中泛函 $S=\int_{t_0}^{t_1}Ldt$ 称为哈密顿作用量。

由泛函取极值（逗留值）的条件，哈密顿原理 $\delta\int_{t_0}^{t_1}Ldt=0$，等价于欧勒——拉格朗日方程为 $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}}-\dfrac{\partial L}{\partial q}=0$，在力学中通常称为拉格朗日方程（又称第二类拉格朗日方程或保守系的拉格朗日方程）。在多个自由度的情况下，如果各广义坐标的变分是相互独立的，同样可以得到

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0\qquad\alpha=1,2,\cdots,s$$

拉格朗日方程是分析力学的理论框架中最重要，也最常用的动力学方程之一。

综上所述，在由达朗贝尔原理 $\vec{F}_i+\vec{N}_i-m_i\ddot{\vec{r}}_i=0$ 得到 $\delta\int_{t_0}^{t_1}Ldt=0$ 的过程中用到了理想、保守的条件，在进一步得到拉格朗日方程时，基于广义坐标的变分 δq_α 的相互独立性；这就要求：我们所选用的广义坐标是独立的，而且约束是完整的。因而哈密顿原理可以表述如下：

在 t_0 和 t_1 时间间隔内，一个保守的力学体系，受到的约束是理想的，完整的，$q=\{q_\alpha,\alpha=1,2,\cdots s\}$ 是一组独立的广义坐标，s 为自由度数。有确定的始终点，即 $q_\alpha(t_0)$ 和 $q_\alpha(t_1)$ 有确定的值，（$\delta q_\alpha(t_0)=\delta q_\alpha(t_1)=0$），在约束所允许的各种可能运动 $q_\alpha(t)$ 中，由动力学规律所决定的真实运动可由泛函 $S=\int_{t_0}^{t_1}L(q,\dot{q},t)dt$ 取极值（逗留值）的条件 $\delta S=\delta\int_{t_0}^{t_1}L(q,\dot{q},t)dt=0$ 给出。S 称为 Hamilton 作用量，$L=L(q,\dot{q},t)=T-V$ 为 Lagrange 函数，其中 T 和 V 分别为力学体系的动能和势能。

我们在这里叙述的哈密顿原理，适用于理想、完整、保守的力学体系。其实还可以推广，可参阅附录 A．7 和有关参考资料。

3．哈密顿原理可以和牛顿动力学方程、达朗贝尔原理、达朗贝尔－拉格朗日方程（动力学基本方程）、拉格朗日方程一样作为力学的第一性原理，但更有其优越性：从整体考察体系的运动规律，挑出真实运动。这是积分形式的变分原理的优点；具有直观紧凑的形式 $\delta S=0$；Hamilton 原理着眼于能量，便于推广到光学、电磁场理论、量子理论等（经推广后的拉格朗日函数，不再限于 $L=T-V$ ）。事实上 Hamilton 原理已成为现代物理学理论中的第一性原理。物理学理论众多领域中的第一性原理都可以表为形如 Hamilton 原理那样的原理。

第五章　拉格朗日方程

§5．1．拉格朗日方程

1．对于理想完整保守的力学体系，我们已经从哈密顿原理导出拉格朗日方程。在同样的条件下，通过把坐标变换为独立的广义坐标也可以由达朗贝尔方程

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i-m_i\ddot{\vec{r}}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i=0 \qquad (1)$$

导出拉格朗日方程。具体过程如下：

在完整约束的条件下，利用坐标变换 $\vec{r}_i=\vec{r}_i\left(q_\alpha,\ t\right)\quad i=1,2,\cdots n\quad \alpha=1,2,\cdots s$ 可以变换为独立的广义坐标，并得到 $\delta\vec{r}_i=\sum\limits_{\alpha=1}^{s}\dfrac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\cdot\delta q_\alpha,\quad s=3n-k$

于是（1）式就化为 $\sum\limits_{\alpha=1}^{s}\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\dfrac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}-\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\ddot{\vec{r}}_i\cdot\dfrac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right]\delta q_\alpha=0 \qquad (2)$

（2）式$[\ \ ]$中第一项 $\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\dfrac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha$ 称为主动力对应于广义坐标 q_α 的广义力，是主动力在(由广义坐标构成的曲线坐标系的)坐标曲线的切线方向上的投影之和，其量纲也可能与力不同。（见后）第二项是质量与加速度的乘积在对应的坐标曲线的切线方向上的投影之和。因此（2）式$[\ \ ]$是 $\vec{F}-m\vec{a}$ 在独立的广义坐标(一般为曲线坐标)下的推广。第二项还可以变形为

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\ddot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}=\sum_{i=1}^{n}m_i\left[\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right)-\dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right]=\sum_{i=1}^{n}m_i\left[\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)-\dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha}\right]=\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}$$

其中 $T=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\dot{\vec{r}}_i^2$ 为动能。以上运算利用了两个经典拉格朗日关系 $\dfrac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial\dot{q}_\alpha}=\dfrac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\quad \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}=\dfrac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha}$

于是（2）式就化为

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\left(Q_\alpha+\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)\cdot\delta q_\alpha=0\qquad \alpha=1,2,\cdots,s \qquad (3)$$

在约束完整的条件下，由于 δq_α 是相互独立的，由（3）就得到基本形式的拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha\qquad \alpha=1,2,\cdots,s \qquad (4)$$

方程（4）对理想、完整力学体系普遍成立。

在主动力为有势力的情况下 $\vec{F}_i=-\dfrac{\partial V\left(q,t\right)}{\partial\vec{r}_i}$，$V$ 为势能；广义力可表为：

$$Q_\alpha=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}=\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\partial V}{\partial\vec{r}_i}\right)\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}=-\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}$$

于是（2）式化为 $\sum_{\alpha=1}^{s}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\right]\cdot\delta q_\alpha=0 \qquad L=T-V \qquad \alpha=1,2,\cdots,s$ (5)

其中 $L=T-V$ 称为拉格朗日函数。

由（5）就得到理想、完整、保守体系的拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0 \qquad \alpha=1,2,\cdots,s \qquad (6)$$

即第二类拉格朗日方程或简称为拉格朗日方程；

有势力这个概念可以推广为广义有势力：

$\vec{F}=\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial\dot{\vec{r}}}-\frac{\partial U}{\partial\vec{r}}=\frac{d}{dt}\nabla_{\dot{\vec{r}}}U-\nabla U$ 其中 $U=U\left(\vec{r},\dot{\vec{r}},t\right)$ 称为广义势。如果力 $\vec{F}=\vec{F}\left(\vec{r},\dot{\vec{r}},t\right)$ 不依赖高阶导数，则广义势应为速度的线性函数：

$$U\left(\vec{r},\dot{\vec{r}},t\right)=\vec{G}\left(\vec{r},t\right)\cdot\dot{\vec{r}}+V\left(\vec{r},t\right)$$

这样的推广是有意义的。首先是因为在自然界确实存在一类这样的力。

例如：我们知道，静电场的库伦力是有势力；但一般的电磁场的 Lorentz 力就不是有势的了。我们来证明 Lorentz 力 $\vec{F}=q\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)$ 是广义有势力，事实上，由于

$\vec{B}=\nabla\times\vec{A},\ \vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$，就得到 $\vec{F}=q\left(-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+\vec{v}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)\right)$ 其中

$\vec{A}=\vec{A}\left(\vec{r},t\right)$ 和 $\varphi=\varphi\left(\vec{r},t\right)$ 分别是电磁场的矢势和标势，q 是电荷。利用

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+\left(\vec{v}\cdot\nabla\right)\vec{A}$$

$$\vec{v}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)=\nabla\left(\vec{v}\cdot\vec{A}\right)-\left(\vec{v}\cdot\nabla\right)\vec{A}$$

可以求得 $\vec{F}=q\left(-\frac{d\vec{A}}{dt}-\nabla\varphi+\nabla\left(\vec{v}\cdot\vec{A}\right)\right)=q\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\left(\varphi-\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}}\right)}{\partial\dot{\vec{r}}}-\nabla\left(\varphi-\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}}\right)\right)$

取广义势 $U=-q\left(\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}}-\varphi\right)$ 可以得到 $\vec{F}=\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial\dot{\vec{r}}}-\frac{\partial U}{\partial\vec{r}}$

这就证明了 Lorentz 力是广义有势力。

附注：$\vec{v}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)=\nabla\left(\vec{v}\cdot\vec{A}\right)-\left(\vec{v}\cdot\nabla\right)\vec{A}$ 证明如下：

$$\left[\vec{v}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)\right]_i=\varepsilon_{ijk}v_j\left(\nabla\times\vec{A}\right)_k=\varepsilon_{ijk}v_j\varepsilon_{klm}\partial_l A_m=\left(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}\right)v_j\partial_l A_m$$

$$=v_m\partial_i A_m-v_l\partial_l A_i=\left[\nabla\left(\vec{v}\cdot\vec{A}\right)\right]_i-\left(\vec{v}\cdot\nabla\right)A_i$$

其次，有势力可以作为特殊情况包括在广义有势力中，因此广义有势力涵盖了弹性力，万有引力，洛伦茨力等一大类重要的力；还应指出的是，在分析力学中我们将能够用统一的理论方法来处理有势力和广义有势力。事实上，在主动力为广义有势力（包括有势力作为特殊情况在内）的条件下：

$$Q_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}_i} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) - \frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}_i}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}_i}\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \right) - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}_i}\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) = \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial U}{\partial q_\alpha}$$

如果引入 $L = T - U$，其中 $U = U(q, \dot{q}, t)$ 为广义势，则（2）式化为与(5)式相似的形式：

$$\sum_{\alpha=1}^{s} \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \right] \cdot \delta q_\alpha = 0 \qquad \alpha = 1, 2, \cdots, s \qquad （5'）$$

由（5'）得到与（6）式相似（第二类）拉格朗日方程。因此（6）式虽然通常称为理想、完整、保守体系的拉格朗日方程，但是在主动力包括有势力和广义有势力的情形，依然成立；只是拉格朗日函数应推广为 $L = T - U$ 其中 $U = U(q, \dot{q}, t)$ 为广义势。

在广义有势力（包括有势力）和非有势力并存的情形： 如果主动力为 $Q_\alpha = Q_{p\alpha} + Q'_\alpha$

其中 $Q_{p\alpha} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial U}{\partial \dot{q}_\alpha} - \dfrac{\partial U}{\partial q_\alpha}$ 对应于广义有势力（包括有势力）；Q'_α 为其它广义力。则拉格朗日方程可

改写为 $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = Q'_\alpha \qquad \alpha = 1, 2, \cdots, s \qquad L = T - U \qquad (7)$$

其中拉格朗日函数 $L = T - U$

以上各种形式的拉格朗日方程（4）（6）（7）均可从哈密顿原理的推广了的各种形式导出，可参阅附录 A．7 和有关参考资料。

拉格朗日方程的优点在于消去约束力，使问题简化。但这也成为其缺点所在，既消去了约束力，也就无法求得约束力。为了求约束力，就要用其它方法（牛顿方程或第一类拉格朗日方程等）。

2．拉格朗日方程中各项的显式和物理意义

（1）动能的显式：$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}$，

以一个质点为例，列举几种常用坐标系中的动能表达式：

广义坐标	直角坐标 (x, y, z)	平面极坐标 (r, θ)	球坐标 (r, θ, φ)
动能	$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$	$T = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$	$T = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta)$

以上诸式可直接推广到质点系。在k个完整约束的条件下，$f_l\left(\vec{r},t\right)=0 \quad l=1,2,\cdots k$，通过坐标变换$\vec{r}_i=\vec{r}_i\left(q_\alpha,t\right)$，$\left(i=1,2,\cdots n，\ \alpha=1,2,\cdots s，\ s=3n-k\right)$，可以把动能化为广义坐标和广义速度的表达式。由于$\dot{\vec{r}}_i$为$\dot{q}_\alpha$的一次式，$\dot{\vec{r}}_i=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}$，$T$为$\dot{q}_\alpha$的二次式（其齐次与否取决于坐标变换式$\vec{r}_i=\vec{r}_i\left(q_\alpha,t\right)$是否显含$t$）。

$$
\begin{aligned}
T=T\left(q,\dot{q},t\right)&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i^{\,2}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2\right)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}A_{\alpha\beta}\left(q,t\right)\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta+\sum_{\alpha=1}^{s}B_\alpha\left(q,t\right)\dot{q}_\alpha+\frac{1}{2}C\left(q,t\right)=T_2+T_1+T_0
\end{aligned}
$$

$T_2=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{s}A_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta$，$T_1=\sum_{\alpha=1}^{s}B_\alpha\dot{q}_\alpha$，$T_0=\frac{1}{2}C$分别为$\dot{q}_\alpha$的齐二次式，齐一次式和不含$\dot{q}_\alpha$的式子，其中$A_{\alpha\beta}=\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\beta}$，$B_\alpha=\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}$，$C=\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}\right)^2$由此可见，在直角坐标系中动能的显式是不显含时间的，且是速度的齐二次式；而在广义坐标系中的表达式却是可能显含时间的。下面结合约束特点来看几种情形：

1）一般说，对于稳定且完整的约束，$f\left(x,y,z\right)=0$，总可以用不显含t的坐标变换引入独立的广义坐标，得到的动能表达式不显含时间，而且是广义速度的齐二次式（完全稳定系统）。但也可能用显含t的坐标变换引入独立的广义坐标，得到的动能表达式是广义速度的非齐次二次式（显含或不显含时间）。

【例 1】在（*x*,*y*）平面上运动的质点受稳定约束$x^2+y^2-a^2=0$，试分别利用坐标变换：

$$
\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=a\sin\theta\end{cases}\quad
\begin{cases}x=a\cos\left[\theta+f\left(t\right)\right]\\ y=a\sin\left[\theta+f\left(t\right)\right]\end{cases}\quad
\begin{cases}x=a\cos\left[\theta+\omega t\right]\\ y=a\sin\left[\theta+\omega t\right]\end{cases}\ (\omega\text{是常量})
$$

验证上述论断。

【解】

$$
\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=a\sin\theta\end{cases}\qquad
\begin{cases}x=a\cos\left[\theta+f\left(t\right)\right]\\ y=a\sin\left[\theta+f\left(t\right)\right]\end{cases}\qquad
\begin{cases}x=a\cos\left[\theta+\omega t\right]\\ y=a\sin\left[\theta+\omega t\right]\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}\dot{x}=-a\dot{\theta}\sin\theta\\ \dot{y}=a\dot{\theta}\cos\theta\end{cases}\qquad
\begin{cases}\dot{x}=-a\left(\dot{\theta}+\dot{f}\right)\sin\left(\theta+f\right)\\ \dot{y}=a\left(\dot{\theta}+\dot{f}\right)\cos\left(\theta+f\right)\end{cases}\qquad
\begin{cases}\dot{x}=-a\left(\dot{\theta}+\omega\right)\sin\left(\theta+\omega t\right)\\ \dot{y}=a\left(\dot{\theta}+\omega\right)\cos\left(\theta+\omega t\right)\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}T&=\frac{m}{2}a^2\dot{\theta}^2\\&=T_2\end{aligned}\qquad
\begin{aligned}T&=\frac{m}{2}\left[a^2\dot{\theta}^2+2a^2\dot{f}\dot{\theta}+a^2\dot{f}^2\right]\\&=T_2+T_1+T_0\end{aligned}\qquad
\begin{aligned}T&=\frac{m}{2}\left[a^2\dot{\theta}^2+2a^2\omega\dot{\theta}+a^2\omega^2\right]\\&=T_2+T_1+T_0\end{aligned}
$$

齐二次式,不显含 t；　　非齐次二次式,一般说显含t；　　非齐次二次式,但不显含 t

2）对于不稳定但完整的约束，必须用显含t的坐标变换引入独立的广义坐标，因此$\dot{\vec{r}}_i$必为$\dot{q}_\alpha$的非齐次一次式；动能为非齐次二次式（显含或不显含时间）。如果动能的表达式显含时间，称为（完全）不稳定系统；如果动能的表达式不显含时间，称为半不稳定系统或者在广义坐标中的稳定系统。

【例 2】分别对于不稳定约束

$(x-a\cos\omega t)^2+(y-a\sin\omega t)^2-a^2=0$，　　$x^2+y^2-\left[f(t)\right]^2=0$，　和$\dfrac{y}{x}=tan\,\omega t$，

利用显含时间的坐标变换$\begin{cases}x=a[\cos\omega t+\cos\theta]\\ y=a[\sin\omega t+\sin\theta]\end{cases}$ $\begin{cases}x=f(t)\cos\theta\\ y=f(t)\sin\theta\end{cases}$ 和$\begin{cases}x=r\cos\omega t\\ y=r\sin\omega t\end{cases}$

求出动能的表达式。

【解】均为不稳定约束。前两例动能显含 t，((完全）不稳定系统)；后一例动能不显含 t，但不能表为广义速度的齐二次式（半不稳定系统或者在广义坐标中的稳定系统）。

$$(x-a\cos\omega t)^2+(y-a\sin\omega t)^2-a^2=0$$
$$\begin{cases}x=a[\cos\omega t+\cos\theta]\\ y=a[\sin\omega t+\sin\theta]\end{cases}$$
$$\begin{cases}\dot{x}=-a\left[\omega\sin\omega t+\dot{\theta}\sin\theta\right]\\ \dot{y}=a\left[\omega\cos\omega t+\dot{\theta}\cos\theta\right]\end{cases}$$
$$T=\frac{m}{2}\left[a^2\dot{\theta}^2+a^2\omega\dot{\theta}\cos(\omega t-\theta)+a^2\omega^2\right]$$
$$=T_2+T_1+T_0$$

$$x^2+y^2-\left[f(t)\right]^2=0$$
$$\begin{cases}x=f(t)\cos\theta\\ y=f(t)\sin\theta\end{cases}$$
$$\begin{cases}\dot{x}=\dot{f}\cos\theta-f\dot{\theta}\sin\theta\\ \dot{y}=\dot{f}\sin\theta+f\dot{\theta}\cos\theta\end{cases}$$
$$T=\frac{m}{2}\left[f^2\dot{\theta}^2+\dot{f}^2\right]$$
$$=T_2+T_0$$

$$\frac{y}{x}=\tan\omega t$$
$$\begin{cases}x=r\cos\omega t\\ y=r\sin\omega t\end{cases}$$
$$\begin{cases}\dot{x}=\dot{r}\cos\omega t-\omega r\sin\omega t\\ \dot{y}=\dot{r}\sin\omega t+\omega r\cos\omega t\end{cases}$$
$$T=\frac{m}{2}\left[\dot{r}^2+\omega^2r^2\right]$$
$$=T_2+T_0$$

（2）广义力的显式及其物理意义

以一个质点为例：

①以直角坐标为广义坐标。若$q_1=x$则$Q_1=\vec{F}\cdot\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial x}=\vec{F}\cdot\vec{i}=F_x$广义力就是力。

②以平面极坐标(r,θ)为广义坐标。 $T=\dfrac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)$各广义力为：

$Q_r=\vec{F}\cdot\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial r}=\vec{F}\cdot\vec{e}_r=F_r$是（径向）力，　$Q_\theta=\vec{F}\cdot\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}=\vec{F}\cdot r\vec{e}_\theta=rF_\theta$ 是力矩。

在中心力场的情况下$F_\theta=0$，因此广义力（力矩）$Q_\theta=0$为零。

③以球坐标(r,θ,φ)为广义坐标。$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=r\vec{e}_r$，

$$\dot{\vec{r}}=\vec{v}=\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}+\dot{z}\vec{k}=\dot{r}\,\vec{e}_r+r\dot{\theta}\vec{e}_\theta+r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi=v_r\vec{e}_r+v_\theta\vec{e}_\theta+v_\varphi\vec{e}_\varphi$$

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}}&=\vec{a}=\ddot{x}\vec{i}+\ddot{y}\vec{j}+\ddot{z}\vec{k}\\&=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\vec{e}_r+\left(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\vec{e}_\theta\\&\quad+\left(r\ddot{\varphi}\sin\theta+2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta+2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\right)\vec{e}_\varphi\\&=a_r\vec{e}_r+a_\theta\vec{e}_\theta+a_\varphi\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta \\ a_\varphi = r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta \end{cases}$$

力 $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} = F_r\vec{e}_r + F_\theta\vec{e}_\theta + F_\varphi\vec{e}_\varphi$

力矩 $\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F} = r\vec{e}_r \times (F_r\vec{e}_r + F_\theta\vec{e}_\theta + F_\varphi\vec{e}_\varphi) = rF_\theta\vec{e}_\varphi - rF_\varphi\vec{e}_\theta$ $\vec{M}\cdot\vec{e}_\varphi = rF_\theta$ $\vec{M}\cdot\vec{e}_\theta = -rF_\varphi$

角动量 $\vec{L} = \vec{r}\times m\vec{v} = r\vec{e}_r \times m(v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta + v_\varphi\vec{e}_\varphi) = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_\varphi - mr^2\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\theta$

牛顿动力学方程

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\left(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}\right) = m\left(a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta + a_\varphi\vec{e}_\varphi\right)$$
$$= F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} = F_r\vec{e}_r + F_\theta\vec{e}_\theta + F_\varphi\vec{e}_\varphi$$

角动量定理 $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = 0 + \vec{r}\times m\vec{a} = r\vec{e}_r \times m(a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta + a_\varphi\vec{e}_\varphi) = mra_\theta\vec{e}_\varphi - mra_\varphi\vec{e}_\theta = rF_\theta\vec{e}_\varphi - rF_\varphi\vec{e}_\theta = \vec{M}$

拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{r}} - \frac{\partial T}{\partial r} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) = ma_r = F_r = \vec{F}\cdot\vec{e}_r = \vec{F}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = Q_r \qquad \text{力}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial\theta} = mr(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta) = mra_\theta = rF_\theta$$

$$= \vec{M}\cdot\vec{e}_\varphi = \left(\vec{r}\times\vec{F}\right)\cdot\vec{e}_\varphi = \left(\vec{e}_\varphi\times\vec{r}\right)\cdot\vec{F} = r\vec{e}_\theta\cdot\vec{F} = \vec{F}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = Q_\theta \ \text{力矩}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial\varphi} = mr\sin\theta(r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta) = mr\sin\theta a_\varphi = r\sin\theta F_\varphi$$

$$= -\sin\theta\vec{M}\cdot\vec{e}_\theta = -\sin\theta\left(\vec{r}\times\vec{F}\right)\cdot\vec{e}_\theta = -\sin\theta\left(\vec{e}_\theta\times\vec{r}\right)\cdot\vec{F} = r\vec{e}_\varphi\cdot\vec{F}\sin\theta = \vec{F}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = Q_\varphi \ \text{力矩}$$

可见三个拉格朗日方程 $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha} - \dfrac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha$（$\alpha = 1,2,\cdots,s$）分别与 $\vec{F} = m\vec{a}$（前一个），

$\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$（后两个）是一致的。

§5．2．拉格朗日方程的解（见[1]§2．7.）

利用拉格朗日方程求动力学问题的解，除了通过对这个常微分方程组进行积分以外，还可以从拉格朗日函数出发，直接得到一些运动积分 $C_k = C_k\left(q,\dot{q}\right)$，（$q_\alpha,\dot{q}_\alpha$ 的在运动过程中保持不变的某种函数）这些运动积分往往是某些重要的守恒物理量，又是拉格朗日方程的初积分，可由运动积分进一步求得拉格朗日方程的解。下面是两个最容易得到的运动积分：

1）．如果 $\dfrac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$（$L$ 不依赖 q_α，q_α 称为循环坐标）则 $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha} = 0$。从而 $\dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha} = const.$ (5)

(5)式称为循环积分,是 *Lagrange* 方程的一个第一积分，其物理意义是广义动量守恒（以后我

们把 $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}=p_\alpha$ 称为与 q_α 共轭的广义动量或 q_α 的共轭动量）。如果拉格朗日函数是 $\dot{q}_\alpha$ 的二次式，则广义动量 p_α 为 $\dot{q}_\alpha$ 的一次式。

2）．如果 $\dfrac{\partial L}{\partial t}=0$（$L$ 不显含 t），则得 $H\equiv\sum\limits_{\alpha=1}^{s}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha-L=\sum\limits_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot{q}_\alpha-L=const$ （6）

这是因为

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt}&\equiv\sum_{\alpha=1}^{s}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\dot{q}_\alpha+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha\right]-\sum_{\alpha=1}^{s}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha+\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha\right]-\frac{\partial L}{\partial t}\\&=\sum_{\alpha=1}^{s}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\right]\dot{q}_\alpha-\frac{\partial L}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t}\end{aligned}$$

即可证得（6）式。我们来分析一下 H 的物理意义。我们知道，动能是广义速度的二次式，如果力有势，即 $L=T-V$，$V=V\left(q,t\right)$

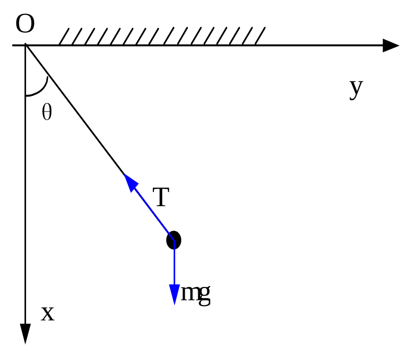
$$\begin{aligned}H&=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha-L=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha-L=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha-\left(T_2+T_1+T_0-V\right)\\&=2T_2+T_1-\left(T_2+T_1+T_0-V\right)=T_2-T_0+V=const\qquad(6')\end{aligned}$$

（这里用到齐次函数的 *Euler* 定理：`若 f 为 x_i 的齐 m 次函数，则有 $\sum\limits_i\dfrac{\partial f}{\partial x_i}x_i=mf$ 。参阅[1]57页）在稳定约束的情况下，$\dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}=0$，$T=T_2,T_1=T_0=0$ 得 $H=T+V=const.$ （6''）

（6''）代表能量守恒。在约束不稳定，但仍有 $\dfrac{\partial L}{\partial t}=0$ 的情况下，（6'）称为广义能量守恒。由此可见，这样得到运动积分，不仅方法简单，而且有助于我们深刻认识物理规律。

§5．3．例题：

【例 1】利用拉格朗日函数求单摆的运动积分。



【解】如图：一个自由度，以偏转角 θ 为广义坐标，写出拉格朗日函数 $L=\dfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+mgl\cos\theta$

得到拉格朗日方程 $ml^2\ddot{\theta}+mgl\sin\theta=0$

我们从拉格朗日函数直接求运动积分：

$\dfrac{\partial L}{\partial \theta}\neq0$，没有循环坐标，因而没有循环积分。

$\dfrac{\partial L}{\partial t}=0$，且动能为齐二次式，$T=T_2$，得到能量守恒，$\dfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2-mgl\cos\theta=E$

【例 2】利用拉格朗日函数求解有势中心力场中的质点的运动。

【解】由有势中心力场中的质点的拉格朗日函数 $L=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-V\left(r\right)$

得到拉格朗日方程 $\begin{cases} m\left(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}\right)=0 \\ m\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)=-\dfrac{dV}{dr} \end{cases}$ 和牛顿动力学方程一致。（以下过程略）

我们从拉格朗日函数可以方便地直接求运动积分（牛顿动力学方程的初积分）：

$\frac{\partial L}{\partial \theta}=0$， θ 是循环坐标，得到循环积分 $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}=C$ 即角动量守恒。

$\frac{\partial L}{\partial t}=0$，且动能为齐二次式，$T=T_2$，得到能量守恒，$\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)+V\left(r\right)=E$

以下步骤和利用牛顿动力学方程的解法相同（略）。

【例 3】利用拉格朗日方程求 § **2．3．**【例 1】的动力学方程。

【解】动能 $T=\frac{1}{2}m\left(\dot{R}^2+R^2\dot{\varphi}^2\right)+\frac{1}{2}m'\dot{z}^2$，

主动力 $m\vec{g}=-mg\vec{k}$， $m'\vec{g}=-m'g\vec{k}$ 有势，势能 $V=m'gz$（已略去常数项）

约束方程 $R-z-l=0$，约束是理想完整的。自由度数为 2，选取广义坐标 $q_1=R$， $q_2=\varphi$

【方法 1】利用基本形式的拉格朗日方程 $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha$

动能 $T=\frac{1}{2}m\left(\dot{R}^2+R^2\dot{\varphi}^2\right)+\frac{1}{2}m'\dot{R}^2$

矢径可表为 $\vec{r}=R\vec{e}_R$, $\vec{r}'=z\vec{k}=-\left(l-R\right)\vec{k}$ 得 $\frac{\partial \vec{r}}{\partial R}=\vec{e}_R$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}=R\vec{e}_\varphi$, $\frac{\partial \vec{r}'}{\partial R}=\vec{k}$, $\frac{\partial \vec{r}'}{\partial \varphi}=0$

主动力的广义力：$Q_R=m\vec{g}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial R}+m'\vec{g}\cdot\frac{\partial \vec{r}'}{\partial R}=-m'g$， $Q_\varphi=m\vec{g}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}+m'\vec{g}\cdot\frac{\partial \vec{r}'}{\partial \varphi}=0$

于是得基本形式的拉格朗日方程：

$$\begin{cases} \left(m+m'\right)\ddot{R}-mR\dot{\varphi}^2=-m'g \\ \dfrac{d}{dt}\left(mR^2\dot{\varphi}\right)=0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} \left(m+m'\right)\ddot{R}-mR\dot{\varphi}^2+m'g=0 \\ m\left(R\ddot{\varphi}+2\dot{R}\dot{\varphi}\right)=0 \end{cases}$$

就是[1]33 页图 1．7 例题的牛顿动力学方程（5）和（6）。（已消去约束力和不独立坐标）

【方法 2】由于主动力是有势的，也可以利用保守系的拉格朗日方程：$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0$，

其中 $L=T-V$ $T=\frac{1}{2}m\left(\dot{R}^2+R^2\dot{\varphi}^2\right)+\frac{1}{2}m'\dot{R}^2$， $V=m'g\left(R-l\right)$ 求得拉格朗日方程（同上，参阅[1]43 页【例 1】)。利用拉格朗日函数求运动积分更为方便。

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=mR^2\dot{\varphi}=const$$

$$\frac{\partial L}{\partial t}=0 \Rightarrow T+V=\frac{1}{2}m\left(\dot{R}^2+R^2\dot{\varphi}^2\right)+\frac{1}{2}m'\dot{R}^2+m'g\left(R-l\right)=E$$

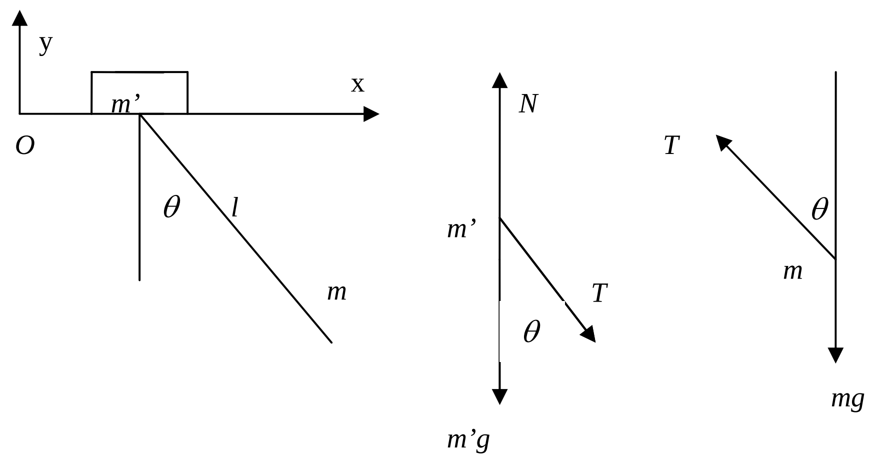
【注意】我们已经分别利用了牛顿动力学方程、达朗贝尔方程、基本形式的拉格朗日方程和拉格朗日方程求得了[1]33 页图 1．7 例题的动力学方程。试比较这些方法的异同和他们之间的联系。

【例 4】([1]43 页【例 2】图 2．9）写出下列力学体系的动力学方程。

(1)椭圆摆；质量为 m'的滑块约束在水平的 Ox 轴上无摩擦地滑动，滑块上带有一个质量为 m 的平面单摆，摆长为 l. （讨论 $m=0$ 和 $m'\to\infty$ 这两种特殊情况）

(2)同上，但滑块 m'通过劲度系数为 k 的弹簧(假定弹簧是轻的，即不计及弹簧的动能)和固定点相连。（讨论 $m=0$ 这种特殊情况）

(3)同上，但已知滑块作简谐运动 $x=x_0\sin\omega t$ （滑块运动已知的椭圆摆）



（1）在竖直平面内建立坐标系 O-xy 如图。

2 质点在平面内运动，4 个坐标。滑块 m' 坐标 $\left(x,y\right)$， $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}$；

摆锤 m 坐标 $\left(X,Y\right)$， $\vec{R}=X\vec{i}+Y\vec{j}$

2 个完整约束：$\left(X-x\right)^2+Y^2=l^2$， $y=0$ 自由度 $s=2$，

引入广义坐标：x,θ $\vec{r}=x\vec{i}$ $\vec{R}=\left(x+l\sin\theta\right)\vec{i}-l\cos\theta\,\vec{j}$

$$\begin{cases}X=x+l\sin\theta\\ Y=-l\cos\theta\end{cases}\quad \begin{cases}\dot{X}=\dot{x}+l\dot{\theta}\cos\theta\\ \dot{Y}=l\dot{\theta}\sin\theta\end{cases}\quad \begin{cases}\ddot{X}=\ddot{x}+l\ddot{\theta}\cos\theta-l\dot{\theta}^2\sin\theta\\ \ddot{Y}=l\ddot{\theta}\sin\theta+l\dot{\theta}^2\cos\theta\end{cases}$$

【方法 1】利用基本形式的拉格朗日方程。

$$T=\frac{1}{2}m'\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\left(\dot{X}^2+\dot{Y}^2\right)=\frac{1}{2}(m+m')\dot{x}^2+\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+ml\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta$$

$$\because m'\vec{g}=-m'g\,\vec{j}\quad m\vec{g}=-mg\,\vec{j}$$

$$Q_x=m'\vec{g}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}+m\vec{g}\cdot\frac{\partial\vec{R}}{\partial x}=0\qquad Q_\theta=m'\vec{g}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}+m\vec{g}\cdot\frac{\partial\vec{R}}{\partial\theta}=-mgl\sin\theta$$

求得基本形式的拉格朗日方程$\begin{cases} m(l\ddot{\theta}+\ddot{x}\cos\theta+g\sin\theta)=0 & (1) \\ (m+m')\ddot{x}+ml(\ddot{\theta}\cos\theta-\dot{\theta}^2\sin\theta)=0 & (2) \end{cases}$

【方法 2】也可利用有势力情形的（第二类）拉格朗日方程。

因为主动力有势： $V=mgY=-mgl\cos\theta$

$$T=\frac{1}{2}m'\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\left(\dot{X}^2+\dot{Y}^2\right)=\frac{1}{2}(m+m')\dot{x}^2+\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+ml\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta$$

$$L=\frac{1}{2}(m+m')\dot{x}^2+\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+ml\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta+mgl\cos\theta$$

很容易得到拉格朗日方程（见[1]44 页）即方程（1）和（2）；并可求得运动积分。
利用拉格朗日函数求运动积分更为方便（系统稳定且 x 为循环坐标）。

$$\because \frac{\partial L}{\partial x}=0 \quad \therefore P_x=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=(m+m')\dot{x}+ml\dot{\theta}\cos\theta=\text{常数} \qquad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} &\because \frac{\partial L}{\partial t}=0\Rightarrow T_2-T_0+V=h \\ &\quad T_1=T_0=0\Rightarrow T=T_2 \end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow T+V=T_2+V=\frac{1}{2}(m+m')\dot{x}^2+\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+ml\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta-mgl\cos\theta=E \qquad (4)$$

【方法 3】用牛顿动力学方程求解：（并已引入广义坐标，利用约束方程消去不独立的坐标）

$$\begin{cases} m'\ddot{x}=T\sin\theta & (5) \\ m'\ddot{y}=0=N-T\cos\theta-m'g & (6) \\ m\ddot{X}=m(\ddot{x}+l\ddot{\theta}\cos\theta-l\dot{\theta}^2\sin\theta)=-T\sin\theta & (7) \\ m\ddot{Y}=m(l\ddot{\theta}\sin\theta+l\dot{\theta}^2\cos\theta)=T\cos\theta-mg & (8) \end{cases}$$

消去约束力 $\vec{N}$ 、$\vec{T}$ ，可得（与拉格朗日方程形式相同）

$$(7)\cos\theta+(8)\sin\theta \qquad m(l\ddot{\theta}+\ddot{x}\cos\theta+g\sin\theta)=0 \qquad (1)$$

$$(5)+(7) \qquad (m+m')\ddot{x}+ml(\ddot{\theta}\cos\theta-\dot{\theta}^2\sin\theta)=0 \qquad (2)$$

$(5)\cos\theta-(8)\sin\theta=(2)\cos\theta-(1)$ 此式与$(1)(2)$并不独立

$$m'\ddot{x}\cos\theta-ml(\ddot{\theta}\sin^2\theta+\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta)-mg\sin\theta=0$$

为求得水平方向动量守恒，将（2）式变形为$\dfrac{d}{dt}[(m+m')\dot{x}+ml\dot{\theta}\cos\theta]=0$即得（3）

为求得能量守恒定律，由$(2)\dot{x}+(1)l\dot{\theta}=(5)\dot{x}+(7)\left(\dot{x}+l\dot{\theta}\cos\theta\right)+(8)l\dot{\theta}\sin\theta$得

$$(m+m')\ddot{x}\dot{x}+ml^2\ddot{\theta}\dot{\theta}+ml(\ddot{x}\dot{\theta}\cos\theta+\dot{x}\ddot{\theta}\cos\theta-\dot{x}\dot{\theta}^2\sin\theta)+mgl\dot{\theta}\sin\theta=0$$

变形为$\dfrac{d}{dt}\left\{\dfrac{1}{2}(m+m')\dot{x}^2+\dfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+ml\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta-mgl\cos\theta\right\}=0$即得（4）式。

也可由牛顿方程出发。$(5)\dot{x}+(7)\dot{X}+(8)\dot{Y}$经积分，得（也可利用直角坐标系中的机械能

表达式直接得）$\frac{1}{2}m'\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\left(\dot{X}^2+\dot{Y}^2\right)+mgY=E$ (9)

再经坐标变换得（4）式。可见，由牛顿运动方程来求能量积分，多少需要一些技巧，计算也有些繁琐。

【方法 4】利用达朗贝尔方程。把牛顿动力学方程改写成达朗贝尔原理

$$\begin{cases} T\sin\theta-m'\ddot{x}=0 \\ N-T\cos\theta-m'g=0 \\ -T\sin\theta-m\ddot{X}=0 \\ T\cos\theta-mg-m\ddot{Y}=0 \end{cases}$$

然后得 $(T\sin\theta-m'\ddot{x})\delta x+(N-T\cos\theta-m'g)\delta y+(-T\sin\theta-m\ddot{X})\delta X+$

$$+\left(T\cos\theta-mg-m\ddot{Y}\right)\delta Y=0$$

由于 $T\sin\theta\delta x+(N-T\cos\theta)\delta y-T\sin\theta\delta X+T\cos\theta\delta Y=0$，是理想约束，

于是得达朗贝尔方程 $-m'\ddot{x}\delta x-m'g\delta y-m\ddot{X}\delta X+(-mg-m\ddot{Y})\delta Y=0$

换为独立的广义坐标，即得

$$-[(m+m')\ddot{x}+ml(\ddot{\theta}\cos\theta-\dot{\theta}^2\sin\theta)]\delta x-m(l\ddot{\theta}+\ddot{x}\cos\theta+g\sin\theta)l\delta\theta=0$$

于是也得到方程（1）和（2）。

利用拉格朗日方程不能求得约束力。为了求约束力 $\vec{N},\vec{T}$，需要利用第一类拉格朗日方程；或把求得的运动方程 $x=x\left(t\right),\ \theta=\theta\left(t\right)$ 代入牛顿动力学方程（5）和（6）就可以了。在一般情况下，求运动方程的精确解和约束力的精确值都是困难的。但是在适当的初条件下，求某些特殊位形下的约束力是不困难的。例如：初条件为：$\theta=90^0$ 时，系统静止 $\dot{\theta}=0,\ \dot{x}=0$。由（3）和（4）利用初条件得 $P_x=0,\ E=0$ 当摆锤通过最低位置：$\theta=0$ 试求摆锤通过最低位置时的约束力。

初条件：$\theta=90^0$ 时，

由(3)再利用摆锤通过最低位置条件，得：$lm\dot{\theta}=-\left(m+m'\right)\dot{x}$ 或 $m\left(\dot{x}+l\dot{\theta}\right)=-m'\dot{x}$

由（4）再利用摆锤通过最低位置条件，得：$\dot{x}^2=\frac{2m^2gl}{m'\left(m+m'\right)}$，$\dot{\theta}^2=\frac{2g\left(m+m'\right)}{lm'}$

由（8）得：$T=mg+ml\dot{\theta}^2=mg\left[3+\frac{2m}{m'}\right]$

由（6）得：$N=T+m'g=g\left[3m+\frac{2m^2}{m'}+m'\right]=g\left(2m+m'\right)\left(1+\frac{m}{m'}\right)$

【讨论质量的大小】

$m' \to +\infty$ 滑块静止， 质点为悬挂于固定点的单摆。

$+\infty > m' \gg m > 0$ 滑块近似作匀速直线运动或近似静止，在随滑块作平动的参考系中，质点近似为悬挂于固定点的单摆。（如何用数学语言来表述）

$m = 0$ 滑块作匀速直线运动或静止

还可以讨论：在什么条件下滑块作往复运动？在什么条件下滑块不改变运动方向？

（2）注意：目前我们总是假定弹簧质量很小，忽略其动能，不属于我们所讨论的力学体系。弹簧也不提供新的约束。弹簧对力学体系提供的是一个弹性势能，也就是一个有势的主动力。

$$T = \frac{1}{2}m'\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2\right) = \frac{1}{2}(m+m')\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta$$

$$V = mgY = -mgl\cos\theta + \frac{1}{2}k\left(x - x_0\right)^2$$

$$L = \frac{1}{2}(m+m')\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + mgl\cos\theta - \frac{1}{2}k\left(x - x_0\right)^2$$

可得 $m(l\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\theta + g\sin\theta) = 0$ 与（1）相同

$(m+m')\ddot{x} + ml(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) + k\left(x - x_0\right) = 0$ 比（2）多一项弹性力

当 $m \ll m'$ 滑块近似作简谐振动。（如何用数学语言来表述）

（3）滑块运动已知，对单摆来说，滑块只提供了一个不稳定约束 $x = x_0\sin\omega t$，我们只要研究一个质点 m 的力学体系。自由度 $s = 1$，广义坐标为 θ： $X = x_0\sin\omega t + l\sin\theta$，$Y = -l\cos\theta$

$\delta X = l\cos\theta\delta\theta$，$\delta Y = l\sin\theta\delta\theta$ 约束力 $\vec{T} = T\sin\theta\vec{i} - T\cos\theta\vec{j}$ 约束力的虚功

$\vec{T}\cdot\delta\vec{R} = T\sin\theta\cdot\delta X - T\cos\theta\cdot\delta Y = 0$ 确实是理想约束。（容易检验：约束力做的实功是不为零的。这也是意料中的，因为约束是不稳定的）

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2\right) = \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^{\ 2}\cos^2\omega t + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mlx_0\dot{\theta}\omega\cos\omega t\cos\theta$$

$$V = mgY = -mgl\cos\theta$$

$$L = \frac{1}{2}m(\omega^2 x_0^{\ 2}\cos^2\omega t + l^2\dot{\theta}^2 + 2lx_0\dot{\theta}\omega\cos\omega t\cos\theta) + mgl\cos\theta$$

求得拉格朗日方程： $l\ddot{\theta} - x_0\omega^2\sin\omega t\cos\theta + g\sin\theta = 0$

由于没有循环坐标，拉格朗日函数又显含 t，动量守恒和能量守恒均不成立。

【例 5】拉格朗日陀螺（参阅[1]§4．9.）

1．在[1]中，利用拉格朗日方程解拉格朗日陀螺，而利用欧拉动力学方程解欧拉陀螺。其实，这两种方法对这两个问题都是适用的。重要的是，如果要用拉格朗日方程，可以把欧拉角作为广义坐标，不能把 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 作为广义速度。（如果把 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 作为广义速度，那么广义

坐标是什么呢？）如果一定要把$\omega_x,\omega_y,\omega_z$作为“广义速度”，那就要引入准速度和准坐标的概念。（参见参考资料[8]191—199 页）

2．拉格朗日陀螺：

$$L = T - V = \frac{I_1}{2}({\omega_x}^2 + {\omega_y}^2) + \frac{I_3}{2}{\omega_z}^2 - mgl\cos\theta$$
$$= \frac{I_1}{2}(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta)^2 - mgl\cos\theta$$

由于拉格朗日函数不显含φ,ψ,t，利用拉格朗日函数求运动积分，就得到三个守恒量：（比利用欧拉动力学方程求初积分要方便得多）

$$\left.\begin{aligned}
&\omega_z = \dot\varphi\cos\theta + \dot\psi = A = \frac{L_k}{I_3} = const && (4)\\
&I_1\dot\varphi\sin^2\theta + I_3 A\cos\theta = I_1\dot\varphi\sin^2\theta + I_3\left(\dot\varphi\cos^2\theta + \dot\psi\cos\theta\right) = L_{e_3} = \vec L\cdot\vec e_3 = const && (5)\\
&\frac{I_1}{2}(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta)^2 + mgl\cos\theta = E && (6)
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix}(4)\\(5)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\dot\varphi = \dfrac{L_{e_3} - L_k\cos\theta}{I_1\sin^2\theta} & (7)\\[2ex] \dot\psi = \dfrac{L_k}{I_3} - \dfrac{L_{e_3} - L_k\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}\cos\theta & (8)\end{cases}$$

令 $$V_{eff}(\theta) = \frac{\left(L_{e_3} - L_k\cos\theta\right)^2}{2I_1\sin^2\theta} - mgl\left(1-\cos\theta\right)$$

利用以上结果把(6)改写为

$$E' = E - \frac{{L_k}^2}{2I_3} - mgl = \frac{1}{2}I_1\dot\theta^2 + V_{eff}(\theta) = \frac{1}{2}I_1\dot\theta^2 + \frac{\left(L_{e_3} - L_k\cos\theta\right)^2}{2I_1\sin^2\theta} - mgl\left(1-\cos\theta\right) \quad (9)$$

化为一维问题，可解得$\theta(\mathrm{t})$

3．有了$\theta(t)$，代入（7）（8），再经积分，可得$\varphi(t),\ \psi(t)$

利用初积分（7）（9），

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{\dot\varphi}{\dot\theta} = \frac{L_{e_3} - L_k\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}\cdot\frac{1}{\sqrt{\dfrac{2}{I_1}\left[E' - V_{eff}(\theta)\right]}}$$

$$\varphi = \int\frac{L_{e_3} - L_k\cos\theta}{I_1\sin^2\theta\sqrt{\dfrac{2}{I_1}\left[E' - V_{eff}(\theta)\right]}}d\theta$$

利用（8）（9）也可作类似处理。

根据上述结果，可分析三个欧拉角随时间变化的情况。就可定性地得到刚体的运动规律。(参

阅[1]133 页)

【例 6】两体问题分解为两个单体问题，在拉格朗日力学中，就看两体问题的拉格朗日函数能否表为两个单粒子拉格朗日函数之和。在势能满足条件$V\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2\right)\approx V^{(e)}\left(\vec{r}_{0C}\right)+V^{(i)}\left(\vec{r}\right)$时，

$L=L_C\left(\vec{r}_{0C},\dot{\vec{r}}_{0C}\right)+L'\left(\vec{r},\dot{\vec{r}}\right)\quad L_C=T_C-V^{(e)}\left(\vec{r}_{0C}\right)\quad L'=T'-V^{(i)}\left(\vec{r}\right)$就能达到此目的。

§5．4．虚功原理(虚位移原理) （见[1]§2．4.拉格朗日方程对平衡问题的应用）

本节讨论分析静力学问题。

在静力学中，$\dot{\vec{r}}_i=0$，$\ddot{\vec{r}}_i=0$达朗贝尔方程$\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i-m_i\ddot{\vec{r}}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i=0$化为 $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i=0$

称为虚功原理（又称静力学虚功原理）。改用独立的广义坐标，得$\sum_{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha\equiv\sum_{\alpha}Q_\alpha\delta q_\alpha=0$， $\alpha=1,2,\cdots,s$ 其中$Q_\alpha\equiv\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}$为对应于广义坐标$q_\alpha$的广义力；对于完整力学体系，$\delta q_\alpha$也是相互独立的，因此虚功原理表为 $Q_\alpha=0$

$\alpha=1,2,\cdots,s$ 对于保守系$\vec{F}_i=-\nabla_i V$，从而$Q_\alpha\equiv\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}=-\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}=0$因此虚功原理表为$\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}=0$，$\alpha=1,2,\cdots,s$ 以上诸式也可由拉格朗日方程和静力学的条件导出。

【例 1】长为l的均匀棒OA，其质量为m，OA可绕O点在垂直平面内自由转动，在棒的A端加一已知的水平力$\vec{F}$，求平衡时棒OA的位置。

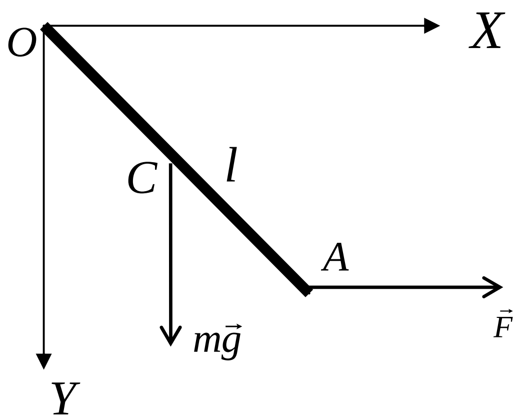
如图建立坐标系，

A点的坐标为(x,y)质心的坐标为(x_C,y_C)约束方程$x^2+y^2=l^2$自由度$s=1$选取广义坐标θ，

点 A 的位矢 $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}=l\,sin\theta\vec{i}+l\,cos\theta\vec{j}$ 棒的质心的位矢$\vec{r}_C=x_C\vec{i}+y_C\vec{j}=\frac{l}{2}\left(sin\theta\vec{i}+cos\theta\vec{j}\right)$

主动力$m\vec{g}=mg\vec{j}$，$\vec{F}=F\vec{i}$；广义力$Q=m\vec{g}\cdot\frac{\partial\vec{r}_C}{\partial\theta}+\vec{F}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}=-mg\frac{l}{2}sin\theta+Fl\,cos\theta$

虚功原理$Q=-mg\frac{l}{2}sin\theta+Fl\,cos\theta=0$得$tan\theta=\frac{2F}{mg}$



【例 2】（47 页）质量为 m、固有长度为 l、劲度系数为 k 的弹性圈放在顶角为 2α 的光滑铅直圆锥体上，求平衡时弹性圈的位置。

解：自由度 s=1,取弹性圈离圆柱体顶点的距离 h 为广义坐标。

重力势能 $V_g = -mgh$

弹性势能 $V_s = \frac{1}{2}k\left(2\pi h\tan\alpha - l\right)^2$

势能 $V = V_g + V_s$

利用虚功原理求平衡条件：$\frac{\partial V}{\partial h} = 0 \qquad -mg + k\left(2\pi h\tan\alpha - l\right)2\pi\tan\alpha = 0$

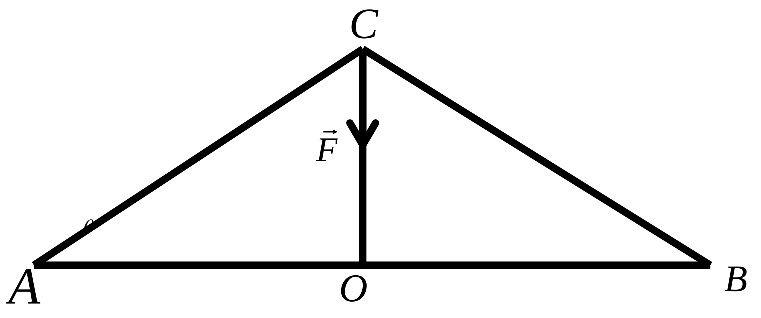
$$h = \frac{1}{2\pi\tan\alpha}\left(l + \frac{mg}{2\pi k\tan\alpha}\right)$$

利用虚功原理解静力学问题，得到的方程给出的是主动力和平衡位置的坐标之间的关系。方程的个数一般和自由度的数目相等。在主动力已知的条件下可以确定平衡位置；或者确定相同数目的未知主动力和未知平衡位置坐标。

下面这个例题。力学系统完全固定，各坐标都是常数，各虚位移均为零，自由度数为零，题目要求的是约束力。在这种情况下，不可能按虚功原理得到方程，即使得到方程，也不可能求出约束力。因此，必须解除一些约束，使自由度数不为零；同时把要求的约束力看成未知的主动力，这样才能利用虚功原理求出未知的约束力。

【例 3】五根轻杆对称组成一简单桁架结构。当 C 点承受一铅直力 $\vec{F}$ 时，求杆 AO 和 OB 所受的力。

（参阅[1]48 页图 2．14.）



【解】本题要求约束力。必须将 AB 间的约束解除，把所要求的约束力视作未知的主动力 $\vec{F}_T$ 和 $-\vec{F}_T$。

自由度 $s=1$ 建立平面直角坐标系，原点位于 O，y 轴向上，

选取 $\theta=\angle CAO=\angle CBO$ 为广义坐标，$\vec{F}_T=F_T\vec{i}\quad \vec{F}=-F\vec{j}$

$\vec{r}_A=-l\cos\theta\vec{i}\quad \vec{r}_B=l\cos\theta\vec{i}\quad \vec{r}_C=l\sin\theta\vec{j}$

虚功原理 $\vec{F}\cdot\dfrac{\partial\vec{r}_C}{\partial\theta}+\vec{F}_T\cdot\left(\dfrac{\partial\vec{r}_A}{\partial\theta}-\dfrac{\partial\vec{r}_B}{\partial\theta}\right)=0$

化简得 $\quad -F\cos\theta+2F_T\sin\theta=0 \qquad F_T=\dfrac{F}{2}\cot\theta=\dfrac{F}{2}\dfrac{|BO|}{|CO|}$

§5．5．拉格朗日方程的研究

1．广义坐标的变换保持拉格朗日方程的形式不变（方程的具体表达式当然要改变）；也就是说：

如果一个力学体系的拉格朗日函数 $L(q,\dot{q},t)$,给出拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0,\quad \alpha=1,2,\cdots,s$$

考虑坐标变换：$Q_\alpha=f_\alpha(q_1,q_2,\ldots q_s,t)\equiv f_\alpha(q,t),\quad \alpha=1,2,\cdots,s$

要求有逆变换，即：$q_\alpha=\Phi_\alpha(Q,t)\equiv\Phi_\alpha(Q_1,Q_2,\cdots,Q_s,t),\quad \alpha=1,2,\cdots,s$

满足
$$\Delta=\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_s)}{\partial(q_1,q_2,\cdots,q_s)}\neq 0$$

于是坐标变换使拉格朗日函数变换为为新的拉格朗日函数 $\tilde{L}(Q,\dot{Q},t)$

$$L(q,\dot{q},t)=L\left(\Phi(Q,t),\dot{\Phi}(Q,\dot{Q},t),t\right)\equiv\tilde{L}(Q,\dot{Q},t)$$

则这个力学体系的拉格朗日方程就变换为 $\tilde{L}(Q,\dot{Q},t)$ 给出的新的拉格朗日方程：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{Q}_\alpha}-\frac{\partial\tilde{L}}{\partial Q_\alpha}=0,\alpha=1,2,\cdots,s$$

由于拉格朗日力学的理论体系对任意的一组（独立的）广义坐标都是成立的，因此“广义坐标的变换保持拉格朗日方程的形式不变”这个论断是理所当然的。

2．拉格朗日函数的不唯一性

我们已经学过，在经典力学中，理想，完整，保守体系的拉格朗日函数 $L=T-V$，给出的拉格朗日方程就是这种体系的动力学方程。如果另有一个函数，给出的拉格朗日方程也就是这个体系的动力学方程，那么我们也可以取它作为这个体系的拉格朗日函数（我们称这两个拉格朗日函数等价）。也就是说，拉格朗日函数不是，也没有必要是唯一确定的。

事实上，如果拉格朗日函数加上一个坐标和时间的足够光滑的任意函数对时间的全导数的项，变换为一个新的拉格朗日函数（称为规范变换），即 $L_2 = L_1 + \frac{df(q,t)}{dt}$ （1）

则这两个拉格朗日函数等价，即：$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L_1}{\partial q_\alpha} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L_2}{\partial q_\alpha} = 0,\ \alpha = 1,2,\cdots s$

这是因为由 $\frac{df(q,t)}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial f(q,t)}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial f(q,t)}{\partial t}$ 可推出 $\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\right]\frac{df(q,t)}{dt} = 0$，从而证得。

拉格朗日函数乘以常数 λ（标度变换），也不改变拉格朗日方程。综上所述，对于拉格朗日函数的如下变换 $L(q,\dot{q},t) \to \tilde{L}(q,\dot{q},t) = \lambda L(q,\dot{q},t) + \frac{df(q,t)}{dt}$，拉格朗日方程不变。

我们还注意到，一个函数能否表为广义坐标和时间的某一函数的全导数，是与选用哪一套广义坐标无关的，即 $\frac{df(q,t)}{dt} = \frac{df(\Phi(Q,t),t)}{dt} = \frac{d\tilde{f}(Q,t)}{dt}$

这一点是至关重要的，否则理论会发生矛盾。

3．守恒律和时空对称性之间的关系（参阅[1]57－59 页）

我们已经利用循环坐标得到动量守恒定律和角动量守恒定律；利用拉格朗日函数不显含时间导出（广义）能量守恒定律。这表明守恒律和时空对称性之间存在密切的联系。时空对称性是指时间、空间的均匀性和空间的各向同性，也就是在经历时间、空间平移或空间转动后力学规律保持不变的性质。而在拉格朗日力学中，力学规律的不变性体现为拉格朗日函数的不变性，所以我们现在来讨论时空变换下拉格朗日函数的不变性。

先讨论空间的对称性，只考虑由变更 $\delta q_\alpha, \delta\dot{q}_\alpha$ 引起的 L 的变更 δL：（$\delta t = 0$）

$$\delta L = \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta\dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha\right)$$
$$= \frac{d}{dt}\left[\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha\right] - \sum_{\alpha=1}^{s}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\right]\delta q_\alpha = \frac{d}{dt}\left[\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha\right]$$

上式的证明利用了 $\delta t = 0$，以及 $\frac{d}{dt}\delta q_\alpha = \delta\dot{q}_\alpha$（即 $\frac{d}{dt}$ 和 δ 可交换次序）最后一步利用了拉格朗日方程，因此对于真实运动才成立。

上式用矢量式表示为 $\delta L = \frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i}\cdot\delta\vec{r}_i\right]$

（1）空间均匀性，即空间平移（即 $\delta\vec{r}_i = \vec{\varepsilon}$ 为常量）不改变体系的力学性质（即 $\delta L=0$），

所以 $\delta L = \frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i}\cdot\delta\vec{r}_i\right] = \frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i\cdot\vec{\varepsilon}\right] = \frac{d\vec{P}}{dt}\cdot\vec{\varepsilon} = 0$，$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i}$ 是动量。由

于 $\vec{\varepsilon}$ 的任意性，得出 $\frac{d\vec{P}}{dt}=0$，即 $\vec{P}$ 是常矢量，动量守恒。

（2）空间各向同性，即空间转动 $\delta\vec{r}_i=\delta\vec{\varphi}\times\vec{r}_i$，$\delta\vec{\varphi}$ 为一任意的无穷小转动不改变体系的力学性质，即 $\delta L=0$。

$$\delta L=\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{r}}_i}\cdot\left(\delta\vec{\varphi}\times\vec{r}_i\right)\right]=\delta\vec{\varphi}\cdot\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\times\vec{p}_i\right]=\delta\vec{\varphi}\cdot\frac{d\vec{L}}{dt}=0,$$

其中 $\vec{L}$ 为角动量。由于 $\delta\vec{\varphi}$ 的任意性，得出 $\vec{L}$ 为常量，即角动量守恒。

再讨论时间的均匀性，即时间平移不改变体系的动力学性质。这就要求 L 不显含 t，即 $\frac{\partial L}{\partial t}=0$，还要求约束稳定，（正是前述得到能量守恒的条件）从而得到能量守恒。

4．非惯性参考系中的拉格朗日函数（参阅[1]§5．3.）

同一力学问题在不同参考系中的描述，只是在观察的角度上有所不同，它们的动力学方程应该本质上是相同的，只是经历了某些变换而形式上有所不同（从惯性系和非惯性系中的牛顿方程之间的联系，我们已经看到了这一点），同一力学问题在不同参考系中的拉格朗日方程也应该本质上是相同的，因此它们的拉格朗日函数应该是等价的。

由此可见，由原来的参考系的拉格朗日函数出发，经过参考系之间的变换，以及伴随这参考系变换而发生的坐标变换，必要时再添上或舍去坐标和时间的某个适当的函数对时间的全导数，就可以得到新的参考系中的拉格朗日函数。考虑两个参考系：

参考系		坐标系	基矢	位置矢量	速度	拉格朗日函数
惯性系	S	$Oxyz$	$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$	$\vec{r}$	$\vec{v}$	L
非惯性系	S'	$Cx'y'z'$	$\vec{i}.\vec{j},\vec{k}$	$\vec{r}'$	$\vec{v}'$	L'

惯性系中的拉格朗日函数应表为：$L=T-V=\frac{1}{2}mv^2-V\left(\vec{r}\right)$（只考虑有势力的情形）

利用参考系 S 和 S' 的各物理量之间的关系式：$\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{r}'$，

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\vec{r}_0}{dt}+\frac{d\vec{r}'}{dt}=\vec{v}_0+\frac{\tilde{d}\vec{r}'}{dt}+\vec{\omega}_0\times\vec{r}'=\vec{v}_0+\vec{v}'+\vec{\omega}_0\times\vec{r}'$$

$$v^2={v_0}^2+v'^2+\left(\vec{\omega}_0\times\vec{r}'\right)^2+2\vec{v}_0\cdot\vec{v}'+2\vec{v}_0\cdot\left(\vec{\omega}_0\times\vec{r}'\right)+2\vec{v}'\cdot\left(\vec{\omega}_0\times\vec{r}'\right)$$

可以把惯性系的拉格朗日函数表为非惯性系中各物理量的函数：

$$L=\frac{1}{2}m\left[{v_0}^2+v'^2+\left(\vec{\omega}_0\times\vec{r}'\right)^2+2\vec{v}_0\cdot\vec{v}'+2\vec{v}_0\cdot\left(\vec{\omega}_0\times\vec{r}'\right)+2\vec{v}'\cdot\left(\vec{\omega}_0\times\vec{r}'\right)\right]-V\left(\vec{r}_0+\vec{r}'\right)$$

由于 $\vec{v}_0\cdot\vec{v}'+\vec{v}_0\cdot\left(\vec{\omega}_0\times\vec{r}'\right)=\vec{v}_0\cdot\frac{d\vec{r}'}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_0\cdot\vec{r}'\right)-\frac{d\vec{v}_0}{dt}\cdot\vec{r}'$，右边第一项是全导数；以及任意可积分的时间的函数均可视为坐标和时间的函数的全导数，而 $\vec{r}_0,\vec{v}_0,\vec{\omega}_0$ 都是时间的已知函数；我们可以试取 $L'=\frac{1}{2}mv'^2-m\vec{r}'\cdot\frac{d\vec{v}_0}{dt}+\frac{1}{2}m\left(\vec{\omega}_0\times\vec{r}'\right)^2-m\vec{r}'\cdot\left(\vec{\omega}_0\times\vec{v}'\right)-V\left(\vec{r}_0+\vec{r}'\right)$

易见 $L-L'=\frac{1}{2}m\vec{v}_0{}^2+\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_0\cdot\vec{r}'\right)$ 可视作坐标和时间的函数的全导数，因而 L' 与 L 等价。

（这里我们利用了 $\vec{v}'\cdot\left(\vec{\omega}_0\times\vec{r}'\right)=\vec{\omega}_0\cdot\left(\vec{r}'\times\vec{v}'\right)=\vec{r}'\cdot\left(\vec{v}'\times\vec{\omega}_0\right)=-\vec{r}'\cdot\left(\vec{\omega}_0\times\vec{v}'\right)$ 这个关系式）

下面我们来求 L' 给出的拉格朗日方程：$\frac{\tilde{d}}{dt}\frac{\partial L'}{\partial\vec{v}'}-\frac{\partial L'}{\partial\vec{r}'}=0$ 注意：这是 $\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial v'_x}-\frac{\partial L'}{\partial x'}=0$ 等三个式子的简写，拉格朗日方程均为数量方程，所以矢量形式拉格朗日方程中对时间的导数应理解为相对导数 $\frac{\tilde{d}}{dt}\frac{\partial L'}{\partial\vec{v}'}$，而不应理解为 $\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial\vec{v}'}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial v'_x}\vec{i}+\frac{\partial L'}{\partial v'_y}\vec{j}+\frac{\partial L'}{\partial v'_z}\vec{k}\right)$（不应计入基矢对时间的导数）。

$$\frac{\partial L'}{\partial\vec{v}'}=m\vec{v}'+m\vec{\omega}_0\times\vec{r}' \qquad \text{注意：}\frac{\tilde{d}\vec{\omega}_0}{dt}=\frac{d\vec{\omega}_0}{dt}\equiv\dot{\vec{\omega}}_0$$

$$\frac{\tilde{d}}{dt}\frac{\partial L'}{\partial\vec{v}'}=m\frac{\tilde{d}\vec{v}'}{dt}+m\left[\frac{\tilde{d}\vec{\omega}_0}{dt}\times\vec{r}'+\vec{\omega}_0\times\frac{\tilde{d}\vec{r}'}{dt}\right]=m\vec{a}'+m\dot{\vec{\omega}}_0\times\vec{r}'+m\vec{\omega}_0\times\vec{v}'$$

$$\frac{\partial L'}{\partial\vec{r}'}=-m\vec{a}_0-m\vec{\omega}_0\times\vec{v}'-m\vec{\omega}_0\times\left(\vec{\omega}_0\times\vec{r}'\right)-\frac{\partial V}{\partial\vec{r}'} \quad \text{其中第三项计算见下式}$$

$$\frac{\partial}{\partial\vec{r}'}\left[\left(\vec{\omega}_0\times\vec{r}'\right)^2\right]=\frac{\partial}{\partial\vec{r}'}\left[\omega_0{}^2\vec{r}'^2-\left(\vec{\omega}_0\cdot\vec{r}'\right)^2\right]=2\left[\omega_0{}^2\vec{r}'-\left(\vec{\omega}_0\cdot\vec{r}'\right)\vec{\omega}_0\right]=-2\vec{\omega}_0\times\left(\vec{\omega}_0\times\vec{r}'\right)$$

于是得到拉格朗日方程：

$$\frac{\tilde{d}}{dt}\frac{\partial L'}{\partial\vec{v}'}-\frac{\partial L'}{\partial\vec{r}'}=m\vec{a}'+m\vec{a}_0+m\dot{\vec{\omega}}_0\times\vec{r}'+m\vec{\omega}_0\times\left(\vec{\omega}_0\times\vec{r}'\right)+2m\vec{\omega}_0\times\vec{v}'+\frac{\partial V}{\partial\vec{r}'}=0,$$

这就是非惯性系中的牛顿动力学方程。由此可见，L' 确实就是非惯性系的拉格朗日函数。
我们还可以从另一角度来看拉格朗日函数 L' 中各项的物理意义。非惯性系中的牛顿动力学方程：

$$m\vec{a}'=-m\vec{a}_0-m\dot{\vec{\omega}}_0\times\vec{r}'-m\vec{\omega}_0\times\left(\vec{\omega}_0\times\vec{r}'\right)-2m\vec{\omega}_0\times\vec{v}'-\frac{\partial V}{\partial\vec{r}'}$$

$$\because -m\vec{\omega}_0\times\left(\vec{\omega}_0\times\vec{r}'\right)=\frac{\partial}{\partial\vec{r}'}\left[\frac{1}{2}m\left(\vec{\omega}_0\times\vec{r}'\right)^2\right]\equiv-\frac{\partial V_1}{\partial\vec{r}'} \ \therefore \text{惯性离心力为有势力}$$

$$\because -m\dot{\vec{\omega}}_0\times\vec{r}'-2m\vec{\omega}_0\times\vec{v}'=\left[\frac{\tilde{d}}{dt}\frac{\partial}{\partial\vec{v}'}-\frac{\partial}{\partial\vec{r}'}\right]\left[m\vec{r}'\cdot\left(\vec{\omega}_0\times\vec{v}'\right)\right]\equiv\frac{\tilde{d}}{dt}\frac{\partial U}{\partial\vec{v}'}-\frac{\partial U}{\partial\vec{r}'} \ \text{广义有势力}$$

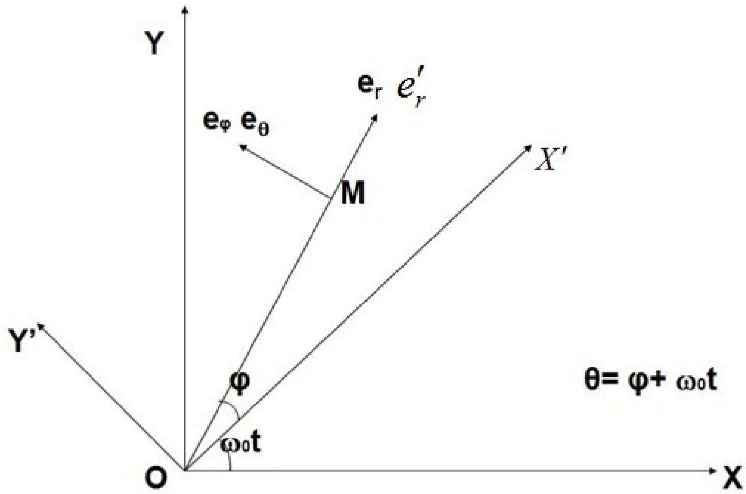
$$\because -m\vec{a}_0=-\frac{\partial}{\partial\vec{r}'}\left(m\vec{r}'\cdot\vec{a}_0\right)\equiv-\frac{\partial V_2}{\partial\vec{r}'} \quad \text{有势力。}$$

由此可见，各项惯性力均可纳入有势力或广义有势力，因此，惯性系中保守的力学体系在非惯性系中依然为“保守的”力学体系（但可能出现广义有势力）。于是非惯性系拉格朗日函数：

$$L'=\frac{1}{2}mv'^2-\left(V+V_1+V_2+U\right)$$

给出了同样形式的拉格朗日方程是理所当然的：$\frac{\tilde{d}}{dt}\frac{\partial L'}{\partial\vec{v}'}-\frac{\partial L'}{\partial\vec{r}'}=0$。

由于L'一般说来是显含时间的，能量守恒定律和广义能量守恒定律一般说来不成立。下面我们举两个例子，或许有助于我们看清其物理意义。



【例 1】参考系S'相对于参考系S作匀角速度$\vec{\omega}_0$的绕铅直轴的定轴转动，两个坐标系的公共原点O位于转动轴上，$\vec{r}_0 \equiv 0, \therefore \vec{v}_0 = 0,\ \vec{a}_0 = 0,$ 质点的矢径$\vec{r} = \vec{r}'$；OZ'与OZ保持与转动轴重合，基矢$\vec{k}$与$\vec{e}_3$重合，$\vec{k} \equiv \vec{e}_3$， $z' = z$， $\vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{k} = \omega_0 \vec{e}_3$，$\omega_0$是常数，$\dot{\vec{\omega}}_0 = 0$，

$$\begin{cases} \vec{i} = \vec{e}_1 \cos\omega_0 t + \vec{e}_2 \sin\omega_0 t \\ \vec{j} = -\vec{e}_1 \sin\omega_0 t + \vec{e}_2 \cos\omega_0 t \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{e}_1 = \vec{i} \cos\omega_0 t - \vec{j} \sin\omega_0 t \\ \vec{e}_2 = \vec{i} \sin\omega_0 t + \vec{j} \cos\omega_0 t \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\vec{e}}_1 = 0 \\ \dot{\vec{e}}_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\vec{i}} = \omega_0 \vec{j} \\ \dot{\vec{j}} = -\omega_0 \vec{i} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x\cos\omega_0 t + y\sin\omega_0 t \\ y' = -x\sin\omega_0 t + y\cos\omega_0 t \end{cases} \quad \begin{cases} x = x'\cos\omega_0 t - y'\sin\omega_0 t \\ y = x'\sin\omega_0 t + y'\cos\omega_0 t \end{cases}$$

矢径$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k} = \vec{r}'$

$$\begin{aligned} \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{e}_1 + \dot{y}\vec{e}_2 + \dot{z}\vec{e}_3 &= \left(\dot{x}'\vec{i} + \dot{y}'\vec{j} + \dot{z}'\vec{k}\right) + \omega_0\left(x'\vec{j} - y'\vec{i}\right) \\ = \vec{v}' + \vec{\omega}_0 \times \vec{r}' \qquad &= \left(\dot{x}' - y'\omega_0\right)\vec{i} + \left(\dot{y}' + x'\omega_0\right)\vec{j} + \dot{z}'\vec{k} \end{aligned}$$

在参考系S，

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2\right) + m\omega_0\left(x'\dot{y}' - y'\dot{x}'\right) + \frac{m}{2}\omega_0^{\ 2}\left(x'^2 + y'^2\right), \quad V = 0$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2\right) + m\omega_0\left(x'\dot{y}' - y'\dot{x}'\right) + \frac{m}{2}\omega_0^{\ 2}\left(x'^2 + y'^2\right)$$

上述拉格朗日函数的两个表达式都是在参考系S中写出的，只是所采用的广义坐标不同。

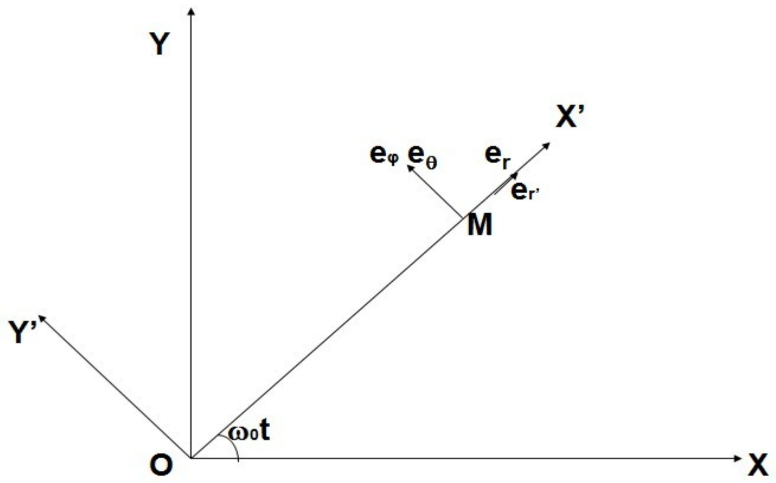
在参考系S'，$T' = \dfrac{1}{2}m\left(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2\right)$， $V' = -\dfrac{1}{2}m\left(\vec{\omega}_0 \times \vec{r}'\right)^2 + m\vec{r}' \cdot \left(\vec{\omega}_0 \times \vec{v}'\right)$

$$L' = T' - V' = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2\right) - \left[-\frac{1}{2}m\left(\vec{\omega}_0 \times \vec{r}'\right)^2 + m\vec{r}' \cdot (\vec{\omega}_0 \times \vec{v}')\right]$$

$$=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}'^2+\dot{y}'^2+\dot{z}'^2\right)+m\omega_0\left(x'\dot{y}'-y'\dot{x}'\right)+\frac{1}{2}m{\omega_0}^2\left(x'^2+y'^2\right),$$ L' 与 L 的第二个表达式完全相同，只是 L' 中的后两项来自惯性力的势能或广义势能，而 L 中的三项均是动能的组成部分。

【例 2】质点约束在一光滑直杆上，此直杆在水平面 Oxy 内围绕原点作匀角速度 $\left(\vec{\omega}_0\right)$ 绕竖直轴 Oz 转动。$t=0$ 时，$r=b,\ \dot{r}=0$，求质点的运动规则和杆的水平约束反作用力 $\vec{N}$.

【解】不必考虑竖直方向上的运动，因为重力和水平面的支承力是相互平衡的。在两个参考系中拉格朗日方程是相同的（牛顿动力学方程本来只相差一步移项），所以两个拉格朗日函数应该是等价的（可能相差一个坐标和时间的函数的全导数，在这个问题中，恰巧是相等的），但各项含义不尽相同。



惯性参考系 S　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　非惯性参考系 S'

直角坐标系 OXY 固定于空间　　　　　　　　　　　　　　直角坐标系 OX’Y’为固定于杆

OX 沿 t=0 时的直杆　　　　　　　　　　　　　　　　　OX’轴保持沿直杆

$$\begin{cases}x'=x\cos\omega_0 t+y\sin\omega_0 t\\ y'=-x\sin\omega_0 t+y\cos\omega_0 t\end{cases}$$

极坐标：$(r,\theta)\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$　　$\begin{cases}r'=r\\ \varphi=\theta-\omega_0 t\end{cases}$　　$(r',\varphi)\begin{cases}x'=r'\cos\varphi\\ y'=r'\sin\varphi\end{cases}$

极轴沿 t=0 时的直杆　　　　　　　　　　　　　　　　　　极轴沿直杆

约束方程 $y=x\tan\omega_0 t$　　　　　　　　　　　　　　　$y'=0$

或 $\theta=\omega_0 t$（不稳定约束）　　　　　　　　或 $\varphi=\theta-\omega_0 t=0$（稳定约束）

$\left(\theta=\omega_0 t,\ \dot{\theta}=\omega_0,\ \ddot{\theta}=0\right)$　　　　　　　　　$\left(\varphi=0,\ \dot{\varphi}=0,\ \ddot{\varphi}=0\right)$

广义坐标　r　　　　　　　　　　　　　　　　　　r’（也可选用 x’）

动能 $T=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+\dot{\theta}^2r^2\right)$ $\quad T'=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}'^2+\dot{y}'^2\right)=\frac{1}{2}m\dot{x}'^2$

$$=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+\omega_0{}^2r^2\right)=T_2+T_0 \qquad =\frac{1}{2}m\left(\dot{r}'^2+r'^2\dot{\varphi}^2\right)=\frac{1}{2}m\dot{r}'^2$$

势能 $V=0$ $\quad V'=-\frac{1}{2}mr'^2\omega_0{}^2$ （惯性离心力势）

科里奥利力的广义势呢？

$$L=T-V=T=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+\omega_0{}^2r^2\right) \qquad L'=T'-V'=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}'^2+\omega_0{}^2r'^2\right)$$

拉格朗日方程为 $m\ddot{r}-m\omega_0{}^2r=0$ $\quad m\ddot{r}'-m\omega_0{}^2r'=0$

$r=b\cosh\omega_0t=r'$

广义能量守恒： 能量守恒：

$$h=T_2-T_0=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2-\omega_0{}^2r^2\right) \qquad E'=T'+V'=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}'^2-\omega_0{}^2r'^2\right)$$

$$=-\frac{1}{2}mb^2\omega_0{}^2 \qquad =-\frac{1}{2}mb^2\omega_0{}^2$$

牛顿动力学方程 $m\ddot{\vec{r}}=\vec{N}$ $\quad m\ddot{\vec{r}}'=\vec{N}-m\vec{\omega}_0\times\left(\vec{\omega}_0\times\vec{r}'\right)-2m\vec{\omega}_0\times\vec{v}'$

$$\begin{aligned}\vec{N}&=m\ddot{\vec{r}}=m\frac{d^2}{dt^2}\left(r\vec{e}_r\right)\\&=m\left(\ddot{r}-r\omega_0{}^2\right)\vec{e}_r+2m\dot{r}\omega_0\vec{e}_\theta\\&=2mb\omega_0^2\sinh\omega_0t\vec{e}_\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{N}&=m\ddot{\vec{r}}'+m\vec{\omega}_0\times\left(\vec{\omega}_0\times\vec{r}'\right)+2m\vec{\omega}_0\times\vec{v}'\\&=m\ddot{r}'\vec{e}_{r'}+\left(-m\omega_0^2r'\right)\vec{e}_{r'}+2m\omega_0\dot{r}'\vec{e}_\varphi\\&=2mb\omega_0^2\sinh\omega_0t\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&T_2(t)+T_0(t)=T_2(0)+T_0(0)+\int_0^tN\left(rd\theta\right)\\&=T_2(0)+T_0(0)+\int_0^t2mb\omega_0^2\sinh\omega_0t\cdot b\cosh\omega_0td\left(\omega_0t\right)\\&=T_2(0)+T_0(0)+mb^2\omega_0^2\cosh^2\omega_0t\Big|_0^t\\&=T_2(0)+T_0(0)+2T_0(t)-2T_0(0)\\&\Rightarrow T_2(t)-T_0(t)=T_2(0)-T_0(0)\end{aligned}$$

广义能量守恒的物理意义是动能因约束力作功而改变。

5．在哈密顿原理的理论框架中，q_α 和 $\dot{q}_\alpha$ 是相互独立的吗？

我们在把牛顿动力学方程纳入哈密顿原理的理论框架，引入作为多元函数的拉格朗日函数 $L=L\left(q_\alpha,\dot{q}_\alpha,t\right)$，计算它的偏导数时，一直是把 $\left\{q_\alpha,\dot{q}_\alpha,t\right\}$ 视作相互独立的变量，这丝毫不意味着我们忽视了它们之间的关系：$q_\alpha=q_\alpha(t),\ \dot{q}_\alpha=\frac{dq_\alpha(t)}{dt}$；事实上我们在计算全导数

时就充分注意到它们之间的关系：$\dfrac{dL}{dt}=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\dfrac{\partial L}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha\right)+\dfrac{\partial L}{\partial t}$；其实我们在数学中常遇到类似的计算。例如：计算函数$F\left(x,u,t\right)$的偏导数或全微分时，无论各宗量之间是否相互独立，总有：$dF\left(x,u,t\right)=\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)_{u,t}dx+\left(\dfrac{\partial F}{\partial u}\right)_{x,t}du+\left(\dfrac{\partial F}{\partial t}\right)_{x,u}dt$ 即总可以把各宗量视作独立变量；而在计算它的全导数时，就需要分析各宗量之间的函数关系，例如：当 x,u 为 t 的函数时，

$$\frac{dF\left(x,u,t\right)}{dt}=\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{u,t}\frac{dx}{dt}+\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_{x,t}\frac{du}{dt}+\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{x,u}$$

当然，在力学中什么叫“独立”变量，这个问题更复杂一些，既涉及运动学，又涉及动力学。在某一时刻，描述一个力学体系的位形，需要一组广义坐标，如果这一组广义坐标能够独立地取值，则称为独立的广义坐标； 描述一个力学体系的运动状态，给出坐标是不够的，还必须给出速度。例如解动力学方程时给出的初条件应包括独立给出的初位形和初速度，即初始时刻坐标和速度的值，这就是对初运动状态的描述。（但不必给出初加速度或更高阶导数的初值，这是因为我们考虑的动力学方程一般是坐标的二阶常微分方程，参阅 **§1．6.**），由于初始时刻可以任意选定，因此对于任意一个给定时刻，坐标和速度的值都可以独立给出。在这个意义下，广义坐标和广义速度是相互独立的；但是其它时刻的坐标和速度就不能独立给出了，也就是说，作为时间的函数，广义速度与广义坐标不是相互独立的。由此还可以得到：广义坐标的微分和广义速度的微分也不是相互独立的，事实上，

$$d\dot{q}_\alpha=d\left(\frac{dq_\alpha\left(t\right)}{dt}\right)=\frac{d^2q_\alpha\left(t\right)}{dt^2}dt=\frac{d}{dt}\left[dq_\alpha\left(t\right)\right]$$

另外我们已经看到，两个变分也是不相互独立的。$\delta\dot{q}_\alpha=\delta\left(\dfrac{dq_\alpha\left(t\right)}{dt}\right)=\dfrac{d}{dt}\left[\delta q_\alpha\left(t\right)\right]$在由哈密顿原理推导拉格朗日方程的过程中，就用到了这一点。

至于在动力学方程中，未知函数是否独立，决定于约束方程，也就是指积分求解之前，而不是指求解之后。例如解质点在三维空间中的动力学方程，有 3 个未知函数（广义坐标）。如果有曲面约束，则只有两个独立的未知函数。至于求解之后，因为动力学方程给出了确定的轨道，连两个广义坐标都是不独立的（要满足轨道方程）。

还应指出，在用降阶法解拉格朗日方程时，把原来的方程组

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0\qquad \alpha=1,2,\cdots,s\qquad \text{化为：}$$

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial y_\alpha}-\dfrac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0 & L=L\left(q_\alpha,y_\alpha,t\right)\equiv L\left(q_\alpha,\dot{q}_\alpha,t\right)\\ y_\alpha=\dfrac{d}{dt}q_\alpha & \alpha=1,2,\cdots,s\end{cases}$$

前者是 s 个二阶常微分方程组成的方程组有 s 个独立的未知函数q_α，至于未知函数$\dot{q}_\alpha=\dfrac{dq_\alpha}{dt}$

当然不是独立于q_α的；而后者是由q_α，$y_\alpha=\dot{q}_\alpha$共 2s 个未知函数满足的 2s 个一阶微分方程组成的方程组，q_α和$y=\dot{q}_\alpha$无论作为未知函数，还是在给定初条件时，都是相互独立的了。因为它们要满足更多的方程，未知函数之间的关系$y=\dot{q}_\alpha$已经转化为常微分方程组的一部分。

6．拉格朗日函数为什么是$L=L\left(q,\dot{q};t\right)$，而不是$L\left(q,\dot{q},\ddot{q};t\right)$或含有更高阶的导数？

这是因为，如果主动力只是$\left(q,\dot{q},t\right)$的函数，经典力学的动力学方程是广义坐标的二阶常微分方程组；于是如前面所示，拉格朗日函数不依赖广义加速度或更高阶导数。但是一般地如果我们考虑的动力学方程是 *n* 阶常微分方程，那么引入的拉格朗日函数就是广义坐标及其直至 *n*-1 阶的导数以及时间的函数。有兴趣者可参阅：

Manuel DE Leon and Paulo R. Rodrigues, Generalized Classical Mechanics and Field Theory 1985

第六章 简单的可积系统

§6．1．可积系统和不可积系统

拉格朗日方程是由 s 个 $(s=3n-k)$二阶常微分方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0 \qquad \alpha=1,2,\cdots,s \tag{1}$$

所组成的常微分方程组。由（1）式可以解得

$$\ddot{q}_\alpha=f_\alpha\left(q_\beta,\dot{q}_\beta,t\right) \qquad \alpha,\beta=1,2,\cdots,s \tag{1'}$$

（1）或（1’）的通解为： $q_\alpha=q_\alpha\left(t,C_1,C_2,\cdots,C_{2s}\right) \qquad \alpha=1,2,\cdots,s \qquad (2)$

其中 2s 个积分常数由初条件$q_\alpha\left(0\right)=q_{\alpha 0}$，$\dot{q}_\alpha\left(0\right)=\dot{q}_{\alpha 0}$确定。

为了求通解，可以直接积分拉格朗日方程（1），也可以利用运动积分，再进一步求解。运动积分就是在运动过程中保持不变的$q_\alpha,\dot{q}_\alpha$的某种函数：$\bar{C}_k=\bar{C}_k\left(q,\dot{q}\right) \quad (3)$

它们可能是某些重要的守恒量。这样的相互独立的运动积分最多有$(2s-1)$个。事实上，如果已求得拉格朗日方程的通解（2），由（2）对 t 求导可以得到

$$\dot{q}_\alpha=\dot{q}_\alpha\left(t,C_1,C_2,\cdots,C_{2s}\right) \qquad \alpha=1,2,\cdots,s \tag{4}$$

由（2）和（4）解出积分常数，消去 t，可能得到$(2s-1)$个这样的函数。

若拉格朗日方程不显含t，则（2）式具有时间平移不变性，因而总可表为：

$$q_\alpha=q_\alpha\left(t-C_{2s},C_1,C_2,\cdots C_{2s-1}\right)=q\left(t-t_0,C_1,C_2,\cdots C_{2s-1}\right) \qquad （1’）$$

即把$2s$个常数重新组合，使一个积分常数和时间结合在一起，这个积分常数体现了时间零点的选择。这样在消去t时，同时消去这个常数 t_0，于是可解得$(2s-1)$个独立的运动积分：

$$\bar{C}_k=\bar{C}_k\left(q,\dot{q}\right) \quad k=1,2,\cdots,2s-1 \qquad （3）$$

在相当一般的条件下，一个常微分方程组存在唯一的解。一般说，一个力学系统的动力学方程是满足这样的条件的。但是解存在唯一并不意味着解一定能表为解析函数（能用解析函数表达的解是凤毛麟角）。如果一个力学系统的动力学方程的解能够表为解析函数（称为有解析解），则这个系统称为可积系统或完全可积系统。否则就称为不可积系统。有解析解并不一定能用初等函数表达。因为解析函数并不限于初等函数，在一定条件下和一定区域内，一些不能表为初等函数的函数（例如：用积分，无穷级数等形式表达的函数）也可能是解析的。

一个自由度的力学系统，并且有能量积分或广义能量积分存在的，这样的系统一定是可积的；线性的力学系统，即其动力学方程是线性方程组，也一定是可积的。至于多个自由度的非线性系统，一般说是不可积的。也有少数例外。如：两体问题，开普勒问题，重刚体的几个特例，等等。

§6．2．一个自由度的力学系统

一个自由度的力学系统，并且有能量积分或广义能量积分存在的，即：这个系统的动力

学方程为$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}=0$，并且$\frac{\partial L}{\partial t}=0$；这样的系统一定是可积的。事实上，由（广义）能量积分$\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-L=E$，从中可以解得$\dot{q}=\Psi\left(q\right)$，积分得$\int_{q_0}^{q}\frac{dq}{\Psi\left(q\right)}=t-t_0$；在此情况下积分未必能表为初等函数，即使能表为初等函数，q 也未必能用初等函数表为 t 的显函数，但这并不妨碍 q 成为 t 的解析函数。

【例 1】谐振子是最简单的一个实例，因为它还是一个线性系统。

拉格朗日函数为：$L=T-V=\frac{1}{2}m\dot{q}^2-\frac{1}{2}kq^2=\frac{1}{2}m\dot{q}^2-\frac{1}{2}m\omega_0^2q^2 \quad \omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$

动力学方程为：$\ddot{q}+\omega_0^2q=0$ 有多种方法求这个方程的积分。我们利用能量积分：

$$\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-L=\frac{1}{2}m\dot{q}^2+\frac{1}{2}m\omega_0^2q^2=E \qquad \dot{q}=\sqrt{\frac{2E}{m}-\omega_0^2q^2}$$

通解 $t-t_0=\int_{q_0}^{q}\frac{dq}{\sqrt{\frac{2E}{m}-\omega_0^2q^2}}=\frac{1}{\omega_0}\left[\arcsin\left(\sqrt{\frac{m}{2E}}\omega_0 q\right)-\arcsin\left(\sqrt{\frac{m}{2E}}\omega_0 q_0\right)\right]$

即 $q=A\sin\left(\omega_0 t+\alpha\right)=\frac{1}{\omega_0}\sqrt{\frac{2E}{m}}\sin\left[\omega_0\left(t-t_0\right)+\arcsin\left(\sqrt{\frac{m}{2E}}\omega_0 q_0\right)\right]$

其中 $A=\sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}} \quad \alpha=\arcsin\left(\sqrt{\frac{m}{2E}}\omega_0 q_0\right)-\omega_0 t_0$

【例 2】单摆。以偏转角 θ 为广义坐标，摆长为 l，拉格朗日函数为 $L=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+mgl\cos\theta$，单摆仍然是可积系统，虽然它的解析解不能表为初等函数。

【例 3】考虑一维有阻力$\left(-c\dot{x}\right)$时的强迫振动（强迫力为$F\cos\omega_p t$）。虽然这个问题不存在能量积分或广义能量积分，不能利用前述的结论，但这是线性系统，是可积的。(参阅 [1] **§6．8．** 和第七章 **§7．3．**)

$$m\ddot{x}=-kx-c\dot{x}+F\cos\omega_p t$$

引入$\frac{k}{m}=\omega_0^2 \quad \frac{c}{m}=2\beta \quad \frac{F}{m}=f$ 得 $\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=f\cos\omega_p t$

在$\beta<\omega_0$的情况下，解得$x=ae^{-\beta t}\cos\left(\omega t-\varphi\right)+b\cos\left(\omega_p t-\delta\right)$

上式表明：振动由两项构成，一项是阻尼振动，另一项是依强迫力频率作的强迫振动。

其中：阻尼振动的频率 $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$，强迫振动的振幅$b=\frac{f}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_p^2\right)^2+4\beta^2\omega_p^2}}$

和相位差$\delta=\arctan\dfrac{2\beta\omega_p}{\omega_0^2-\omega_p^2}$均由力学系统的特性决定；而积分常数$a=\dfrac{x_0-b\cos\delta}{\cos\varphi}$，

$\varphi=\arctan\left(\dfrac{\dot{x}_0}{x_0\omega}+\dfrac{\beta}{\omega}\right)$由初位置和初速度$x_0,\dot{x}_0$确定。（参阅[1]218－220 页）

强迫振动的振幅可表为$b=\kappa\dfrac{F}{k}$其中$\kappa=\dfrac{1}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega_0^2}\right)^2+\gamma^2\dfrac{\omega_p^2}{\omega_0^2}}}$称为振幅的放大因子

$\delta=\mathrm{arc}\tan\dfrac{\gamma\dfrac{\omega_p}{\omega_0}}{1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega_0^2}}$是强迫振动的相位差，$\gamma=\dfrac{2\beta}{\omega_0}$为阻尼因子。可以讨论$\delta,\kappa$随$\dfrac{\omega_p}{\omega_0}$的变化。（[1]221 页）以上的讨论包括了简谐振动（$\beta=0,F=0$）阻尼振动（$F=0$，$\beta<\omega_0$）和无阻力时的强迫振动（$\beta=0$）等特殊情况。但未包括$\beta\geq\omega_0$的情况。（均请同学们自行讨论）

§6．3．多自由度力学体系的微振动（多维线性系统）（[5]86－95 页并参阅[1]第六章）

1．振动是一种很广泛的运动形式，是指力学系统保持在平衡位置附近运动。振动不限于简谐振动（势能也就不限于齐二次式），甚至不限于周期运动。

振动的分类：从能量的角度：振动可以分为自由振动，阻尼振动，强迫振动；从微分方程的类型：振动可以分为线性，非线性；从自由度的数目：振动可以分为单自由度，多自由度，无限多自由度。

如果一个力学体系初始时刻的速度为零处于某一确定的位置，并且在以后的全部时间里恒处于此位置，则此力学体系处于平衡状态，所处的位置称为平衡位置。平衡位置也是一个很广泛的概念（可以分为稳定平衡、不稳定平衡和随遇平衡）。对振动问题有实际意义的是稳定平衡位置。稳定平衡位置存在的充要条件为：势能有严格的极小值。

保守体系平衡位置稳定性的拉格朗日定理（勒襄 狄里赫里定理）（拉格朗日于 1788 年在分析力学一书中最早提出，后由勒襄 狄里赫里严格证明）：势能有严格极小值的充分条件：

一个自由度的情形$\dfrac{dV}{dq}=0,\quad\dfrac{d^2V}{dq^2}>0$

2 个自由度的情形$\dfrac{\partial V}{\partial q_1}=\dfrac{\partial V}{\partial q_2}=0,\ \left(\dfrac{\partial^2V}{\partial q_1\partial q_2}\right)^2-\dfrac{\partial^2V}{\partial q_1^2}\dfrac{\partial^2V}{\partial q_2^2}<0,\ \dfrac{\partial^2V}{\partial q_1^2}>0,\ \dfrac{\partial^2V}{\partial q_2^2}>0$

平衡位置的不稳定性准则（拉格朗日定理的逆问题）迄今尚未完全解决，但已证明：如果势能在平衡位置取极大值，则是不稳定平衡；势能是常数则是随遇平衡。

2．在微振动（意即振幅很小）的情况下：取广义坐标的零点为平衡位置，则广义坐标和广义速度的绝对值都可以视为同阶的小量。考虑一般的保守体系的势能函数，可以在原点附近展开为无穷级数

$$V(q)=V(0)+\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial V}{\partial q_{\partial}}\right)_0 q_\alpha+\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\right)_0 q_\alpha q_\beta+\cdots\cdots$$

常数项只影响势能的零点能量，可取为零；考虑到势能在稳定平衡位置取严格的极小值，一次项为零；对微振动，高阶项相对很小；均可略去。因而微振动的势能近似为广义坐标的正定的齐二次式，记为：

$$V(q)=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}k_{\alpha\beta}q_\alpha q_\beta \qquad k_{\alpha\beta}=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\right)_0=k_{\beta\alpha}$$

在稳定约束的情况下，动能为广义速度（正定）的齐二次式，略去高阶项，系数应为常量：

$$T=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}m_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta \qquad m_{\alpha\beta}=m_{\beta\alpha}=\text{常量}$$

一般地考虑作微振动的完整，稳定，保守的多自由度力学体系，拉格朗日函数可以表为：

$$L=T-V=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\left(m_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta-k_{\alpha\beta}q_\alpha q_\beta\right)$$

拉格朗日方程为： $$\sum_{\beta=1}^{s}\left(m_{\alpha\beta}\ddot{q}_\beta+k_{\alpha\beta}q_\beta\right)=0 \qquad \alpha=1,2,\cdots s \qquad (1)$$

3．对于线性方程组（1）我们已经有了系统的解法。取试解：$q_\alpha=A_\alpha\sin\left(\omega\cdot t+\varphi\right)$，

代入方程，得线性齐次代数方程组：$$\sum_{\beta=1}^{s}\left(-m_{\alpha\beta}\omega^2+k_{\alpha\beta}\right)A_\beta=0 \qquad \alpha=1,2,\cdots s \qquad (2)$$

或者用矩阵表示为： $$\left(\hat{K}-\omega^2\hat{M}\right)\hat{A}=0 \qquad (2')$$

其中$$\hat{K}=\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1s}\\k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{11}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\k_{s1}&k_{s2}&\cdots&k_{ss}\end{pmatrix}\quad \hat{M}=\begin{pmatrix}m_{11}&m_{12}&\cdots&m_{1s}\\m_{21}&m_{22}&\cdots&m_{11}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\m_{s1}&m_{s2}&\cdots&m_{ss}\end{pmatrix}\quad \hat{A}=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_s\end{pmatrix}$$

也就是$$\begin{pmatrix}k_{11}-m_{11}\omega^2&k_{12}-m_{12}\omega^2&\cdots&k_{1s}-m_{1s}\omega^2\\k_{21}-m_{21}\omega^2&k_{22}-m_{22}\omega^2&\cdots&k_{11}-m_{11}\omega^2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\k_{s1}-m_{s1}\omega^2&k_{s2}-m_{s2}\omega^2&\cdots&k_{ss}-m_{ss}\omega^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_s\end{pmatrix}=0$$

解这个方程组，就是要解一个本征值问题（求本征值ω^2和本征矢量A_α）。

久期方程 $f(\omega^2)=\det\left(k_{\alpha\beta}-m_{\alpha\beta}\omega^2\right)=0$ 即

$$\begin{vmatrix} k_{11}-m_{11}\omega^2 & k_{12}-m_{12}\omega^2 & \cdots & k_{1s}-m_{1s}\omega^2 \\ k_{21}-m_{21}\omega^2 & k_{22}-m_{22}\omega^2 & \cdots & k_{11}-m_{11}\omega^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{s1}-m_{s1}\omega^2 & k_{s2}-m_{s2}\omega^2 & \cdots & k_{ss}-m_{ss}\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

可以证明，本征值 ω^2 都是正实数。事实上，对于久期方程的根 ω^2，由于

$$\sum_{\beta=1}^{s}\left(-m_{\alpha\beta}\omega^2+k_{\alpha\beta}\right)A_\beta=0 \quad \alpha=1,2,\cdots s \quad \text{有非零解 } A_\beta \quad \beta=1,2,\cdots s$$

得到 $\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}A_\alpha\left(-m_{\alpha\beta}\omega^2+k_{\alpha\beta}\right)A_\beta=0$，或者 $\hat{A}\left(-\hat{M}\omega^2+\hat{K}\right)\hat{A}=0$ 进而 $\omega^2=\dfrac{\hat{A}\hat{K}\hat{A}}{\hat{A}\hat{M}\hat{A}}$ 由于动能和势能的正定性，上式的分子分母均为正，于是得证。

依次取正的 ω 值，记为 ω_1， ω_2，… ω_s，称为本征频率或简正频率。对于每一个 $\omega_\rho\left(\rho=1,2,\cdots s\right)$ 由方程组 (2') $\left(-\hat{M}\omega_\rho^2+\hat{K}\right)\hat{A}^{(\rho)}=0$ 解得对应的本征矢量 $\left\{A_\alpha^{(\rho)},\alpha=1,2,\cdots s\right\}$，这一组数之间的比例关系由方程组 (2') 确定，有一个决定本征矢量长度的系数可任选。于是得到对应于简正频率 ω_ρ 的本征解：

$$\left\{q_\alpha^{(\rho)}=A_\alpha^{(\rho)}\sin\left(\omega_\rho\cdot t+\varphi_\rho\right),\alpha=1,2,\cdots s\right\} \tag{3}$$

这是以简正频率所作的简谐振动，称为一种简正振动模式。方程组（1）描述的微振动问题的通解为本征解（3）的线性叠加：

$$q_\alpha=\sum_{\mu=1}^{s}C_\mu q_\alpha^{(\mu)}=\sum_{\mu=1}^{s}C_\mu A_\alpha^{(\mu)}\sin\left(\omega_\mu\cdot t+\varphi_\mu\right), \quad \alpha=1,2,\cdots s \tag{4}$$

其中 $\left\{C_\mu,\varphi_\mu\right\}$ 为 2s 个积分常数，由初条件（初位形和初速度）决定。（4）式中 $A_\alpha^{(\rho)}$ 表征本征矢量长度的任意性可以吸收进积分常数 C_μ

由于方程组的系数矩阵是实对称的，利用对应于不同简正频率 $\omega_\sigma^2,\omega_\rho^2$ 的方程组（2）：

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}A_\alpha^{(\sigma)}\left(-m_{\alpha\beta}\omega_\rho^2+k_{\alpha\beta}\right)A_\beta^{(\rho)}=0 \quad \text{或} \quad \hat{A}^{(\sigma)}\left(-\hat{M}\omega_\rho^2+\hat{K}\right)\hat{A}^{(\rho)}=0$$

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}A_\alpha^{(\rho)}\left(-m_{\alpha\beta}\omega_\sigma^2+k_{\alpha\beta}\right)A_\beta^{(\sigma)}=0 \quad \text{或} \quad \hat{A}^{(\rho)}\left(-\hat{M}\omega_\sigma^2+\hat{K}\right)\hat{A}^{(\sigma)}=0$$

两式相减，得 $\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}m_{\alpha\beta}A_\alpha^{(\sigma)}A_\beta^{(\rho)}\left(\omega_\sigma^2-\omega_\rho^2\right)=0$ 或 $\hat{A}^{(\sigma)}\hat{M}\hat{A}^{(\rho)}\left(\omega_\sigma^2-\omega_\rho^2\right)=0$

因为 $\omega_\sigma^2\neq\omega_\rho^2$，有 $\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}m_{\alpha\beta}A_\alpha^{(\sigma)}A_\beta^{(\rho)}=0$ 或 $\hat{A}^{(\sigma)}\hat{M}\hat{A}^{(\rho)}=0$

对应于不同简正频率的本征矢量在以 $\hat{M}$ 为度规矩阵的内积定义下是正交的：

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} m_{\alpha\beta} A_\alpha^{(\sigma)} A_\beta^{(\rho)} = 0 \quad 或 \quad \left\langle A^{(\sigma)}, A^{(\rho)} \right\rangle \equiv \hat{A}^{(\sigma)} \hat{M} \hat{A}^{(\rho)} = 0 \qquad \left(\omega_\sigma^2 \neq \omega_\rho^2\right)；$$

简正频率有重根时，对应的本征矢量经正交化手续总可取为正交的，因而总有：

$$\left\langle A^{(\sigma)}, A^{(\rho)} \right\rangle \equiv \hat{A}^{(\sigma)} \hat{M} \hat{A}^{(\rho)} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{s} m_{\alpha\beta} A_\alpha^{(\sigma)} A_\beta^{(\rho)} = \mu_\rho \delta_{\rho\sigma}, \quad \mu_\rho > 0 \quad \rho,\sigma = 1,2,\cdots s$$

并且由于 $\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} A_\alpha^{(\sigma)} \left(-m_{\alpha\beta}\omega_\rho^2 + k_{\alpha\beta}\right) A_\beta^{(\rho)} = 0, \qquad \rho,\sigma = 1,2,\cdots s$

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} k_{\alpha\beta} A_\alpha^{(\sigma)} A_\beta^{(\rho)} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{s} m_{\alpha\beta}\omega_\rho^2 A_\alpha^{(\sigma)} A_\beta^{(\rho)} = \omega_\rho^2 \mu_\rho \delta_{\rho\sigma} \equiv \kappa_\rho \delta_{\rho\sigma} \qquad \kappa_\rho = \omega_\rho^2 \mu_\rho > 0$$

由上可见：多自由度力学体系的微振动是若干个简正振动模式的叠加。求解微振动的拉格朗日方程，就是求所有的简正振动模式，也就是解一个本征值问题（求本征值和本征矢量，也就是把相关的矩阵对角化，也就是把相关的二次型化为标准型）。

§6．4．简正坐标、简正频率和简正振动：（见[1]§6. 4.－*§6. 5.）

作为一个线性系统，作微振动的力学体系的求解问题原则上是简单的，但也有其复杂性，那就是由于多个简谐振动的叠加，在数学上表现为动能和势能表达式中交叉项的存在。下面我们从选择适当的广义坐标的角度来讨论这个问题。为了消去交叉项，我们采用以单一的简正振动模式变化的广义坐标，即引入简正坐标：

$$\xi_\mu = C_\mu \sin\left(\omega_\mu \cdot t + \varphi_\mu\right), \quad \mu = 1,2,\cdots s\,,$$

简正坐标与原来的广义坐标之间的关系为 $q_\alpha = \sum_{\mu=1}^{s} A_\alpha^{(\mu)} \xi_\mu,\ \alpha = 1,2,\cdots s$；利用这个关系式可以把动能和势能这两个二次型同时化为标准型（即把系数矩阵同时对角化），即改写为：

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} m_{\alpha\beta} \sum_{\rho=1}^{s} A_\alpha^{(\rho)} \dot{\xi}_\rho \sum_{\sigma=1}^{s} A_\beta^{(\sigma)} \dot{\xi}_\sigma = \frac{1}{2}\sum_{\rho,\sigma=1}^{s} \left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} m_{\alpha\beta} A_\alpha^{(\rho)} A_\beta^{(\sigma)}\right) \dot{\xi}_\rho \dot{\xi}_\sigma$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\rho,\sigma=1}^{s} \mu_\rho \delta_{\rho\sigma} \dot{\xi}_\rho \dot{\xi}_\sigma = \frac{1}{2}\sum_{\rho=1}^{s} \mu_\rho \dot{\xi}_\rho^2$$

$$V(q) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} k_{\alpha\beta} \sum_{\rho=1}^{s} A_\alpha^{(\rho)} \xi_\mu \sum_{\sigma=1}^{s} A_\beta^{(\sigma)} \xi_\nu = \frac{1}{2}\sum_{\rho,\sigma=1}^{s} \left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} k_{\alpha\beta} A_\alpha^{(\rho)} A_\beta^{(\sigma)}\right) \xi_\rho \xi_\sigma = \frac{1}{2}\sum_{\rho=1}^{s} \kappa_\rho \xi_\rho^2$$

$$\kappa_\rho = \sum_{\alpha,\beta=1}^{s} k_{\alpha\beta} A_\alpha^{(\rho)} A_\beta^{(\rho)} \qquad \rho = 1,2,\cdots s$$

利用简正坐标，拉格朗日函数可以表述为各简正振动的拉格朗日函数的叠加：

$$L = T - V = \sum_{\rho=1}^{s} L^{(\rho)} = \sum_{\rho=1}^{s} \frac{1}{2}\left(\mu_\rho \dot{\xi}_\rho^2 - \kappa_\rho \xi_\rho^2\right)$$

每一个拉格朗日方程均只含有一个未知函数，从而分解为单自由度的问题，容易求解，甚至可以直接写出简正频率。但是求简正坐标实质上就是求微振动的本征解，也不是一件简单的事情。在某些情况下，可以通过对物理图像的分析，比较方便地找到简正坐标。

至此我们只讨论了多自由度微振动力学系统的自由振动，关于其阻尼振动和强迫振动可参阅[1]§7．4

§6．5．微振动理论的应用实例

微振动理论有广泛的应用。在宏观世界，各种机械、桥梁、车船都不是绝对的刚体，它们都有自身的本征频率；它们又往往可能受到周期性强迫力的作用而产生振动。设计时，应考虑使其本征频率远离预期的周期性强迫力的频率，以免引起共振而毁损。在微观世界，研究晶格（**见[1]§6. 6.**）、多原子分子的振动（**见[1]§6. 7.**），也都要用到微振动的理论。

多原子分子为由 n 个原子（看成质点）组成的质点系，若质点静止于各自的平衡位置，整个分子可看成一个刚体。但实际上各原子在平衡位置附近作微振动。因此整个质点系的运动可以分解为整体（看成刚体）的运动（包括平动和转动）和各质点微振动的叠加。

n 原子分子的 $3n$ 个自由度中，平动自由度 3 个；转动自由度 3 个（线型分子为 2 个）；其余 $(3n-6)$ 个为振动自由度（线型分子为 $(3n-5)$ 个）。

我们假设分子中各原子的平衡位置构成的骨架是一刚体，即无论原子如何偏离平衡位置，分子中各原子的平衡位置的结构保持不变。设第 k 个原子的位置矢量 $\vec{r}_k=\vec{r}_{k0}+\vec{u}_k$，其中 $\vec{r}_{k0}$ 对应于平衡位置，$\vec{u}_k$ 表示偏离平衡位置的位移。为了把分子的振动和分子整体的平动和转动分离开来，我们只需考虑满足 $\sum_{k=1}^{n}m_k\vec{u}_k=0$ 和 $\sum_{k=1}^{n}\vec{r}_{k0}\times m_k\vec{u}_k=0$ 的运动状态。有了前一个等式，保证了分子质心的位置不改变，因而排除了平动；再有了后一个等式，就保证了分子整体的取向不改变，因而排除了转动（计算中已经略去了二阶小量）。

这两个等式 $\sum_{k=1}^{n}m_k\vec{u}_k=0$，$\sum_{k=1}^{n}\vec{r}_{k0}\times m_k\vec{u}_k=0$ 是动力学微分方程的积分，（对动量守恒和角动量守恒再积分得到的结果），不是原来意义下的约束，但是我们可以把它们视为约束方程而使问题得到简化，这是对约束概念的推广。

【例1】　双单摆。（参考资料[1]178 页【例 1】）。参阅第二章【思考题】1（3）图。

【解】我们利用拉格朗日力学的系统方法：　平面问题：2 个质点，4 个坐标，2 个约束：

$$x_1^2+y_1^2=l^2 \qquad (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=l^2$$

2 个自由度，　取 θ_1,θ_2 为广义坐标，

$$x_1=l\,cos\theta_1 \quad y_1=l\,sin\theta_1 \quad x_2=l\,cos\theta_1+l\,cos\theta_2 \quad y_2=l\,sin\theta_1+l\,sin\theta_2$$

$$T=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}m\left\{\left[\frac{d}{dt}(l\sin\theta_1+l\sin\theta_2)\right]^2+\left[\frac{d}{dt}(l\cos\theta_1+l\cos\theta_2)\right]^2\right\}$$

$$=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}ml^2\left[\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2+2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\right]$$

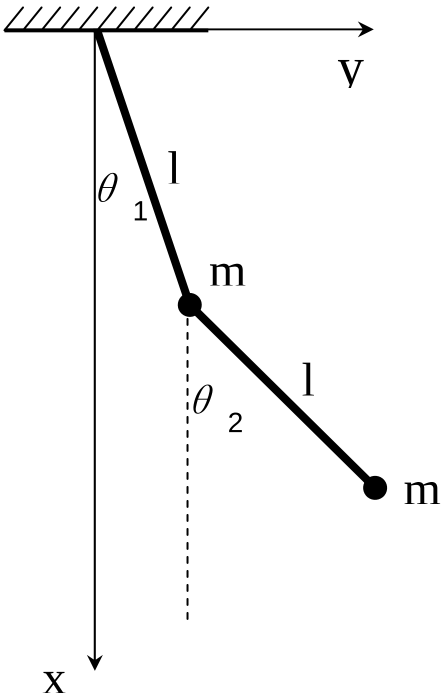
$$V=-mgl\cos\theta_1-mg(l\cos\theta_1+l\cos\theta_2)$$

注意：考虑微振动，平衡位置 $\theta_1=\theta_2=0,\therefore\theta_1,\theta_2$ 都是小量，保留二阶小量，得

$T=\frac{1}{2}ml^2\left(2\dot{\theta}_1{}^2+\dot{\theta}_2{}^2+2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right)$，$V=\frac{1}{2}mgl\left(2\theta_1{}^2+\theta_2{}^2\right)-3mgl$（势能的最后一项为常数项，可略去。以下详见[1]179 页。）

可得拉格朗日方程　　$l\left(2\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right)+2g\theta_1=0$

$l\left(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right)+g\theta_2=0$（以上方程也可利用牛顿动力学方程得到）



这是二阶线性齐次常系数微分方程组，解必有如下形式 $\theta_\alpha=A_\alpha\sin\left(\omega\cdot t+\varphi\right)\quad\alpha=1,2$

代入方程组，得$\begin{cases}2\left(\frac{g}{l}-\omega^2\right)A_1-\omega^2A_2=0\\-\omega^2A_1+\left(\frac{g}{l}-\omega^2\right)A_2=0\end{cases}$应有$\begin{vmatrix}2\left(\frac{g}{l}-\omega^2\right) & -\omega^2\\ -\omega^2 & \left(\frac{g}{l}-\omega^2\right)\end{vmatrix}=0$

利用久期方程求本征值ω：$\begin{cases}\omega_1{}^2=\frac{g}{l}\left(2-\sqrt{2}\right)\\ \omega_2{}^2=\frac{g}{l}\left(2+\sqrt{2}\right)\end{cases}$进一步求本征矢量：

$$\begin{cases}\text{对应于}\omega_1=\sqrt{\frac{g}{l}\left(2-\sqrt{2}\right)} \qquad \frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}}=\sqrt{2}\quad \text{取 } A_1^{(1)}=1\quad A_2^{(1)}=\sqrt{2}\\ \text{对应于}\omega_2=\sqrt{\frac{g}{l}\left(2+\sqrt{2}\right)} \qquad \frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}}=-\sqrt{2}\quad \text{取}A_1^{(2)}=1\quad A_2^{(2)}=-\sqrt{2}\end{cases}$$

$$\theta_\alpha^{(\rho)} = A_\alpha^{(\rho)} \sin\left(\omega_\rho \cdot t + \varphi_\rho\right) \qquad \alpha, \rho = 1,2$$

$$\theta_1^{(1)} = \sin\left(\omega_1 \cdot t + \varphi_1\right) \qquad \theta_1^{(2)} = \sin\left(\omega_2 \cdot t + \varphi_2\right)$$

$$\theta_2^{(1)} = \sqrt{2}\sin\left(\omega_1 \cdot t + \varphi_1\right) \qquad \theta_2^{(2)} = -\sqrt{2}\sin\left(\omega_2 \cdot t + \varphi_2\right)$$

由线性齐次方程组的解的可叠加性 $\theta_\alpha = C_1\theta_\alpha{}^{(1)} + C_2\theta_\alpha{}^{(2)}$， $\alpha = 1,2$ 即

$$\begin{cases} \theta_1 = C_1\sin(\omega_1 \cdot t + \varphi_1) + C_2\sin(\omega_2 \cdot t + \varphi_2) \\ \theta_2 = \sqrt{2}C_1\sin(\omega_1 \cdot t + \varphi_1) - \sqrt{2}C_2\sin(\omega_2 \cdot t + \varphi_2) \end{cases}$$

取简正坐标 $\begin{cases} \xi_1 = C_1\sin\left(\omega_1 \cdot t + \varphi_1\right) = \left(\sqrt{2}\theta_1 + \theta_2\right)/2\sqrt{2} \\ \xi_2 = C_2\sin\left(\omega_2 \cdot t + \varphi_2\right) = \left(\sqrt{2}\theta_1 - \theta_2\right)/2\sqrt{2} \end{cases}$

有 $\begin{cases} \theta_1 = A_1^{(1)}\xi_1 + A_1^{(2)}\xi_2 = \xi_1 + \xi_2 \\ \theta_2 = A_2^{(1)}\xi_1 + A_2^{(2)}\xi_2 = \sqrt{2}\xi_1 - \sqrt{2}\xi_2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}ml^2\begin{pmatrix}\dot{\xi}_1 & \dot{\xi}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}ml^2\begin{pmatrix}\dot{\xi}_1 & \dot{\xi}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4+2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 4-2\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2\end{pmatrix} \\ &= ml^2\left(2+\sqrt{2}\right)\dot{\xi}_1{}^2 + ml^2\left(2-\sqrt{2}\right)\dot{\xi}_1{}^2 \end{aligned}$$

$$V = \frac{1}{2}mgl\begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1 \\ \xi_2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}mgl\begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 0 \\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1 \\ \xi_2\end{pmatrix}$$

$$= 2mgl\xi_1{}^2 + 2mgl\xi_2{}^2$$

$$L = T - V = L^{(1)} + L^{(2)}$$

其中 $L^{(1)} = ml^2\left(2+\sqrt{2}\right)\dot{\xi}_1^2 - 2mgl\cdot\xi_1^2$，$L^{(2)} = ml^2\left(2-\sqrt{2}\right)\dot{\xi}_2^2 - 2mgl\cdot\xi_2^2$

可以直接求得 $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{g}{l}\left(2-\sqrt{2}\right)} \qquad \omega_2 = \sqrt{\dfrac{g}{l}\left(2+\sqrt{2}\right)}$

【例 2】**一维晶格的纵振动（见[1]§6．6.并参阅§6．2.**【例 2】（179 页，$N=3$ 一维晶格的纵向振动）；§**6．3.**【例】（181---182 页，$N=4$ 一维晶格的横向振动））

这里"一维"是指沿直线分布的晶格，"纵振动"是指振动方向沿晶格分布的方向

沿晶格建立 x 轴，以质点 0 为原点，指向第 n 个质点为正向。第 n 个质点的坐标

$x_n = x_n^0 + u_n \quad n = 0,1,\cdots N$；共 $N+1$ 个质点 $x_n^0 = na$ 为平衡位置的坐标，$u_n = x_n - x_n^0$ 为偏离平衡位置的位移（以偏向正 x 的方向为正）。

假定晶格只受相邻晶格的作用力：

第 n 个质点所受作用力在 x 轴上的投影，$F_n = F_n^{(n+1)} + F_n^{(n-1)}$ 其中

$F_n^{(n+1)} = -K\left[u_n - u_{n+1}\right]$为第（*n+1*）个质点对第 *n* 个质点作用力在 *x* 轴上的投影

$F_n^{(n-1)} = -K\left[u_n - u_{n-1}\right]$为第（*n* —*1*）个质点对第 *n* 个质点作用力在 *x* 轴上的投影

F_n 为有势力，$F_n = -\dfrac{\partial V}{\partial u_n}$，假定两端晶格固定：$u_0 = u_N = 0$，

$V = \sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{2}K\left(u_n - u_{n+1}\right)^2 = \frac{1}{2}K\left[u_1{}^2 + \sum_{n=1}^{N-2}\left(u_n - u_{n+1}\right)^2 + u_{N-1}{}^2\right]$于是得动力学方程：

$$\begin{cases} m\ddot{u}_1 = F_1 = K\left(u_2 - 2u_1\right) & n = 1 \\ m\ddot{u}_n = F_n = K\left(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n\right) & n = 2,3,\cdots N-2 \\ m\ddot{u}_{N-1} = F_{N-1} = K\left(u_{N-2} - 2u_{N-1}\right) & n = N-1 \end{cases}$$

【例 3】线型三原子对称分子 ABA（例如CO_2分子）的纵振动。

建立坐标系：选分子的对称轴为OX 轴；各个原子的位置矢量$\vec{r}_k = \vec{r}_{k0} + \vec{u}_k, (k = 1,2,3)$各原子平衡位置的位矢为：$\vec{r}_{10} = 0,\quad \vec{r}_{20} = b\vec{i},\quad \vec{r}_{30} = 2b\vec{i}$

纵振动就是沿 OX 轴方向的微振动：位移矢量 $\vec{u}_k = q_k\vec{i}\ (k = 1,2,3)$

q_1, q_2, q_3为描述微小纵振动的广义坐标。动能和势能为：

$$T = \frac{1}{2}m_A\left[\dot{q}_1{}^2 + \dot{q}_3{}^2\right] + \frac{1}{2}m_B\dot{q}_2{}^2 \qquad V = \frac{1}{2}k\left[\left(q_1 - q_2\right)^2 + \left(q_2 - q_3\right)^2\right]$$

以下运算可按通常的方法进行。但是利用对物理图像的分析很容易“猜”出结果。考虑到振动时系统的质心应保持静止，也就是$\sum_{k=1}^{n} m_k\vec{u}_k = 0$；利用系统的对称性就可以得到两种振动模式：

1）B 原子不动，两个 A 原子反方向振动，即：

$$q_1 = -q_3，q_2 = 0 \qquad 本征矢量为：A^{(1)} = \left(1,0,-1\right)$$

2）两个 A 原子同方向振动，与 B 原子的振动方向相反，即：

$$q_1 = q_3，q_2 = -\frac{2m_A}{m_B}q_1 \qquad 本征矢量为：A^{(2)} = \left(1,-\frac{2m_A}{m_B},1\right)$$

利用正交性条件$\left\langle A^{(\sigma)}, A^{(\rho)}\right\rangle \equiv \hat{A}^{(\sigma)}\hat{M}\hat{A}^{(\rho)} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{s} m_{\alpha\beta}A_\alpha^{(\sigma)}A_\beta^{(\rho)} = 0\ \left(\omega_\sigma^2 \neq \omega_\rho^2\right)$可以求得另一个本征矢量为：$A^{(3)} = \left(1,1,1\right)$

广义坐标q_α与简正坐标ξ_α之间的坐标变换式为：

$$\begin{cases} q_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \\ q_2 = -\dfrac{2m_A}{m_B}\xi_2 + \xi_3 \\ q_3 = -\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{1}{2}(q_1 - q_3) \\ \xi_2 = \dfrac{m_B}{2(2m_A + m_B)}(q_1 - 2q_2 + q_3) \\ \xi_3 = \dfrac{m_A}{(2m_A + m_B)}q_1 + \dfrac{m_B}{(2m_A + m_B)}q_2 + \dfrac{m_A}{(2m_A + m_B)}q_3 \end{cases}$$

动能为 $T = m_A\dot{\xi}_1^2 + \dfrac{m_A}{m_B}(2m_A + m_B)\dot{\xi}_2^2 + \dfrac{1}{2}(2m_A + m_B)\dot{\xi}_3^2$

势能为 $V = k\left\{\xi_1^2 + \xi_2^2\dfrac{(2m_A + m_B)^2}{m_B^2}\right\}$

求得简正频率为 $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m_A}}$，$\omega_2 = \sqrt{\dfrac{k(2m_A + m_B)}{m_A m_B}}$，$\omega_3 = 0$

第三个简正频率对应的微振动频率为零，也就是说，这个简正坐标描述的不是振动而是分子整体沿着 OX 轴的平动。

由此可见，寻找简正坐标可以采用§6．3．§6．4．中介绍的系统方法。也可以根据物理问题的特点（对称性等），“猜测”得简正坐标。（见[1]197-198 页）

在三维空间中，我们还应该讨论这种分子的横振动。事实上，由三个原子构成的这种线型对称分子，有 9 个自由度，有 3 个自由度刻划其整体的平动；由于是线型分子，整体转动的自由度只有 2 个；振动自由度有 4 个，纵向、横向各 2 个。具体分析可参阅[1] §6．7．，在那里我们还可以读到讨论非线型分子振动的实例。

§6．6．开普勒问题

两体问题的拉格朗日函数 $L = \dfrac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^2 + \dfrac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^2 - V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$（假定不受外力，相互作用力势能只与两点间距离有关）,引入质心坐标系：

$$\vec{R} = \frac{1}{M}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2) \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad M = m_1 + m_2$$

拉格朗日函数化为：$L = \dfrac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \dfrac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - V(r) \quad m = m_r = \dfrac{m_1 m_2}{M}$ 为折合质量

至此实现了质心坐标和相对坐标间的分离，且 $\vec{R}$ 成为循环坐标，得运动积分 $M\dot{\vec{R}} = \vec{P}_C$，质心作惯性运动；进一步只需研究相对运动。它的拉格朗日函数和有势中心力场的情况相似，只是质量应代之以折合质量。

$L_r = \dfrac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - V(r) \quad m = m_r = \dfrac{m_1 m_2}{M}$ 由此可求得拉格朗日方程 $m\ddot{\vec{r}} + \nabla V = 0$

这相当于有势中心力场，质点作平面运动，这是一个二维问题，可应用平面极坐标

$$L_r = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r) \qquad (1)$$

我们已经得到两个运动积分：

能量守恒 $\dfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \dfrac{L^2}{2mr^2} + V(r) = E \qquad (2)$

和角动量守恒 $\frac{\partial L_r}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = L$ 或 $r^2\dot{\theta} = h$ （3）

我们仍用 L 记角动量，勿与拉格朗日函数混淆。能不能求出另一个运动积分？

考虑一特殊情况：$\vec{r} \cdot \nabla V = -V$（相当于平方反比中心力 $V = \pm\frac{\alpha}{r}$），记动量为 $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{p} \times \vec{L}\right) = \dot{\vec{p}} \times \vec{L} = -\nabla V \times m\left(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\right) = m\left[\dot{\vec{r}}\left(\vec{r} \cdot \nabla V\right) - \vec{r}\left(\dot{\vec{r}} \cdot \nabla V\right)\right]$$

$$= m\left[\dot{\vec{r}}\left(\vec{r} \cdot \nabla V\right) - \vec{r}\dot{V}\right] = -m\frac{d}{dt}\left(\vec{r}V\right)$$

于是得到另一个守恒的矢量（*Laplace-Runge-Lenz* 矢量）$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} + m\vec{r}V$ （4）

这个常矢量在运动平面内，自动满足 $\vec{A} \cdot \vec{L} = 0$，此外在 $\vec{A}, \vec{L}, E$ 之间还满足

$$A^2 = \vec{A}^2 = \left(\vec{p} \times \vec{L} + mV\vec{r}\right)^2 = \left(\vec{p} \times \vec{L}\right)^2 + 2mV\vec{r} \cdot \left(\vec{p} \times \vec{L}\right) + m^2V^2r^2$$

$$= p^2L^2 + 2mVL^2 + m^2\alpha^2 = 2m\left(\frac{p^2}{2m} + V\right)L^2 + m^2\alpha^2 = 2mEL^2 + m^2\alpha^2 = m^2\alpha^2e^2 \quad (5)$$

所以实际上只提供了一个独立的运动积分。这样我们求得了全部三个独立的运动积分。

在平面极坐标中可得

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} + mV\vec{r} = m\left(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta\right) \times mr^2\dot{\theta}\vec{k} + mVr\vec{e}_r$$

$$= -m^2r^2\dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \left(m^2r^3\dot{\theta}^2 + mVr\right)\vec{e}_r$$

具体考虑开普勒问题（$V = -\frac{\alpha}{r}$，吸引力 $\alpha > 0$）

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - m\alpha\frac{\vec{r}}{r} = m\left(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta\right) \times mr^2\dot{\theta}\vec{k} - m\alpha\vec{e}_r$$

$$= -m^2r^2\dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \left(m^2r^3\dot{\theta}^2 - m\alpha\right)\vec{e}_r = -m^2r^2\dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \left(\frac{L^2}{r} - m\alpha\right)\vec{e}_r$$

在椭圆轨道的情形（能量为负 $E < 0$），由近日点（或远日点）的运动状态：

$$\dot{r} = 0 \qquad \vec{A} = \left(\frac{L^2}{r} - m\alpha\right)\vec{e}_r$$

可确定 LRL 矢量沿椭圆长轴，再由近日点和远日点运动状态的比较，可以确定 LRL 矢量沿力心指向近日点的方向。于是可得

$$\vec{r} \cdot \vec{A} = rA\cos\theta = \vec{r} \cdot \left(\vec{p} \times \vec{L} - m\alpha\frac{\vec{r}}{r}\right) = L^2 - m\alpha r$$

$$r = \frac{L^2}{m\alpha + A\cos\theta} = \frac{\frac{L^2}{m\alpha}}{1 + \frac{A}{m\alpha}\cos\theta}$$ 这是圆锥曲线的方程，其中

半正焦弦 $p=\dfrac{L^2}{m\alpha}$ 偏心率 $e=\dfrac{A}{m\alpha}=\dfrac{1}{m\alpha}\sqrt{m^2\alpha^2+2mEL^2}=\sqrt{1+\dfrac{2EL^2}{m\alpha^2}}$

与以前所得的结果一致。这是利用运动积分直接得到轨道方程的一个实例。如果要得到运动方程，则还必须经过一次积分。

第三部分　哈密顿力学

第七章　哈密顿正则方程

§7．1．哈密顿正则方程

我们已经看到：不仅力学问题的顺利解决往往借助于坐标的适当选择，而且力学的发展是和坐标概念的拓展紧密相联系的。拉格朗日力学的建立就是和一般的广义坐标概念的引入相联系的。我们还将看到，分析力学的进一步发展也是如此：广义共轭动量的引入导致坐标概念的进一步拓展为正则共轭坐标，伴随着动力学方程的进一步发展为哈密顿正则方程和哈密顿力学的建立：

直角坐标　　　$\Rightarrow$ 曲线坐标（可能不完全独立）$\Rightarrow$（独立的）广义坐标 $\Rightarrow$ 正则共轭坐标；
牛顿动力学方程 $\Rightarrow$ 动力学基本方程　　　　　$\Rightarrow$ 拉格朗日方程　　　$\Rightarrow$ 正则方程。

本章就来介绍分析力学的另一个重要组成部分：哈密顿力学。

1．广义坐标和共轭动量　正则共轭坐标（正则变量）

我们已经学过，对于广义坐标 q_α，可以引入广义动量 $p_\alpha=\dfrac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}=p_\alpha\left(q,\dot q,t\right)$，广义动量不是原来意义下的“坐标”，也可以不同于我们原来学过的动量；例如：它可以是角动量等。我们还注意到：如果两个拉氏量满足如下的关系式：$\tilde L\left(q,\dot q,t\right)-\lambda L\left(q,\dot q,t\right)=\dfrac{df\left(q,t\right)}{dt}$，它们将给出同样的拉氏方程，但给出不同的广义动量。由于常数 λ 和可微分函数 $f(q,t)$ 是完全任意的，所以广义动量的定义是独立于广义坐标的（但是在选定了常数 λ 和可微分函数 $f(q,t)$ 之后，广义动量和广义坐标、广义速度之间仍有确定的函数关系。因此，由于规范变换引起的广义动量定义的不唯一性和广义动量与广义坐标的相互独立性是两个不同的问题。）广义动量和广义坐标处于平等（对等，但并不相同）的地位，合称为正则共轭坐标（或正则变量）。于是 s 维广义坐标的位形空间（configuration space，以广义坐标为直角坐标构成的 s 维欧氏空间），就被拓广为 2s 维的正则共轭坐标的相空间（phase space，以正则变量 $p_\alpha,q_\alpha(\alpha=1,2,\cdots s)$ 为直角坐标构成的 2s 维欧氏空间）。（参阅附录 A10）相空间的“正则共轭坐标”不仅描述力学体系的位形，而且描述力学体系的动力学状态。这样，以 s 个广义坐标为未知函数的二阶常微分方程组——拉格朗日方程将代之以 2s 个正则共轭坐标为未知函数的一阶常微分方程组——哈密顿正则方程。

由广义坐标到正则共轭坐标，是坐标概念的又一次重要的飞跃，对力学以至对整个物理学的发展产生了深刻的影响。随着正则共轭坐标的引入而建立起来的哈密顿正则方程和由此发展起来的内容极为丰富的哈密顿力学，不仅为求解拉格朗日方程提供了又一有效方法和途径，而且对理论物理的发展产生了深刻的影响，特别是对量子力学的建立和发展起了积极推动作用。

2．勒让德（Legendre）变换

从数学的角度看，引入广义动量，也就是用降阶法（把高阶常微分方程（组）化为未知函数个数更多，方程数更多的一阶常微分方程组）来解拉格朗日方程。因此哈密顿正则方程的建立提供了求解拉格朗日方程的又一种方法。

最简单易行的降阶法：只要令 $\dot{q}_\alpha \equiv y_\alpha$，就可以把拉格朗日方程（含 s 个未知函数 q_α 的 s 个二阶常微分方程组成的方程组）。$\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}-\dfrac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0$，$\alpha=1,2,\cdots,s$

化为含 $2s$ 个未知函数 q_s, y_s 的 $2s$ 个一阶常微分方程组成的方程组

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial y_\alpha}-\dfrac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0 \quad L=L\left(q_\alpha,y_\alpha,t\right)\equiv L\left(q_\alpha,\dot{q}_\alpha,t\right)\\ y_\alpha=\dot{q}_\alpha \quad \alpha=1,2,\cdots,s\end{cases}$$

另一种方法，$2s$ 个未知函数取为 $q_\alpha, p_\alpha \equiv \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$，则得到如下的一阶常微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}=p_\alpha\\ \dfrac{\partial L}{\partial q_\alpha}=\dot{p}_\alpha \quad \alpha=1,2,\cdots,s\end{cases}$$

我们虽取未知函数为 q_α, p_α，但 L 还是 $q_\alpha,\dot{q}_\alpha,t$ 的函数，若改用 q_α,p_α,t 的函数 $\overline{L}=\overline{L}\left(q,p,t\right)=L\left(q,\dot{q},t\right)$，则求 $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}},\dfrac{\partial L}{\partial q}$ 就不方便了。另外方程的形式也不对称。

为了解决这些问题，我们采用如下变换：利用拉格朗日函数定义广义动量 $p_\alpha=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$，可以解得 $\dot{q}_\alpha=\dot{q}_\alpha\left(p,q,t\right)$，把函数宗量中的广义速度变换为广义动量，

$$L\left(q,\dot{q},t\right)=L\left(q,\dot{q}\left(p,q,t\right),t\right)=\overline{L}\left(p,q,t\right)$$

$$\frac{\partial \overline{L}}{\partial p_\alpha}=\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta}\frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial p_\alpha}=\sum_{\beta=1}^{s}p_\beta\frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial p_\alpha}=\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\left(\sum_{\beta=1}^{s}p_\beta\dot{q}_\beta\right)-\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial p_\beta}{\partial p_\alpha}\dot{q}_\beta=\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\left(\sum_{\beta=1}^{s}p_\beta\dot{q}_\beta\right)-\dot{q}_\alpha$$

$$\frac{\partial \overline{L}}{\partial q_\alpha}=\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}+\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta}\frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial q_\alpha}=\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}+\sum_{\beta=1}^{s}p_\beta\frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial q_\alpha}=\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}+\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\sum_{\beta=1}^{s}p_\beta\dot{q}_\beta\right)$$

引入的哈密顿（Hamilton）函数（宗量为 p,q,t），或称哈密顿量（Hamiltonian）：

$$H\left(p_\alpha,q_\alpha,t\right)=\left[\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot{q}_\alpha-L\left(q_\alpha,\dot{q}_\alpha,t\right)\right]\Big|_{\dot{q}_\alpha=\dot{q}_\alpha\left(q_\beta,p_\beta,t\right)}=\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot{q}_\alpha\left(q_\beta,p_\beta,t\right)-\overline{L}\left(p_\alpha,q_\alpha,t\right)$$

拉格朗日函数以 $\left(q,\dot{q},t\right)$ 为自变量，哈密顿函数以 $\left(p,q,t\right)$ 为自变量。初学者在理解两者的意义，特别是作偏导数运算时值得注意。

其中 p_α, q_α 称为正则变量， p_α 称为 q_α 的共轭动量。于是得到

$$\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\left[\sum_{\beta=1}^{s} p_\beta \dot{q}_\beta(q,p,t) - \bar{L}(p,q,t)\right] = \frac{\partial H(p,q,t)}{\partial p_\alpha} = \dot{q}_\alpha$$

$$\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left[\sum_{\beta=1}^{s} p_\beta \dot{q}_\beta(q,p,t) - \bar{L}(p,q,t)\right] = \frac{\partial H(p,q,t)}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$$

应该注意到，至此我们还没有涉及动力学方程，只是进行了数学上的变换：引入 $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$，把拉格朗日函数函数 L 变换为哈密顿函数 H，把自变量 $q,\dot{q},t$ 变换为 p,q,t，这个变换称为 Legendre 变换。进一步我们利用拉格朗日方程，得到 $\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \dot{p}_\alpha$ 由此推导得 Hamilton 正则方程

$$\begin{cases} \dot{q}_\alpha = \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ -\dot{p}_\alpha = \dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha} \end{cases} \qquad \alpha = 1,2,\cdots,s$$

事实上，由正则方程的前一半 $\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}$，可解得 $p_\alpha = p_\alpha(q,\dot{q},t)$，也就是正则共轭动量的定义。后一半 $-\dot{p}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$ 才是哈密顿力学中的动力学方程。

3．一般地，拉格朗日函数还可能依赖某个或某些参数 λ： $L = L(q,\dot{q},t,\lambda)$ 于是 $H = H(p,q,t,\lambda)$ 我们还可以证得；， $\frac{\partial H}{\partial \lambda} = -\frac{\partial L}{\partial \lambda}$ 证明如下：

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_{p,q} = \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \left(\frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial \lambda}\right)_{p,q} - \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_{q,\dot{q}} - \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\left(\frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial \lambda}\right)_{p,q} = -\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_{q,\dot{q}}$$

，从 Legendre 变换的角度来看， t,q 也可视作参数，因此可得 $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$ 和 $\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$，后者在前面已经得到。

4．哈密顿正则方程的各种形式和哈密顿量的显式：

（一）以上得到的正则方程是从理想完整保守力学体系的拉格朗日方程推导得到的，因此适用于理想完整保守的力学体系。由于 $L = T - V = T_2 + T_1 + T_0 - V(q,t)$

$$H=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha-L=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha-L=2T_2+T_1-\left(T_2+T_1+T_0-V\right)$$
$$=T_2-T_0+V \qquad (1)$$

此时 H 为广义能量。特别对于稳定系统，且以不显含时间的坐标变换引入广义坐标，则

$T=T_2$， $T_1=T_0=0$，从而 H 为能量 $H=T+V$ （2）

（二）对于有广义势的力学体系（也包括既有有势力，又有广义有势力的情况），拉格朗日方程仍可表为 $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}-\dfrac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0 \quad \alpha=1,2,\cdots,s$，因而同样能够推导得正则方程。

但其中拉格朗日函数 $L=T-U$，$U=U\left(q,\dot{q},t\right)$ 为广义势。在广义力 $Q'_\alpha=Q'_\alpha\left(q,\dot{q},t\right)$ 不依赖高阶导数的情况下，广义势 $U=U\left(q,\dot{q},t\right)$ 对广义速度的依赖只能是线性的：

$$U=\sum_\alpha U_\alpha\left(q,t\right)\dot{q}_\alpha+V\left(q,t\right),$$

广义动量 $p_\alpha=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}=\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}-G_\alpha$

$$H=\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot{q}_\alpha-L=2T_2+T_1-U+V-\left(T-U\right)=T_2-T_0+V$$

（三）对于有非保守力的力学体系，正则方程为：

$$\dot{p}_\alpha=-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}+Q_\alpha, \qquad \dot{q}_\alpha=\frac{\partial H}{\partial p_\alpha},$$ （请同学们自行推导）。

§7．2．哈密顿正则方程的解和积分

1．正则方程是含有 $2s$ 个未知函数 p_α,q_α 的一阶方程组，其通解的显函数形式为

$$p_\alpha=p_\alpha\left(t,C_1,\cdots C_{2s}\right)\quad q_\alpha=q_\alpha\left(t,C_1,\cdots C_{2s}\right)\quad \alpha=1,2,\cdots s \qquad (1)$$

也叫正则方程的积分。其中除了运动规律（运动方程，即拉格朗日方程的解）

$q_\alpha=q_\alpha\left(t,C_1\cdots C_{2s}\right)$，还包含动量随时间变化的规律 $p_\alpha=p_\alpha\left(t,C_1\cdots C_{2s}\right)$

正则方程的积分也可以表为隐函数形式

$$F_i\left(p,q,t\right)=C_i \quad i=1,2,\cdots 2s \qquad (2)$$

或更一般地 $G_i\left(p,q,t,C_1,\cdots C_{2s}\right)=0 \quad i=1,2,\cdots 2s$

一般说，（2）式只相当于拉格朗日方程的初积分；为求得运动规律，需要对（2）式再进行一次积分，或者从（2）式消去 p.

从（1）或（2）消去 t，得到

$$f_i\left(p,q,C_1,\cdots C_{2s}\right)=0 \quad i=1,2,\cdots 2s-1 \qquad (3)$$

（3）式体现了正则变量的某个函数在运动过程中保持不变，往往是一些重要的守恒量，称为运动积分。（3）式也就是相空间中的轨道方程。如果已经得到（3），则和（1）中任一个显函数结合，可一起给出运动规律和动量随时间变化的规律。

形如（2）、（3）的函数关系成为正则方程的积分的充要条件为：把（1）式代入函数关系式（2）、（3）能成恒等式。或利用正则方程或（1）能证得（2）或（3）对时间的全导数等于零。

2．若力学体系的哈密顿函数不显含时间（自治系统），则正则方程也不显含 t，正则方程的解应有时间平移不变性。通解的显函数形式（积分常数之一归结为计算时间的零点 t_0）

$$p_\alpha = p_\alpha\left(t-t_0, C_1,\cdots C_{2s-1}\right) \quad q_\alpha = q_\alpha\left(t-t_0, C_1,\cdots C_{2s-1}\right) \quad \alpha = 1,2,\cdots s \qquad (1')$$

从（1'）消去 t，（ t_0 也消去了）得 $f_i\left(p,q,C_1,\cdots C_{2s-1}\right)=0 \quad i=1,2,\cdots 2s-1$ （2'）

或 $F_{\mathrm{i}}\left(p,q\right)=C_i \quad i=1,2,\cdots 2s-1$ （3'）

如果能找到形如（2'）或（3'）式的 $2s-1$ 个独立的运动积分，那么只要求出（1'）中的任何一个函数，原则上就可以得到（1'）式中的其余 $2s-1$ 个函数，从而得到正则方程的通解。但是以上求解的过程并非易事。如果能找到形如（2'）或（3'）式的若干个独立的积分，那么也能部分地掌握力学体系的运动规律。

3．可积系统

正如我们在拉格朗日理论中提到过的那样，正则方程作为力学系统的动力学方程，在相当一般的条件下，解也是存在且唯一的；但是未必能表为解析函数（不可积系统）。如果正则方程是可积的，即它的解能够表为解析函数，则这个系统称为可积系统或完全可积系统。

如果哈密顿量不显含时间，则哈密顿量是运动积分；因而满足上述条件的一个自由度的自治系统总是可积的。事实上

$$H=H\left(p,q\right)=E \qquad p=\Psi\left(q\right) \qquad 或 \qquad q=\Phi\left(p\right)$$

$$t=\int_{q_0}^{q}\frac{dq}{\left[\dfrac{\partial H\left(p,q\right)}{\partial p}\right]_{p=\Psi(q)}}+t_0 \qquad 或 \qquad t=-\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\left[\dfrac{\partial H\left(p,q\right)}{\partial q}\right]_{q=\Phi(p)}}+t_0$$

由于正则方程内在结构的对称性，可以对哈密顿系统（即动力学方程为哈密顿方程的力学系统）的可积性进行如下的讨论：如果一个自由度数为 s 的自治（即动力学方程不显含 t）哈密顿系统，存在 s 个运动积分，并且这 s 个运动积分是相互对合的（in involution），即它们的泊松括号（见后）为零, 则称这个力学系统是可积的（刘维可积性）。满足刘维可积性定义的哈密顿系统在一般意义下是可积的。

如果多自由度的力学体系能够分离变量，把一个或若干个动力学方程化为单个未知函数的不显含 t 的方程，那么就能够得到部分解析解，但原来的力学体系未必是可积的。如果分离变量能够进行到底，把全部动力学方程化为单个未知函数的方程，则原来的力学体系是可积的。

4．最容易得到的运动积分（守恒量）：

（1）利用循环积分。若 H 中不显含某一广义坐标 q_s（称为循环坐标），则

$$\dot{p}_\alpha=-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}=0 \quad p_\alpha=b_\alpha（常数）。\quad 因为\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}=-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$$

所以这里所讲的循环积分与拉格朗日方程的循环积分一致。但我们应注意到，正则变量有$2s$个，若H中不显含某一广义动量p_α，则有积分

$$\dot{q}_\alpha=\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}=0 \quad q_\alpha=a_\alpha \text{（常数）}$$

这样的积分也称为循环积分。应该注意：一个或若干个广义坐标为常数并不意味着体系静止；下一章学了正则变换以后，可知广义坐标和广义动量之间并无不可逾越的界限，即使全部$q_\alpha=a_\alpha$，甚至全体正则变量为常数，也不见得意味着系统静止。

（2）利用能量积分。在有势力的情况下：

$$\frac{dH}{dt}=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha\right)+\frac{\partial H}{\partial t}=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(-\dot{p}_\alpha\dot{q}_\alpha+\dot{q}_\alpha\dot{p}_\alpha\right)+\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial t}$$

若$\dfrac{\partial H}{\partial t}=0$，则$H=T_2-T_0+V=h$　这是广义能量积分。

特别对于稳定系统，$T=T_2$，$T_1=T_0=0$，$H=T+V=E$，这是能量积分。

以上讨论和结论和拉格朗日力学中关于（广义）能量积分的讨论公式实质上是一致的。

（3）若系统的哈密顿函数可写成下列形式：

$H=H\left[f\left(p_1,p_2,\cdots p_m,q_1,q_2,\cdots q_m\right),p_{m+1},\cdots p_s,q_{m+1},\cdots q_s,t\right]$即若干对正则变量以同一种固定的组合形式$f\left(p_1,p_2,\cdots p_m,q_1,q_2,\cdots q_m\right)$出现在哈密顿函数中，则$f\left(p_1,p_2,\cdots p_m,q_1,q_2,\cdots q_m\right)$是守恒量。（补充习题）

注意：这里f是不显含t的，但是H是可以显含t的。识别固定的组合形式$f\left(p_1,p_2,\cdots p_m,q_1,q_2,\cdots q_m\right)$这一种技巧，在以后的分离变量法中也有用；需要积累经验。

【例 1】若势能只是 r 的函数，则质点的哈密顿量可表为：

$$H=\frac{1}{2m}p_r^2+\frac{p_\theta^2}{2mr^2}+\frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\theta}+V\left(r\right)$$

p_φ**是守恒量，既可看成循环积分，又可看成**$\left(p_\varphi,\varphi\right)$**的固定的组合形式；**

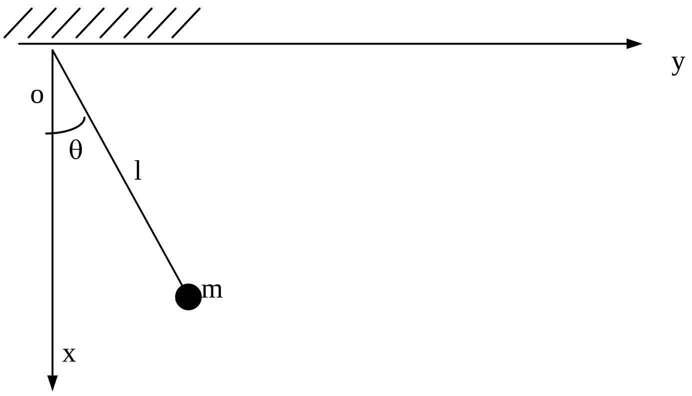
$p_\theta^2+\dfrac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}$**是守恒量，这是两对正则变量**$\left(p_\theta,\theta,p_\varphi,\varphi\right)$**的固定组合形式；**

$H=\dfrac{1}{2m}p_r^2+\dfrac{p_\theta^2}{2mr^2}+\dfrac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\theta}+V\left(r\right)$**是守恒量，当然是全体正则变量的固定组合形式。事实上就是能量积分。**

正则方程的上述解法，和第五章讲的 Lagrange 方程的解法基本上是平行的。在第八章我们还要讲述正则方程的另一些解法。

§7．3．哈密顿正则方程的应用举例

【例 1】求出单摆的正则方程和运动积分。



【解】拉格朗日函数 $L=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+mgl\cos\theta$，拉格朗日方程 $ml^2\ddot{\theta}+mgl\sin\theta=0$ （4）

广义动量 $p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=ml^2\dot{\theta}$，解得 $\dot{\theta}=\frac{p_\theta}{ml^2}$

哈密顿函数 $H=p_\theta\dot{\theta}-L\big|_{\dot{\theta}=\frac{p_\theta}{ml^2}}=\frac{p_\theta^2}{2ml^2}-mgl\cos\theta$

得正则方程 $\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial p_\theta}=\dfrac{p_\theta}{ml^2}=\dot{\theta}\\[2ex]\dfrac{\partial H}{\partial\theta}=mgl\sin\theta=-\dot{p}_\theta\end{cases}$ （5）

（5）式的第一式确实给出了广义动量的定义，第二式给出动力学方程，消去 p_θ 即得到（4）式。

本题没有循环积分，但有能量积分：$\frac{p_\theta^2}{2ml^2}-mgl\cos\theta=E$

【例 2】求出在中心力场 $V=-\frac{\alpha}{r}$ 中运动的质点的哈密顿函数、正则方程和运动积分。（[1]243 页例 1）

【解】拉格朗日函数 $L=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)+\frac{\alpha}{r}$ （1）

正则共轭动量 $p_r=m\dot{r}$， $p_\theta=mr^2\dot{\theta}$， （2）

解得 $\dot{r}=\frac{p_r}{m}$， $\dot{\theta}=\frac{p_\theta}{mr^2}$， （3）

哈密顿函数 $H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}\right)-\frac{\alpha}{r}$ （4）

求得正则方程

$$\dot{r}=\frac{\partial H}{\partial p_r}=\frac{p_r}{m} \qquad \dot{\theta}=\frac{\partial H}{\partial p_\theta}=\frac{p_\theta}{mr^2} \qquad (5)$$

$$\dot{p}_r=-\frac{\partial H}{\partial r}=\frac{p_\theta^2}{mr^3}-\frac{\alpha}{r^2} \qquad \dot{p}_\theta=-\frac{\partial H}{\partial \theta}=0 \qquad (6)$$

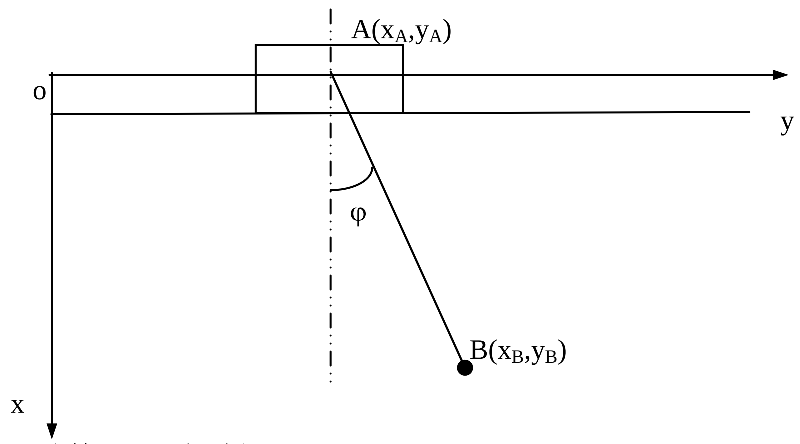
由（5）（6）消去共轭动量，得 $m\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)=-\frac{\alpha}{r^2}$ （7）

$$m\left(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}\right)=0 \qquad (8)$$

由于哈密顿量不显含θ，即得循环积分 $p_\theta=mr^2\dot{\theta}=$常数 （9）

（9）式也可以由（8）积分；或者由（6）积分，利用（2）；得到。

另外由于哈密顿量不显含时间，可得能量积分 $\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}\right)-\frac{\alpha}{r}=E$ （10）



【例 3】用正则方程解椭圆摆（比较[1]43 页【例 2】）

$$L=\frac{1}{2}\left(m_1+m_2\right)\dot{y}^2+\frac{1}{2}m_2l^2\dot{\varphi}^2+m_2l\dot{y}\dot{\varphi}\cos\varphi+m_2gl\cos\varphi$$

$$p_y=\left(m_1+m_2\right)\dot{y}+m_2l\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$p_\varphi=m_2l^2\dot{\varphi}+m_2l\dot{y}\cos\varphi$$

可解得

$$\dot{y}=\frac{lp_y-p_\varphi\cos\varphi}{l\left(m_1+m_2\sin^2\varphi\right)}$$

$$\dot{\varphi}=\frac{\left(m_1+m_2\right)p_\varphi-m_2lp_y\cos\varphi}{l^2m_2\left(m_1+m_2\sin^2\varphi\right)}$$

$$H=p_y\dot{y}+p_\varphi\dot{\varphi}-L\Big|_{\dot{y},\dot{\varphi}\Rightarrow p_y,p_\varphi,y,\varphi}$$

$$=\frac{1}{2\left(m_1+m_2\sin^2\varphi\right)}\left[p_y^2+\frac{m_1+m_2}{m_2l^2}p_\varphi^2-\frac{2\cos\varphi}{l}p_yp_\varphi\right]-m_2gl\cos\varphi$$

求得正则方程

$$\frac{\partial H}{\partial p_y}=\frac{1}{m_1+m_2\sin^2\varphi}\left[p_y-\frac{\cos\varphi}{l}p_\varphi\right]=\dot{y}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_\varphi}=\frac{1}{m_1+m_2\sin^2\varphi}\left[\frac{m_1+m_2}{m_2l^2}p_\varphi-\frac{\cos\varphi}{l}p_y\right]=\dot{\varphi}$$

$$\frac{\partial H}{\partial y}=0=-\dot{p}_y$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial\varphi}=&\frac{\sin\varphi}{\left(m_1+m_2\sin^2\varphi\right)^2}\\&\times\left[-m_2\cos\varphi p_y^2-\frac{\left(m_1+m_2\right)}{l^2}\cos\varphi p_\varphi^2+\frac{m_1+m_2\left(1+\cos^2\varphi\right)}{l}p_yp_\varphi\right]\\&+m_2gl\sin\varphi=-\dot{p}_\varphi\end{aligned}$$

H 不显含 y, y 是循环坐标，因此有循环积分 $p_y=\left(m_1+m_2\right)\dot{y}+m_2l\dot{\varphi}\cos\varphi$（水平方向动量守恒）

另外还有能量积分：$H=\frac{1}{2\left(m_1+m_2\sin^2\varphi\right)}\left[p_y^2+\frac{m_1+m_2}{m_2l^2}p_\varphi^2-\frac{2\cos\varphi}{l}p_yp_\varphi\right]-m_2gl\cos\varphi=E$

【例 4】电磁场中的粒子的运动 （参阅[1]245 页）

$$L=\frac{1}{2}mv^2-e\varphi+e\vec{A}\cdot\vec{v},\quad \vec{p}=m\vec{v}+e\vec{A},\quad \vec{v}=\frac{1}{m}\left(\vec{p}-e\vec{A}\right),\ H=\frac{1}{2m}\left(\vec{p}-e\vec{A}\right)^2+e\varphi$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha}=\dot{q}_\alpha\\[2mm]\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha}=-\dot{p}_\alpha\end{cases}\qquad\begin{cases}\dfrac{1}{m}\left(\vec{p}-e\vec{A}\right)=\vec{v}\\[2mm]-\dfrac{e}{m}\left(\vec{p}-e\vec{A}\right)\cdot\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial x}+e\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=-\dot{p}_x\quad etc.\end{cases}$$

分别把 m 和 e 看作参数，我们可得

$$\frac{\partial H}{\partial m}=-\frac{1}{2m^2}\left(\vec{p}-e\vec{A}\right)^2=-\frac{1}{2}v^2=-\frac{\partial L}{\partial m}$$

$$\frac{\partial H}{\partial e}=\frac{1}{m}\left(\vec{p}-e\vec{A}\right)^2\left(-\vec{A}\right)+\varphi=-\vec{v}\cdot\vec{A}+\varphi=-\frac{\partial L}{\partial e}$$

【例 5】谐振子 $H=\frac{1}{2m}p^2+\frac{1}{2}m\omega^2q^2$，

哈密顿量不显含时间，$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}=0$，能量守恒 $H=\frac{1}{2m}p^2+\frac{1}{2}m\omega^2q^2=E$

正则方程：$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{p}{m}$（动量的定义）；$\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q}=-m\omega^2q$ （动力学方程），消去一个变量，可得到 $\ddot{p}+\omega^2p=0$ 和 $\ddot{q}+\omega^2q=0$ 似乎有四个任意积分常数，实际上只有两个是独立的。

§7．4．哈密顿正则方程的研究

1．我们为什么要引入广义动量？

对于广义坐标q_α，我们引入了广义动量$p_\alpha=\dfrac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}=p_\alpha\left(q,\dot q,t\right)$，对于经典力学

$L=T-V$，在动能T是广义速度的正定的齐二次式的条件下，我们只考虑不依赖高阶导数的力，势能或广义势能V至多为广义速度的一次函数。行列式

$$\det\left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial \dot q_\beta}\right)=\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_\alpha \partial \dot q_\beta}\right)=\det\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_\alpha \partial \dot q_\beta}\right)>0$$

因此$p_\alpha=\dfrac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}=p_\alpha\left(q,\dot q,t\right)$的反函数存在$\dot q_\alpha=\dot q_\alpha\left(p,q,t\right)$，正则变量$\left\{p_\alpha,q_\alpha\right\}$可以代替

$\left\{q_\alpha,\dot q_\alpha\right\}$来描述运动状态和运动规律。和对于$\left\{q_\alpha,\dot q_\alpha\right\}$的讨论相仿，我们可以独立地对正则

变量$\left\{p_\alpha,q_\alpha\right\}$取值，以确定一个运动状态，在这个意义下，正则变量是相互独立的。然而在

描述运动规律时p_α是依存于q_α的，$p_\alpha=\dfrac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}=p_\alpha\left(q,\dfrac{dq}{dt},t\right)$，因而$p_\alpha,q_\alpha$不是相互独立

的，dp_α,dq_α也是不相互独立的。另外我们也可得到，它们的变分$\delta p_\alpha,\delta q_\alpha$也是不相互独

立的。$$\delta p_\alpha=\sum_{\beta=1}^{s}\left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial q_\beta}\delta q_\beta+\frac{\partial p_\alpha}{\partial \dot q_\beta}\delta \dot q_\beta\right)=\sum_{\beta=1}^{s}\left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial q_\beta}\delta q_\beta+\frac{\partial p_\alpha}{\partial \dot q_\beta}\frac{d}{dt}\left(\delta q_\beta\right)\right)$$

$$=\sum_{\beta=1}^{s}\left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial q_\beta}-\frac{d}{dt}\frac{\partial p_\alpha}{\partial \dot q_\beta}\right)\delta q_\beta+\sum_{\beta=1}^{s}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial \dot q_\beta}\left(\delta q_\beta\right)\right)$$

那么，引入广义动量有什么重要意义呢？以广义动量代替广义速度，把拉格朗日方程化为正则方程。正则方程为一阶方程，一阶方程比二阶方程易解；更重要的是，正则方程具有更多的对称性，有利于进行深入的研究。

哈密顿理论的发展表明：广义动量比起广义速度来，包含了更多的动力学信息，能够更广泛地描述物理规律，能够更深刻地揭示物理规律及其对称性，能够更方便地完成从经典力学发展到量子力学的飞跃。

2．拉格朗日方程在广义坐标的变换下形式不变。在正则变量的变换下，正则方程的形式能否保持不变呢？由于广义坐标和广义动量的地位平等但不相同，问题比较复杂，留待下一章（正则变换）详细讨论。

3．在标度变换和规范变换下哈密顿量的不唯一性：

由于在标度变换和规范变换下$L\Rightarrow L_1=\lambda L+\dfrac{df\left(q,t\right)}{dt}$拉格朗日方程具有不变性，拉格

朗日函数具有不唯一性；哈密顿量在标度变换和规范变换下也具有不唯一性：（注意：广义

坐标不变$Q_\alpha=q_\alpha$广义速度相同$\dot Q_\alpha=\dot q_\alpha$，但广义动量不同：$p_\alpha=\dfrac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}$

$$P_\beta=\frac{\partial L_1}{\partial \dot{Q}_\beta}=\lambda\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta}+\frac{\partial f}{\partial q_\beta}=\lambda p_\beta+\frac{\partial f}{\partial q_\beta}\text{以及}H=\left[\sum_\alpha p_\alpha\dot{q}_\alpha-L\right]_{\dot{q}\to\dot{q}(p,q,t)}\text{）}$$

$$H\Rightarrow H^*=\left[\sum_\beta P_\beta\dot{Q}_\beta-L_1\right]_{\dot{Q}\to\dot{Q}(P,Q,t)}=\left[\sum_\alpha\left(\lambda p_\alpha+\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\right)\dot{q}_\alpha-\lambda L-\frac{df}{dt}\right]=\lambda H-\frac{\partial f}{\partial t}$$

然而由此得到的动力学方程依然是正则方程，而且还是由原来的正则方程唯一确定的。

由此可见，在拉格朗日理论中规范变换的影响集中反映在拉格朗日函数上（不影响其自变量：广义坐标和广义速度），在正则方程中规范变换的影响分别表现在哈密顿函数及其自变量：广义动量上。

4．哈密顿原理、拉格朗日方程、和哈密顿正则方程的关系。

我们在第四章学过，哈密顿原理和拉格朗日方程是等价的。在§7．1．由拉格朗日方程导出了哈密顿正则方程。能不能从正则方程导出拉格朗日方程方程呢？回答是肯定的（请同学们自行推导）。值得注意的是：广义动量的定义已包含在正则方程 $\dot{q}_\alpha=\dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha}$ 之中，$\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}=p_\alpha$ 应由正则方程导出，不应作为推导过程的前提。

我们也可以从哈密顿原理导出哈密顿正则方程。利用哈密顿函数可以将 Hamilton 作用量表为 $S=\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot{q}_\alpha-H\right)dt$，哈密顿原理为

$$\delta S=\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot{q}_\alpha-H\right)dt=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\alpha=1}^{s}\left[\dot{q}_\alpha\delta p_\alpha+p_\alpha\delta\dot{q}_\alpha-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha-\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha\right]dt=0$$

因为 $p_\alpha\delta\dot{q}_\alpha=p_\alpha\dfrac{d}{dt}(\delta q_\alpha)=\dfrac{d}{dt}(p_\alpha\delta q_\alpha)-\dot{p}_\alpha\delta q_\alpha$，并考虑到 $\delta q_\alpha(t_0)=\delta q_\alpha(t_1)=0$

$$\begin{aligned}\delta S&=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\alpha=1}^{s}\left[\frac{d}{dt}(p_\alpha\delta q_\alpha)+\left(\dot{q}_\alpha-\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\right)\delta p_\alpha-\left(\dot{p}_\alpha+\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right)\delta q_\alpha\right]dt\\&=\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\delta q_\alpha\Big|_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\alpha=1}^{s}\left[\left(\dot{q}_\alpha-\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\right)\delta p_\alpha-\left(\dot{p}_\alpha+\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right)\delta q_\alpha\right]dt\\&=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\alpha=1}^{s}\left[\left(\dot{q}_\alpha-\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\right)\delta p_\alpha-\left(\dot{p}_\alpha+\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right)\delta q_\alpha\right]dt\end{aligned}$$

由于勒让德变换和广义动量的定义，得到 $\dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha}=\dot{q}_\alpha$，然后利用 δq_α 的相互独立性，就得 $\dot{p}_\alpha=-\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha}$。值得注意的是：$\delta p_\alpha,\delta q_\alpha$ 不是相互独立的。（如果 $\delta p_\alpha,\delta q_\alpha$ 是相互独立的，则 $\delta q_\alpha,\delta\dot{q}_\alpha$ 也是相互独立的了，这显然是不对的。）

综上所述，哈密顿原理、拉格朗日方程、正则方程三者是相互等价的。

5．非惯性参考系中的哈密顿函数和正则方程。

我们已经在第二章导出了非惯性参考系中质点的拉格朗日函数：

$$L' = \frac{1}{2}mv'^2 - m\vec{r}'\cdot\frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{1}{2}m\left(\vec{\omega}_0\times\vec{r}'\right)^2 - m\vec{r}'\cdot\left(\vec{\omega}_0\times\vec{v}'\right) - V\left(\vec{r}_0+\vec{r}'\right) \qquad (1)$$

并由此导出了拉格朗日方程

$$m\vec{a}' + m\vec{a}_0 + m\dot{\vec{\omega}}_0\times\vec{r}' + m\vec{\omega}_0\times\left(\vec{\omega}_0\times\vec{r}'\right) + 2m\vec{\omega}_0\times\vec{v}' + \nabla'V = 0 \qquad (2)$$

其中 $\vec{a}' = \frac{\tilde{d}\vec{v}'}{dt}$， $\vec{a}_0 = \frac{d\vec{v}_0}{dt}$， $\dot{\vec{\omega}} = \frac{\tilde{d}\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$，此式和非惯性系中有势力场中质点的牛顿动力学方程相同。我们现在来推导哈密顿正则方程：引入正则共轭动量

$$\vec{p}' = \frac{\partial L'}{\partial \vec{v}'} = \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}'}\vec{i} + \frac{\partial L'}{\partial \dot{y}'}\vec{j} + \frac{\partial L'}{\partial \dot{z}'}\vec{k} = m(\vec{v}'+\vec{\omega}_0\times\vec{r}') \qquad \vec{v}' = \frac{1}{m}\vec{p}' - \vec{\omega}_0\times\vec{r}' \qquad (3)$$

得到哈密顿函数 $H' = \frac{1}{2m}p'^2 - \vec{p}'\cdot\left(\vec{\omega}_0\times\vec{r}'\right) + m\vec{r}'\cdot\frac{d\vec{v}_0'}{dt} + V$ （4）

于是得正则方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial H'}{\partial \vec{p}'} = \frac{\tilde{d}\vec{r}'}{dt} \\ -\frac{\partial H'}{\partial \vec{r}'} = \frac{\tilde{d}\vec{p}'}{dt} \end{cases} \text{即} \begin{cases} \frac{1}{m}\vec{p}' - \vec{\omega}_0\times\vec{r}' = \frac{\tilde{d}\vec{r}'}{dt} = \vec{v}' \\ \vec{p}'\times\vec{\omega}_0 - m\frac{d\vec{v}_0}{dt} - \nabla'V = \frac{\tilde{d}\vec{p}'}{dt} \end{cases} \qquad (5)$$

消去 $\vec{p}'$ 得到的结果就是（2）式。

若两个参考系有一公共点（两个参考系相对作定点转动），则可选此点为共同的坐标系原点，于是：$\vec{r}_0\equiv 0,\ \vec{v}_0\equiv 0,\ \vec{a}_0\equiv 0$，拉格朗日函数简化为：

$$L' = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}m\left(\vec{\omega}_0\times\vec{r}'\right)^2 - m\vec{r}'\cdot\left(\vec{\omega}_0\times\vec{v}'\right) - V\left(\vec{r}_0+\vec{r}'\right) \qquad (1')$$

可导得正则方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial H'}{\partial \vec{p}'} = \frac{\tilde{d}\vec{r}'}{dt} \\ -\frac{\partial H'}{\partial \vec{r}'} = \frac{\tilde{d}\vec{p}'}{dt} \end{cases} \text{即} \begin{cases} \frac{1}{m}\vec{p}' - \vec{\omega}_0\times\vec{r}' = \frac{\tilde{d}\vec{r}'}{dt} = \vec{v}' \\ \vec{p}'\times\vec{\omega}_0 - \nabla'V = \frac{\tilde{d}\vec{p}'}{dt} \end{cases} \qquad (5')$$

其中 $\vec{p}'$ 仍由（3）式给出；哈密顿函数 $H' = \frac{1}{2m}p'^2 - \vec{p}'\cdot\left(\vec{\omega}_0\times\vec{r}'\right) + V$ （4’）

消去 $\vec{p}'$ 得到的结果就是动力学方程

$$m\vec{a}' + m\dot{\vec{\omega}}_0\times\vec{r}' + m\vec{\omega}_0\times\left(\vec{\omega}_0\times\vec{r}'\right) + 2m\vec{\omega}_0\times\vec{v}' + \nabla'V = 0 \qquad (2')$$

对于等角速度转动参考系来说，$\vec{\omega}_0$ 为常矢量，$\dot{\vec{\omega}}_0\equiv 0$，（1’）（3）（4’）（5’）依然成立。

动力学方程进一步简化为 $m\vec{a}' + m\vec{\omega}_0\times\left(\vec{\omega}_0\times\vec{r}'\right) + 2m\vec{\omega}_0\times\vec{v}' + \nabla'V = 0$ （2”）

（参阅[1]244 页【例 2】）

【例 1】用正则方程求约束在一光滑直杆上的质点的运动，此直杆在水平面内围绕原点作匀角速度（$\vec{\omega}_0$）转动。（参阅§5．5.【例 2】）

惯性参考系：$T=\dfrac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2{\omega_0}^2)=T_2+T_0 \quad V=0 \quad L=T-V=\dfrac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2{\omega_0}^2)$

$p=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}}=m\dot{r} \quad H=\dfrac{1}{2m}p^2-\dfrac{1}{2}m{\omega_0}^2r^2=T_2-T_0$

正则方程$\dfrac{\partial H}{\partial p}=\dfrac{p}{m}=\dot{r}$，$\dfrac{\partial H}{\partial r}=-m{\omega_0}^2r=-\dot{p}$ 消去 p 得 $\ddot{r}-{\omega_0}^2r=0$

非惯性参考系：$T'=\dfrac{1}{2}m\dot{r}'^2=T_2' \quad V'=-\dfrac{1}{2}mr'^2{\omega_0}^2 \quad L'=T'-V'=\dfrac{1}{2}m(\dot{r}'^2+r'^2{\omega_0}^2)$

$p'=\dfrac{\partial L'}{\partial \dot{r}'}=m\dot{r}' \quad H'=\dfrac{1}{2m}p'^2-\dfrac{1}{2}m{\omega_0}^2r'^2=T'+V'$

正则方程$\dfrac{\partial H'}{\partial p'}=\dfrac{p'}{m}=\dot{r}'$，$\dfrac{\partial H'}{\partial r'}=-m{\omega_0}^2r'=-\dot{p}'$ 消去 p' 得 $\ddot{r}'-{\omega_0}^2r'=0$

第八章 正则变换

§8．1．正则变换

1．引言：我们先来看两个实例：

【例 1】讨论广义坐标间的坐标变换对哈密顿函数和正则方程的影响。

在第五章§5．4．拉格朗日方程的研究这一节中我们已经知道，在广义坐标间的坐标变换（点变换）下，

$q_\alpha \Rightarrow Q_\beta = f_\beta(q,t)$，满足 $\dfrac{\partial(Q_1\cdots Q_s)}{\partial(q_1\cdots q_s)} \neq 0$，（其逆变换 $q_\alpha = \Phi_\alpha(Q,t)$ 存在，也满足 $\dfrac{\partial(q_1\cdots q_s)}{\partial(Q_1\cdots Q_s)} = \left[\dfrac{\partial(Q_1\cdots Q_s)}{\partial(q_1\cdots q_s)}\right]^{-1} \neq 0$）Lagrange 方程和 Lagrange 力学的理论体系不变。即新旧动力学方程均为拉格朗日方程（具体形式当然有变化）：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_\beta} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_\beta} = 0 \qquad (\alpha,\beta = 1,2,\cdots,s)$$

新旧拉格朗日函数相等：$L(q,\dot{q},t) = L\left(q_\alpha(Q,t), \dot{q}_\alpha(Q,\dot{Q},t), t\right) = \tilde{L}(Q,\dot{Q},t)$

在新旧两组广义坐标下，分别引入广义动量，进行 Legendre 变换，这样分别得到的广义动量和 Hamilton 量，一般说互不相同。然而得到的运动微分方程仍然各自为正则方程(虽然具体形式有所不同)：

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha},\ H = \left[\sum_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha - L\right]_{\dot{q}\to\dot{q}(p,q,t)},\quad \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \dot{q}_\alpha,\ \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = -\dot{p}_\alpha$$

$$P_\beta = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_\beta},\ \tilde{H} = \left[\sum_\beta P_\beta \dot{Q}_\beta - \tilde{L}\right]_{\dot{Q}\to\dot{Q}(P,Q,t)},\ \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_\beta} = \dot{Q}_\beta,\ \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_\beta} = -\dot{P}_\beta$$

这就是说，坐标变换 $Q_\beta = f_\beta(q,t)$ 和新旧广义动量间的变换

$$P_\alpha = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_\alpha} = \sum_\beta \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta}\frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial \dot{Q}_\alpha} = \sum_\beta p_\beta \frac{\partial q_\beta}{\partial Q_\alpha} = \sum_\beta p_\beta \left(\frac{\partial \Phi_\beta(Q,t)}{\partial Q_\alpha}\right)_{Q=f(q,t)} \equiv F_\alpha(p,q,t)$$

把正则方程变换为新的正则方程，新旧哈密顿量之间的关系为

$$\tilde{H} = \sum_\alpha P_\alpha \dot{Q}_\alpha - \tilde{L} = \sum_{\alpha,\beta} p_\beta \frac{\partial q_\beta}{\partial Q_\alpha}\dot{Q}_\alpha - \tilde{L} = \sum_\beta p_\beta\left(\dot{q}_\beta - \frac{\partial q_\beta}{\partial t}\right) - L = H - \sum_\beta p_\beta \frac{\partial q_\beta}{\partial t}$$

【例 2】讨论拉格朗日函数的不唯一性对哈密顿函数和正则方程的影响。

考虑两个等价的拉格朗日函数：$L_1 = \lambda L + \dfrac{df(q,t)}{dt}$，两组同样的广义坐标：$Q_\alpha = q_\alpha$，但

广义动量不同：$p_\alpha = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha},\ P_\beta = \dfrac{\partial L_1}{\partial \dot{Q}_\beta} = \lambda\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} + \dfrac{\partial f}{\partial q_\beta} = \lambda p_\beta + \dfrac{\partial f}{\partial q_\beta}$，哈密顿量也不同：

$$H=\left[\sum_{\alpha}p_{\alpha}\dot{q}_{\alpha}-L\right]_{\dot{q}\to\dot{q}(p,q,t)},$$

$$H^{*}=\left[\sum_{\beta}P_{\beta}\dot{Q}_{\beta}-L_{1}\right]_{\dot{Q}\to\dot{Q}(P,Q,t)}=\left[\sum_{\alpha}\left(\lambda p_{\alpha}+\frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}}\right)\dot{q}_{\alpha}-\lambda L-\frac{df}{dt}\right]=\lambda H-\frac{\partial f}{\partial t}$$

在原来的和新的广义坐标、广义动量和哈密顿函数下，分别有原来的正则方程

$$\frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}}=\dot{q}_{\alpha},\ \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}}=-\dot{p}_{\alpha}\quad \text{和新的正则方程}\quad \frac{\partial H^{*}}{\partial P_{\beta}}=\dot{Q}_{\beta},\ \frac{\partial H^{*}}{\partial Q_{\beta}}=-\dot{P}_{\beta}\quad \left(\alpha,\beta=1,2,\cdots,s\right)$$

成立。这就是说，规范变换和标度变换也把正则方程变换为新的正则方程。

2．正则变换的定义

既然$H=H\left(p,q,t\right)$视作$2s+1$个独立变量p_{α},q_{α},t的函数，我们还可以考虑更一般的变换：“整体地”（不把广义坐标和广义动量分割开来）把一组正则变量p_{α},q_{α}变换为另一组新的变量P_{β},Q_{β}，这当然比起上面各例提到的变换要广泛得多，这样的变换能不能保持正则方程的形式不变呢？回答是可能的，但又必须有一定的条件加以限制，对正则变量进行的这种保持正则方程形式不变（哈密顿量可能改变）的变换就叫做正则变换，得到的新变量也称为正则变量。正则变换的定义也可以表述为：从一组正则变量到另一组正则变量的非异变换，叫做正则变换。即：如果通过一组正则变量$\left(p_{\alpha},q_{\alpha}\right)$到另一组新变量$\left(P_{\beta},Q_{\beta}\right)$的变换：

$$\begin{cases}P_{\alpha}=P_{\alpha}\left(p_{1}\cdots p_{s},q_{1}\cdots q_{s},t\right)\\ Q_{\alpha}=Q_{\alpha}\left(p_{1}\cdots p_{s},q_{1}\cdots q_{s},t\right)\quad \alpha=1,2\cdots s\end{cases}\qquad (1)$$

满足$\dfrac{\partial\left(P_{1}\cdots P_{s},Q_{1}\cdots Q_{s}\right)}{\partial\left(p_{1}\cdots p_{s},q_{1}\cdots q_{s}\right)}\neq 0$，把正则方程$\dfrac{\partial H}{\partial p_{\alpha}}=\dot{q}_{\alpha}\quad \dfrac{\partial H}{\partial q_{\alpha}}=-\dot{p}_{\alpha}\quad \alpha=1,2\cdots s$仍然变换为正则方程$\dfrac{\partial H^{*}}{\partial P_{\alpha}}=\dot{Q}_{\alpha}\quad \dfrac{\partial H^{*}}{\partial Q_{\alpha}}=-\dot{P}_{\alpha}\quad \alpha=1,2\cdots s$，（其中$H^{*}$为用新变量$\left(P_{\beta},Q_{\beta}\right)$表达的新的某个适当的哈密顿量$H^{*}=H^{*}\left(P,\ Q,\ t\right)$），那么这种变换（1）就叫做正则变换。这一组新变量$\left(P_{\beta},Q_{\beta}\right)$也是一组正则变量。

说明：(1)我们看到：在正则变换的定义中，蕴含着对于正则变量的定义的另一种等价的表述：正则变量就是这样的一组变量，用这组变量表达的动力学方程是正则方程。（原来我们是通过拉格朗日函数给出广义动量的定义$p_{\alpha}=\dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\alpha}}$或者通过哈密顿函数和正则方程给出广义动量的定义$\dfrac{\partial H}{\partial p_{\alpha}}=\dot{q}_{\alpha}$，从而定义正则变量的。）应注意：新旧哈密顿函数一般说来是不

同的，$H^*\neq H$，哈密顿函数、广义动量和拉格朗日函数之间的关系依然成立，

$$L^*=L^*\left(Q,\dot{Q},t\right)=\sum_{\alpha=1}^{s}P_\alpha\dot{Q}_\alpha-H^*\left(P_1\cdots P_s,Q_1\cdots Q_s,t\right)\Big|_{P_\alpha=P_\alpha\left(Q,\dot{Q},t\right)}，\quad P_\alpha=\frac{\partial}{\partial\dot{Q}_\alpha}L^*\left(Q,\dot{Q},t\right)$$

但是一般地$\sum_{\alpha=1}^{s}P_\alpha\dot{Q}_\alpha\neq\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot{q}_\alpha$，$L^*\left(Q,\dot{Q},t\right)\neq L\left(q,\dot{q},t\right)$，新旧拉格朗日函数一般说来也是不同的。

（2）考虑了正则变换，广义坐标和广义动量间已经没有不可逾越的界限。（见下面的【例 4】【例 5】）一般说，经过了正则变换的新的哈密顿函数可能不再代表能量（但是由新的正则变量和新的哈密顿函数得到的新的正则方程必定仍然给出系统的动力学方程），L^*也可能不再等于$T-V$（但对于新的广义坐标广义速度和新的拉格朗日函数仍然给出动力学方程———新的拉格朗日方程）。

引言中提到的坐标变换、标度变换和规范变换都是正则变换。事实上，在坐标变换下：

$$\begin{cases}P_\alpha=\sum_\beta p_\beta\left(\dfrac{\partial q_\beta}{\partial Q_\alpha}\right)_{Q=f(q,t)}=\sum_\beta p_\beta\left(\dfrac{\partial\Phi_\beta\left(Q,t\right)}{\partial Q_\alpha}\right)_{Q=f(q,t)}\\ \qquad\qquad Q_\beta=f_\beta\left(q,t\right)\end{cases}\text{由老的正则方程}\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha}=\dot{q}_\alpha\\ \dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha}=-\dot{p}_\alpha\end{cases}\text{以及}$$

$$L\left(q,\dot{q},t\right)=\tilde{L}\left(Q,\dot{Q},t\right),\quad\tilde{H}=H-\sum_\beta p_\beta\frac{\partial q_\beta}{\partial t},\qquad\text{可以导出}$$

$$\dot{P}_\alpha=\sum_\beta\dot{p}_\beta\frac{\partial q_\beta}{\partial Q_\alpha}+\sum_\beta p_\beta\frac{d}{dt}\frac{\partial q_\beta}{\partial Q_\alpha}=\sum_\beta\dot{p}_\beta\frac{\partial q_\beta}{\partial Q_\alpha}+\sum_\beta p_\beta\left(\sum_\gamma\frac{\partial^2q_\beta}{\partial Q_\alpha\partial Q_\gamma}\dot{Q}_\gamma+\frac{\partial^2q_\beta}{\partial Q_\alpha\partial t}\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{H}}{\partial Q_\alpha}&=\frac{\partial H}{\partial Q_\alpha}-\sum_\beta\frac{\partial p_\beta}{\partial Q_\alpha}\frac{\partial q_\beta}{\partial t}-\sum_\beta p_\beta\frac{\partial^2q_\beta}{\partial Q_\alpha\partial t}\\&=\sum_\beta\frac{\partial H}{\partial q_\beta}\frac{\partial q_\beta}{\partial Q_\alpha}+\sum_\beta\left[\frac{\partial H}{\partial p_\beta}-\dot{q}_\beta\right]\frac{\partial p_\beta}{\partial Q_\alpha}+\sum_\beta\frac{\partial p_\beta}{\partial Q_\alpha}\left[\dot{q}_\beta-\frac{\partial q_\beta}{\partial t}\right]-\sum_\beta p_\beta\frac{\partial^2q_\beta}{\partial Q_\alpha\partial t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{H}}{\partial Q_\alpha}+\dot{P}_\alpha&=\sum_\beta\left[\frac{\partial H}{\partial q_\beta}+\dot{p}_\beta\right]\frac{\partial q_\beta}{\partial Q_\alpha}+\sum_\beta\left[\frac{\partial H}{\partial p_\beta}-\dot{q}_\beta\right]\frac{\partial p_\beta}{\partial Q_\alpha}+\sum_{\beta,\gamma}\frac{\partial p_\beta}{\partial Q_\alpha}\frac{\partial q_\beta}{\partial Q_\gamma}\dot{Q}_\gamma+\sum_{\beta,\gamma}p_\beta\frac{\partial^2q_\beta}{\partial Q_\alpha\partial Q_\gamma}\dot{Q}_\gamma\\&=\sum_\beta\left[\frac{\partial H}{\partial q_\beta}+\dot{p}_\beta\right]\frac{\partial q_\beta}{\partial Q_\alpha}+\sum_\beta\left[\frac{\partial H}{\partial p_\beta}-\dot{q}_\beta\right]\frac{\partial p_\beta}{\partial Q_\alpha}+\sum_\gamma\frac{\partial}{\partial Q_\alpha}\left[\sum_\beta p_\beta\frac{\partial q_\beta}{\partial Q_\gamma}\right]\dot{Q}_\gamma\\&=\sum_\beta\left[\frac{\partial H}{\partial q_\beta}+\dot{p}_\beta\right]\frac{\partial q_\beta}{\partial Q_\alpha}+\sum_\beta\left[\frac{\partial H}{\partial p_\beta}-\dot{q}_\beta\right]\frac{\partial p_\beta}{\partial Q_\alpha}+\sum_\gamma\frac{\partial P_\gamma}{\partial Q_\alpha}\dot{Q}_\gamma\qquad\text{注意：}\frac{\partial P_\gamma}{\partial Q_\alpha}=0\\&=\sum_\beta\left[\frac{\partial H}{\partial q_\beta}+\dot{p}_\beta\right]\frac{\partial q_\beta}{\partial Q_\alpha}+\sum_\beta\left[\frac{\partial H}{\partial p_\beta}-\dot{q}_\beta\right]\frac{\partial p_\beta}{\partial Q_\alpha}=0\end{aligned}$$

相仿的推导可对正则方程之另一半进行。

这样可由原来的正则方程成立导出新的正则方程也成立，并且容易验证上述变换是非异的；

于是直接检验了上述结论。

在规范变换和标度变换下：$\begin{cases} P_\beta = \lambda p_\beta + \dfrac{\partial f}{\partial q_\beta} \\ Q_\alpha = q_\alpha \end{cases}$ 由老的正则方程 $\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \dot{q}_\alpha \\ \dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha} = -\dot{p}_\alpha \end{cases}$ 以及

$L_1 = \lambda L + \dfrac{df(q,t)}{dt}$， $H^* = \lambda H - \dfrac{\partial f}{\partial t}$ 也可以导出新的正则方程；并且容易验证上述变换是非异的。

【例 3】 证明：变换 $P_\alpha = \beta p_\alpha$，$Q_\alpha = \gamma q_\alpha$ （$\alpha = 1,2,\cdots,s$，γ,β 是不为零的常数）是正则变换；（新的哈密顿量为 $H^* = \gamma\beta H$ ）。

这个变换的非异性是显然的。因此要证明这个结论，就是要证明：

在 $\dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \dot{q}_\alpha \quad \dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha} = -\dot{p}_\alpha \quad \alpha = 1,2\cdots s$ 成立的前提下，经过变换 $Q_\alpha = \gamma q_\alpha$，$P_\alpha = \beta p_\alpha$，

选择适当的 $H^* = \gamma\beta H$，有 $\dfrac{\partial H^*}{\partial P_\alpha} = \dot{Q}_\alpha \quad \dfrac{\partial H^*}{\partial Q_\alpha} = -\dot{P}_\alpha \quad \alpha = 1,2\cdots s$ 成立。

特别，当 $\beta = \gamma = 1$,变换 $\begin{cases} P_\alpha = p_\alpha \\ Q_\alpha = q_\alpha \end{cases} (\alpha = 1,2,\cdots,s)$ 为恒等变换；当 $\beta = \gamma = -1$，

$\begin{cases} P_\alpha = -p_\alpha \\ Q_\alpha = -q_\alpha \end{cases} (\alpha = 1,2,\cdots,s)$ 为反射变换。

【例 4】 证明：$P_\alpha = \mu q_\alpha$，$Q_\alpha = \nu p_\alpha$ （$\alpha = 1,2,\cdots,s;\ \nu,\mu$ 是不为零的常数）是正则变换；（新的哈密顿量为 $H^* = -\nu\mu H$ ）。

特别，当 $\nu = -\mu = \pm 1$ 变换 $\begin{cases} P_\alpha = -q_\alpha \\ Q_\alpha = p_\alpha \end{cases}$ 或 $\begin{cases} P_\alpha = q_\alpha \\ Q_\alpha = -p_\alpha \end{cases} (\alpha = 1,2,\cdots,s)$ 为交替变换

【例 5】 证明：$\begin{cases} Q_\alpha = p_\alpha \tan\omega t \\ P_\alpha = q_\alpha \cot\omega t \end{cases} \quad (\alpha = 1,2\cdots s)$ 是正则变换。新哈密顿量为

$$H^* = -H + \frac{\omega}{\sin\omega t\cos\omega t}\sum_{\alpha=1}^{s} Q_\alpha P_\alpha \text{。}$$

事实上，根据题目所给的变换关系式和老的正则方程，就可以得到

$$\frac{\partial H^*}{\partial P_\alpha}=-\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial H}{\partial q_\beta}\frac{\partial q_\beta}{\partial P_\alpha}+\frac{\omega}{\sin\omega t\cos\omega t}\frac{\partial}{\partial P_\alpha}\sum_{\beta=1}^{s}Q_\beta P_\beta=\sum_{\beta=1}^{s}\dot{p}_\beta\delta_{\alpha\beta}\tan\omega t+\frac{\omega}{\sin\omega t\cos\omega t}Q_\alpha$$

$$=\dot{Q}_\alpha-p_\alpha\frac{\omega}{\cos^2\omega t}+\frac{\omega}{\sin\omega t\cos\omega t}Q_\alpha=\dot{Q}_\alpha$$

$$\frac{\partial H^*}{\partial Q_\alpha}=-\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial H}{\partial p_\beta}\frac{\partial p_\beta}{\partial Q_\alpha}+\frac{\omega}{\sin\omega t\cos\omega t}\frac{\partial}{\partial Q_\alpha}\sum_{\beta=1}^{s}Q_\beta P_\beta=-\sum_{\beta=1}^{s}\dot{q}_\beta\delta_{\alpha\beta}\cot\omega t+\frac{\omega}{\sin\omega t\cos\omega t}P_\alpha$$

$$=-\dot{P}_\alpha-q_\alpha\frac{\omega}{\sin^2\omega t}+\frac{\omega}{\sin\omega t\cos\omega t}P_\alpha=-\dot{P}_\alpha$$

【例 6】 证明：$\begin{cases}Q_\alpha=q_\alpha\tan\omega t\\P_\alpha=p_\alpha\cot\omega t\end{cases}\ \alpha=1,2\cdots s$ 是正则变换，新的哈密顿量为

$$H^*=H+\frac{\omega}{\sin\omega t\cos\omega t}\sum_{\beta=1}^{s}Q_\beta P_\beta$$

由以上各例看出，新老哈密顿量之间都有关系式 $H^*=\lambda H+f\left(P,Q,p,q,t\right)\quad\lambda=$常数；这一点具有普遍性。特别若 $\lambda=1$，则这样的正则变换称为单价正则变换（接触变换）。以上各例中新旧哈密顿量的关系是不必给出的，

因为这个关系本质上已由正则变换决定。这些问题我们将在§8．2．中进一步讨论。

§8．2．正则变换的条件

判断一个变换（1）是不是正则变换的基本方法当然是利用正则变换的定义，但这未必总是最方便的方法，因此我们需要寻找其他方法。

单价正则变换（接触变换）的充分条件（判定定理）：

变换 $\begin{cases}P_\alpha=P_\alpha\left(p_1\cdots p_s,q_1\cdots q_s,t\right)\\Q_\alpha=Q_\alpha\left(p_1\cdots p_s,q_1\cdots q_s,t\right)\quad\alpha=1,2\cdots s\end{cases}$ （1）

满足 $\dfrac{\partial\left(P_1\cdots P_s,Q_1\cdots Q_s\right)}{\partial\left(p_1\cdots p_s,q_1\cdots q_s\right)}\neq0$，成为正则变换的充分条件为

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\left(p_\alpha dq_\alpha-P_\alpha dQ_\alpha\right)+\left(H^*-H\right)dt=dF_1 \tag{2}$$

其中 $H=H\left(p,q,t\right)$ 是正则变量 p_α,q_α 的任一 Hamilton 函数，H^* 是用新变量 P_α,Q_α 以及 t 表示的新的 Hamilton 函数。dF_1 是某个函数 $F_1\left(q,Q,t\right)$ 的恰当微分，$F_1\left(q,Q,t\right)$ 称为母函数。换言之：如果 p_α,q_α 是正则变量，（意即正则方程 $\dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha}=\dot{q}_\alpha$，$\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha}=-\dot{p}_\alpha$，$\alpha=1,2,\cdots,s$ 成立）并且对于变换（1），存在 $H^*=H^*\left(P,Q,t\right)$ 和母函数 $F_1=F_1\left(q,Q,t\right)$ 使（2）成立，那么变换（1）

就是正则变换。（意即$\dfrac{\partial H^*}{\partial P_\alpha}=\dot{Q}_\alpha \quad \dfrac{\partial H^*}{\partial Q_\alpha}=-\dot{P}_\alpha \quad \alpha=1,2\cdots s$ 成立）

证明：$\sum\limits_{\alpha=1}^{s}\left(p_\alpha dq_\alpha-P_\alpha dQ_\alpha\right)+\left(H^*-H\right)dt=dF_1\left(q,Q,t\right)$ 求积分，取变分

$$\Rightarrow \delta\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha dq_\alpha-Hdt\right)-\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{\alpha=1}^{s}P_\alpha dQ_\alpha-H^*dt\right)=\delta\int_{t_0}^{t_1}dF_1$$

$\int_{t_0}^{t_1}dF_1$取决于端点值，而$\delta t_0=\delta t_1=0$，

$$\delta q_\alpha\Big|_{t_0}=\delta q_\alpha\Big|_{t_1}=0\,,\qquad \delta Q_\alpha\Big|_{t_0}=\delta Q_\alpha\Big|_{t_1}=0$$

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}dF_1=\delta F_1\Big|_{t_0}^{t_1}=\delta\left[F_1\left(t=t_1\right)-F_1\left(t=t_0\right)\right]=\delta F_1\left(t=t_1\right)-\delta F_1\left(t=t_0\right)=0$$

$$\Rightarrow \delta\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha dq_\alpha-Hdt\right)=\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{\alpha=1}^{s}P_\alpha dQ_\alpha-H^*dt\right)$$

$$\left\{p_\alpha,q_\alpha\right\}\text{是正则变量}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha}=\dot{q}_\alpha\\[2ex]\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha}=-\dot{p}_\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha dq_\alpha-Hdt\right)=0$$

$$\therefore\delta\int\left(\sum_{\alpha=1}^{s}P_\alpha dQ_\alpha-H^*dt\right)=0\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial H^*}{\partial P_\alpha}=\dot{Q}_\alpha\\[2ex]\dfrac{\partial H^*}{\partial Q_\alpha}=-\dot{P}_\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\left\{P_\alpha,Q_\alpha\right\}\text{是正则变量}$$

所以(1)是正则变换。

说明：**1**）变换（1）成为正则变换的充分条件（2）意味着：（2）式的左边是一个全微分。由于新的哈密顿函数H^*是待定的；因此，条件（2）的核心是：在 t 不变的情况下，$\sum\limits_{\alpha=1}^{s}\left[p_\alpha dq_\alpha-P_\alpha dQ_\alpha\right]$要成为恰当微分，即$\sum\limits_{\alpha=1}^{s}\left(p_\alpha\delta q_\alpha-P_\alpha\delta Q_\alpha\right)$成为恰当变分，于是条件（2）可以表为

$\sum\limits_{\alpha=1}^{s}\left(p_\alpha\delta q_\alpha-P_\alpha\delta Q_\alpha\right)=\delta F_1$（$\delta t=0$，$t$ 作为参数）　（$2'$）

如果使$\left(2'\right)$成立的母函数F_1存在，就可以求出待定的$H^*=H+\dfrac{\partial F_1}{\partial t}$，使（2）成立。因此，条件（2）和（2’）是等价的。这就说明，显含时间的变换（1）成为正则变换的充分必要条件是在每一个确定的时刻，变换（1）都是正则变换。

2）若变换（1）不显含t，则条件（2）可以简化为

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\left[p_\alpha dq_\alpha - P_\alpha dQ_\alpha\right]=dF_1 \qquad （2''）$$

即：在变换（1）不显含t的情况下，母函数（如果存在）也可以选得不显含t，$F_1=F_1\left(q,Q\right)$，

且使条件（2''）成立，则变换（1）就是正则变换，而且$H^*=H$。

3）由正则变换充分条件（2）可以得到$\frac{\partial F_1}{\partial q_\alpha}=p_\alpha$，$\frac{\partial F_1}{\partial Q_\alpha}=-P_\alpha$和$\frac{\partial F_1}{\partial t}=H^*-H$ 由前两式可解得变换（1）式，由此可见，正则变换也可以借助母函数给出。

4）由于$\frac{\partial F_1}{\partial t}=H^*-H$，母函数所能确定的只是新旧哈密顿函数的差，而不是某个哈密顿函数，所以正则变换并不局限于某一哈密顿量所刻划的力学体系。

5）用条件（2）去判定【例 6】是正则变换，比根据定义判断要方便得多；但【例 3】【例 4】和【例 5】三个例题虽然我们已经根据定义判断它们是正则变换，却不满足条件（2）。这是因为（2）是充分条件，不是必要条件。正则变换的充要条件为

$$\lambda\left(\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha dq_\alpha - Hdt\right)+\left(H^*dt-\sum_{\alpha=1}^{s}P_\alpha dQ_\alpha\right)=dF_1\left(q,Q,t\right) \qquad （6）$$

（6）的充分性可以依照（2）的充分性的证明方法证明，其必要性的证明，需要利用 Poincaré－Cartan 积分不变量的概念和关于相对线性积分不变量的李华中定理。容易看出：（6）式中$\lambda=1$对应的正则变换就是单价正则变换（接触变换）。

6）还应指出，在上述充分条件的表述中，变换的非异性条件是必须明确给出的。因为按照正则变换的定义，非异性条件是必须满足的，而恰当微分的条件（2）并不蕴涵非异性条件。

【例 7】 $Q=\sqrt{2q}e^{t}\cos p, P=\sqrt{2q}e^{-t}\sin p$，是不是单价正则变换？如果是，求出母函数。

先考虑在t不变的情况下，$pdq-PdQ$能不能表为某个母函数$F_1\left(q,Q,t\right)$的恰当微分dF_1

也就是$p\delta q-P\delta Q$能不能表为某个母函数$F_1\left(q,Q,t\right)$的恰当变分δF_1

$$p\delta q-P\delta Q=p\delta q-\sqrt{2q}e^{-t}\sin p\left(\frac{1}{\sqrt{2q}}e^{t}\cos p\delta q-\sqrt{2q}e^{t}\sin p\delta p\right)$$

$$=\left(p-\sin p\cos p\right)\delta q+2q\sin^2 p\delta p=\delta\left(pq-q\sin p\cos p\right)$$

所以是正则变换。但母函数F_1的宗量应为q,Q,t，为求母函数，应将p化为$p(q,Q,t)$：

$$\tilde{F}_1=pq-q\sin p\cos p=q\arccos\frac{Q}{\sqrt{2qe^{t}}}-\frac{Q}{2}e^{-2t}\sqrt{2qe^{2t}-Q^2}=F_1\left(q,Q,t\right)$$

讨论：由正则变换充分条件（2）和 $F_1(q,Q,t)=q\arccos\dfrac{Q}{\sqrt{2qe^t}}-\dfrac{Q}{2}e^{-2t}\sqrt{2qe^{2t}-Q^2}$ 可以

得到 $\dfrac{\partial F_1}{\partial q}=\arccos\dfrac{Q}{\sqrt{2qe^t}}=p$， $\dfrac{\partial F_1}{\partial Q}=-e^{-2t}\sqrt{2qe^{2t}-Q^2}=-P$ 这就是本题给出的变换，

这也验证了以上判断正则变换的过程无误。另外由 $\dfrac{\partial F_1}{\partial t}=Qe^{-2t}\sqrt{2qe^{2t}-Q^2}=H^*-H$，

得到新旧的哈密顿量之间的关系：$H^*=H+Qe^{-2t}\sqrt{2qe^{2t}-Q^2}=H+QP$

应注意：$H^*=H^*(P,Q,t)$ 必须把右边的 H 变换为（P，Q）的函数。

4.（单价）正则变换的充分条件（判定定理）的其他形式(见[1]258 页的四种表述方式)。

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\left(p_\alpha dq_\alpha+Q_\alpha dP_\alpha\right)+\left(H^*-H\right)dt=dF_2 \qquad F_2=F_1+\sum_{\alpha=1}^{s}P_\alpha Q_\alpha\equiv F_2(q,P,t)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\left(-q_\alpha dp_\alpha-P_\alpha dQ_\alpha\right)+\left(H^*-H\right)dt=dF_3 \qquad F_3=F_1-\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha q_\alpha\equiv F_3(p,Q,t)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\left(-q_\alpha dp_\alpha+Q_\alpha dP_\alpha\right)+\left(H^*-H\right)dt=dF_4 \qquad F_4=F_1+\sum_{\alpha=1}^{s}P_\alpha Q_\alpha-\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha q_\alpha\equiv F_4(p,P,t)$$

说明：

1）这四种不同表述方式，由于采用不同的独立变量（母函数的独立变量的选法有其共同点：旧变量、新变量各占一半；每一对共轭的正则变量中，必有一个，且只有一个），因而母函数也不同，它们之间的关系是 Legendre 变换。对每一种表述方式均可平行地进行讨论。

【例 7】除了前面所述利用第一类充分条件和第一类母函数进行计算外，还可以利用其它三类充分条件和母函数进行计算，结果如下：

$$F_2=F_1+PQ=pq+q\sin p\cos p=q\left[\arcsin\frac{Pe^t}{\sqrt{2q}}+\sqrt{1-\frac{P^2}{2q}e^{2t}}\,\frac{Pe^t}{\sqrt{2q}}\right]$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial P}=Q=e^t\sqrt{2q-P^2e^{2t}}\ ,\quad \frac{\partial F_2}{\partial q}=p=\arcsin\frac{Pe^t}{\sqrt{2q}}\ ;\quad \frac{\partial F_2}{\partial t}=H^*-H=\frac{2qPe^t}{\sqrt{2q-P^2e^{2t}}}$$

$$F_3=F_1-pq=-q\sin p\cos p=-\frac{Q^2}{2}e^{-2t}\tan p$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial p}=-q=-\frac{1}{2}Q^2e^{-2t}\,sec^2\,p\ ,\ \frac{\partial F_3}{\partial Q}=-P=-Qe^{-2t}\tan p\ ;\ \frac{\partial F_3}{\partial t}=H^*-H=Q^2e^{-2t}\tan p$$

$$F_4=F_1+PQ-pq=q\sin p\cos p=\frac{P^2}{2}e^{2t}\cot p$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial p}=-q=-\frac{1}{2}P^2e^{2t}\,csc^2\,p\ ,\quad \frac{\partial F_4}{\partial P}=Q=Pe^{2t}\cot p\ ;\quad \frac{\partial F_4}{\partial t}=H^*-H=P^2e^{2t}\cot p$$

由此可见，利用母函数不仅可以得到正则变换的显函数或隐函数的表达式，而且可以求得新旧哈密顿量之间的关系式。

【例 8】判定变换 $P=q+e^{-q}+\ln p \quad Q=pe^{q}$ 为单价正则变换 $(\lambda=1)$，并求得母函数。

由以下各式，可以求得三种类型的母函数的显式（除了一个无关紧要的可加常数）：

$$pdq-PdQ=d\left(Q-Qe^{-q}-Q\ln Q\right)=dF_1(q,Q)$$

$$pdq+QdP=\exp\left(P-q-e^{-q}\right)dq+\exp\left(P-e^{-q}\right)dP=d\exp\left(P-e^{-q}\right)=dF_2(q,P)$$

$$-qdp-PdQ=(\ln p-\ln Q)dp-\left(\ln Q+\frac{p}{Q}\right)dQ$$

$$=d\left(p\ln p-p-p\ln Q-Q\ln Q+Q\right)=dF_3(p,Q)$$

由于 $q(p,P)$ 由隐函数 $P=q+e^{-q}+\ln p$ 给出，难以求出显式，我们无法利用 $-qdp+QdP$ 求得第四种类型的母函数 $F_4(p,P)$；但是可以证明

$\left[\dfrac{\partial(-q)}{\partial P}\right]_p=\left[\dfrac{\partial Q}{\partial p}\right]_P=\dfrac{-1}{1-e^{-q}}$ 所以 $-qdp+QdP$ 是全微分，母函数 $F_4(p,P)$ 存在。

我们给出以前所学各例中的母函数：

【例 1】坐标变换。$F_2(q,P,t)=\sum_\alpha f_\alpha(q,t)P_\alpha \qquad F_3(p,Q,t)=-\sum_\alpha p_\alpha\Phi_\alpha(Q,t)$

特别，若 $Q_\alpha=f_\alpha(q,t)=q_\alpha$，即 $q_\alpha=\Phi_\alpha(Q,t)=Q_\alpha$，则为恒等变换。

【例 2】广义坐标不变，动量改变，利用充要条件（含参数 λ）

$$F_2=\sum_\alpha q_\alpha P_\alpha-f(q,t) \qquad F_3=-\lambda\sum_\alpha p_\alpha Q_\alpha-f(Q,t)$$

【例 3】利用充分条件（含参数 $\lambda=\beta\gamma$）

$$F_2=\gamma\sum_\alpha q_\alpha P_\alpha \qquad F_3=-\beta\sum_\alpha p_\alpha Q_\alpha$$

【例 4】利用充分条件（含参数 $\lambda=-\mu\nu$）

$$F_1=-\mu\sum_\alpha q_\alpha Q_\alpha \qquad F_4=\nu\sum_\alpha p_\alpha P_\alpha$$

【例 5】$F_1=-\sum_\alpha q_\alpha Q_\alpha\cot\omega t \qquad F_4=\sum_\alpha p_\alpha P_\alpha\tan\omega t \qquad \lambda=-1$

【例 6】$F_2=-\sum_\alpha p_\alpha Q_\alpha\cot\omega t \qquad F_3=\sum_\alpha P_\alpha q_\alpha\tan\omega t \qquad \lambda=+1$

2）对每个偏导数的含义要弄清楚，例如 $\dfrac{\partial F_1}{\partial t}=\dfrac{\partial F_2}{\partial t}=\dfrac{\partial F_3}{\partial t}=\dfrac{\partial F_4}{\partial t}=H^*-H$，而

$$\frac{\partial F_3}{\partial t}=\left(\frac{\partial F_3}{\partial t}\right)_{pQ}=\left(\frac{\partial F_1}{\partial t}\right)_{pQ}-\left[\frac{\partial}{\partial t}\sum_s p_s q_s\right]_{pQ}$$

$$=\left(\frac{\partial F_1}{\partial t}\right)_{qQ}+\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial F_1}{\partial q_\alpha}\right)_{Qt}\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial t}\right)_{pQ}-\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial t}\right)_{pQ}=\left(\frac{\partial F_1}{\partial t}\right)_{qQ}=\frac{\partial F_1}{\partial t}$$

3）由以上各例可见，每一个正则变换都有母函数存在。但并非每一个正则变换都存在上述四种形式的母函数。

4）母函数的形式不限于以上四种。还有些正则变换的母函数的独立自变量只能选为多种独立自变量“混合”的形式。（参阅[1]习题 8．7．（4））

5）虽然由以上各例看来，似乎 F_1 , F_4 总是同时存在或不存在， F_2 , F_3 也是这样，但是这一点并不具有普遍性。

我们来看一个反例：

【例 9】容易证明变换 $\begin{cases}P=p+q\\ Q=q\end{cases}$ 是一个正则变换。事实上虽然我们可以形式上求出它的四个母函数：

$$pdq-PdQ=\left(P-q\right)dq-Pdq=-qdq=-d\left(\frac{1}{2}q^2\right)=dF_1\left(q,Q\right)$$

$$pdq+QdP=\left(P-q\right)dq+qdP=d\left(Pq-\frac{1}{2}q^2\right)=dF_2\left(q,P\right)$$

$$-qdp-PdQ=-Qdp-\left(p+Q\right)dQ=-d\left(pQ+\frac{1}{2}Q^2\right)=dF_3\left(p,Q\right)$$

$$-qdp+QdP=-\left(P-p\right)dp+\left(P-p\right)dP=d\left(\frac{1}{2}\left(p-P\right)^2\right)=dF_4\left(p,P\right)$$

但是 F_1 不能给出这个正则变换，因此不是母函数。因而只存在三种类型的母函数 F_2 , F_3,F_4

事实上这个正则变换的逆变换 $\begin{cases}p=P-Q\\ q=Q\end{cases}$ 也存在，但是以一对新旧正则变量为自变量的变换式只有三种类型： $\begin{cases}p=P-q\\ Q=q\end{cases}$ $\begin{cases}P=p+Q\\ q=Q\end{cases}$ $\begin{cases}Q=P-p\\ q=P-p\end{cases}$，这是因为变换式 $\begin{cases}Q=P-p\\ q=P-p\end{cases}$ 的系数行列式 $\Delta=0$，因而其逆变换式 $\begin{cases}p=f\left(q,Q\right)\\ P=g\left(q,Q\right)\end{cases}$ 不存在。于是母函数 $F_4\left(p,P,t\right)$ 存在而 $F_1\left(q,Q,t\right)$ 不存在。

6）正则变换可以用母函数给出。但并非任意一个上述形式的函数都能给出正则变换。例如 $F_1\left(q,Q,t\right)=q^2+Q^4$ 就不能给出正则变换。（为什么？能够作为母函数的函数应满足怎样的条件？）

对于一个自由度的力学体系，如果变换$\begin{cases}P=f(p,q)\\Q=g(p,q)\end{cases}$的雅可比行列式$\dfrac{\partial(P,Q)}{\partial(p,q)}=1$，则这个变换是单价正则变换。（补充习题）如果变换$\begin{cases}P=f(p,q)\\Q=g(p,q)\end{cases}$的雅可比行列式$\dfrac{\partial(P,Q)}{\partial(p,q)}=\lambda$，则这个变换是$\lambda$价正则变换。但是对于多个自由度的力学体系，用雅可比行列式表述的这个条件只是一个必要而非充分的条件。

§8．3．无穷小正则变换

考虑如下的无穷小变换：（与恒等变换的差别只是一个ε 小项）

$$\begin{cases}P_\alpha=p_\alpha+\varepsilon f_\alpha(p,q,t)\\Q_\alpha=q_\alpha+\varepsilon g_\alpha(p,q,t)\end{cases}\qquad(1)$$

利用以第二类母函数表述的单价正则变换充分条件：

$$\sum_\alpha(p_\alpha\delta q_\alpha+Q_\alpha\delta P_\alpha)=\sum_\alpha p_\alpha\delta q_\alpha+\sum_\alpha(q_\alpha+\varepsilon g_\alpha)(\delta p_\alpha+\varepsilon\delta f_\alpha)$$

$$\approx\sum_\alpha\left[p_\alpha\delta q_\alpha+q_\alpha\delta p_\alpha+\varepsilon g_\alpha\delta p_\alpha+\varepsilon q_\alpha\delta f_\alpha\right]\qquad\text{（已略去}\varepsilon\text{ 的高阶项）}$$

$$=\sum_\alpha\delta\left[q_\alpha\left(p_\alpha+\varepsilon f_\alpha\right)\right]+\varepsilon\sum_\alpha\left(g_\alpha\delta p_\alpha-f_\alpha\delta q_\alpha\right)$$

为了使上式成为全变分，也就是使（1）式成为无穷小正则变换，设$f_\alpha=-\dfrac{\partial G}{\partial q_\alpha}$，$g_\alpha=\dfrac{\partial G}{\partial p_\alpha}$，

于是：$$\sum_\alpha(p_\alpha\delta q_\alpha+Q_\alpha\delta P_\alpha)=\delta\left[\sum_\alpha q_\alpha P_\alpha+\varepsilon G(q,p,t)\right]$$

无穷小正则变换为：
$$\begin{cases}P_\alpha=p_\alpha-\varepsilon\dfrac{\partial G(q,p,t)}{\partial q_\alpha}\\Q_\alpha=q_\alpha+\varepsilon\dfrac{\partial G(q,p,t)}{\partial p_\alpha}\end{cases}\qquad(2)$$

也可以求对应的第二类母函数$F_2(q,P,t)=\sum_\alpha q_\alpha P_\alpha+\varepsilon G(q,p,t)$但需要把$p$换为$P$

$$\because\ p_\alpha-P_\alpha=\varepsilon\frac{\partial G}{\partial q_\alpha},\quad G(q,p,t)-G(q,P,t)=O(\varepsilon)$$

$$\sum_\alpha q_\alpha P_\alpha+\varepsilon G(q,p,t)=\sum_\alpha q_\alpha P_\alpha+\varepsilon G(q,P,t)+O(\varepsilon^2)$$

意即：在G中以p代替P引起G的变更为与ε同阶的小量，引起F_2的变更为ε的高阶小量，可以略去。第二类母函数可表为$F_2(q,P,t)=\sum_\alpha q_\alpha P_\alpha+\varepsilon G(q,P,t)$　　ε为无穷小量。

这里的母函数与恒等变换的母函数的差为无穷小量，$G\left(q,P,t\right)$称为无穷小正则变换的生成元。由母函数可求得

$$\begin{cases} p_\alpha = \dfrac{\partial F_2}{\partial q_\alpha} = P_\alpha + \varepsilon \dfrac{\partial G\left(q,P,t\right)}{\partial q_\alpha} \\ Q_\alpha = \dfrac{\partial F_2}{\partial P_\alpha} = q_\alpha + \varepsilon \dfrac{\partial G\left(q,P,t\right)}{\partial P_\alpha} \end{cases}$$ 不考虑ε的高阶小量，此式与（2）相同。

$$\frac{\partial F_2\left(q,P,t\right)}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial G\left(q,P,t\right)}{\partial t} = H^* - H \qquad H^* = H + \frac{\partial F_2\left(q,P,t\right)}{\partial t} = H + \varepsilon \frac{\partial G\left(q,P,t\right)}{\partial t}$$

可以从无穷小正则变换的观点来理解正则方程：

令$\varepsilon = dt$，$G\left(q,P,t\right) = H\left(q,P,t\right) \approx H\left(q,p,t\right)$ （只相差ε的一阶小量）

则在略去ε的高阶小量以后：

$$P_\alpha = p_\alpha - \varepsilon \frac{\partial G\left(q,P,t\right)}{\partial q_\alpha} = p_\alpha - \varepsilon \frac{\partial H\left(q,P,t\right)}{\partial q_\alpha} = p_\alpha + \dot{p}_\alpha dt = p_\alpha + dp_\alpha ,$$

$$Q_\alpha = q_\alpha + \varepsilon \frac{\partial G\left(q,P,t\right)}{\partial P_\alpha} = q_\alpha + \varepsilon \frac{\partial H\left(q,P,t\right)}{\partial P_\alpha} = q_\alpha + \dot{q}_\alpha dt = q_\alpha + dq_\alpha$$

$$H^* = H + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial t} = H + dt \frac{\partial H}{\partial t} = H + dt \frac{dH}{dt} = H + dH$$

力学体系按照正则方程随时间发生的运动变化，就是连续地经历一系列以哈密顿量为生成元的无穷小正则变换的过程。在这过程中的每一步，正则变量和哈密顿量都按照无穷小正则变换进行变化，而正则方程的形式不变。

§8．4．哈密顿—雅可比方程（积分 Hamilton 正则方程的 Jacobi 方法）

1. 从正则方程求解的角度来看，正则变换的目的是使尽可能多的正则变量成为循环坐标，以得到尽可能多的循环积分。最理想的情况是：所有新的正则变量都成为循环坐标。我们可以取新的哈密顿量$H^* = 0$，于是$\dot{P}_\alpha = 0$，$\dot{Q}_\alpha = 0$，即，所以$P_\alpha = \eta_\alpha$=常数，$Q_\alpha = \xi_\alpha$=常数$\left(\alpha = 1,2,\cdots,s\right)$。如果求得满足上述条件的正则变换，即：

$$\begin{cases} P_\alpha = P_\alpha\left(q,p,t\right) = \eta_\alpha = const \\ Q_\alpha = Q_\alpha\left(q,p,t\right) = \xi_\alpha = const \end{cases} \qquad \left(\alpha = 1,2,\cdots,s\right) \qquad （1）$$

这就是正则方程的解。因此求正则方程的积分的问题化为求正则变换的问题。求正则变换的方便途径之一是求母函数，因而求正则变换的问题又化为求母函数的问题。事实上，利用正则变换充分条件$\sum_{\alpha=1}^{s}\left(p_\alpha dq_\alpha + Q_\alpha dP_\alpha\right) + \left(H^* - H\right)dt = dF_2\left(q,P,t\right)$可知母函数$F_2$应满足：

$$F_2 = F_2(q,P,t) \Rightarrow \quad F_2 = F_2(q,\eta,t) \qquad (2)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} = H^* - H \quad \Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial t} = -H \qquad (3)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_\alpha} = p_\alpha \qquad \Rightarrow p_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial q_\alpha} = G_\alpha(q,\eta,t) \qquad (4)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial P_\alpha} = Q_\alpha \qquad \Rightarrow \xi_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial \eta_\alpha} = K_\alpha(q,\eta,t) \qquad (5)$$

如果求得母函数，（4）（5）就是正则方程的积分。如何求母函数？（3）就是母函数应满足的偏微分方程

$$\frac{\partial F_2(q,\eta,t)}{\partial t} + H\left(\frac{\partial F_2}{\partial q}, q, t\right) = 0 \qquad (3)$$

求正则变换的问题化为求母函数的问题，也就是求解偏微分方程（3）。由于方程中只含未知函数 F_2 的偏导数，不含未知函数本身，因此方程(3)可以改写为：

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t\right) = 0 \qquad (3')$$

其中 $S(q,\eta,t) = F_2(q,\eta,t) + C$ （6）

方程(3)或（3’）称为 Hamilton-Jacobi 方程，这是一阶偏微分方程（一般不是线性的），解这个偏微分方程就是求未知函数 S 。S 称为 Hamilton 主函数，是 q_α, t 共 $s+1$ 个自变量的函数。完全解 S 应含有 $(s+1)$ 个常数，其中 F_2 含有 s 个常数 η_α，所以 S 中有一个相加常数 C 是合理的。

2．Hamilton 主函数的物理意义

在求得 H-J 方程的完全解 S 以后，我们可得：

$$\frac{\partial S}{\partial q_\alpha} = p_\alpha \quad \frac{\partial S}{\partial \eta_\alpha} = \xi_\alpha \quad \alpha = 1,2\cdots s \qquad (7)$$

可以证明（7）就是正则方程 $\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \dot{q}_\alpha \quad \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = -\dot{p}_\alpha$

的全部 $2s$ 个积分，含 $2s$ 个积分常数，这个结果称为哈密顿—雅可比定理（参阅本节末的【历史资料】)。其证明可参阅参考资料[8]第 296－298 页。（7）式可以表为显函数的形式：

$$\begin{cases} q_\alpha = q_\alpha(t,\eta_1\cdots\eta_s,\xi_1\cdots\xi_s) \\ p_\alpha = p_\alpha(t,\eta_1\cdots\eta_s,\xi_1\cdots\xi_s) \end{cases} \qquad \alpha = 1,2,\cdots s \qquad (7')$$

也可以表为隐函数的形式：

$$\begin{cases} \eta_\alpha = \eta_\alpha(p,q,t) \\ \xi_\alpha = \xi_\alpha(p,q,t) \end{cases} \qquad \alpha = 1,2,\cdots s \qquad (7'')$$

（7’）和（7’’）也是新老正则变量间的正则变换关系式。但是如何求 H-J 方程的完全解 S 呢？

一方面，利用 $\frac{dS}{dt}=\sum_{\alpha}\frac{\partial S}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial S}{\partial t}$ $\frac{\partial S}{\partial q_\alpha}=p_\alpha$ $\alpha=1,2\cdots s$ $\frac{\partial S}{\partial t}=-H$，

求得 $\frac{dS}{dt}=\sum_{\alpha}p_\alpha\dot{q}_\alpha-H=L$， 于是 $S=\int Ldt$ 或 $S=\int_{t_1}^{t}L\left(q,\dot{q},t\right)dt=F_2\left(q,\eta,t\right)+C$；

由此可见 Hamilton 主函数就是积分限可变动的哈密顿作用量，因此又称哈密顿作用函数。在积分时，应将拉格朗日函数中的 $q,\dot{q}$ 视作 t 的函数，因此在解得正则方程之前，是无法利用上式求出 S 的。另一方面，利用 $\frac{\partial S}{\partial t}=-H$，求得 $S=\int -Hdt$，其中 $q_\alpha,\eta_\alpha=P_\alpha$ 在积分过程中视作常数，但在解得正则方程之前 $H=H\left(p,q,t\right)$ 中的 p 是 t 的怎样的函数也是未知的，因此在解得正则方程之前，也无法由此求出 $S=S\left(q,\eta,t\right)$ 的。所以我们必须另辟途径去求 H-J 方程的完全解。

3．哈密顿—雅可比方程的求解：（主函数 S 的求法）

在 H 不显含 t 即 $\frac{\partial H}{\partial t}=0$ 的情况下，$\frac{dH}{dt}=0$ 从而 $H=E=$ 常数，即存在（广义）能量积分的情况下，哈密顿—雅可比方程可表为 $\frac{\partial S\left(q,\eta,t\right)}{\partial t}+E=0$ (3″)

哈—雅方程的完全解 $S=-Et+W\left(q_1\cdots q_s,E,\eta_2\cdots\eta_s\right)+C$ （8）

（相当于使时间 t 与广义坐标进行变量分离），W 称为哈密顿特征函数。其中 s 个常数已经过重新组合（相当于进行一次不显含 t 的正则变换），使 $\eta_1=E$，（4）（5）式可以化为：

$$\frac{\partial S}{\partial q_\alpha}=\frac{\partial W}{\partial q_\alpha}=p_\alpha\left(\alpha=1,2\cdots s\right),$$
$$\frac{\partial S}{\partial \eta_\alpha}=\frac{\partial W}{\partial \eta_\alpha}=\xi_\alpha\left(\alpha=2,3\cdots s\right),\qquad \frac{\partial S}{\partial \eta_1}=\frac{\partial S}{\partial E}=-t+\frac{\partial W}{\partial E}=\xi_1$$

H－J 方程(2″)化为

$$H\left(\frac{\partial W}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial W}{\partial q_s},q_1\cdots q_s\right)=E \tag{9}$$

在求得 W 的完全解以后，就可得到

$$p_\alpha=\frac{\partial W}{\partial q_\alpha}\quad \alpha=1,2\cdots s \tag{10}$$

$$\xi_\beta=\frac{\partial W}{\partial \eta_\beta}\quad \beta=2,3\cdots s \tag{11}$$

至于 $\beta=1$，因为 $\eta_1=E$，若记 $\xi_1=-t_0$，则有 $\dfrac{\partial W}{\partial E}=t-t_0$ （12）

（10）、（11）、（12）是正则方程的积分，其中（11）的 $s-1$ 个式子给出轨道，结合（12）就得到运动规律（运动方程）：$q_\alpha=q_\alpha\left(t,t_0,E,\eta_2\cdots\eta_s,\xi_2\cdots\xi_s\right)$，（10）给出动量。

4．用分离变量法求哈密顿特征函数：

在某些问题中，选取了合适的坐标系，T,V 都是可分离变量的：

$$T=\frac{1}{2}\left[A_1\left(q_1\right)\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2+\cdots+A_s\left(q_s\right)\left(\frac{\partial W}{\partial q_s}\right)^2\right] \quad \text{（没有交叉项）}$$

$$V=V_1\left(q_1\right)+\cdots+V_s\left(q_s\right) \tag{13}$$

则我们可设 W 的分离变量形式

$$W=W_1\left(q_1\right)+\cdots+W_s\left(q_s\right) \tag{14}$$

于是，$\dfrac{\partial W}{\partial q_\alpha}=\dfrac{\partial W_\alpha}{\partial q_\alpha}=\dfrac{dW_\alpha}{dq_\alpha}$， $\alpha=1,2,\cdots s$ H－J 方程（9）化为

$$H=\sum_{\alpha=1}^{s}H_\alpha=E,\quad H_\alpha=\frac{1}{2}A_\alpha\left(q_\alpha\right)\left(\frac{dW_\alpha}{dq_\alpha}\right)^2+V_\alpha\left(q_\alpha\right)=\eta_\alpha\quad \sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha=E \tag{15}$$

这里的 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$（仅有 $s-1$ 个独立，所以 $\eta_1=E-\eta_2-\eta_3-\cdots-\eta_s)$ 又不同于原来的 $\eta_1=E$，$\eta_2,\eta_3,\cdots,\eta_s$（相当于又经过一次正则变换），所以

$$W_\alpha=\int\sqrt{\frac{2\left(\eta_\alpha-V_\alpha\right)}{A_\alpha}}dq_\alpha\quad \alpha=1,2\cdots s,\quad \eta_1=E-\eta_2-\cdots-\eta_s \tag{16}$$

W_α 的相加常数均可吸收入 C。

综上所述，在满足（13）的条件下，方程（9）的解可表为（14）的形式，（14）中的每一项又可表为（16），从而方程（1）的完全解（8）可表为

$$S=-Et+W_1\left(q_1,E-\eta_2-\cdots-\eta_s\right)+\sum_{\alpha=2}^{s}W_\alpha\left(q_\alpha,\eta_\alpha\right)+C \tag{8$'$}$$

从而正则方程的积分（10）－（12）就可表为

$$p_\alpha=\frac{dW_\alpha}{dq_\alpha}\quad \alpha=1,2\cdots,s \tag{10$'$}$$

$$\xi_\alpha=\frac{\partial S}{\partial\eta_\alpha}=\frac{\partial W_\alpha}{\partial\eta_\alpha}+\frac{\partial W_1}{\partial\eta_\alpha}=\frac{\partial W_\alpha}{\partial\eta_\alpha}-\frac{\partial W_1}{\partial E},\quad \alpha=2,3,\cdots,s \tag{11$'$}$$

$$\xi_1 = -t_0 = \frac{\partial S}{\partial E} = -t + \frac{\partial W_1}{\partial E}, \quad \therefore \frac{\partial W_1}{\partial E} = t - t_0 \tag{12'}$$

【例 1】三维空间的谐振子单摆。*S*=3，

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{1}{2}m_1\omega_1^2 q_1^2 + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{1}{2}m_2\omega_2^2 q_2^2 + \frac{p_3^2}{2m_3} + \frac{1}{2}m_3\omega_3^2 q_3^2$$

哈密顿特征函数可设为 $W = W_1(q_1) + W_2(q_2) + W_3(q_3)$

于是，$\dfrac{\partial W}{\partial q_\alpha} = \dfrac{\partial W_\alpha}{\partial q_\alpha} = \dfrac{dW_\alpha}{dq_\alpha}$， $\alpha = 1,2,3$ H－J 方程（9）化为

$$H = \sum_{\alpha=1}^{3} H_\alpha = E, \quad H_\alpha = \frac{1}{2m_\alpha}\left(\frac{dW_\alpha}{dq_\alpha}\right)^2 + \frac{1}{2}m_\alpha\omega_\alpha^2 q_\alpha^2 = \eta_\alpha \quad \sum_{\alpha=1}^{3}\eta_\alpha = E$$

这里的η_1,η_2,η_3仅有 2 个独立，所以$\eta_1 = E - \eta_2 - \eta_3$

$$W_1 = \int \sqrt{2m_1(E - \eta_2 - \eta_3) - m_1^2\omega_1^2 q_1^2}\, dq_1$$

$$W_2 = \int \sqrt{2m_2\eta_2 - m_2^2\omega_2^2 q_2^2}\, dq_2 \quad W_3 = \int \sqrt{2m_3\eta_3 - m_3^2\omega_3^2 q_3^2}\, dq_3$$

W_α的相加常数均可吸收入 C，主函数为

$$S = -Et + W_1(q_1, E - \eta_2 - \eta_3) + W_2(q_2, \eta_2) + W_3(q_3, \eta_3) + C$$

从而正则方程的积分

$$p_\alpha = \frac{dW_\alpha}{dq_\alpha} = \sqrt{2m_\alpha\eta_\alpha - m_\alpha^2\omega_\alpha^2 q_\alpha^2} \quad \alpha = 2,3$$

$$p_1 = \frac{dW_1}{dq_1} = \sqrt{2m_1(E - \eta_2 - \eta_3) - m_1^2\omega_1^2 q_1^2}$$

以上是动量和坐标的关系，就是相轨道方程，事实上就是能量积分。

$$\xi_\alpha = \frac{\partial S}{\partial \eta_\alpha} = \frac{\partial W_\alpha}{\partial \eta_\alpha} + \frac{\partial W_1}{\partial \eta_\alpha} = \frac{\partial W_\alpha}{\partial \eta_\alpha} - \frac{\partial W_1}{\partial E}$$

$$= \int \frac{m_\alpha}{\sqrt{2m_\alpha\eta_\alpha - m_\alpha^2\omega_\alpha^2 q_\alpha^2}} dq_\alpha - \int \frac{m_1}{\sqrt{2m_1(E - \eta_2 - \eta_3) - m_1^2\omega_1^2 q_1^2}} dq_1$$

$$= \frac{1}{\omega_\alpha}\arcsin\sqrt{\frac{m_\alpha\omega_\alpha^2}{2\eta_\alpha}}q_\alpha - \frac{1}{\omega_1}\arcsin\sqrt{\frac{m_1\omega_1^2}{2(E - \eta_2 - \eta_3)}}q_1 \quad \alpha = 2,3$$

以上是坐标之间的关系，就是现实空间或位形空间的轨道方程。

$$\xi_1=-t_0=\frac{\partial S}{\partial E}=-t+\frac{\partial W_1}{\partial E}=-t+\int\frac{m_1}{\sqrt{2m_1\left(E-\eta_2-\eta_3\right)-m_1^2\omega_1^2q_1^2}}dq_1$$

$$=-t+\frac{1}{\omega_1}\arcsin\sqrt{\frac{m_1\omega_1^2}{2\left(E-\eta_2-\eta_3\right)}}q_1$$

这个显含时间的方程,和上面的方程结合,可以得到坐标和动量的变化规律(运动方程)。

$$q_1=\sqrt{\frac{2\left(E-\eta_2-\eta_3\right)}{m_1\omega_1^2}}\sin\left[\omega_1\left(t-t_0\right)\right]\quad p_1=\sqrt{2m_1\left(E-\eta_2-\eta_3\right)}\cos\left[\omega_1\left(t-t_0\right)\right]$$

$$q_\alpha=\sqrt{\frac{2\eta_\alpha}{m_\alpha\omega_\alpha^2}}\sin\left[\omega_\alpha\left(t-t_0+\xi_\alpha\right)\right]\qquad p_\alpha=\sqrt{2m_\alpha\eta_\alpha}\cos\left[\omega_\alpha\left(t-t_0+\xi_\alpha\right)\right]\quad \alpha=2,3$$

5．分离变量的一般方法：

可分离变量的条件（13）（14），还可适当放宽，总之，只要能把偏微分方程化为常微分方程即可。分离变量法的一般方法：

如果某一对正则变量以一固定的函数组合出现在哈密顿量中，即哈密顿量可表为

$$H=H\left(p_1,\cdots,p_s,q_1\cdots q_s\right)=\tilde{H}\left(\varphi_1\left(p_1,q_1\right)p_2,\cdots,p_s,q_2\cdots q_s\right)=E \qquad (13)$$

解得$\varphi_1\left(p_1,q_1\right)=\Phi_1\left(p_2,\cdots,p_s,q_2\cdots q_s,E\right)=\eta_1$（两边分别依赖不同的相互独立的变量，所以只能为常数。）此时我们称正则坐标q_1是可以分离变量的。我们可以设

$$W=W_1\left(q_1,\eta_1\right)+\tilde{W}\left(q_2,\cdots q_s,\eta_2\cdots\eta_s\right)\qquad p_1=\frac{dW_1}{dq_1},\ p_\alpha=\frac{\partial\tilde{W}}{\partial q_\alpha},\quad \alpha=2,\cdots,s$$

$$\varphi_1\left(\frac{dW_1}{dq_1},q_1\right)=\eta_1,\quad \Phi_1\left(\frac{\partial\tilde{W}}{\partial q_2},\cdots\frac{\partial\tilde{W}}{\partial q_s},q_2\cdots q_s,E\right)=\eta_1$$

$\dfrac{dW_1}{dq_1}=\psi\left(q_1,\eta_1\right)$，$W_1=\int\psi\left(q_1,\eta_1\right)dq_1=W_1\left(q_1,\eta_1\right)$如果这一分离变量的过程可以进行到底，我们可以设$W=W_1\left(q_1,\eta_1\right)+W_2\left(q_2,\eta_1,\eta_2\right)+\cdots+W_s\left(q_s,\eta_1,\eta_2\cdots\eta_s\right)$ （14）

求积分得到的可加常数均归入C；另外由$H\left(p_1,\cdots,p_s,q_1\cdots q_s\right)=E$得到$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s,E$之间的一个函数关系，因而其中只有 s 个是独立的。

由上述可见，实施分离变量法，并不要求哈密顿量能写成分离变量各项求和的形式，而是要求哈密顿量中存在一个守恒量的链：

$$\begin{gathered}\varphi_1\left(p_1,q_1\right)=\eta_1,\ \varphi_2\left(p_2,q_2,\eta_1\right)=\eta_2,\quad \varphi_3\left(p_3,q_3,\eta_1,\eta_2\right)=\eta_3,\cdots\\ \cdots\varphi_s\left(p_s,q_s,\eta_1,\eta_2\cdots,\eta_{s-1}\right)=\eta_s\end{gathered}\qquad (15)$$

于是哈密顿特征函数就可以写成分离变量各项求和的形式（14）。（14）式稍不同于（$8'$）式，其中各项所依赖的常数η_α的个数可能逐项增加。

【例 2】用哈密顿—雅可比方程解开普勒（Kepler）问题。

因为 $\dfrac{\partial H}{\partial t}=0$，所以 H－J 方程可表为 $H\left(\dfrac{\partial W}{\partial q},q\right)=E$

取平面极坐标 $H=\dfrac{1}{2m}\left(p_r^2+\dfrac{p_\theta^2}{r^2}\right)-\dfrac{\alpha}{r}$

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2\right]-\frac{\alpha}{r}=E$$

应有 $S=-Et+W(r,\theta,E,J)+C$，r,θ,E,J 相当于（8）－（12）式中的 q_1,q_2,E,η_2，本例 H 与（13）稍不同，（15）（16）（$8'$）（$11'$）（$12'$）应作适当调整，但关键的一点是这个方程仍能用分离变量法来求解，事实上，设 $W=W_1(\theta)+W_2(r)$，得

$-\left[\left(\dfrac{dW_2}{dr}\right)^2-2m\left(E+\dfrac{\alpha}{r}\right)\right]r^2=\left(\dfrac{dW_1}{d\theta}\right)^2=J^2$（第一边与 θ 无关，第二边与 r 无关，所以它们只能都等于常数，由第二边知常数非负，设为 J^2）积分得

$$W_1(\theta,J)=J\theta$$

$$W_2(r,J,E)=\int\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{J^2}{r^2}}dr$$

$$W(\theta,r,J,E)=W_1(\theta,J)+W_2(r,J,E)=J\theta+\int\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{J^2}{r^2}}dr$$

W 中的相加常数均可归入 C，未写出。

进一步按（8）－（12）求得正则方程的积分

$$p_\theta=\frac{dW_1}{d\theta}=J \qquad (1)$$

$$p_r=\frac{dW_2}{dr}=\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{J^2}{r^2}} \qquad (2)$$

$$t-t_0=\frac{\partial W}{\partial E}=\int\frac{mdr}{\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{J^2}{r^2}}} \qquad (3)$$

对于椭圆，有 $t-t_0=\dfrac{\partial W}{\partial E}=\sqrt{\dfrac{m}{2|E|}}\displaystyle\int\frac{rdr}{\sqrt{-r^2+\frac{\alpha}{|E|}r-\frac{J^2}{2m|E|}}}$

$$\frac{\partial W}{\partial J}=\int\frac{-J}{r^2\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{J^2}{r^2}}}dr+\theta=\theta_0 \qquad (4)$$

积分得$\theta-\theta_0=\int\frac{-d\left(\frac{J}{r}-\frac{m\alpha}{J}\right)}{\sqrt{2mE+\frac{m^2\alpha^2}{J^2}-\left(\frac{J}{r}-\frac{m\alpha}{J}\right)^2}}=\arccos\frac{\frac{J}{r}-\frac{m\alpha}{J}}{\sqrt{2mE+\frac{m^2\alpha^2}{J^2}}}$，

令 $p=\frac{J^2}{m\alpha}$，$e=\sqrt{1+\frac{2EJ^2}{m\alpha^2}}$，得到 $r=\frac{p}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$ （4$'$）

由此可见（4）给出的是轨道方程。（3）给出运动规律 $r(t)$，结合（3）和（4）能给出运动规律$\theta(t)$，（1）（2）给出的是动量。

经过含 t 的正则变换（又经过不含 t 的正则变换，即 η_α的重新组合）得到的 P_1，P_2就是守恒量能量 E 和角动量 J，而得到的 Q_1，Q_2是计算 t 和θ的零点 t_0和θ_0。

6．哈密顿—雅可比方程的意义

①给出了解正则方程的又一种方法，可与其他方法互为补充。而且其结果不仅包括运动规律，而且还有轨道，动量，内容十分丰富。在处理简单问题时，可能看不出其优越性，但在处理较复杂问题时， H－J方程就大有用处了。

②处理质点力学或者质点系力学问题，都用常微分方程（组），（牛顿方程，Lagrange方程，正则方程等）而H－J方程是偏微分方程，通常是用来处理无限多个自由度的力学体系问题的，例如波、连续介质等。常微分方程（组）和偏微分方程之间的联系，给我们一种启示：粒子和波之间可能有某种联系。H－J方程在量子力学的建立过程中，起了重要的作用。

【历史资料】

哈密顿定理(1834---1835)：如果主函数$S=\int_{t_0}^{t}Ldt$已求出，那么正则方程的全部积分为：

$\frac{\partial S}{\partial q_\alpha}=p_\alpha$，$\frac{\partial S}{\partial q_{\alpha0}}=-p_{\alpha0}$ $(\alpha=1,2,\cdots,s)$，$p_{\alpha0}$为$t=t_0$时 p_α 的值，$q_{\alpha0}$为$t=t_0$时q_α的值；并且S满足偏微分方程$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(\frac{\partial S}{\partial q_\alpha},q_\alpha,t\right)=0$

说明：1．求得了S，就可以求得正则方程的积分，但在正则方程没有积出之前，S也不能求得。这里有一个循环，问题没有得到解决。

2．说明S满足一个偏微分方程$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(\frac{\partial S}{\partial q},q,t\right)=0$，这是富于启发性的。

雅可比定理（1837）：如果$S=S\left(t,q_1,\cdots q_s;q_{10},\cdots q_{s0}\right)+C$是方程

$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(\frac{\partial S}{\partial q_\alpha},q_\alpha,t\right)=0$的积分，$q_{10},\cdots q_{s0},C$是此解的$s+1$个积分常数，那么正则方程的全部积分就是$\frac{\partial S}{\partial q_\alpha}=p_\alpha$，$\frac{\partial S}{\partial q_{\alpha0}}=-p_{\alpha0}$

$p_{\alpha0}$是另外s个积分常数。$(\alpha=1,\cdots s)$

说明：1．这里可从 $H-J$ 方程出发解决全部问题。S 是 $H-J$ 方程的完全解（不限于主函数）；$p_{\alpha 0}, q_{\alpha 0}$ 是一般的积分常数（不限于初值）。

2．这里 $p_{\alpha 0}, q_{\alpha 0}$ 由初值变成了一般的积分常数，相当于经过了一次正则变换。

注：这里采用的是正则变换充分条件的第一种形式。

§8．5．作用变量－角变量（参阅参考资料[2][5][6]有关章节）

现在我们来讨论把广义坐标化为循环坐标的正则变换（化动量正则变换）。我们限于考虑稳定的情况，即 $\frac{\partial H}{\partial t}=0,$ 有能量积分 $H=E,$（或广义能量积分）。采用不显含 t 的正则变换，使新的哈密顿量 $H^*=H=f(P),\ f(P)$ 是广义共轭动量的一个可以适当选取的任意函数，不显含广义坐标；为了简单，我们讨论一个自由度的情形。新的正则方程为：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H^*}{\partial Q}=0=-\dot{P}\\ \dfrac{\partial H^*}{\partial P}=f'(P)=\dot{Q}\end{cases}\quad \text{解得}\quad \begin{cases}P=\eta=const\\ Q=f'(P)(t-t_0)=\omega(t-t_0)\end{cases}$$

其中 $\eta,\ t_0$ 为积分常数，$\omega=f'(P)$ 也是常数。我们来导出正则变换的具体形式。利用第二类母函数表达的正则变换充分条件：　$pdq+QdP=dF_2(q,P)$ 得到 $p=\frac{\partial F_2}{\partial q}$；选取了适当形式的函数 $f(P)$，我们就可以通过 $f(P)=H^*=H(p,q)=H\left(\frac{\partial F_2}{\partial q},q\right)$ 得到微分方程

$\frac{\partial F_2}{\partial q}=\Phi(q,P)$，从而积分得

$F_2(q,P)=\int\Phi(q,P)dq+C(P)$；　然后利用下式求得正则变换的显式：

$$\begin{cases}p=\dfrac{\partial F_2(q,P)}{\partial q}=p(q,P)\\ Q=\dfrac{\partial F_2(q,P)}{\partial P}=Q(q,P)\end{cases}$$

【例 1】铅直方向上的抛射体运动。

【解】$H=\frac{1}{2m}p^2+mgq$　取 $f(P)=cP=H^*=H=\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial F_2}{\partial q}\right)^2+mgq=E$

$$\Rightarrow\frac{\partial F_2}{\partial q}=\sqrt{2m(cP-mgq)}\Rightarrow F_2(q,P)=\int\sqrt{2m(cP-mgq)}dq=-\frac{2}{3g}\sqrt{\frac{2}{m}}(cP-mgq)^{\frac{3}{2}}+C(P)$$

$$\Rightarrow p=\frac{\partial F_2}{\partial q}=\sqrt{2m(cP-mgq)}$$

$$Q=\frac{\partial F_2}{\partial P}=\int\frac{\partial\sqrt{2m(cP-mgq)}}{\partial P}dq=\int\frac{mc}{\sqrt{2m(cP-mgq)}}dq=-\frac{c}{g}\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{(cP-mgq)}+C'(P)$$

解得变换为$\begin{cases}P=\frac{1}{c}\left(\frac{1}{2m}p^2+mgq\right)\\Q=-\frac{c}{gm}p+C\left(\frac{1}{c}\left(\frac{1}{2m}p^2+mgq\right)\right)\end{cases}$

由结果可见，常数$C(P)$的选择实际上只影响新的广义坐标 Q 的零点的选择，也就是时间零点的选择，可以吸收进常数t_0。对解题没有实质性的影响。不妨可取$C(P)\equiv 0$，因此求得第二类母函数 $F_2(q,P)=-\frac{2}{3g}\sqrt{\frac{2}{m}}(cP-mgq)^{\frac{3}{2}}$；正则方程

$$\begin{cases}\frac{\partial H^*}{\partial P}=c=\dot{Q}\\\frac{\partial H^*}{\partial Q}=0=-\dot{P}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}Q=c(t-t_0)=-\frac{c}{mg}p\\P=\frac{E}{c}=\frac{1}{c}\left(\frac{1}{2m}p^2+mgq\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}q=\frac{E}{mg}-\frac{1}{2}g(t-t_0)^2\\p=-mg(t-t_0)\end{cases}$$

下面来讨论周期运动。周期运动有两种情形：

1．每对 p_α,q_α 都是时间的周期性函数，且周期 T 相同

$p_\alpha(t+T)=p_\alpha(t)$，$q_\alpha(t+T)=q_\alpha(t)$。这时，相轨道在相空间的二维平面$(p,q)$上的投影是封闭的。这种运动称为天平动。谐振子的运动就是一种天平动。

2．　q_α 本身不作周期性运动，但时间每增加 T，q_α 就增加$q_{\alpha 0}$，系统的运动便实质上重复一次，因此 p_α 仍作周期性变化，$p_\alpha(t+T)=p_\alpha(t)$, $q_\alpha(t+T)=q_\alpha(t)+q_{\alpha 0}$。这时相轨道并不封闭，因此 p_α 是 q_α 的周期函数，周期为 $q_{\alpha 0}$，$p_\alpha(q_\alpha+q_{\alpha 0})=p_\alpha(q_\alpha)$。这种运动称为转动。例如：单摆当能量不很大时，在平衡位置附近来回作天平动；当能量足够大时，它围绕悬点作转动。

对于周期运动的两种情形，我们都可以经过化动量正则变换引入如下的一组新的正则变量(J,θ)，它们的量纲分别为作用量和角度的量纲，因而分别称为作用变量和角变量。；因

为作用变量 J 可以选定为任意一个常量，而无论对于哪一种周期运动，$\oint pdq$ 总是一个确定的常量，所以我们可以把 J 的定义选择为：$J=\frac{1}{2\pi}\oint pdq$

其中 $\oint$ 表示对一个周期的积分。由于 $p=\frac{\partial F_2(q,J)}{\partial q}$，选定了 J 的定义，对应的第二类母函数 $F_2(q,J)$ 也就确定了。角变量 θ 必须定义为：$\theta=\frac{\partial F_2(q,J)}{\partial J}=\theta(q,J)$，以保证 (J,θ) 为正则变量。

我们看到，这样定义的角变量 θ 在每一周期中的改变量就是 2π：

$$\Delta\theta=\oint d\theta=\oint\frac{\partial\theta(q,J)}{\partial q}dq=\oint\frac{\partial^2F_2(q,J)}{\partial q\partial J}dq=\frac{d}{dJ}\oint\frac{\partial F_2(q,J)}{\partial q}dq$$

$$=\frac{d}{dJ}\oint pdq=\frac{d}{dJ}(2\pi J)=2\pi$$

这样选定了新的正则变量，也就选定了 $H^*=f(J)$ 中函数 $f(J)$ 的形式。事实上：

$$J=\frac{1}{2\pi}\oint pdq=\frac{1}{2\pi}\oint p\dot{q}dt=\frac{1}{2\pi}\oint[p\dot{q}-L]dt+\frac{1}{2\pi}\oint Ldt$$

由于每一周期 T，力学系统的运动便实质上重复一次，$\oint Ldt$ 是个确定的量，因此可以通过对 L 的规范变换 $L\to L'=L+C$，$C=-\frac{1}{T}\oint Ldt$ 使 $\oint L'dt=0$，于是

$J=\frac{1}{2\pi}\oint Hdt=\frac{ET}{2\pi}=\frac{HT}{2\pi}=\frac{H^*T}{2\pi}$，比照得：$H^*=J\frac{2\pi}{T}$，$\frac{2\pi}{T}=const$，与

$\frac{\partial H^*}{\partial J}=\frac{2\pi}{T}$ 和 $\dot{\theta}=\omega$ 比较，即得 $H^*=f(J)=\omega J$，而且 $\omega=\frac{2\pi}{T}$

由此可见，上面所选择的作用变量的定义，使得选定哈密顿量具有比较简单的形式，其中系数 $\frac{1}{2\pi}$ 的选定，使 $H^*=\omega J$ 中的系数 ω 就是周期运动的圆频率。

利用作用变量和角变量 (J,θ)，和相应的新哈密顿量 $H^*=H=\omega J$，周期性运动的正则方程为 $\begin{cases}\frac{\partial H^*}{\partial J}=\omega=\dot{\theta}\\ \frac{\partial H^*}{\partial\theta}=0=-\dot{J}\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\theta=\omega(t-t_0)\\ J=\frac{E}{\omega}=const\end{cases}$ 因此 $J=$ 常数，从而 $\dot{\theta}=\frac{\partial H}{\partial J}=$ 常数，

$\theta=\omega(t-t_0)$，$\omega=\frac{E}{J}=$常数，$\theta(t+T)=\omega(t+T-t_0)=\omega(t-t_0)+\omega T=\theta(t)+2\pi$

【例 2】利用作用变量－角变量解谐振子问题。

【解】谐振子的哈密顿函数为：$H=\frac{1}{2m}p^2+\frac{1}{2}m\omega^2q^2$ 新的哈密顿量为：$H^*=\omega J$

$$J=\frac{H^*}{\omega}=\frac{H}{\omega}=\frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{2m}p^2+\frac{1}{2}m\omega^2q^2\right)\quad\Rightarrow\quad p=\sqrt{2m\omega J-m^2\omega^2q^2}$$

利用 $p=\frac{\partial F_2(q,J)}{\partial q}$ 积分得

$$F_2(q,J)=\int\sqrt{2m\omega J-m^2\omega^2q^2}\,dq=J\arcsin\sqrt{\frac{m\omega}{2J}}q+\frac{1}{2}q\sqrt{2m\omega J-m^2\omega^2q^2}+C(J)$$

得到

$$\theta=\frac{\partial F_2}{\partial J}=\int\frac{\partial\sqrt{2m\omega J-m^2\omega^2q^2}}{\partial J}dq=\int\frac{m\omega}{\sqrt{2m\omega J-m^2\omega^2q^2}}dq=\arcsin\sqrt{\frac{m\omega}{2J}}q+C'(J)$$

得到正则变换及其逆变换：

$$\begin{cases}J=\frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{2m}p^2+\frac{1}{2}m\omega^2q^2\right)\\ \theta=\arctan\frac{m\omega q}{p}+C'(J)\Big|_{J=\frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{2m}p^2+\frac{1}{2}m\omega^2q^2\right)}\end{cases}\qquad\begin{cases}p=\sqrt{2m\omega J}\cos\left[\theta-C'(J)\right]\\ q=\sqrt{\frac{2J}{m\omega}}\sin\left[\theta-C'(J)\right]\end{cases}$$

利用新的正则变量表述的新的正则方程：

$$\begin{cases}\frac{\partial H^*}{\partial J}=\omega=\dot{\theta}\\ \frac{\partial H^*}{\partial\theta}=0=-\dot{J}\end{cases}\quad\text{解得}\quad\begin{cases}J=\eta=const\\ \theta=\omega t+\theta_0\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}p=\sqrt{2m\omega J}\cos\left[\omega t+\theta_0-C'(J)\right]\\ q=\sqrt{\frac{2J}{m\omega}}\sin\left[\omega t+\theta_0-C'(J)\right]\end{cases}$$

由结果可见任意函数项 $C'(J)$实际上是常数，可以吸收进积分常数 θ_0，对解题没有实质性影响,可以从一开始就选择 $C(J)=0$，以简化过程。

以上利用作用变量－角变量这一套正则变量把广义坐标化为循环坐标的方法，还可以推广到可分离变量的多周期的多自由度保守系（参阅参考资料[6]，第 151 页）。参考资料[1]259－260 页【例】平面谐振子的解就是利用作用变量－角变量解一维谐振子结果的推广。各自由度的运动周期可通约时，整个体系作周期运动，反之则否，即在有限时间内整个系统不会回到初始状态。

§8．6．泊松（Poisson）括号

1．Poisson 括号的定义：

设 φ,ψ 都是正则变量 p_α,q_α 和时间 t 的任意足够光滑的函数：

$$\varphi=\varphi(p_\alpha,q_\alpha,t)\qquad\psi=\psi(p_\alpha,q_\alpha,t)$$

则φ和ψ的 Poisson 括号定义为：$\left[\varphi,\psi\right]=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial q_\alpha}-\frac{\partial\varphi}{\partial q_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial p_\alpha}\right)$　（1）

【注意】求偏导数时，p_α,q_α,t视作相互独立，求全导数时，p_α,q_α视作t的函数，即

$$\frac{\partial p_\alpha}{\partial p_\beta}=\delta_{\alpha\beta}\quad\frac{\partial p_\alpha}{\partial q_\beta}=0\quad\frac{\partial p_\alpha}{\partial t}=0,\quad\frac{\partial q_\alpha}{\partial p_\beta}=0\quad\frac{\partial q_\alpha}{\partial q_\beta}=\delta_{\alpha\beta}\quad\frac{\partial q_\alpha}{\partial t}=0$$

$$\dot{p}_\alpha=\frac{dp_\alpha}{dt}\quad\dot{q}_\alpha=\frac{dq_\alpha}{dt},\qquad\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\dot{p}_\alpha\frac{\partial}{\partial p_\alpha}+\dot{q}_\alpha\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\right)$$

2．Poisson 括号的性质：由泊松括号的定义可直接得到以下性质：

ⅰ）反对称性$\left[\varphi,\psi\right]=-\left[\psi,\varphi\right]$

ⅱ）$\left[C,\psi\right]=0$

ⅲ）双线性：对于 ϕ和 ψ都是线性的。例如：

$$\left[\varphi_1+\varphi_2,\psi\right]=\left[\varphi_1,\psi\right]+\left[\varphi_2,\psi\right]\qquad\left[C\varphi,\psi\right]=C\left[\varphi,\psi\right]$$

ⅳ）雅可比恒等式：$\left[\theta,\left[\varphi,\psi\right]\right]+\left[\varphi,\left[\psi,\theta\right]\right]+\left[\psi,\left[\theta,\varphi\right]\right]=0$

ⅴ）$\left[\varphi_1\varphi_2,\psi\right]=\varphi_1\left[\varphi_2,\psi\right]+\left[\varphi_1,\psi\right]\varphi_2$

ⅵ）$\frac{\partial}{\partial t}\left[\varphi,\psi\right]=\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t},\psi\right]+\left[\varphi,\frac{\partial\psi}{\partial t}\right]$，　对于$\frac{\partial}{\partial p_\alpha},\frac{\partial}{\partial q_\alpha},\frac{d}{dt}$有类似公式成立。

ⅶ）$\left[p_\alpha,p_\beta\right]=0,\quad\left[q_\alpha,q_\beta\right]=0,\quad\left[p_\alpha,q_\beta\right]=\delta_{\alpha\beta}$

ⅷ）$\left[\psi,q_\alpha\right]=\frac{\partial\psi}{\partial p_\alpha}\quad\left[\psi,p_\alpha\right]=-\frac{\partial\psi}{\partial q_\alpha}$

ⅸ）泊松括号在单价正则变换下保持不变, 即$\left[\varphi,\psi\right]_{p,q}=\left[\varphi,\psi\right]_{P,Q}$

说明：(1) 以上我们只列出了这些性质的基本形式。容易得到许多变形，例如利用反对称性得到双线性的另一组式子：$\left[\varphi,\psi_1+\psi_2\right]=\left[\varphi,\psi_1\right]+\left[\varphi,\psi_2\right]\quad\left[\varphi,C\psi\right]=C\left[\varphi,\psi\right]$；有些性质可以推广到更一般的形式，例如由双线性可以得到：

$$\left[\sum_{i=1}^{N}C_i\varphi_i,\psi\right]=\sum_{i=1}^{N}C_i\left[\varphi_i,\psi\right]\Rightarrow\left[\varphi,\sum_{i=1}^{N}C_i\psi_i\right]=\sum_{i=1}^{N}C_i\left[\varphi,\psi_i\right],$$

$\Rightarrow\left[\sum_{i=1}^{N}C_i\varphi_i,\sum_{j=1}^{M}D_j\psi_j\right]=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}C_iD_j\left[\varphi_i,\psi_j\right]$，$C,C_i,D_j$均为常数；还可以得到一些特殊情况下的推论，例如：$\left[\varphi,\varphi\right]=0$，$\left[C_1,C_2\right]=0$等等。

（2）Poisson 括号具有某些可以和乘积类比的性质：iii)表示双线性，其中包括与乘法对加法的分配律的类比，vi）表示求导数的法则，和乘积的导数法则类似；但又有不相同之处：i）表示不满足交换律，iv）表示不满足结合律。因此 Poisson 括号的运算，既不同于复数的乘法，也不同于矩阵的乘法。以后我们将看到：Poisson 括号和李代数里的李乘积的运算法则有相似的性质。

（3）Poisson 括号和量子力学中的对易关系有密切的关系，性质 vii）、viii）表述了某些与量子力学有重要联系的性质。

3．利用 Poisson 括号表述哈密顿正则方程和一些有关的结果。

（1）设一个力学体系的哈密顿量为 $H\left(p,q,t\right)$，则这个体系的正则变量和时间的任意光滑函数

$\varphi\left(p,q,t\right)$ 的全导数可以利用 Poisson 括号表示为：$\dfrac{d\varphi\left(p,q,t\right)}{dt}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}+\left[H,\varphi\right]$ （2）

由此可以得到如下推论：

①如果取 $\varphi\left(p,q,t\right)=H\left(p,q,t\right)$，则 $\dfrac{dH}{dt}=\dfrac{\partial H}{\partial t}$，这意味着 $\dfrac{\partial H}{\partial t}=0\Rightarrow\dfrac{dH}{dt}=0$，这就是我们已经讨论过的能量守恒 $H=E$ 或广义能量守恒 $H=h$，的情况。

②若取 $\varphi=z=\left(p_1......p_s,q_1......q_s\right)^T$

则 $\dfrac{dp_\alpha}{dt}=\dot{p}_\alpha=\left[H,p_\alpha\right]$，$\dfrac{dq_\alpha}{dt}=\dot{q}_\alpha=\left[H,q_\alpha\right]\quad\alpha=1,2,\cdots,s$ （3）

这就是用 Poisson 括号表示的正则方程。

（2）定理：$\varphi\left(p,q,t\right)=C$ 成为正则方程积分的充要条件为：$\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}+\left[H,\varphi\right]=0$ （4）

证明：如果 $\varphi\left(p,q,t\right)=C$ 是正则方程的积分，则有 $\dfrac{d\varphi}{dt}=0$ 利用（2）即得（4）。

如果 $\varphi\left(p,q,t\right)$ 满足偏微分方程（4）$\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}+\left[H,\varphi\right]=0$，即

$1\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}+\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial H}{\partial p_i}\right)\dfrac{\partial\varphi}{\partial q_i}+\sum\limits_{i=1}^{n}\left(-\dfrac{\partial H}{\partial q_i}\right)\dfrac{\partial\varphi}{\partial p_i}=0$ 则与之对应的常微分方程组，可表为

$$\frac{dt}{1}=\frac{dq_1}{\left(\dfrac{\partial H}{\partial p_1}\right)}=\cdots=\frac{dq_n}{\left(\dfrac{\partial H}{\partial p_n}\right)}=\frac{dp_1}{-\left(\dfrac{\partial H}{\partial q_1}\right)}=\cdots=\frac{dp_n}{-\left(\dfrac{\partial H}{\partial q_n}\right)}$$

这正是正则方程。由引理（见下面）可知 $\varphi\left(p,q,t\right)=C$ 是正则方程的积分，

引理：连续可微函数 $F=F\left(x_0,x_1,x_2,\cdots x_n\right)$ 为偏微分方程

$$X_0\frac{\partial F}{\partial x_0}+\sum_{i=1}^{n}X_i\frac{\partial F}{\partial x_i}=0 \qquad (5)$$

（$X_i=X_i\left(x_0,x_1\cdots x_n\right),i=0,1,\cdots,n$ 有连续导数，且 X_i 不同时为零）的一个解的充要条

件为：$F(x_0, x_1 \cdots x_n) = C$ 为常微分方程组 $\dfrac{dx_0}{X_0} = \dfrac{dx_1}{X_1} = \dfrac{dx_2}{X_2} = \cdots \dfrac{dx_n}{X_n}$ （6）

的一个积分。

【例 1】谐振子 $H = \dfrac{1}{2m} p^2 + \dfrac{1}{2} m\omega^2 q^2$，

哈密顿量不显含时间，$\dfrac{dH}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial t} = 0$，能量守恒 $H = \dfrac{1}{2m} p^2 + \dfrac{1}{2} m\omega^2 q^2 = E$

可以利用泊松括号表示正则方程：

$\dfrac{dq}{dt} = \dot{q} = [H, q] = \dfrac{1}{2m}\left[p^2，q\right] = \dfrac{p}{m}$ 给出了动量的定义

$\dfrac{dp}{dt} = \dot{p} = [H, p] = \dfrac{1}{2} m\omega^2 \left[q^2，p\right] = -m\omega^2 q$ 给出了动力学方程，可化为 $\ddot{q} = \dfrac{\dot{p}}{m} = -\omega^2 q$

另外我们还可以找到正则方程的显含时间的积分，例如：

$f = \ln(p + im\omega q) - i\omega t$；由于 $H = \dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{1}{2} m\omega^2 q^2$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [H, f] = -i\omega + \left[\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial p}\right]$$

$$= -i\omega + \left[\frac{p}{m}\frac{im\omega}{(p + im\omega q)} - m\omega^2 q \frac{1}{(p + im\omega q)}\right] = 0$$

$$f = \ln(p + im\omega q) - i\omega t = C = \ln(p_0 + im\omega q_0)$$

$$p + im\omega q = (p_0 + im\omega q_0) e^{i\omega t}$$

$$\begin{cases} p = p_0 \cos\omega t - m\omega q_0 \sin\omega t = \sqrt{2mE}\cos(\omega t + \alpha) \\ m\omega q = p_0 \sin\omega t + m\omega q_0 \cos\omega t = \sqrt{2mE}\cos(\omega t + \alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E = \sqrt{\dfrac{p_0^2}{2m} + \dfrac{1}{2} m^2\omega^2 q_0^2} \\ \alpha = \arctan\dfrac{m\omega q_0}{p_0} \end{cases}$$ 和以前的结果一致。

【例 2】（参阅[1]261 页）平面谐振子 $H = \dfrac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \dfrac{1}{2} m(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2)$，

哈密顿量不显含时间，$\dfrac{dH}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial t} = 0$，能量守恒 $H = E$

角动量的 z 分量 $L_z = xp_y - yp_x$ 也不显含时间，$\dfrac{dL_z}{dt} = [H, L_z] = mxy(\omega_1^2 - \omega_2^2)$，

$\omega_1{}^2 = \omega_2{}^2 \Leftrightarrow L_z$ 守恒。

（3）Poisson 定理（或 Jacobi－Poisson 定理） 正则方程的两个积分的泊松括号也是这个正则方程的积分。即：如果 $\varphi(p_s, q_s, t) = C_1$ 和 $\psi(p_s, q_s, t) = C_2$ 是正则方程的两个积分，那么 $[\varphi, \psi] = C_3$ 也是正则方程的一个积分。（证明参阅[1]263 页）

【证明】$\varphi(p,q,t)=C_1 \Rightarrow \dfrac{d\varphi(p,q,t)}{dt}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}+[H,\varphi]=0$

$$\psi(p,q,t)=C_2 \Rightarrow \frac{d\psi(p,q,t)}{dt}=\frac{\partial\psi}{\partial t}+[H,\psi]=0$$

$$\because \left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}[\varphi,\psi]=\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t},\psi\right]+\left[\varphi,\frac{\partial\psi}{\partial t}\right] \\ [H,[\varphi,\psi]]+[\varphi,[\psi,H]]+[\psi,[H,\varphi]]=0 \end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\frac{d[\varphi,\psi]}{dt}=\frac{\partial[\varphi,\psi]}{\partial t}+[H,[\varphi,\psi]]=\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t},\psi\right]+\left[\varphi,\frac{\partial\psi}{\partial t}\right]+[[H,\varphi],\psi]+[\varphi,[H,\psi]]$$

$$=\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+[H,\varphi]\right),\psi\right]+\left[\varphi,\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}+[H,\psi]\right)\right]=0 \qquad \therefore[\varphi,\psi]=C$$

【例 3】如果质点角动量的两个分量$L_x=C_1$，$L_y=C_2$是两个运动积分，那么第三个分量$L_z=C_3$也是一个运动积分。

有了 Poisson 定理，似乎只要有了两个积分，就能求出第三个，第四个……问题就解决了，其实不然。Poisson 定理只提供了求第三个积分的方法，但未保证得到的积分是独立于已知积分的，非平庸的；更没有保证由此能得到全部独立的运动积分。因此问题远未解决。

【例 4】$\dfrac{\partial H}{\partial t}=0$时，正则方程有积分 $H=h$.

如果已知另一个积分$\varphi(p_s, q_s, t)=C$,那么$[\varphi, H]=C$也是一个积分,事实上这个积分就是$-\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=C_1$；进一步可得，$\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=C_2,\cdots$也是积分。

若$\dfrac{\partial^k\varphi}{\partial t^k}\equiv 0$或常数，则新的积分是平庸的（只是恒等式）.

【例 5】椭圆摆（§**7．3．**【例 3】）

$\dfrac{\partial H}{\partial t}=0$有能量积分

$$H=\frac{1}{2\left(m_1+m_2\sin^2\theta\right)}\left[p_y^2+\frac{m_1+m_2}{m_2 l^2}p_\varphi^2-\frac{2\cos\varphi}{l}p_y p_\varphi\right]-m_2 gl\cos\varphi=E$$

$\dfrac{\partial H}{\partial y}=0$有循环积分（水平方向动量守恒）：$p_y=C$,，进一步$[p_y,H]=-\dfrac{\partial p_y}{\partial t}=0$不能得到新的运动积分。

【例 6】质点在有势中心力场中运动。以球坐标为广义坐标，势能只是 r 的函数，则质点的哈密顿量可表为：$H=\dfrac{1}{2m}p_r^2+\dfrac{p_\theta^2}{2mr^2}+\dfrac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\theta}+V(r)$求运动积分并加以讨论。

【解】我们已经知道（§7．2.【例 1】）$L_z = p_\varphi$，$L^2 = p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}$，和 H 都是运动积分，$\left[L_z, H\right] = 0$，$\left[L^2, H\right] = 0$，而且$\left[L_z, L^2\right] = 0$ 即这三个运动积分是两两对合（involution）的，因而这个三自由度的自治系统是可积的。也可以知道，由这三个运动积分不能利用 Poisson 定理得到新的运动积分。更多的运动积分还是有的：$L_x = -p_\theta \sin\varphi - p_\varphi \cot\theta\cos\varphi$，$L_y = p_\theta \cos\varphi - p_\varphi \cot\theta \sin\varphi$ 并且可以分别代替 L_z 成为两两对合运动积分集合的成员。以上五个运动积分并不相互独立。（因为 $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$）在平方反比有势中心力场的情况下，另一个独立的运动积分有 *LRL* 矢量提供。

（4）在一个自由度的情况下，由于$\frac{\partial(P,Q)}{\partial(p,q)} = [P,Q]$，因而用雅可比行列式表述的条件（见§**8．2.**），可以分别表述为$[P,Q]=1$，$[P,Q]=\lambda$，这个表述形式是和正则变换下泊松括号的不变性有紧密联系的。

（5）利用泊松括号表示 Taylor 展开式。

$f = f(p,q)$ 正则变量的足够光滑的函数，且不显含t：$\frac{\partial f}{\partial t} = 0$

$$\frac{df}{dt} = [H, f]$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \left[H, \frac{df}{dt}\right] = \left[H, [H, f]\right]$$

……

$$g(t) = g_0 + t[H,f]_0 + \frac{t^2}{2!}\left[H,[H,f]\right]_0 + \frac{t^3}{3!}\left[H,\left[H,[H,f]\right]\right]_0 + \cdots$$

附 录

A1．一般曲线坐标系下的质点运动学（参阅参考资料[12]上册第一章§9）

我们用q^1,q^2和q^3记曲线坐标，把直角坐标和曲线坐标之间的变换记为

$$q^\alpha = q^\alpha\left(x,y,z\right) = C_\alpha$$

$$\begin{cases} x = x\left(q^1,q^2,q^3\right) = x\left(q^\alpha\right) \\ y = y\left(q^1,q^2,q^3\right) = y\left(q^\alpha\right) \\ z = z\left(q^1,q^2,q^3\right) = z\left(q^\alpha\right) \end{cases} \quad q^\alpha = q^\alpha\left(x,y,z\right) \quad \alpha = 1,2,3 \quad 满足\ \frac{\partial\left(x,y,z\right)}{\partial\left(q^1,q^2,q^3\right)} \neq 0$$

曲线坐标系的坐标曲面记为 $q^\alpha = q^\alpha\left(x,y,z\right) = C_\alpha \quad \left(\alpha = 1,2,3\right)$，

坐标曲线记为$\begin{cases} q^\alpha = q^\alpha\left(x,y,z\right) = C_\alpha \\ q^\beta = q^\beta\left(x,y,z\right) = C_\beta \end{cases} \qquad \alpha,\beta = 1,2,3, \qquad \alpha \neq \beta$

推广前面的计算，矢径表为 $\vec r = \vec r\left(q^\alpha\right) = x\left(q^\alpha\right)\vec i + y\left(q^\alpha\right)\vec j + z\left(q^\alpha\right)\vec k$

$$d\vec r = \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial\vec r}{\partial q^\alpha}dq^\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{\partial x}{\partial q^\alpha}dq^\alpha\vec i + \frac{\partial y}{\partial q^\alpha}dq^\alpha\vec j + \frac{\partial z}{\partial q^\alpha}dq^\alpha\vec k\right)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{\partial x}{\partial q^\alpha}\vec i + \frac{\partial y}{\partial q^\alpha}\vec j + \frac{\partial z}{\partial q^\alpha}\vec k\right)dq^\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3}dq^\alpha\vec\varepsilon_\alpha$$

从而可求得沿坐标曲线的切线方向的矢量（基矢）：

$$\vec\varepsilon_\alpha = \frac{\partial\vec r}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial x}{\partial q^\alpha}\vec i + \frac{\partial y}{\partial q^\alpha}\vec j + \frac{\partial z}{\partial q^\alpha}\vec k \qquad \alpha = 1,2,3$$

$\vec\varepsilon_\alpha = \dfrac{\partial\vec r}{\partial q^\alpha}$是$\dfrac{\partial\vec r}{\partial x} = \vec i$，$\dfrac{\partial\vec r}{\partial y} = \vec j$，$\dfrac{\partial\vec r}{\partial z} = \vec k$的推广，在一般情况下，$\left\{\vec\varepsilon_\alpha\right\}$不一定正交归一，量纲也可以不为 1，但由于$\dfrac{\partial\left(x,y,z\right)}{\partial\left(q^1,q^2,q^3\right)} \neq 0$必定是线性独立的。

对于非正交归一基，矢量的分量有两种不同的表达方式。

引进度规张量$g_{kl} = g_{lk} = \vec\varepsilon_k\cdot\vec\varepsilon_l = \vec\varepsilon_l\cdot\vec\varepsilon_k$，一般说，$g_{kl} \neq \delta_{kl}$,其量纲也可能不为 1。考虑任意一个矢量$\vec A$，一方面可以用平行四边形法则表为 $\vec A = A^1\vec\varepsilon_1 + A^2\vec\varepsilon_2 + A^3\vec\varepsilon_3$，另一方面，还可以用矢量在基矢上的投影来表示：$\vec A\cdot\vec\varepsilon_1 = A_1$，$\vec A\cdot\vec\varepsilon_2 = A_2$，$\vec A\cdot\vec\varepsilon_3 = A_3$，

A^k称为逆变分量，A_k称为协变分量，一般说，$A^k \neq A_k \quad \left(k,l = 1,2,3\right)$，甚至连量纲都可

能不同。它们之间有如下的关系：

$$A_k = \vec{A}\cdot\vec{\varepsilon}_k = \sum_{l=1}^{3} A^l \vec{\varepsilon}_l \cdot \vec{\varepsilon}_k = \sum_{l=1}^{3} A^l g_{lk} = \sum_{l=1}^{3} g_{kl} A^l \qquad (§)$$

矢量长度的平方 $A^2 = \left|\vec{A}\right|^2 = \vec{A}\cdot\vec{A} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} A^k \vec{\varepsilon}_k \cdot A^l \vec{\varepsilon}_l = \sum_{k,l=1}^{3} g_{kl} A^k A^l = \sum_{k=1}^{3} A^k A_k$ 一般地，

$$A^2 = \left|\vec{A}\right|^2 = \vec{A}\cdot\vec{A} \neq \left(A^1\right)^2 + \left(A^2\right)^2 + \left(A^3\right)^2 \text{ 也} \neq \left(A_1\right)^2 + \left(A_2\right)^2 + \left(A_3\right)^2$$

由于 $\left\{\vec{\varepsilon}_k\right\}$ 线性独立，$\det\left(g_{kl}\right) \neq 0,$ 可由（§）式解出 $A^k = \sum_{l=1}^{3} g^{kl} A_l$，其中系数 g^{kl} 满足

$g^{kl} = g^{lk}$ ，以及 $\sum_{l=1}^{3} g_{kl} g^{lj} = \delta_k^j$ ，因而 $\left(g^{kl}\right)$ 与 $\left(g_{kl}\right)$ 是互逆的矩阵。（＊）

若记 $\det\left(g_{kl}\right) \equiv g$，则有 $\det\left(g^{kl}\right) \equiv g^{-1}$.由上可知，度规张量 g_{kl} 和 g^{kl} 有升降指标之功能。这种功能还能推广到高阶张量，例如：$\sum_{l=1}^{3} g^{kl} T_{lm} = T^{k}{}_{\cdot m}$ ，$\sum_{l,n=1}^{3} g_{kl} g_{mn} T^{ln} = T_{km}$ 用到度规张量本身，就得到 $\sum_{l=1}^{3} g_{kl} g^{lm} = g_k{}^m$ ，与（＊）式比较可知，$g^k{}_l$ 以及 $g_l{}^k$ 就是 Kronecker δ 一记号。利用度规张量可把矢量的内积表为多种形式：

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \sum_{k,l=1}^{3} A^k \vec{\varepsilon}_k \cdot B^l \vec{\varepsilon}_l = \sum_{k,l=1}^{3} g_{kl} A^k B^l = \sum_{l=1}^{3} A_l B^l = \sum_{k=1}^{3} A^k B_k = \sum_{k,l=1}^{3} g^{kl} A_k B_l$$

对于正交归一化的基 $\left\{\vec{e}_k\right\}$，我们有 $g_{kl} = \vec{e}_k \cdot \vec{e}_l = \delta_{kl}$，$g^{kl} = \delta^{kl}$ ，度规矩阵成为单位矩阵，从而 $A^k = A_k$ ，逆变分量和协变分量没有区别。

【练习】已知 $\vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j}$，其中 $\vec{i}, \vec{j}$ 为一组正交归一基矢，另取一组基矢 $\vec{\varepsilon}_1 = \vec{i}, \vec{\varepsilon}_2 = \vec{i} + \vec{j}$，求在这组基矢下的 g_{kl}, g^{kl}, 以及矢量 $\vec{A}$ 在这组基矢下的 A^k, A_k, 以及 $\left|\vec{A}\right|$；并在平面上试作图以表示 A_k, 和 A^k 的区别和联系。

现在我们可以利用度规张量来计算速度和加速度矢量的表达式了。利用矢径公式

$$\vec{r} = x\left(q^k\right)\vec{i} + y\left(q^k\right)\vec{j} + z\left(q^k\right)\vec{k}$$

可以求出元位移矢量的表达式

$$d\vec{r} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^k} dq^k = \sum_{k=1}^{3} dq^k \vec{\varepsilon}_k$$，其中 dq^k 是元位移的逆变分量，

而它的协变分量则为 $dq_k = \vec{\varepsilon}_k \cdot d\vec{r} = \sum_{l=1}^{3} \vec{\varepsilon}_k \cdot \vec{\varepsilon}_l dq^l = \sum_{l=1}^{3} g_{kl} dq^l$

从而弧微分的平方可以表为 $ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = \sum_{k,l=1}^{3} dq^k \vec{\varepsilon}_k \cdot dq^l \vec{\varepsilon}_l = \sum_{k,l=1}^{3} g_{kl} dq^k dq^l$ ，

进而我们可以速度的表达式 $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \sum_{k=1}^{3} \frac{dq^k}{dt} \vec{\varepsilon}_k = \sum_{k=1}^{3} \dot{q}^k \vec{\varepsilon}_k$ ，

由此得 $v^k = \dot{q}^k$ ， $v_k = \sum_{l=1}^{3} g_{kl} v^l$ 以及 $v^2 = \sum_{k,l=1}^{3} g_{kl} \dot{q}^k \dot{q}^l = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$

下面我们来计算加速度的协变分量（进而计算逆变分量也就不难了）

$$a_k = \vec{a} \cdot \vec{\varepsilon}_k = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^k} = \frac{d}{dt}\left[\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^k}\right] - \vec{v} \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^k} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q^k}\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

在以上计算过程中用到了第一和第二拉格朗日经典关系：

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^k} \quad 和 \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^k} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial q^k} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial q^k}$$

利用一般曲线坐标系的上述公式，可以直接求得各常用曲线坐标系中速度和加速度的表达式。

这些结果还可以运用到牛顿动力学方程：

由 $m\vec{a} = \vec{F}$ 出发，求等式在坐标基矢上的投影，并引入广义力 Q_k （力在坐标基矢上的投影），得到 $ma_k = m\vec{a} \cdot \vec{\varepsilon}_k = m\vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^k} = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^k} \equiv Q_k$ ；即 $\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k}\right] - \frac{\partial T}{\partial q^k} = Q_k$

这就是单质点力学体系的拉格朗日方程（推广到质点系并无原则上的困难，参阅第五章）。

A2．矢量分析和场论简介

设 $\Omega\left(\subset R^3\right)$ 为三维欧几里得（Euclid）空间的一个区域。定义于 Ω 上的任何数量函数 $u = u\left(x, y, z\right)$ 称为 Ω 上的数量场或纯量场（这是温度场、密度场等物理场的抽象）。任何曲面 $u = u\left(x, y, z\right) = const$ 称为数量场 u 的等值面。定义于 Ω 上的任何矢量函数 $\vec{F}$ 称为 Ω 上的矢量场（这是力场、电场、速度场等物理场的抽象）。在每点与 $\vec{F}$ 相切的曲线称为矢量场 $\vec{F}$ 的流线。平面上的数量场和矢量场也可作类似的定义和讨论。

设 u 和 $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ 分别为区域 Ω 内的数量场和矢量场，假定以下出现的偏导数皆存在， 定义 u 的梯度 $\mathrm{grad}\, u$ ， $\vec{F}$ 的散度 $\mathrm{div}\, \vec{F}$ 和旋度 $\mathrm{rot}\, \vec{F}$ ：

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

其中$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$是一个矢量算符，称为哈密顿算符。主要运算规则如下：

1. 线性规则$\nabla\sum_{i=1}^{n} a_i u_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \nabla u_i \quad \nabla\cdot\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \nabla\cdot\vec{F}_i \quad \nabla\times\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \nabla\times\vec{F}_i$

其中a_i为常数，$u = u(x, y, z)$为数量场，$\vec{F}$为矢量场。

2．莱布尼兹规则$\nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v \quad \nabla\cdot(u\vec{F}) = \nabla u\cdot\vec{F} + u\nabla\cdot\vec{F}$

$$\nabla\times(u\vec{F}) = \nabla u\times\vec{F} + u\nabla\times\vec{F}$$

$$\nabla\cdot(\vec{F}\times\vec{G}) = (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{G} - \vec{F}\cdot(\nabla\times\vec{G})$$

3. 链规则$\nabla f(u) = f'(u)\nabla u \quad \nabla\cdot\nabla u = \nabla^2 u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

4．双重∇运算规则$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{F}) = 0 \quad \nabla\times(\nabla u) = 0$

5。设$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad r = |\vec{r}|$，则$\nabla r = \frac{\vec{r}}{r} \quad \nabla\cdot\vec{r} = 3$，$\quad \nabla\times\vec{r} = 0$

以上规则表明，∇运算规则综合了矢量运算和微分运算两类规则。

顺便对符号做个说明，矢量算符∇可以记为$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \equiv \nabla_{\vec{r}} \equiv \frac{\partial}{\partial \vec{r}}$以后我们会遇到这样的运算：$\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial \dot{y}}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial \dot{z}}\vec{k} \equiv \nabla_{\dot{\vec{r}}} \equiv \frac{\partial}{\partial \dot{\vec{r}}}$，这也是一个矢量算符。

梯度，旋度，散度和拉普拉斯算符是我们今后常用的，它们在直角坐标系中的表达式是熟知的，在常用曲线坐标系中的表达式也不难求得，可自行练习计算，也可查阅有关数学书籍、电动力学教材或专著的数学附录。例如：

吴崇试 数学物理方法（第二版）第二部分第 15 章正交曲面坐标系 209 页

周治宁 吴崇试 钟毓澍 编著 数学物理方法习题指导 第 13 章正交曲面坐标系 221 页

至于更一般的曲线坐标系（n 维情形，一般的弯曲空间的情形），可参阅广义相对论书籍中的数学准备知识。

下面略举数例：

【例 1】计算在平面极坐标系中梯度的表达式：

利用直角坐标系中的表达式 $\nabla V=\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial V}{\partial y}\vec{j}$，再进行坐标变换

其中：$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial \theta}$， $\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial \theta}$

或变换到平面极坐标系，然后进行计算 $\nabla V=\frac{\partial V}{\partial r}\nabla r+\frac{\partial V}{\partial \theta}\nabla \theta$ 其中：

$$\nabla r=\left[\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial r}{\partial y}\vec{j}\right]=\left[\frac{x}{r}\vec{i}+\frac{y}{r}\vec{j}\right]=\frac{\vec{r}}{r}=\vec{e}_r \quad \nabla \theta=\frac{\partial \theta}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial \theta}{\partial y}\vec{j}=-\frac{\sin\theta}{r}\vec{i}+\frac{\cos\theta}{r}\vec{j}=\frac{1}{r}\vec{e}_\theta$$

都能得到 $\vec{F}=-\nabla V=-\left(\frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta\right)$

如果势能只是 r 的函数，则 $\vec{F}=-\nabla V\left(r\right)=-\frac{dV}{dr}\vec{e}_r$

【例 2】：球坐标系中的梯度表达式求法如下：

$\nabla V=\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial V}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$ 或变换到球坐标 $\nabla V=\frac{\partial V}{\partial r}\nabla r+\frac{\partial V}{\partial \theta}\nabla \theta+\frac{\partial V}{\partial \varphi}\nabla \varphi$

其中：$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial \theta}+\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial \varphi}$， $\frac{\partial V}{\partial y}=\cdots$， $\frac{\partial V}{\partial z}=\cdots$，或

$$\nabla r=\left[\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial r}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}\right]=\left[\frac{x}{r}\vec{i}+\frac{y}{r}\vec{j}+\frac{z}{r}\vec{k}\right]=\frac{\vec{r}}{r}=\vec{e}_r$$

$$\nabla \varphi=\frac{\partial}{\partial x}\arctan\frac{y}{x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\arctan\frac{y}{x}\vec{j}=-\frac{y}{x^2+y^2}\vec{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$$

$$=\frac{1}{r\sin\theta}\left(-\sin\varphi\vec{i}+\cos\varphi\vec{j}\right)=\frac{1}{r\sin\theta}\vec{e}_\varphi$$

$$\nabla \theta=\frac{\partial \theta}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial \theta}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial \theta}{\partial z}\vec{k}=\frac{zx}{r^2\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i}+\frac{zy}{r^2\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j}-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r^2}\vec{k}$$

$$=\frac{1}{r}\left(\cos\theta\cos\varphi\vec{i}+\cos\theta\sin\varphi\vec{j}-\sin\theta\vec{k}\right)=\frac{1}{r}\vec{e}_\theta$$

于是就得到：$\vec{F}=-\nabla V=-\left(\frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi\right)$，

* 【思考】把球坐标的 $\left(\theta,\varphi\right)$ 作为球面 $\left(r=R\right)$ 上的曲线坐标，建立基矢，度规张量，

计算球面上弧微分的长度。基矢张成怎样的空间？

A3．角速度是轴矢量

在此我们从坐标变换下的变换规则出发讨论角速度是轴矢量这个问题。

1．张量简介

有一类物理量，称为张量，确切地说是 n 阶张量，（n=1,2,3,---）在三维欧氏空间中，它由 3^n 个分量组成，（可用 n 个附标分别取 1，2，3 来标记）在空间转动和空间反射下（即对直角坐标作正交变换下），依一定的规则进行变换。

【例 1】一阶张量，即矢量 $\vec{V}=V_1\vec{i}+V_2\vec{j}+V_3\vec{k}$ 由三个分量 $V_k\ (k=1,2,3)$ 组成，在空间转动下依下述规则进行变换 $V_k \to V_k{}'=\sum\limits_{l=1}^{3}a_{kl}V_l$，（*）

其中 a_{kl} 是与这个空间转动相对应的正交矩阵的矩阵元。

【例 2】二阶张量 T 由九个分量 T_{kl} 组成，在空间转动下依下述规则进行变换：

$$T_{kl}\to T_{kl}{}'=\sum_{m,n=1}^{3}a_{km}a_{ln}T_{mn}=\sum_{m,n=1}^{3}a_{km}T_{mn}\left(a^T\right)_{nl}$$

二阶张量可表为一个方矩阵。上式对二阶张量进行的变换就是对矩阵的相似变换。三维空间中的有限转动可以用一个 3×3 的矩阵来表示，因此是一个二阶张量（不是矢量），相继进行两个有限转动，就是两个对应的矩阵相乘（不是矢量相加）。既然矩阵乘法一般不满足交换律，两个有限转动的结果一般也依赖它们的次序。

n 阶张量还可依据它们在空间反射变换下的性质进一步进行分类。例如:一阶张量（即矢量）还应分为真矢量（又称极矢量，简称矢量）和赝矢量（又称轴矢量）。它们在空间转动下变换的规则相同;但是在空间反射下变换的规则不同:前者在空间反射下变号(即反向)，后者在空间反射下不变。对赝矢量 $\vec{A}=A_1\vec{i}+A_2\vec{j}+A_3\vec{k}$ 来说，（*）式应修改成

$A_k\to A_k{}'=\sum\limits_{l=1}^{3}\left(\det a\right)a_{kl}A_l$ 其中 a_{kl} 为三维空间中正交变换（包括空间转动和空间反射）的矩阵元。特别当空间转动时 $\det a=1$，A_k 的变换规则如同矢量；当所考虑的正交变换包含空间反射时；特别，对空间反射，$a_{kp}=-\delta_{kp}$，　$A_k{}'=A_k$ 不变。现将 0，1，2 阶张量、赝张量变换规则列表如下：

阶数	分量数	张量	赝张量
0	1	标量 $S\to S'=S$	赝标量 $P\to P'=\left(\det a\right)P$
1	3	矢量 $V_k\to V_k'=\sum\limits_{i=1}^{3}a_{kl}V_l$	赝矢量 $A_k\to A_k'=\sum\limits_{l=1}^{3}\left(\det a\right)a_{kl}A_l$

2 9 (二阶)张量$T_{kl} \to T'_{kl} = \sum_{m,n=1}^{3} a_{km} a_{ln} T_{mn}$ (二阶)赝张量$W_{kl} \to W'_{kl} = \sum_{m,n=1}^{3} (\det a) a_{km} a_{ln} W_{mn}$

在此还介绍（三维空间的）三阶全反称张量ε_{klm} ，定义为：

$$\varepsilon_{klm} = \begin{cases} +1 & (klm) = (123),(231),(312) \\ -1 & (klm) = (132),(213),(321) \\ 0 & \text{其余情形} \end{cases}$$

ε_{klm}是权为 1 的三阶张量密度的分量，按以下规则进行变换

$$\varepsilon_{klm} \to \varepsilon'_{klm} = \sum_{p,r,s=1}^{3} (\det a)^1 a_{kp} a_{lr} a_{ms} \varepsilon_{prs} = \det a \ \varepsilon_{klm} \det a = \varepsilon_{klm} \qquad \text{(\#)}$$

以上第一步是权为 1 的张量密度的变换规则，后两步计算用到了行列式的定义

$\left(\det a = \sum_{k,l,m=1}^{3} \varepsilon_{klm} a_{k1} a_{l2} a_{m3} = \sum_{k,l,m=1}^{3} \varepsilon_{klm} a_{1k} a_{2l} a_{3m} \right)$或

$\left(\varepsilon_{prs} \det a = \sum_{k,l,m=1}^{3} \varepsilon_{klm} a_{kp} a_{lr} a_{ms} = \sum_{k,l,m=1}^{3} \varepsilon_{klm} a_{pk} a_{rl} a_{sm} \right)$，并注意到对直角坐标作正交变换时，

$\det a = \pm 1$。(#）式表明，在正交变换（包括空间转动和反射）下，ε_{klm}的值不变。ε_{klm}还

满足以下求和规则$\sum_{m=1}^{3} \varepsilon_{jkm} \varepsilon_{hlm} = \delta_{jh} \delta_{kl} - \delta_{jl} \delta_{hk}$ ， $\sum_{k,l,=1}^{3} \varepsilon_{klm} \varepsilon_{kln} = 2\delta_{mn}$ ，

【例 3】已知$\vec{U},\vec{V}$为矢量，$\vec{A}$为赝矢量，a_{kl}为正交变换的矩阵元。试判断$\vec{U} \cdot \vec{V}$；$\vec{U} \times \vec{V}$；

$\vec{U} \times \vec{A}$分别是何种张量?

【解】$\vec{U} \cdot \vec{V} = \sum_{k=1}^{3} U_k V_k \to \vec{U}' \cdot \vec{V}' = \sum_{k=1}^{3} U'_k V'_k = \sum_{k,l,m=1}^{3} a_{kl} U_l a_{km} V_m = \sum_{l,m=1}^{3} \delta_{lm} U_l U_m = \sum_{l=1}^{3} U_l V_l = \vec{U} \cdot \vec{V}$

（标量）

$$\vec{U} \times \vec{V} = \sum_{j,k,l=1}^{3} \varepsilon_{jkl} U_j V_k \vec{e}_l \ , \qquad \left(\vec{U} \times \vec{V} \right)_l = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{jkl} U_j V_k$$

$$\left(\vec{U} \times \vec{V} \right)_j \to \left(\vec{U}' \times \vec{V}' \right)_j = \sum_{k,l=1}^{3} \varepsilon'_{jkl} U'_k V'_l = \sum_{s,k,l,m,n=1}^{3} \varepsilon_{skl} \delta_{sj} a_{km} U_m a_{ln} V_n$$

$$= \sum_{s,k,l,m,n,p=1}^{3} \varepsilon_{skl} a_{sp} a_{jp} a_{km} U_m a_{ln} V_n = \sum_{p,m,n=1}^{3} (\det a) a_{jp} \varepsilon_{pmn} U_m V_n = \sum_{p=1}^{3} (\det a) a_{jp} \left(\vec{U} \times \vec{V} \right)_p$$

(赝矢量)

$$\left(\vec{U}\times\vec{A}\right)_j \to \left(\vec{U}'\times\vec{A}'\right)_j = \sum_{k,l=1}^{3}\varepsilon'_{jkl}U'_k A'_l = \sum_{s,k,l,m,n=1}^{3}\varepsilon_{skl}\delta_{sj}a_{km}U_m\left(\det a\right)a_{ln}A_n$$

$$= \sum_{s,k,l,m,n,p=1}^{3}\varepsilon_{skl}a_{sp}a_{jp}a_{km}U_m\left(\det a\right)a_{ln}A_n = \sum_{p,m,n=1}^{3}\left(\det a\right)^2 a_{jp}\varepsilon_{pmn}U_m A_n = \sum_{p=1}^{3}a_{jp}\left(\vec{U}\times\vec{A}\right)_p$$

(矢量)

2．我们再回到三维空间中的转动问题。

从坐标系 $Ox_0y_0z_0$ 到坐标系 $Oxyz$ 的转动 R，可以按照方法二用矩阵表示为：（说明：这里我们采用主动的观点,即把矢量转动而坐标系不动，矩阵表示出矢量的坐标的变换。）

$$R = R(\varphi,\theta,\psi) = R_3(\varphi)R_2(\theta)R_1(\psi)$$

$$= \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

其中 $R_3 = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $R_2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$, $R_1 = \begin{pmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

得 $R = \begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\cos\theta & -\cos\varphi\sin\psi-\sin\varphi\cos\psi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi\cos\theta & -\cos\varphi\sin\theta\\ \sin\psi\sin\theta & \cos\psi\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

在时刻 t，刚体处于以欧勒角 $\varphi(t),\theta(t),\psi(t)$ 来刻画的取向，即 $(\varphi,\theta,\psi) = \left(\varphi(t),\theta(t),\psi(t)\right)$

特别，在时刻 $t=0$，刚体的初取向取为 $(\varphi,\theta,\psi) = \left(\varphi(0),\theta(0),\psi(0)\right) = (0,0,0)$

即刚体在时刻 $t=0$ 处于使两个坐标系重合的取向，

$R(\varphi,\theta,\psi) = R\left(\varphi(t),\theta(t),\psi(t)\right) = R(t)$ 是把 $(0,0,0)$ 转动到 $\left(\varphi(t),\theta(t),\psi(t)\right)$ 的矩阵，满足 $R^T = R^{-1}$（正交矩阵）。$R(t=0) = R(0,0,0) = I$，I 为单位矩阵；

这样对于刚体上任一固定点，在坐标系 $Oxyz$ 中的坐标为 (x,y,z)，在坐标系 $Ox_0y_0z_0$ 中的坐标为 $\left(x_0(t),y_0(t),z_0(t)\right)$，满足 $x=x_0(0), y=y_0(0), z=z_0(0)$，在转动 $R(t) = R\left(\varphi(t),\theta(t),\psi(t)\right)$ 下把 $\left(x_0(0),y_0(0),z_0(0)\right)$ 变换为 $\left(x_0(t),y_0(t),z_0(t)\right)$，这样就有

$$R(t)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = R(t)\begin{pmatrix}x_0(0)\\ y_0(0)\\ z_0(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_0(t)\\ y_0(t)\\ z_0(t)\end{pmatrix} \quad 即\ R(t)\vec{r} = R(t)\vec{r}_0(0) = \vec{r}_0(t)$$

两边取对时间的导数，就得

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_0(t)\\ \dot{y}_0(t)\\ \dot{z}_0(t)\end{pmatrix}=\dot{R}(t)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\dot{R}(t)R^{-1}(t)\begin{pmatrix}x_0(t)\\ y_0(t)\\ z_0(t)\end{pmatrix} \qquad (**)$$

下面我们来证明矩阵 $\dot{R}(t)R^{-1}(t)$ 是一个反对称矩阵，即 $\left[\dot{R}(t)R^{-1}(t)\right]^T=-\dot{R}(t)R^{-1}(t)$。事实上 $\left[\dot{R}R^{-1}\right]^T=\left(R^{-1}\right)^T\left(\dot{R}^T\right)=R\frac{d}{dt}R^T=\frac{d}{dt}\left(RR^T\right)-\dot{R}R^{-1}=-\dot{R}R^{-1}$ 。于是我们可把这个矩阵表为 $\dot{R}R^{-1}=\left(\omega_{jk}\right)$，其中 $\omega_{jk}=-\omega_{kj}$ ，具体写出来就是：

$$\dot{R}R^{-1}=\begin{pmatrix}0&\omega_{12}&-\omega_{31}\\ -\omega_{12}&0&\omega_{23}\\ \omega_{31}&-\omega_{23}&0\end{pmatrix},$$

我们令 $\omega_{12}=-\omega_3,\omega_{23}=-\omega_1,\omega_{31}=-\omega_2$,

写成张量的形式就是：$\omega_m=-\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{3}\omega_{kl}\varepsilon_{klm}$ ，其中 ε_{klm} 为全反对称张量。由此还可推出 $\omega_{kl}=-\sum_{j=1}^{3}\omega_j\varepsilon_{jkl}$ ， 于是由（**）式就可得到

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_0(t)\\ \dot{y}_0(t)\\ \dot{z}_0(t)\end{pmatrix}=\dot{R}(t)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\dot{R}(t)R^{-1}(t)\begin{pmatrix}x_0(t)\\ y_0(t)\\ z_0(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}o&\omega_{12}&-\omega_{31}\\ -\omega_{12}&0&\omega_{23}\\ \omega_{31}&-\omega_{23}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0(t)\\ y_0(t)\\ z_0(t)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}o&-\omega_3&\omega_2\\ \omega_3&0&-\omega_1\\ -\omega_2&\omega_1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0(t)\\ y_0(t)\\ z_0(t)\end{pmatrix}\quad \text{即}\begin{cases}\dot{x}_0=\omega_2z_0-\omega_3y_0\\ \dot{y}_0=\omega_3x_0-\omega_1z_0\\ \dot{z}_0=\omega_1y_0-\omega_2x_0\end{cases}$$

和我们熟知的公式 $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$ 比较可知，$\omega_1,\omega_2,\omega_3$ 就是我们早已知道的“角速度矢量”的三个分量。因为 ε_{klm} 是权为 1 的三阶张量密度的分量，ω_{kl} 是矢量间进行线性变换所对应的矩阵的分量，且 $\omega_{jk}=-\omega_{kj}$，所以是二阶反对称张量的分量，从 $\omega_{kl}=-\sum_{j=1}^{3}\omega_j\varepsilon_{jkl}$ 或 $\omega_m=-\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{3}\omega_{kl}\varepsilon_{klm}$ 就可以看出 ω_k 是轴矢量的分量。下面我们通过直接的运算来证明，$\omega_1,\omega_2,\omega_3$ 这三个分量确实是按照轴矢量分量的变换规则变换的。

ω_{kl} 是矢量间进行线性变换所对应的矩阵的分量，所以应按二阶张量进行变换

$$\omega_{kl} \to \omega'_{kl} = \sum_{j,m=1}^{3} a_{kj} a_{lm} \omega_{jm}$$

ε_{klm} 是权为 1 的三阶张量密度的分量，按（#）式进行变换。进一步就可以得到

$$\omega_k \to \omega'_k = -\frac{1}{2}\sum_{l,m=1}^{3} \varepsilon'_{klm}\omega'_{lm} = -\frac{1}{2}\sum_{l,m=1}^{3}\sum_{p,r,s=1}^{3}(\det a)a_{kp}a_{lr}a_{ms}\varepsilon_{prs}\sum_{u,v=1}^{3} a_{lu}a_{mv}\omega_{uv}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{p,r,s=1}^{3}\sum_{u,v=1}^{3}(\det a)a_{kp}\delta_{ru}\delta_{sv}\varepsilon_{prs}\omega_{uv} = -\frac{1}{2}\sum_{p,r,s=1}^{3}(\det a)a_{kp}\varepsilon_{prs}\omega_{rs} = \sum_{p=1}^{3}(\det a)a_{kp}\omega_p$$

由上式可以看出：角速度是轴矢量。上述推导过程也说明了，在三维空间中二阶反对称张量总是和一个轴矢量等价。利用 R 的表达式，计算 $\dot{R}R^{-1}$，可以得到 $\vec{\omega}$ 在固定于空间的坐标系中的分量：

$$\begin{cases} \omega_{0x} = \omega_1 = -\omega_{23} = \dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi \\ \omega_{0y} = \omega_2 = -\omega_{31} = \dot{\theta}\sin\varphi - \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \\ \omega_{0z} = \omega_3 = -\omega_{12} = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta \end{cases}$$

利用坐标变换式，就可以求出 $\vec{\omega}$ 在固定于刚体的坐标系中的分量：

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ \omega_y = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \\ \omega_z = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{cases}$$

这就是刚体转动的欧拉运动学方程。

A4．Cayley-Klein 参量（参阅参考资料[5]）

我们已经学习了用欧拉角描述刚体在空间的趋向和刚体围绕基点的转动的方法，但是在理论物理的一些重要领域，还采用其它方法来描述刚体的转动。下面我们来讨论转动的复数表示：（在本节我们采用爱因斯坦约定：对于双重附标一律求和而省略求和符号，特殊声明者除外。）

1．Pauli 矩阵

为了下面表述的需要，我们先引入 Pauli 矩阵

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

这些矩阵是厄米（Hermite)的 $\quad \sigma_k^{\dagger} = \sigma_k \quad k = 1,2,3$

并且是零迹的 $\quad Tr\sigma_k = 0 \quad k = 1,2,3$

泡利矩阵之间满足下列关系：$\sigma_k\sigma_l = \delta_{kl} + i\varepsilon_{klm}\sigma_m$

或 $\quad \sigma_k\sigma_l + \sigma_l\sigma_k = 2\delta_{kl} \qquad \sigma_k\sigma_l - \sigma_l\sigma_k = 2i\varepsilon_{klm}\sigma_m$

并有以下推论成立：$(\vec{\sigma}\cdot\vec{a})(\vec{\sigma}\cdot\vec{b}) = (\vec{a}\cdot\vec{b}) + i\vec{\sigma}(\vec{a}\times\vec{b})$

其中 $\vec{\sigma}=\sigma_1\vec{i}+\sigma_2\vec{j}+\sigma_3\vec{k}$

泡利矩阵和单位阵 I 共同构成一组完备基，即：任意 2×2 矩阵 M 都可以在这组基下展开为 $M=c_0I+c_1\sigma_1+c_2\sigma_2+c_3\sigma_3$，证明如下：

设 $M=\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$ 我们来证明 $M=c_0I+c_1\sigma_1+c_2\sigma_2+c_3\sigma_3$

事实上，容易验证 $M=\dfrac{1}{2}\left\{(TrM)I+\left[Tr(M\sigma_k)\right]\sigma_k\right\}$

其中 $TrM=M_{11}+M_{22}=2c_0 \qquad Tr(M\sigma_1)=M_{12}+M_{21}=2c_1$

$Tr(M\sigma_2)=i(M_{12}-M_{21})=2c_2 \quad Tr(M\sigma_3)=M_{11}-M_{22}=2c_3$

2．Cayley-Klein 参量

在转动下，位矢 $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ 按下式变换：$\vec{r}'=A\vec{r},\ A^T=A^{-1}$ 是三维空间的正交变换，$r'^2=r^2$ 是不变量。下面我们来讨论转动的复数表示。

首先将位矢 $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ 一一对应到一个复矩阵：

$$P=\vec{r}\cdot\vec{\sigma}=\begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix} \qquad （1）$$

易见矩阵 P 是厄米（Hermite）的：$P^\dagger=P$；下面两个量在转动下不变：

$$P^\dagger P=\left(x^2+y^2+z^2\right)I=r^2I \qquad \det P=-\left(x^2+y^2+z^2\right)=-r^2 \qquad （2）$$

考虑复矩阵 P 的与三维空间转动相对应的变换（要求保持（2）式中的两个量不变）

$$P'=\vec{r}'\cdot\vec{\sigma}=\begin{pmatrix} z' & x'-iy' \\ x'+iy' & -z' \end{pmatrix}=UPU^\dagger \qquad U=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \qquad \alpha,\beta,\gamma,\delta\text{复参数},$$

易见 P' 仍然是厄米的 $P'^\dagger=P'$，为保证（2）式为不变量，即：$P'^\dagger P'=P^\dagger P \quad \det P'=\det P$

我们应取 U 为么正矩阵：$U^\dagger U=UU^\dagger=I$，

由于只考虑转动而不考虑空间反射变换，我们要求 U 满足么模条件：$\det U=1$，

具体讨论么模么正矩阵：$U=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 复参数，相当于 8 个实参数，称为 Cayley-Klein 参量。考虑么模么正条件对 U 矩阵所加的限制，我们解得 $\gamma=-\beta^*,\quad \delta=\alpha^*$ 从而得

$$U=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \quad U^\dagger=\begin{pmatrix} \alpha^* & -\beta \\ \beta^* & \alpha \end{pmatrix} \qquad \alpha^*\alpha+\beta^*\beta=1$$；其中包含 3 个独立的实参数。

么模么正矩阵可用泡利矩阵展开为：（其中$\left(a_0,a_1,a_2,a_3\right)$为实参数）

$$U=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta^* & \alpha^*\end{pmatrix}=a_0I+i\vec{a}\cdot\vec{\sigma}=\begin{pmatrix}a_0+ia_3 & ia_1+a_2\\ ia_1-a_2 & a_0-ia_3\end{pmatrix}\qquad\begin{cases}\alpha=a_0+ia_3\\ \beta=ia_1+a_2\end{cases}$$

么模条件 $\quad \alpha^*\alpha+\beta^*\beta=1 \qquad a_0^2+\vec{a}^2=1$

可以设 $\quad a_0=\cos\Theta \quad \vec{a}=\vec{n}\sin\Theta$

$$\begin{aligned}
P'=UPU^\dagger&=\left(a_0I+i\vec{a}\cdot\vec{\sigma}\right)\left(\vec{r}\cdot\vec{\sigma}\right)\left(a_0I-i\vec{a}\cdot\vec{\sigma}\right)\\
&=a_0^2\left(\vec{r}\cdot\vec{\sigma}\right)+ia_0\left[\left(\vec{a}\cdot\vec{\sigma}\right)\left(\vec{r}\cdot\vec{\sigma}\right)-\left(\vec{r}\cdot\vec{\sigma}\right)\left(\vec{a}\cdot\vec{\sigma}\right)\right]+\left(\vec{a}\cdot\vec{\sigma}\right)\left(\vec{r}\cdot\vec{\sigma}\right)\left(\vec{a}\cdot\vec{\sigma}\right)\\
&=a_0^2\left(\vec{r}\cdot\vec{\sigma}\right)+2a_0\left[\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{r}\times\vec{a}\right)\right]+\left[\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)+i\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{r}\right)\right]\left(\vec{a}\cdot\vec{\sigma}\right)\\
&=a_0^2\left(\vec{r}\cdot\vec{\sigma}\right)+2a_0\left[\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{r}\times\vec{a}\right)\right]+\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)\left(\vec{a}\cdot\vec{\sigma}\right)+i\left[\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{r}\right)\right]\left(\vec{a}\cdot\vec{\sigma}\right)\\
&=a_0^2\left(\vec{r}\cdot\vec{\sigma}\right)+2a_0\left[\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{r}\times\vec{a}\right)\right]+\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)\left(\vec{a}\cdot\vec{\sigma}\right)+\vec{\sigma}\cdot\left[\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\vec{r}\right)\right]\\
&=\left[\left(a_0^2-\vec{a}^2\right)\vec{r}+2a_0\left(\vec{a}\times\vec{r}\right)+2\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)\vec{a}\right]\cdot\vec{\sigma}=\vec{r}'\cdot\vec{\sigma}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{r}'&=\left(a_0^2-\vec{a}^2\right)\vec{r}+2a_0\left(\vec{a}\times\vec{r}\right)+2\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)\vec{a}\qquad a_0=\cos\Theta\quad \vec{a}=\vec{n}\sin\Theta\\
&=\vec{r}\cos2\Theta+\left(\vec{n}\times\vec{r}\right)\sin2\Theta+\left(\vec{n}\cdot\vec{r}\right)\vec{n}\left(1-\cos2\Theta\right)
\end{aligned}$$

与转动公式$\vec{r}'=\vec{n}\left(\vec{n}\cdot\vec{r}\right)+\left[\vec{r}-\vec{n}\left(\vec{n}\cdot\vec{r}\right)\right]\cos\Phi+\left(\vec{n}\times\vec{r}\right)\sin\Phi$相比较可知：$\vec{n}$为转轴方向的单位矢量；可取$\Theta=\dfrac{1}{2}\Phi$为转角之半。

$$U=a_0I+i\vec{a}\cdot\vec{\sigma}=\cos\Theta I+i\sin\Theta\vec{n}\cdot\vec{\sigma}=\cos\frac{\Phi}{2}I+i\sin\frac{\Phi}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}$$

绕 z 轴转动Φ角

$$a_0=\cos\Theta\qquad \vec{a}=\vec{n}\sin\Theta=\vec{k}\sin\Theta\qquad a_3=\sin\Theta\quad a_1=a_2=0$$

$$U=\begin{pmatrix}\cos\Theta+i\sin\Theta & 0\\ 0 & \cos\Theta-i\sin\Theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{i\Theta} & 0\\ 0 & e^{-i\Theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{i\Phi/2} & 0\\ 0 & e^{-i\Phi/2}\end{pmatrix}$$

绕 x 轴转动 θ 角

$$a_0=\cos\Theta\qquad \vec{a}=\vec{n}\sin\Theta=\vec{i}\sin\Theta\qquad a_1=\sin\Theta\qquad \Theta=\frac{1}{2}\theta\qquad a_2=a_3=0$$

$$U=\begin{pmatrix}\cos\Theta & i\sin\Theta\\ i\sin\Theta & \cos\Theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta/2 & i\sin\theta/2\\ i\sin\theta/2 & \cos\theta/2\end{pmatrix}$$

由于（绕同一固定点的）相继两次转动的结果依然是（绕该固定点的）一次转动，我们可以进一步研究位矢和复矩阵之间的对应关系。设相继的两次转动（转动矩阵分别为A_1, A_2）把位矢$\vec{r}_1$依次变换为$\vec{r}_2=A_1\vec{r}_1$，$\vec{r}_3=A_2\vec{r}_2=A_2A_1\vec{r}_1\equiv A_3\vec{r}_1$，合转动的矩阵$A_3=A_2A_1$，则对应的复矩阵$P_1=\vec{r}_1\cdot\vec{\sigma}$依次变换为$P_2=U_1P_1U_1^\dagger=U_1\left(\vec{r}_1\cdot\vec{\sigma}\right)U_1^\dagger$

$$P_3=U_2P_2U_2^\dagger=U_2\left(\vec{r}_2\cdot\vec{\sigma}\right)U_2^\dagger=U_2U_1P_1\left(U_2U_1\right)^\dagger\equiv U_3P_1U_3^\dagger$$

其中 U_1, U_2 分别为于两次转动对应的么模么正矩阵，合转动的么模么正矩阵为$U_3 = U_2 U_1$

利用上述结果，我们可以求得：和 A3．中从坐标系$Ox_0y_0z_0$到坐标系$Oxyz$ 的转动矩阵R对应的U矩阵：

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & i\sin\theta/2 \\ i\sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}}\cos\theta/2 & ie^{i\frac{\varphi-\psi}{2}}\sin\theta/2 \\ ie^{-i\frac{\varphi-\psi}{2}}\sin\theta/2 & e^{-i\frac{\varphi+\psi}{2}}\cos\theta/2 \end{pmatrix}$$

A5．作平面平行运动的刚体对瞬时转动中心的角动量定理

1．概述

质点系对固定点的角动量定理和质点系对质心的角动量定理有着相似的紧凑的形式

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{M}\ , \qquad (1)$$

其中$\vec{J}$是角动量，$\vec{M}$ 是力矩。不同点仅在于，计算角动量和力矩时，前者是对于固定点进行的，而后者是对于质心进行的。

刚体作为一类特殊的质点组，上述对质点组普遍适用的论述，当然成立。而对于作平面平行运动的刚体，由于其特殊性质，出现了需要深入研究的新问题。

作平面平行运动的刚体（由代表平面代表）的角速度不为零时，在任一时刻代表平面上总有一点的瞬时速度为零，这一点叫做瞬时转动中心（简称瞬心）。一般说，瞬心既不固定于空间，也不固定于刚体（否则刚体就在作固定轴转动），换句话说，某一时刻瞬心所在位置的质点的速度，也仅在这一瞬时为零（在此时刻之前或之后不为零），因而其加速度一般不为零。

有人认为，既然瞬心在该瞬时的速度为零，我们在该瞬时就可以把它视作固定点，于是对固定点的角动量定理对瞬心也成立，因而作平面平行运动的刚体对瞬心的角动量定理也可表为（1）的形式。这样的论断对不对呢？

【例 1】沿直线作纯滚的均质圆轮，对瞬时转动中心（即切点）O'写出的形如（1）式的角动量定理总是成立的；并且由于地面的约束反力总是通过瞬心，对瞬心的力矩为零，使解题过程简化。

【例 2】一均质直杆 AB（长度为 l）置于光滑竖直墙 OY 和光滑水平地面 OX 之间，在重力作用下下滑，对瞬心O'写出的形如（1）式的角动量定理也总是成立的；并且也由于墙面和地面的约束反力总是通过瞬心，对瞬心的力矩为零，使解题过程简化。

由于这一似是而非的论断，却一再得到“成功”的运用，更多的人接受了这个论断。然而这个论断是错误的。

1982 年，方言指出了这一错误并推导出了对瞬心的角动量定理的正确表述。下面我们用稍微不同的方式来讨论作平面平行运动的刚体对瞬心的角动量定理。

2．瞬心速度的两种含义。

我们先来回顾

某一时刻t的瞬心O'，既可以指瞬心的空间位置，又可以指瞬心所在质点（即在该时刻

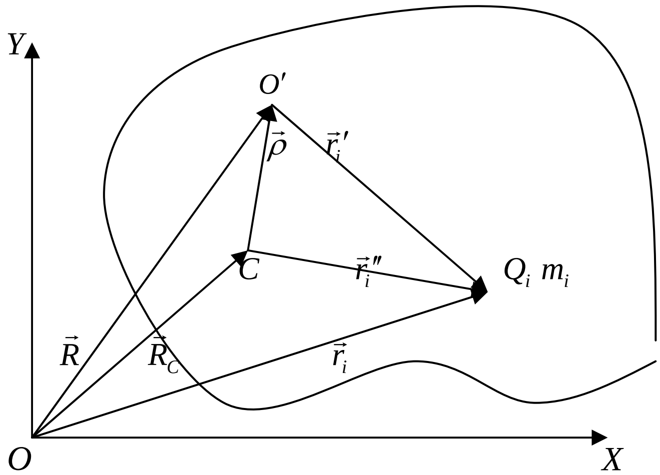
成为瞬心的固连于刚体的点）。在时刻t两者重合，可不加区别。但是两者的运动情况不同，过了这个时刻，两者就分道扬镳了。在谈到“瞬心的速度、加速度”时必须严加区别。

【例 1】沿直线作匀速纯滚的均质圆轮。每一瞬时，圆轮与直线相切，切点就是该瞬时的瞬时转动中心（瞬心）。它既不固定与空间，也不固定于圆轮。相对于空间，瞬心沿着这条直线（空间极迹）作匀速直线运动，相对于刚体，瞬心沿着轮缘（本体极迹）作匀速圆周运动。极迹上的每一点都是某一时刻的瞬心，而空间极迹和本体极迹的区别只是参考系的不同。瞬心沿极迹运动，速度一般不为零。下面我们提到瞬心的空间位置就是指瞬心在空间极迹上的位置。至于瞬心所在的质点就是轮缘上的某一点，它的轨迹是摆线（旋轮线），只在成为切点的瞬时它才是瞬心，只有在成为瞬心的瞬时，速度才为零。

【注意】为了叙述的方便，我们考虑一个平面的刚体在其所在平面内运动，外力也在此平面内。在此简化条件下，$I_{13}=I_{23}=0$，$\omega_x=\omega_y=0$，$\vec{\omega}=\omega_z\vec{k}$，$\vec{L}=I_{33}\omega_z\vec{k}$，$\vec{L}\parallel\vec{\omega}$

合外力矩（包括约束力矩）也应与此平面垂直。（或者更简单些，设外力均在此平面内。

【思考】如果考虑一个作平面平行运动的任意刚体，以下的推导该如何修改？



【注意】为了叙述的方便，我们考虑一个平面的刚体在其所在平面 OXY 内运动，外力也在此平面内（外力在 Z 方向上的投影之和为零）。在此简化条件下，

$I_{13}=I_{23}=0$，$\omega_x=\omega_y=0$，$\vec{\omega}=\omega_z\vec{k}$，$\vec{L}=I_{33}\omega_z\vec{k}$，$\vec{L}\parallel\vec{\omega}$ 角动量与角速度方向相同，均与此平面垂直，合外力矩（包括约束力矩）也应与此平面垂直。

【思考】如果考虑一个作平面平行运动的任意刚体，以下的推导该如何修改？

瞬心空间位置的速度、加速度（分别记为$\dfrac{D\vec{R}}{Dt},\dfrac{D^2\vec{R}}{Dt^2}$）描述的是瞬心所在空间位置沿空间极迹的运动，一般地$\dfrac{D\vec{R}}{Dt}\neq 0$. 瞬心所在质点的速度、加速度（分别记为$\dfrac{\partial\vec{R}}{\partial t},\dfrac{\partial^2\vec{R}}{\partial t^2}$）描述的是于刚体固连的某点的运动，分别由刚体的速度分布与加速度分布决定

$$\frac{\partial\vec{R}}{\partial t}=\frac{d\vec{R}_c}{dt}+\dot{\vec{\theta}}\times\vec{\rho} \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2\vec{R}}{\partial t^2}=\frac{d^2\vec{R}_c}{dt^2}+\frac{d\dot{\vec{\theta}}}{dt}\times\vec{\rho}+\dot{\vec{\theta}}\times\left(\dot{\vec{\theta}}\times\vec{\rho}\right) \tag{3}$$

其中$\dot{\vec{\theta}}$为角速度。$\frac{D}{Dt}$和$\frac{\partial}{\partial t}$都表示对时间的导数，对于涉及瞬心的量，两者含义不同；至于不涉及瞬心的量，两者没有区别。仍记为$\frac{d}{dt}$。一般说，$\frac{\partial \vec{R}}{\partial t} \neq 0$，只有在该时刻$t, O'$成为瞬心，才有

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial t} = \frac{d\vec{R}_c}{dt} + \dot{\vec{\theta}} \times \vec{\rho} = 0 , \tag{4}$$

因而上式为各时刻沿空间极迹运动的空间位置所满足。我们可沿空间极迹对上式求对时间的导数，也就是$\frac{D}{Dt}$，于是得（$\vec{R}_c$和$\dot{\vec{\theta}}$不涉及瞬心，对时间的导数仍记为$\frac{d}{dt}$）

$$\frac{d^2\vec{R}_c}{dt^2} + \frac{d\dot{\vec{\theta}}}{dt} \times \vec{\rho} + \dot{\vec{\theta}} \times \frac{D\vec{\rho}}{Dt} = 0 \tag{5}$$

由（3）和（5）消去$\frac{d^2\vec{R}_c}{dt^2}$，即得

$$\frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial t^2} = \dot{\vec{\theta}} \times \left(\dot{\vec{\theta}} \times \vec{\rho} - \frac{D\vec{\rho}}{Dt} \right) \tag{6}$$

（6）与（3）不同，（6）式仅当$\frac{\partial \vec{R}}{\partial t} = 0$成立的条件下才成立，是质点在成为瞬心时刻的加速度。

3． 作平面平行运动的刚体对瞬心的角动量定理。

我们考虑一个稍为一般的问题。以固定于刚体的任一点O'为基点（不限于瞬心），就有

$$\vec{v}_i = \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} + \dot{\vec{\theta}} \times \vec{r}_i' \tag{7}$$

计算对固定点O的角动量$\vec{G}_0$

$$\vec{G}_0 = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i \left(\vec{R} + \vec{r}_i' \right) \times m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{R} \times m_i \vec{v}_i + \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial t} + \dot{\vec{\theta}} \times \vec{r}_i' \right)$$

$$= \vec{R} \times \vec{P} + I_{o'} \dot{\vec{\theta}} + \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \frac{\partial \vec{R}}{\partial t}$$

其中$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i$是刚体的动量，$I_{o'} = \sum_i m_i r_i'^2$是刚体绕$O'$点的转动惯量，此外还利用了平面平行运动的性质$\vec{r}_i' \cdot \dot{\vec{\theta}} = 0$和关系式（7）

由于

$$\sum_i \vec{r}_i' \times m_i \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} = \sum_i \left(\vec{r}_i'' - \vec{\rho}\right) \times m_i \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} = \sum_i \vec{r}_i'' m_i \times \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} - \sum_i m_i \vec{\rho} \times \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} = -m\vec{\rho} \times \frac{\partial \vec{R}}{\partial t}$$

其中 $m = \sum_i m_i$ 是刚体的质量，并注意到，对于质心 C 有 $\sum_i \vec{r}_i'' m_i = 0$ 成立。最后我们得到：

$$\vec{G}_0 = \vec{R} \times \vec{P} + I_{o'} \vec{\dot{\theta}} - m\vec{\rho} \times \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} \tag{8}$$

若 O' 是质心，则上式的最后一项为零（因为 $\rho = 0$）。若 O' 是瞬心，则上式的最后一项也是零（因为 $\frac{\partial \vec{R}}{\partial t} = 0$），但在不同的瞬时，$O'$ 处于不同的空间位置（在空间极迹上），也处于刚体上的不同位置。

我们从（8）式出发，保持 O' 为瞬心，（即沿着空间极迹运动），计算 $\vec{G}_0$ 对时间的变化率。在这种情况下，（8）式的最后一项保持为零，计算式中与瞬心有关的量的时间导数时均应理解为 $\frac{D}{Dt}$，（$\vec{G}_0$ 不涉及瞬心，对时间的导数仍记为 $\frac{d\vec{G}_0}{dt}$），于是得到：

$$\frac{d\vec{G}_0}{dt} = \frac{D\vec{R}}{Dt} \times \vec{P} + \vec{R} \times \frac{d\vec{P}}{dt} + \frac{D}{Dt}\left(I_{o'} \vec{\dot{\theta}}\right)$$

利用我们知道对固定点的角动量定理 $\frac{d\vec{G}_0}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ 和动量定理 $\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$，上式可化为

$$\frac{D}{Dt}\left(I_{o'} \vec{\dot{\theta}}\right) = \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{F}_i - \frac{D\vec{R}}{Dt} \times \vec{P}$$

右边第二项可化为

$$\frac{D\vec{R}}{Dt} \times \vec{P} = \left(\frac{d\vec{R}_C}{dt} + \frac{D\vec{\rho}}{Dt}\right) \times m \frac{d\vec{R}_C}{dt} = 0 + m \frac{D\vec{\rho}}{Dt} \times \left[\frac{\partial \vec{R}}{\partial t} + \vec{\dot{\theta}} \times \left(-\vec{\rho}\right)\right] = -m\left(\vec{\rho} \cdot \frac{D\vec{\rho}}{Dt}\right)\vec{\dot{\theta}} = -\frac{1}{2} m \frac{D}{Dt}\left(\rho^2\right)\vec{\dot{\theta}}$$

于是我们就得到作平面平行运动的刚体对瞬心的角动量定理

$$\frac{D}{Dt}\left(I_{o'} \vec{\dot{\theta}}\right) = \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{F}_i + \frac{1}{2} m \frac{D}{Dt}\left(\rho^2\right)\vec{\dot{\theta}} \tag{9}$$

我们看到，上式不同于对固定点或对质心的角动量定理，多出了右边第二项。由于 m 和 $\vec{\dot{\theta}}$ 都不可能为零，对瞬心的角动量定理具有与对固定点或对质心的角动量定理相同形式（即右边第二项为零）的充分必要条件为 ρ ＝常数，即瞬心到质心的距离在运动过程中保持不变。在 3－1 节中所举的两个例子，恰好都满足这个条件，因而才偶然地得到正确的结果。

根据平行轴定理，我们有 $I_{o'} = I_c + m\rho^2$，而对质心的转动惯量是不随时间改变的，因此 $\dfrac{DI_{o'}}{Dt} = m\dfrac{D\left(\rho^2\right)}{Dt}$，因此（9）式还可化为

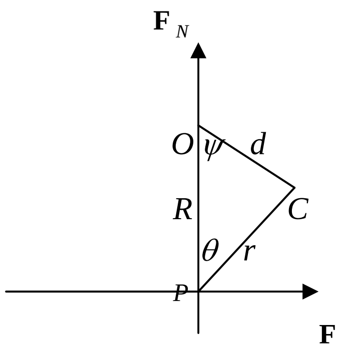
$$I_{o'}\ddot{\vec{\vartheta}} = \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{F}_i - \frac{1}{2}m\frac{D\left(\rho^2\right)}{Dt}\dot{\vec{\theta}} \tag{10}$$

我们可以看出，对（9）式所作的讨论对（10）式依然成立。然而应该指出，由于 $I_{o'}$ 可能随时间而变化，（9）和（10）两式的左边可能不同。然而在 ρ 保持不变的条件下，$I_{o'}$ 也不随时间改变，（9）和（10）两式的左边也就相同，两式也就等价了。

4. 例题

【例 3】半径为 R 的偏心圆盘在水平面上作平面平行运动，圆盘的质量为 m，质心 C 离几何中心 O 的距离为 d，写出圆盘的运动方程。设圆盘只滚不滑。

（参阅[1]117 页）



建立坐标系：设圆盘与水平面的切点（即瞬心）为 P，当 C 位于 OP 间，即 $\psi = \theta = 0$ 时，盘心 O 的位置为原点；OX 轴向右，OY 轴向上。θ,ψ 以逆时针为正，例如图中的 θ 为负 ψ 为正。

一个自由度，选广义坐标 ψ，$R = r\cos\theta + d\cos\psi$，$d\sin\psi = -r\sin\theta$，

ψ，$R = r\cos\theta + d\cos\psi$，$d\sin\psi = -r\sin\theta$，$x_C = -R\psi + d\sin\psi$，$y_C = -d\cos\psi$

$$\vec{r} = \overline{CP} = r\left(\sin\theta\cdot\vec{i} - \cos\theta\cdot\vec{j}\right) = -d\sin\psi\cdot\vec{i} - \left(R - d\cos\psi\right)\vec{j}$$

$$\vec{F} = F\vec{i} \quad \vec{F}_N = F_N\vec{j} \quad \vec{r}\times\vec{F}_N = +rF_N\sin\theta\cdot\vec{k} = -dF_N\sin\psi\cdot\vec{k}$$

$$\vec{r}\times\vec{F} = F\left(R - d\cos\psi\right)\vec{k}$$

$$m\ddot{x}_C = F \qquad F = m\left(-R\ddot{\psi} + d\cos\psi\cdot\ddot{\psi} - d\sin\psi\cdot\dot{\psi}^2\right)$$

$$m\ddot{y}_C = F_N - mg \qquad F_N = m\left(d\sin\psi\cdot\ddot{\psi} + d\cos\psi\cdot\dot{\psi}^2\right) + mg$$

$$I_C\ddot{\psi} = \left(\vec{r}\times\vec{F} + \vec{r}\times\vec{F}_N\right)\cdot\vec{k} = -dF_N\sin\psi + \left(R - d\cos\psi\right)F \qquad \text{其中 } I_C = m{\rho_C}^2$$

在、综合以上各式得$\left(R^2+d^2+\rho_C^2-2dR\cos\psi\right)\ddot{\psi}+dR\sin\psi\cdot\dot{\psi}^2+dg\sin\psi=0$

或由机械能守恒得$\dfrac{1}{2}m\left(R^2+d^2+\rho_C^2-2dR\cos\psi\right)\dot{\psi}^2-mgd\cos\psi=$常数。

在本例中，瞬心P与质心C的距离r不是常数，若按（1）式对瞬心写出写出角动量定理：$\left(R^2+d^2+\rho_C^2-2dR\cos\psi\right)\ddot{\psi}+2dR\sin\psi\cdot\dot{\psi}^2+dg\sin\psi=0$　是错误的。

当然，若按（1）式对盘心O写出角动量定理：

$\left(R^2+d^2+\rho_C^2-dR\cos\psi\right)\ddot{\psi}+dR\sin\psi\cdot\dot{\psi}^2+dg\sin\psi=0$　也是错误的。

思考与练习

1．分析【例 1】、【例 2】，为什么把对瞬心的角动量定理写成（1）的形式能得到正确的结果。

2．【例 1】中的圆轮改为椭圆轮，对瞬心的角动量定理能不能写成（1）的形式？

3．【例 2】中的竖直墙改为斜墙（与地面夹角为α），试求出对瞬心的角动量定理。

A6．*Noether* (*Nöther*) 定理

更深刻揭示对称性和守恒定律之间关系的，有如下定理。

Noether (*Nöther*) 定理　如果拉格朗日函数在某一连续对称变换下不变，则必有守恒量对应于这一对称性。

意即：拉格朗日函数$L\left(q_\alpha,\dot{q}_\alpha,t\right)$通过连续参数$s_j\,(j=1,2,\cdots m)$刻划对称变换：

$q_\alpha\left(t\right)\to Q_\alpha\left(s_j,t\right)$满足$Q_\alpha\left(0,t\right)=q_\alpha\left(t\right)$即$s_j=0(j=1,2,\cdots m)$对应于恒等变换。

若有$L\left(s\right)\equiv L\left(Q_\alpha\left(s_j,t\right),\dot{Q}_\alpha\left(s_j,t\right),t\right)=L\left(q_\alpha\left(t\right),\dot{q}_\alpha\left(t\right),t\right)\equiv L\left(s_j=0\right)$

即$\delta L\left(s\right)=\sum\limits_{j=1}^{m}\dfrac{\partial L}{\partial s_j}\delta s_j=0$即$\dfrac{\partial L}{\partial s_j}=0$，则必有守恒量$I_j\equiv\sum\limits_\alpha p_\alpha\dfrac{\partial Q_\alpha}{\partial s_j}\Big|_{s_j=0}=$常量。

证明：若有$0=\dfrac{\partial L}{\partial s_j}=\sum\limits_\alpha\left[\dfrac{\partial L}{\partial Q_\alpha}\dfrac{\partial Q_\alpha}{\partial s_j}+\dfrac{\partial L}{\partial \dot{Q}_\alpha}\dfrac{\partial \dot{Q}_\alpha}{\partial s_j}\right]$

$$=\sum_\alpha\left[\frac{\partial L}{\partial Q_\alpha}\frac{\partial Q_\alpha}{\partial s_j}+\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_\alpha}\frac{d}{dt}\frac{\partial Q_\alpha}{\partial s_j}\right]=\sum_\alpha\left[\frac{\partial L}{\partial Q_\alpha}\frac{\partial Q_\alpha}{\partial s_j}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_\alpha}\frac{\partial Q_\alpha}{\partial s_j}\right)-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_\alpha}\right)\frac{\partial Q_\alpha}{\partial s_j}\right]$$

取$s_j=0(j=1,2,\cdots m)$利用拉格朗日方程，即得$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{Q}_\alpha}\dfrac{\partial Q_\alpha}{\partial s_j}\right)_{s_j=0}=\dfrac{d}{dt}\left(\sum\limits_\alpha p_\alpha\dfrac{\partial Q_\alpha}{\partial s_j}\right)_{s_j=0}=0$

于是就有守恒量$I_j\equiv\sum\limits_\alpha p_\alpha\dfrac{\partial Q_\alpha}{\partial s_j}\Bigg|_{s_j=0}=$常量。

【例 1】空间平移变换（以直角坐标为广义坐标，参数为s_j）$Q_\alpha=q_\alpha+\sum\limits_{j=1}^{3}s_j\delta_{j\alpha}$

$\dfrac{\partial Q_\alpha}{\partial s_j}=\delta_{\alpha j}$ 若 $\dfrac{\partial L}{\partial s_j}=0$，则守恒量 $I_j\equiv\sum_\alpha p_\alpha\dfrac{\partial Q_\alpha}{\partial s_j}\Big|_{s_j=0}=\sum_\alpha p_\alpha\delta_{\alpha j}=p_j=$常量，动量守恒。

【例 2】空间转动变换（以直角坐标为广义坐标，参数为绕 Z 轴转动角 θ）

$$\begin{cases} Q_1=q_1\cos\theta-q_2\sin\theta \\ Q_2=q_1\sin\theta+q_2\cos\theta \\ Q_3=q_3 \end{cases}\qquad \begin{cases} \dot Q_1=\dot q_1\cos\theta-\dot q_2\sin\theta \\ \dot Q_2=\dot q_1\sin\theta+\dot q_2\cos\theta \\ \dot Q_3=\dot q_3 \end{cases}$$

$\dfrac{\partial Q_1}{\partial\theta}=-Q_2$，$\dfrac{\partial Q_2}{\partial\theta}=Q_1$，$\dfrac{\partial Q_3}{\partial\theta}=0$ 若 $\dfrac{\partial L}{\partial\theta}=0$，则守恒量

$$I_\theta=p_1\frac{\partial Q_1}{\partial\theta}\Big|_{\theta=0}+p_2\frac{\partial Q_2}{\partial\theta}\Big|_{\theta=0}=-p_1q_2+p_2q_1=xp_y-yp_x=L_z=\text{常量}$$，Z 方向角动量守恒。

A7．关于变分原理

1．拉格朗日乘子法用于变分原理

在§5．1．中，我们利用独立的广义坐标，从达朗贝尔方程得到了（第二类）拉格朗日方程；现在我们采用另一种方法（拉格朗日乘子法）来处理达朗贝尔方程。

对于有理想约束的力学体系，我们在得到达朗贝尔方程 $\sum_{i=1}^{n}\left(\vec F_i-m_i\ddot{\vec r}_i\right)\cdot\delta\vec r_i=0$ (1)

以后，还应考虑 k 个完整约束的约束方程（我们暂不考虑非完整约束）

$$f_h\left(\vec r_1,\vec r_2,\cdots,\vec r_n,t\right)=0\qquad h=1,2,\cdots k\qquad(2)$$

约束对变分的限制为 $\delta f_h\left(\vec r_1,\vec r_2,\cdots,\vec r_n,t\right)=\sum_{i=1}^{n}\nabla_i f_h\cdot\delta\vec r_i=0\quad h=1,2,\cdots k$ (3)

利用拉格朗日乘子法，引入 k 个待定函数 λ_h（称为拉格朗日乘子），得到：

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\vec F_i-m_i\ddot{\vec r}_i+\sum_{h=1}^{k}\lambda_h\nabla_i f_h\right)\cdot\delta\vec r_i=0\qquad(4)$$

虽然左边 $3n$ 个变分并不完全独立，但可适当选取 λ_α，使不独立的 k 个变分前的系数为零，从而 $s=3n-k$ 个独立变分前的系数亦为零，于是得

$$\vec F_i-m_i\ddot{\vec r}_i+\sum_{h=1}^{k}\lambda_h\nabla_i f_h=0\qquad i=1,2,\cdots n\qquad(5)$$

连同 k 个完整约束的约束方程（2），一共 $3n+k$ 个方程恰可决定 $3n+k$ 个未知函数 $\vec r_i\left(i=1,2,\cdots n\right)$，$\lambda_h\left(h=1,2,\cdots k\right)$。动力学方程（5）也称为第一类拉格朗日方程。使用起来不如第二类拉格朗日方程方便，优点是可以用来求约束力。

如果采用一般（独立或不独立）的广义坐标 q_β，$\left(\beta=1,2,\cdots r,\ s\le r\le 3n\right)$，仍可能有

$r-s$ 个约束方程 $\varphi_h(q_1,q_2,\cdots,q_r,t)=0 \quad h=1,2,\cdots r-s \quad (2')$

对 r 个广义坐标的变分也有如下限制条件

$$\delta\varphi_h(q_1,q_2,\cdots,q_r,t)=\sum_{\beta=1}^{r}\frac{\partial\varphi_h}{\partial q_\beta}\cdot\delta q_\beta=0 \quad h=1,2,\cdots r-s \quad (3')$$

达朗贝尔方程可表为：

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i-m_i\ddot{\vec{r}}_i\right)\cdot\sum_{\beta=1}^{r}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\beta}\delta q_\beta=0 \quad (1')$$

同样利用拉格朗日乘子法，得到

$$\delta T+\sum_{\beta=1}^{r}\left[-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\beta}\cdot\delta q_\beta\right)+\left(Q_\beta+\sum_{h=1}^{k}\lambda_h\frac{\partial\varphi_h}{\partial q_\beta}\right)\delta q_\beta\right]=0 \quad (4')$$

即 $$\sum_{\beta=1}^{r}\left(-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\beta}\right)+\frac{\partial T}{\partial q_\beta}+Q_\beta+\sum_{h=1}^{k}\lambda_h\frac{\partial\varphi_h}{\partial q_\beta}\right)\cdot\delta q_\beta=0 \quad (4'')$$

第一类拉格朗日方程表为：

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\beta}\right)+\frac{\partial T}{\partial q_\beta}+Q_\beta+\sum_{h=1}^{k}\lambda_h\frac{\partial\varphi_h}{\partial q_\beta}=0 \quad \beta=1,2,\cdots r \quad (5')$$

连同约束方程$(2')$共 $2r-s$ 个方程恰好决定 $q_\beta(\beta=1,2,\cdots r),\lambda_h(h=1,2,\cdots r-s)$ 这 $2r-s$ 个未知函数。这就是有多余坐标的情形：广义坐标不完全独立，力学体系仍受到约束。

特别，如果 $r=s=3n-k$，$q_\beta(\beta=1,2,\cdots s)$ 为独立的广义坐标，多余坐标消失，约束方程自动转化为恒等式，$(5')$式转化为基本形式的拉格朗日方程。

如果 $r=3n$，$q_\beta(\beta=1,2,\cdots 3n)$ 为 $3n$ 维欧氏空间中的曲线坐标。仍满足 k 个约束方程。

对于主动力为广义有势力（包括有势力）的力学体系，广义力为 $Q_\alpha=\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}$

动力学方程表为： $$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\beta}\right)+\frac{\partial L}{\partial q_\beta}+\sum_{h=1}^{k}\lambda_h\frac{\partial\varphi_h}{\partial q_\beta}=0 \quad \beta=1,2,\cdots r \quad (5'')$$

对于广义有势力（包括有势力）和非保守力并存的力学体系：主动力由广义有势力（包括有势力）和非保守力两部份组成，$Q_\alpha=\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}+Q'_\alpha$

动力学方程表为：$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\beta}\right)+\frac{\partial L}{\partial q_\beta}+Q'_\beta+\sum_{h=1}^{k}\lambda_h\frac{\partial\varphi_h}{\partial q_\beta}=0 \quad \beta=1,2,\cdots r \quad (5''')$$

其中 $L=T-U$ 为拉格朗日函数。

关于非完整约束情形的讨论，参阅[1]51 页§2．6．

2． Hamilton 原理的推广

在§4．3．中我们讨论了理想、完整、保守的力学体系，且采用独立的广义坐标表述的 Hamilton 原理，现在我们来介绍不同条件下 Hamilton 原理的其他几种表述方式。

在主动力为广义有势力的情况下，由于主动力： $\vec{F}_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}_i} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \qquad i = 1, 2, \cdots n$

其中$U = U\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right)$为广义势；动力学基本方程中的主动力项修改为：

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}_i} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}\right)\cdot\delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}_i}\cdot\delta\vec{r}_i\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}_i}\cdot\frac{d}{dt}\delta\vec{r}_i + \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}\cdot\delta\vec{r}_i\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}_i}\cdot\delta\vec{r}_i - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}_i}\cdot\delta\dot{\vec{r}}_i + \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}\cdot\delta\vec{r}_i\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}_i}\cdot\delta\vec{r}_i\right) - \delta U$$

动力学基本方程中的惯性力项依然为：

$$\sum_{i=1}^{n}\left(-m_i\ddot{\vec{r}}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i = -\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{r}}_i}\cdot\delta\vec{r}_i\right) + \delta T \qquad T = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i^2\right)$$

于是§4．3．中的讨论完全可以平行地进行，得到相似的结论。哈密顿原理依然表为：

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L dt = 0$$

利用任意独立的广义坐标，欧勒——拉格朗日方程依然表为： $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$

只是其中的拉格朗日函数修改为： $L = L\left(q, \dot{q}, t\right) = T\left(q, \dot{q}, t\right) - U\left(q, \dot{q}, t\right)$

对于非保守体系（约束仍是理想的，完整的），从达朗贝尔方程

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i - m_i\ddot{\vec{r}}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i = 0$$

出发，仍采用完全独立的广义坐标，由于 $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{s}Q_\alpha\delta q_\alpha$

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\ddot{\vec{r}}_i\cdot\delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n}m_i\ddot{\vec{r}}_i\cdot\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\right)\delta q_\alpha$$

Hamilton 原理可以表为：

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1}\left[\delta T\left(q, \dot{q}, t\right) + \sum_{\alpha}Q_\alpha\delta q_\alpha\right]dt = 0$$

等价于基本形式的拉格朗日方程： $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha \qquad \alpha = 1, 2, \cdots, s$

对于广义有势力（包括有势力）和非保守力并存的力学体系：主动力由广义有势力（包括有势力）和非保守力两部份组成，$Q_\alpha = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial U}{\partial \dot{q}_\alpha} - \dfrac{\partial U}{\partial q_\alpha} + Q'_\alpha$

Hamilton 原理可以表为： $\delta S = \int_{t_0}^{t_1}\left[\delta L(q,\dot{q},t) + \sum_\alpha Q'_\alpha \delta q_\alpha\right]dt = 0$

等价于拉格朗日方程 $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \dfrac{\partial L}{\partial q_\alpha} = Q'_\alpha \quad \alpha = 1,2,\cdots,s$ 其中拉格朗日函数 $L = T - U$.

如果采用不独立的广义坐标，可用相仿的方法处理。与动力学方程

$$\vec{F}_i - m_i\ddot{\vec{r}}_i + \sum_{h=1}^{k}\lambda_h \nabla_i f_h = 0 \qquad i = 1,2,\cdots n \qquad (5)$$

等价的哈密顿原理应表为：

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta T + \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i + \sum_{h=1}^{k}\lambda_h \nabla_i f_h\right)\cdot \delta\vec{r}_i\right] = 0 \qquad (6)$$

与动力学方程 $-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_\beta}\right) + \dfrac{\partial T}{\partial q_\beta} + Q_\beta + \sum_{h=1}^{k}\lambda_h \dfrac{\partial \varphi_h}{\partial q_\beta} = 0 \quad \beta = 1,2,\cdots r \quad (5')$

等价的哈密顿原理应表为：$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta T + \sum_{\beta=1}^{r}\left(Q_\beta + \sum_{h=1}^{k}\lambda_h \dfrac{\partial \varphi_h}{\partial q_\beta}\right)\delta q_\beta\right] = 0 \qquad (6')$

与动力学方程 $-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta}\right) + \dfrac{\partial L}{\partial q_\beta} + \sum_{h=1}^{k}\lambda_h \dfrac{\partial \varphi_h}{\partial q_\beta} = 0 \quad \beta = 1,2,\cdots r \quad (5'')$

等价的哈密顿原理应表为：$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta L + \sum_{\beta=1}^{r}\left(\sum_{h=1}^{k}\lambda_h \dfrac{\partial f_h}{\partial q_\beta}\right)\delta q_\beta\right]dt = 0 \qquad (6'')$

与动力学方程 $-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta}\right) + \dfrac{\partial L}{\partial q_\beta} + Q'_\beta + \sum_{h=1}^{k}\lambda_h \dfrac{\partial \varphi_h}{\partial q_\beta} = 0 \quad \beta = 1,2,\cdots r \quad (6''')$

等价的哈密顿原理应表为：$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta L + \sum_{\beta=1}^{r}\left(Q'_\beta + \sum_{h=1}^{k}\lambda_h \dfrac{\partial \varphi_h}{\partial q_\beta}\right)\delta q_\beta\right] = 0 \qquad (5''')$

3．莫培督原理（Maupertuis,1747）（Maupertuis）

积分形式的力学变分原理，就是把动力学微分方程表为使某一泛函（作用量）达到极值（逗留值）的条件。除了最常用的 Hamilton 原理外，还有其他形式的积分变分原理。在这里我们对莫培督原理作一简单介绍。

早在 1747 年，莫培督就提出最小作用量原理：完整、保守的力学体系在位形空间确定的始末位置之间的一切可能的运动中真实运动使作用量:$W = \int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\vec{r}}_i \cdot d\vec{r}_i$ 取极小值。这个

原理称为莫培督原理或莫培督最小作用量原理，W 称为莫培督作用量。1760 年拉格朗日对此给出了严格的证明，并明确了有关的变分运算的性质。

现在我们来讨论莫培督原理和哈密顿原理之间的联系。由于拉格朗日函数的不唯一性，哈密顿原理中的 L 可用与之等价的 $L_1 = L + \dfrac{df(q,t)}{dt}$ 代替，如果力学体系是完整、保守的，能量 $E = T + V =$ 常数，则 E 可以看成某一函数 $f(q,t)$ 的全导数，因而可取 $L_1 = L + E = T - V + T + V = 2T$ 于是作用量可表为 $S_1 = \int_{t_0}^{t_1} 2T dt$ 。由于

$2T = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dfrac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{\alpha} \dot{q}_\alpha \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_{\alpha} p_\alpha \dot{q}_\alpha$ 所以作用量也可表为

$$S_1 = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot d\vec{r}_i = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\alpha} p_\alpha \dot{q}_\alpha dt = \int_{(A)}^{(B)} \sum_{\alpha} p_\alpha dq_\alpha \equiv W$$ ，称为莫培督作用量。

莫培督作用量也可以表为：$W = \int_{t_0}^{t_1} (L + H) dt = H(t_1 - t_0) + S$

莫培督作用量还可有另一表达式，（K.G.J.Jacobi,1804-1851）

利用 $2T = \sum A_{\alpha\beta}(q) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta$ 可得

$$2Tdt = \sqrt{2T}\sqrt{2T}dt = \sqrt{2(E - V)}\sqrt{\sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}(q) dq_\alpha dq_\beta}$$

进而得到 $W = \int_{(A)}^{(B)} \sqrt{2(E - V)} \sqrt{\sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}(q) dq_\alpha dq_\beta}$

这样我们可以得到莫培督最小作用量原理 $\Delta W = 0$，这里我们把变分符号改记为不等时变分的符号 Δ。这是因为：从以上推导的过程，我们可以看到，E 应该是常数，即能量守恒，这样就要求哈密顿量不显含时间，约束稳定等。不仅如此，在我们进行比较的可能轨道，不仅能量守恒，而且有相同的能量（否则能量的变分就不再为零）。由于对能量有上述要求，就不再要求始末点时间固定（等能不等时）。于是，等时变分 δ 就要代之以不等时变分 Δ。既然莫培督最小作用量原理要求能量守恒，也就不能推广到非保守力的情形。而在哈密顿最小作用量原理中，我们进行比较的可能轨道，不要求能量守恒，（当然谈不上不同轨道的能量相等）但始末点时间固定，采用等时变分（等时不等能）。当然进行比较的可能轨道具有相同的始末位置，满足约束方程，而且约束理想、完整，等要求，对上述两个原理是相同的。

关于莫培督作用量中积分含义的说明：取正则方程的一半和另一半中的一个

$\dfrac{\partial H}{\partial p_1} = \dot{q}_1 \quad \dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha} = -\dot{p}_\alpha \quad \alpha = 1, 2 \cdots s$ 相除得 $\dfrac{dp_\alpha}{dq_1} = -\left(\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right) \Big/ \left(\dfrac{\partial H}{\partial p_1}\right) \equiv F(p,q)$ 这里利用了哈密顿量不显含时间这一点。把 q_1 视作自变量，$p_\alpha\ (\alpha = 1, 2, \cdots s)$ 是未知函数组，$q_\alpha\ (\alpha = 2, 3, \cdots s)$ 视作参数，积分上述微分方程组，求得

$p_\alpha = p_\alpha\left(q_1;q_2\cdots q_s;C_1,C_2,\cdots C_s\right)$， $\left(\alpha=1,2,\cdots s\right)$不显含时间，因此莫培督作用量积分的意义是明确的。

关于变分原理的更多内容，可参阅参考资料的有关章节。

4．利用哈密顿原理解力学问题，除了通过拉格朗日方程或正则方程以外，还可以直接求得近似解。

【例】（参阅参考资料[8]341 页。） 质量为$m=1$的质点在XY平面上运动，外力的势能为$V=xy$。在$t=0$时，它在原点$\left(0,0\right)$，在$t=1$时，它在$\left(2,0\right)$。求质点的运动。

本题可以精确求解。我们先求出精确解，以备与以后求得的近似解进行比较。利用拉格朗日函数$L=\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)-xy$求得拉格朗日方程：

$$\begin{cases}\ddot{x}+y=0\\ \ddot{y}+x=0\end{cases}\qquad \text{求得通解：}\begin{cases}x=C_1\sin t+C_2\cos t+C_3\sinh t+C_4\cosh t\\ y=C_1\sin t+C_2\cos t-C_3\sinh t-C_4\cosh t\end{cases}$$

并求得满足端点条件的特解： $x=\dfrac{\sin t}{\sin 1}+\dfrac{\sinh t}{\sinh 1}\qquad y=\dfrac{\sin t}{\sin 1}-\dfrac{\sinh t}{\sinh 1}$

$$S=\int_0^1\left[\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)-xy\right]dt=\int_0^1\left[\frac{\cos^2 t-\sin^2 t}{\sin^2 1}+\frac{\sinh^2 t+\cosh^2 t}{\sinh^2 1}\right]dt=\left[\frac{\sin 2t}{2\sin^2 1}+\frac{\sinh 2t}{2\sinh^2 1}\right]_0^1$$

$$=\cot 1+\coth 1=1.955128\quad =S_{\min}\qquad \text{极小值}$$

（1）先任取一满足端点条件的尝试路径： $x=2t$，$y=0$积分得 $S=2>1.955128=S_{\min}$

（2）再取依赖某一个参数的满足端点条件的尝试路径（这只是可能路径中的一部分，即分布在函数空间中的某一条曲线上的那部分），求出使S达到逗留值的参数值，以求得真实路径的近似表达式。例如：设$x=2t+\alpha t\left(1-t\right)$， $y=\alpha t\left(1-t\right)$

$$L=\alpha^2\left[1-4t+3t^2+2t^3-t^4\right]+2\alpha\left[1-2t-t^2+t^3\right]+2$$

$$S=\int_0^1 Ldt=\frac{3}{10}\alpha^2-\frac{1}{6}\alpha+2\qquad \delta S=0\qquad \alpha=\frac{5}{18}\qquad S_{\min}{}^{(1)}=\frac{427}{216}=1.976852$$

如果取$\alpha=0$，就得到 1。中的结果。显然，这个结果不如现在的结果。

（3）然后取依赖某两个独立参数的满足端点条件的尝试路径（这也只是可能路径中的一部分，即分布在函数空间中的某一张 2 维曲面上的那部分），求出使S达到逗留值的参数值，以求得真实路径的进一步的近似表达式。例如： $x=2t+\alpha t\left(1-t\right)$， $y=\beta t\left(1-t\right)$

$$S=S\left(\alpha,\beta\right)=\int_0^1\left[\frac{1}{2}\left(2+\alpha-2\alpha t\right)^2+\frac{1}{2}\beta^2\left(1-2t\right)^2-\left(2t+\alpha t-\alpha t^2\right)\beta t\left(1-t\right)\right]dt$$

$\delta S = 0$ 即：$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial \alpha} = \int_0^1 \left[\left(2+\alpha-2\alpha t\right)\left(1-2t\right) - \left(t-t^2\right)\beta t\left(1-t\right) \right] dt = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial \beta} = \int_0^1 \left[\beta\left(1-2t\right)^2 - \left(2t+\alpha t-\alpha t^2\right) t\left(1-t\right) \right] dt = 0 \end{cases}$，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3}\alpha - \dfrac{1}{30}\beta = 0 \\ -\dfrac{1}{30}\alpha + \dfrac{1}{3}\beta = \dfrac{1}{6} \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{5}{99} \\ \beta = \dfrac{50}{99} \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 2t + \dfrac{5}{99} t\left(1-t\right) \\ y = \dfrac{50}{99} t\left(1-t\right) \end{cases}$$

$S_{\min}{}^{(2)} = \dfrac{12793}{6534} = 1.957912 < S_{\min}{}^{(1)}$ 结果确实有了改进。

由于在我们所选择的尝试路径中没有包含真实路径在内，（有限的多项式函数不可能精确地表示正弦余弦双曲正弦双曲余弦函数）S 的极值 $S_{\min}^{(2)}$ 仍大于真实路径对应的 $S_{\min}$，对应于 $S_{\min}^{(2)}$ 的尝试路径也与真实路径有误差。 但这组近似解在 $0 \le t \le 1$ 范围内与精确解已达到很好的近似。（在大范围内与精确解相差甚远。）

（4）如果预知 $y\left(t\right)$ 的峰值对应于偏大的 t 值，可设 $y = \beta t\left(1-t^2\right)$ 这样可求得：

$\alpha = \dfrac{16}{317}$，$\beta = \dfrac{320}{951}$ 这样得到：$S_{\min}{}^{(3)} = \dfrac{5578}{2853} = 1.955135$ 解的近似程度明显改善。

（5）如果增加参数的个数，$x = 2t + \alpha t^{\lambda}\left(1-t\right)^{\mu}$，$y = \beta t^{\gamma}\left(1-t\right)^{\eta}$，也能改进结果，但工作量大大增加。

A8． Legendre 变换

一般地，考虑一个函数 $f = f\left(x, y\right)$ x, y 是独立变量 （1）

通过求偏导数引入另一对变量

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial f}{\partial x} & (2) \\ v = \dfrac{\partial f}{\partial y} & (3) \end{cases}$$

改用新变量或改用新变量之一作为自变量

①把（u, y）看成独立变量，则由（2）$u = \left[\dfrac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial x}\right]_y = u\left(x, y\right),\quad x = x\left(u, y\right)$，

代入（3）和（1），

$v = \left.\left[\dfrac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial y}\right]_x\right|_{x=x(u,y)} = v\left(u, y\right),\quad f = f\left(x, y\right) = f\left(x\left(u, y\right), y\right) \equiv \overline{f}\left(u, y\right)$ 由于

$$\left(\frac{\partial \overline{f}}{\partial u}\right)_y = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_y = u\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_y = \left[\frac{\partial\left(ux\right)}{\partial u}\right]_y - x$$

$$\left(\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}\right)_u = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_u + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = u\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_u + v = \left[\frac{\partial\left(ux\right)}{\partial y}\right]_u + v$$

令 $h\left(u, y\right) = \left.\left[ux - f\left(x, y\right)\right]\right|_{x=x(u,y)} = ux\left(u, y\right) - \overline{f}\left(u, y\right)$

则 $x = \dfrac{\partial h\left(u, y\right)}{\partial u}, -v = \dfrac{\partial h\left(u, y\right)}{\partial y}$

或由 $dh = udx + xdu - udx - vdy = xdu - vdy$ 也得同样结果。

②把（v, x）看作独立变量，则由（3）$y = y\left(v, x\right)$，$f = f\left(x, y\left(v, x\right)\right) \equiv \tilde{f}\left(v, x\right)$。

令 $g\left(v, x\right) = -\tilde{f}\left(v, x\right) + vy(v, x)$，则 $y = \dfrac{\partial g}{\partial v},\quad u = -\dfrac{\partial g}{\partial x}$ 或由

$dg = -udx - vdy + vdy + ydv = -udx + ydv$ 也得到上式。

③把（u, v）看作独立变量，则由（2）、（3）解得 $x = x\left(u, v\right),\quad y = y\left(u, v\right)$

$f = f\left(x, y\right) = f\left(x\left(u, v\right), y\left(u, v\right)\right) \equiv \hat{f}\left(u, v\right)$

令 $k\left(u, v\right) = -\hat{f}\left(u, v\right) + ux\left(u, v\right) + vy\left(u, v\right)$ 则 $x = \dfrac{\partial k}{\partial u},\quad y = \dfrac{\partial k}{\partial v}$

或由 $dk = -udx - vdy + udx + xdu + vdy + ydv = xdu + ydv$ 也得到上式。

以上这种独立变量的变换（同时函数也作相应变换）叫做 Legendre 变换。Legendre 变换可推广到 x, y, u, v 均代表一组变量的情形。

A9．Routh 函数（参阅参考资料[8]. 152－157 页）

在 Lagrange 力学中，$L = L(q, \dot{q}, t)$ 称为拉格朗日函数，$q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t(\alpha = 1 \cdots s)$ 称为 Lagrange 变量，满足 Lagrange 方程。

在 Hamilton 力学中，$H = H(p, q, t)$ 称为哈密顿函数，$p_\alpha, q_\alpha, t(\alpha = 1 \cdots s)$ 称为 Hamilton 变量（正则变量），满足 Hamilton 正则方程。

两组变量之间的关系 $p_\alpha = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$，解得 $\dot{q}_\alpha = f_\alpha(p, q, t)$ $(\alpha = 1, 2 \cdots s)$；或者 $\dot{q}_\alpha = \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha}$，

解得 $p_\alpha = p_\alpha(q, \dot{q}, t)$ $\quad (\alpha = 1, 2 \cdots s)$。两个函数之间有关系 $H = \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \dot{q}_\alpha - L\Big|_{\dot{q}_\alpha = f_\alpha(p, q, t)}$，

并有 $\dfrac{\partial H}{\partial t} = -\dfrac{\partial L}{\partial t} \qquad \dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha} = -\dfrac{\partial L}{\partial q_\alpha}$

现在考虑一种介乎两者之间的描述系统。引入 $p_\alpha = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2 \cdots k < s)$，

解得 $\dot{q}_\alpha = f_\alpha(p_1 \cdots p_k, q_1 \cdots q_s, \dot{q}_{k+1} \cdots \dot{q}_s, t) \qquad (\alpha = 1, 2 \cdots k < s)$

定义 Routh 函数：（注意不同作者采用的定义可能相差一个负号）

$$\begin{aligned} R &= \sum_{\alpha=1}^{k} p_\alpha \dot{q}_\alpha - L\Big|_{\dot{q}_\alpha = f_\alpha(p_1 \cdots p_k, q_1 \cdots q_s, \dot{q}_{k+1} \cdots \dot{q}_n, t)} \\ &= R(p_1 \cdots p_k, q_1 \cdots q_s, \dot{q}_{k+1} \cdots \dot{q}_n, t) \end{aligned}$$

$p_1 \cdots p_k, q_1 \cdots q_s, \dot{q}_{k+1} \cdots \dot{q}_s, t$ 称为 Routh 变量（k 个自由度为 Hamilton 变量，另外 $s-k$ 个自由度为 Lagrange 变量）。

注意认清这三个函数的自变量，各变量之间的函数关系，各偏导数的意义。仿照前面推导正则方程的方法，就可以证明

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\frac{\partial R}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2 \cdots s)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_r} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \quad (r = k+1, k+2, \cdots s)$$

$$\frac{\partial R}{\partial p_\alpha} = \dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2 \cdots k)$$

从而得到描述力学系统的 Routh 变量满足的 Routh 方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial R}{\partial p_\alpha}=\dot{q}_\alpha \qquad (\alpha=1,2\cdots k)\\ \dfrac{\partial R}{\partial q_\alpha}=-\dot{p}_\alpha \quad (\alpha=1,2\cdots k)\\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial R}{\partial \dot{q}_r}-\dfrac{\partial R}{\partial q_r}=0 \quad (r=k+1,k+2,\cdots s)\end{cases}$$

由 2k 个正则方程型的一阶方程和（$n-k$）个 Lagrange 方程型的二阶方程组成。

如果拉格朗日函数中有 k 个循环坐标 q_α（α =1，2，…，k)，则此方法还可以化简。此时

$$L=L\left(q_{k+1},q_{k+2},\cdots,q_s,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_k,\dot{q}_{k+1},\cdots,\dot{q}_s,t\right)$$

$p_\alpha=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}=const\equiv\beta_\alpha$（$\alpha$ ＝1，2，…，k）为 k 个循环积分。可视作 k 个未知量 $\dot{q}_\alpha$（α ＝1，2，…，k）的 k 个非齐次线性方程组成的非齐次线性方程组。可解得

$$\dot{q}_\alpha=f_\alpha\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k,q_{k+1},q_{k+2},\cdots,q_s,\dot{q}_{k+1},\dot{q}_{k+2},\cdots,\dot{q}_s,t\right) \quad \alpha=1,2,\cdots,k$$

这样，Routh 函数可表为

$$R\equiv\sum_{\alpha=1}^{k}\dot{q}_\alpha\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}-L\Bigg|_{\dot{q}_\alpha=f_\alpha\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k,q_{k+1},q_{k+2},\cdots,q_s,\dot{q}_{k+1},\dot{q}_{k+2},\cdots,\dot{q}_s,t\right)}$$

$$=R\left(q_{k+1},q_{k+2},\cdots q_s,\dot{q}_{k+1},\dot{q}_{k+2},\cdots\dot{q}_s,\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_k,t\right)$$

从而 Routh 方程可简化为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial R}{\partial \beta_\alpha}=\dot{q}_\alpha\left(\alpha=1,2\cdots k\right)\\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial R}{\partial \dot{q}_r}-\dfrac{\partial R}{\partial q_r}=0 \quad (r=k+1,k+2,\cdots s)\end{cases}$$

从后一组方程解得 $q_r=q_r\left(t,C_{k+1},C_{k+1},\cdots,C_n,C'_{k+1},C'_{k+2},\cdots,C'_n\right)$，代入前一组方程，解得

$q_j=\int\dfrac{\partial R}{\partial \beta_j}dt$，同时引入 k 个积分常数 C_1，C_2，…，C_k，连前面 k 个β_j一共 2n 个积分常数。

【例】 $L=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\dot{q}_1^{\,2}}{a+bq_2^{\,2}}+\dot{q}_2^{\,2}\right)-\left(a_1+b_1q_2^{\,2}\right)$（参阅参考资料[8]156－157 页）

【解】除了利用拉格朗日方程、正则方程等方法以外，还可以利用 Routh 方程。

q_1 是循环坐标，$\dfrac{\partial L}{\partial q_1}=0$，引入 $p_1=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}=\dfrac{\dot{q}_1}{a+bq_2^{\,2}}=\beta_1$ $\qquad \dot{q}_1=\beta_1\left(a+bq_2^{\,2}\right)$

$$R=p_1\dot{q}_1-L=p_1\cdot\beta_1\left(a+bq_2^{\,2}\right)-L=\frac{1}{2}\beta_1^{\,2}\left(a+bq_2^{\,2}\right)-\frac{1}{2}\dot{q}_2^{\,2}+\left(a_1+b_1q_2^{\,2}\right)$$

求出 Routh 方程：$\dfrac{\partial R}{\partial p_1}=\dot{q}_1$ 即 $\dfrac{\partial R}{\partial \beta_1}=\dot{q}_1 \qquad \beta_1\left(a+bq_1{}^2\right)=\dot{q}_1$ （1）

$$\frac{\partial R}{\partial q_1}=-\dot{p}_1 \qquad 0=\dot{p}_1 \text{ 即 } p_1=\frac{\dot{q}_1}{a+bq_2{}^2}=\beta_1 \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_2}-\frac{\partial R}{\partial q_2}=0 \qquad -\ddot{q}_2-\beta_1^2 bq_2-2b_1q_2=0 \tag{3}$$

由（3）积分，求得 $q_2(t)$，代入（2），再积分，求得 $q_1(t)$。

A10．关于相空间中的积分不变量

1．相空间　相轨道　增广相空间　（参考资料[12]涅§117）

以广义坐标 $q_\alpha(\alpha=1,2,\cdots s)$ 为直角坐标构成的 s 维欧氏空间，称为位形空间（configuration space）；以正则变量 $p_\alpha,q_\alpha(\alpha=1,2,\cdots s)$ 为直角坐标构成的 $2s$ 维欧氏空间，称为相空间(phase space)；在相空间的基础上，再增加一个时间轴，构成一个（2s+1）维空间，这就叫做增广相空间。

位形空间中的一个点 $(q_1,\cdots q_s)$ 对应着力学体系的一个几何状态，描述了力学体系的位置、取向以及力学体系各组成部分间的几何关系。相空间中的一个点（$p_1,\cdots p_s,q_1,\cdots q_s$）对应着力学体系的一个力学状态，描述了力学体系的几何和动力学的状态。

由正则方程（为简单起见，我们假定不显含时间）解得力学体系的运动方程为：

$$p_\alpha=p_\alpha\left(t-t_0,C_1,C_2,\cdots C_{2s-1}\right),\quad q_\alpha=q_\alpha\left(t-t_0,C_1,C_2,\cdots C_{2s-1}\right),\quad (\alpha=1,2,\cdots s)$$

消去 t，得到 $C_i=C_i(p,q)$，　$(i=1,2,\cdots 2s-1)$ 这是 2s 维相空间中的(2s−1)个(2s−1)维超曲面，给出了相空间的一条曲线，称为相轨道。相轨道就是这(2s−1) 个（2s−1）维超曲面的交线。

当力学体系运动时，对应着力学体系的力学状态的代表点沿着相轨道运动。由于 C_i 是一组任意的积分常数，因此相轨道是一族曲线，对应于各种不同的初条件。相轨道不相交。代表点沿着相轨道的运动总是向着一个方向。

增广相空间中的一个点（$p_1,\cdots p_s,q_1,\cdots q_s,t$）对应着力学体系在时刻 t 的一个力学状态（$p_1,\cdots p_s,q_1,\cdots q_s$）。

由正则方程解得的力学体系运动方程

$$p_\alpha=p_\alpha\left(t-t_0,C_1,C_2,\cdots C_{2s-1}\right),\quad q_\alpha=q_\alpha\left(t-t_0,C_1,C_2,\cdots C_{2s-1}\right),\quad (\alpha=1,2,\cdots s)$$

这是（2s+1）维增广相空间的曲线，称为增广相轨道。也就是相空间中的相轨道的参数方程。增广相轨道也是不会相交的。代表力学体系的点沿增广相轨道的运动也是单向的。由增广相空间中的增广相轨道的方程消去 t，就得到相轨道。（相当于投影到相空间）

【思考】相仿，也可以由位形空间建立增广位形空间吗？

关于相轨道，我们作以下说明：

①当力学体系运动时，对应着力学体系的力学状态的点沿着相轨道运动。

②由于 C_i 是一组任意的积分常数，因此相轨道是一族曲线，对应于各种不同的初条件。

③相轨道不相交。任一点（ $p_{\alpha 0}, q_{\alpha 0}$ ）可作为 $t = t_0$ 时正则变量的值，而正则方程是一阶常微分方程组，因此这就是解正则方程时的初条件，由解的唯一性可知相轨道不相交。

④力学体系在相空间中的代表点沿着相轨道的运动总是向着一个方向。力学体系在位形空间某一轨道上的往复运动，就表现为在相轨道的不同部分上的运动。

⑤力学体系的周期运动，一般说有两种情形：天平动和转动。（见§8．5．）

谐振子是天平动的一个例子，相轨道是封闭的曲线。谐振子的能量守恒定律是它的运动积分，也是相轨道的方程：$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 = E$；由此可知谐振子的相轨道是一族长短半轴分别为 $\sqrt{2mE}$, $\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2E}{m}}$ ，中心位于原点，形状相似（偏心率相同）的互不相交的椭圆，积分常数能量决定了椭圆的大小。运动方程就是相轨道的参数方程：

$$\begin{cases} p = \sqrt{2mE}\cos\omega\left(t - t_0\right) \\ q = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2E}{m}}\sin\omega\left(t - t_0\right) \end{cases}$$

它的代表点在相空间中沿封闭的相轨道单向运动，每一周期完成一圈，又到达起始点。初条件$\left(p_{\alpha 0}, q_{\alpha 0}\right)$决定了力学体系的能量，从而决定了力学体系的代表点所在的相轨道；初条件也决定了初始时刻代表点的位置以及代表点沿相轨道的运动方向。特别，当$E = 0$，相轨道退化为一个点，对应于质点在稳定平衡位置保持静止的这种特殊运动状态。

相仿，我们可以讨论单摆的相轨道。（这里我们以刚性轻杆代替轻软的摆绳，以保证约束的双面性）单摆的哈密顿量：$H = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl\cos\theta$；相空间$\left(p_\theta, \theta\right)$中的相轨道也由能量守恒定律$H = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl\cos\theta = E$ 给出。单摆的运动一般说也是周期运动，但有不同的情况。当$-mgl < E < mgl$时，作天平动，和谐振子的情况相似，$\left(p_\theta, \theta\right)$都是时间的周期性函数，且周期相同，相轨道是封闭的）；特别当能量很小时，近似作简谐振动，相轨道近似为椭圆，随着能量的增大，相轨道与椭圆的偏离逐渐明显；当 $E > mgl$时，作转动，摆锤绕悬点作圆周运动，θ的变化是单调的，每增加θ_0系统的运动便实质上重复一次。这时

相轨道并不封闭，但 p_θ 是 θ 的周期函数，周期为 θ_0；但是当单摆处于 $E=mgl$ 这种临界状态时，情况比较复杂：如果 $p_{\theta 0}\neq 0,\ |\theta_0|<\pi$，将以无限长的时间趋于非平衡稳定的位形；特别，如果起始时系统静止于非稳定平衡的位形 $p_{\theta 0}=0,\ |\theta_0|=\pi$（相轨道的交点），则它的未来的运动是不确定的，将取决于可能出现的来自外界的微小扰动（外随机性）

2．相空间积分不变量（参考资料[12]涅§117）

相空间的一个区域 Γ，维数在 0 和 2s 之间，0 维区域是一个点，2s 维的区域称为满阶的区域，维数小于 2s 的区域称为不满阶的区域。区域可分为封闭的和不封闭的两类，但满阶的区域必定是不封闭的。相空间区域的体积可记为 $\Gamma=\int_\Gamma d\Gamma$

（下面我们常常以变分 δ 代替微分 d，以表示其所代表的改变量并非由时间改变而引起，也不要求满足动力学方程。）

其中相空间的体积元：$d\Gamma=\prod_{\alpha,\beta}\delta p_\alpha \delta q_\beta$

相空间满阶区域的体积元：$d\Gamma=\prod_{\alpha=1}^{s}\delta p_\alpha \delta q_\alpha$

不满阶区域可以是 *0<d<2s* 的超曲面（包括曲线）的一部分，其体积可以是曲线的长度，超曲面的面积。

考虑这样的量：$I(t)=\int_{\Gamma(t)} F\left(p_\alpha,q_\alpha,t\right)d\Gamma$，其中 Γ 为相空间的某一 d 维 $(1\le d\le 2s)$ 区域（可以封闭，也可以不封闭），$d\Gamma$ 为其体积元，$F\left(p_\alpha,q_\alpha,t\right)$ 是定义在 $\Gamma\left(t\right)$ 上可以求定积分的函数。正则变量随时间变化（满足正则方程），引起 $\Gamma\left(t\right)$ 的相应变化。特别当 $t=t_0$ 时，$I(t_0)=\int_{\Gamma_0} F\left(p_{\alpha 0},q_{\alpha 0},t_0\right)d\Gamma_0$，其中 $\Gamma_0=\Gamma\left(t_0\right)$，$d\Gamma_0$ 为 Γ_0 的体积元，$\left(p_{\alpha 0},q_{\alpha 0}\right)$ 为 Γ_0 上的动点。若对任意时刻 t 有 $I\left(t\right)=I\left(t_0\right)\equiv I_0$ 成立，则称 $I\left(t\right)=I_0$ 为积分不变量

若 Γ 为 2s 维的区域，则称 $I\left(t\right)=I_0$ 为满阶积分不变量。

若 Γ 为 1 维的区域 C（曲线），则称 $I\left(t\right)=I_0$ 为线性积分不变量：

$$I\left(t\right)=\int_C\sum_\beta[F_\beta\left(p_\alpha,q_\alpha,t\right)\delta p_\beta+F_{s+\beta}\left(p_\alpha,q_\alpha,t\right)\delta q_\beta]$$

若区域不封闭，则称 $I\left(t\right)=I_0$ 为绝对积分不变量，否则为相对积分不变量。

可以证明：在 2s 维相空间中存在如下的通用积分不变量

$$I_1=\oint_C\sum_\alpha p_\alpha\delta q_\alpha=\iint_\Gamma\sum_\alpha\delta p_\alpha\delta q_\alpha=J_2$$

……

$$I_{2k-1}=\underset{(2k-1)}{\iiint}\sum_{\{i_1\cdots i_k\}} p_{i_1}\delta q_{i_1}\cdots\delta p_{i_k}\delta q_{i_k}=\underset{(2k)}{\iiint}\sum_{\{i_1\cdots i_k\}}\delta p_{i_1}\delta q_{i_1}\cdots\delta p_{i_k}\delta q_{i_k}=J_{2k}$$

……

$$I_{2s-1}=\underset{(2s-1)}{\iiint}\sum_{\{i_1\cdots i_s\}} p_{i_1}\delta q_{i_1}\cdots\delta p_{i_s}\delta q_{is}=\underset{(2s)}{\iiint}\sum_{\{i_1\cdots i_s\}}\delta p_{i_1}\delta q_{i_1}\cdots\delta p_{i_s}\delta q_{i_s}=J_{2s}$$

$$I_{2s-1}=\int_{\Gamma}\prod_{\alpha=1}^{s}\delta p_{\alpha}\delta q_{\alpha}=J_{2s}$$

I_{2k-1}为奇数阶相对通用积分不变量，J_{2k}为偶数阶绝对通用积分不变量。I_1称为 Poincaré 积分。下面我们讨论两个特殊情况。

3．刘维定理：（相空间积分不变量之例一）（[1]金尚年§9．4 参考资料[12]涅§118；[11]甘§23）

$J_{2s}=\int_{\Gamma}\prod_{\alpha=1}^{s}\delta p_{\alpha}\delta q_{\alpha}$ 是不变量。

（相空间体积在力学体系按正则方程演化下具有不变性。）

证明：记$I=I(t)=\int_{\Gamma(t)}\prod_{\alpha=1}^{s}\delta p_{\alpha}(t)\delta q_{\alpha}(t)$以示随时间变化，正则变量按动力学方程变化，相空间区域也随之变化时，相空间体积对时间的依赖。从而有

$I=I(t+dt)=\int_{\Gamma(t+dt)}\prod_{\alpha=1}^{s}\delta p_{\alpha}(t+dt)\delta q_{\alpha}(t+dt)$进行积分变量的代换

$$=\int_{\Gamma(t)}D\prod_{\alpha=1}^{s}\delta p_{\alpha}(t)\delta q_{\alpha}(t)$$

其中$D=\dfrac{\partial\big(p_1(t+dt)\cdots p_s(t+dt),q_1(t+dt)\cdots q_s(t+dt)\big)}{\partial\big(p_1(t)\cdots p_s(t),q_1(t)\cdots q_s(t)\big)}$

$p_{\alpha}(t+dt)=p_{\alpha}(t)+\dot p_{\alpha}(t)dt$，$q_{\alpha}(t+dt)=q_{\alpha}(t)+\dot q_{\alpha}(t)dt$，$\dot p_{\alpha},\dot q_{\alpha}$均为$p_{\alpha},q_{\alpha}$的函数。

$$D=\begin{vmatrix} 1+\frac{\partial \dot p_1}{\partial p_1}dt & \cdots & \frac{\partial \dot p_1}{\partial p_s}dt & \frac{\partial \dot p_1}{\partial q_1}dt & \cdots & \frac{\partial \dot p_1}{\partial q_s}dt \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \dot p_s}{\partial p_1}dt & \cdots & 1+\frac{\partial \dot p_s}{\partial p_s}dt & \frac{\partial \dot p_s}{\partial q_1}dt & \cdots & \frac{\partial \dot p_s}{\partial q_s}dt \\ \frac{\partial \dot q_1}{\partial p_1}dt & \cdots & \frac{\partial \dot q_1}{\partial p_s}dt & 1+\frac{\partial \dot q_1}{\partial q_1}dt & \cdots & \frac{\partial \dot q_1}{\partial q_s}dt \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \dot q_s}{\partial p_1}dt & \cdots & \frac{\partial \dot q_s}{\partial p_s}dt & \frac{\partial \dot q_s}{\partial q_1}dt & \cdots & 1+\frac{\partial \dot q_s}{\partial q_s}dt \end{vmatrix}$$

保留一阶小量，得 $D\approx 1+\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial \dot p_\alpha}{\partial p_\alpha}+\frac{\partial \dot q_\alpha}{\partial q_\alpha}\right)dt=1+\sum_{\alpha=1}^{s}\left(-\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}+\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\right)=1$

所以得 $I(t+dt)=I(t)+O\left((dt)^2\right)$ 即 $I(t)$ 为不变量（不随时间改变）

4．线形积分不变量（相空间积分不变量之例二）（参考资料[12]涅 § 119 § 120 参考资料[11]甘　§ 18 § 22）

正则方程的解（或称为积分，是力学体系的运动方程）是 2s+1 维增广相空间中互不相交的一族曲线（增广相轨道），消去 t 以后，不显含时间的 2s-1 个积分是 2s 维相空间中互不相交的一族曲线（相轨道）。

在增广相空间 $t=t_0$ 的超平面上，取一封闭曲线 C_0， C_0 上的每一点对应于初值（ $p_{\alpha 0},q_{\alpha 0}$ ），过 C_0 上的每一点都有一条增广相轨道，它们就围成一个“管”，称为正路管（因为每一条增广相轨道都是真实轨道，称为正路）这个管与 $t=t_1$ 的超平面也相交于一条封闭曲线 C_1；下面我们来证明 $\oint_{C_1}\sum_\alpha p_{\alpha 1}\delta q_{\alpha 1}=\oint_{C_0}\sum_\alpha p_{\alpha 0}\delta q_{\alpha 0}$

即 Poincaré 积分 $I_1=\oint_C\sum_\alpha p_\alpha \delta q_\alpha$ 为不变量。

从作用量 $S[q]=\int_{t_0}^{t_1}L(q,\dot q,t)dt$ 的变分出发，其中增广相轨道都是真实轨道，满足拉格朗日方程，但是起终点分布在 C_0， C_1 上，因此 $\delta t_0=\delta t_1=0$， $\delta q_0,\delta q_1\neq 0$

$$\delta S[q]=\delta\int_{t_0}^{t_1}L(q,\dot q,t)dt=\int_{t_0}^{t_1}\delta L(q,\dot q,t)dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\sum_\alpha\left[\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha+\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\delta \dot q_\alpha\right]dt=\int_{t_0}^{t_1}\sum_\alpha\left[\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha+\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\frac{d}{dt}\delta q_\alpha\right]dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\sum_\alpha\left[\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\delta q_\alpha\right)-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\right)\delta q_\alpha\right]dt$$

$$=\sum_{\alpha}\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}}\delta q_{\alpha}\right|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\alpha}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}}\right]\delta q_{\alpha}dt=\sum_{\alpha}(p_{\alpha 1}\delta q_{\alpha 1}-p_{\alpha 0}\delta q_{\alpha 0})$$

为了作环路积分，我们进行参数化。每一条增广相轨道对应一组积分常数，这些积分常数依赖一个参数 u ，和 C_0,C_1 相交的每一条增广相轨道对应于参数 u 的一个值，设 $0\le u\le l$；

由于 C_0,C_1 是闭合的，参数可以选得使 $u=0$，$u=l$ 对应于同一条增广相轨道。于是我们有

$$p_{\alpha}\left(t,C_i\left(u\right)\right)\equiv p_{\alpha}\left(t,u\right)\qquad p_{\alpha}\left(t,0\right)=p_{\alpha}\left(t,l\right)$$

$$q_{\alpha}\left(t,C_i\left(u\right)\right)\equiv q_{\alpha}\left(t,u\right)\qquad q_{\alpha}\left(t,0\right)=q_{\alpha}\left(t,l\right)$$

$$\dot{q}_{\alpha}\left(t,u\right)=\frac{\partial q_{\alpha}\left(t,u\right)}{\partial t},\quad \delta q_{\alpha}\left(t,u\right)=\frac{\partial q_{\alpha}\left(t,u\right)}{\partial u}\delta u\ ,$$

$$\delta\dot{q}_{\alpha}\left(t,u\right)=\frac{\partial^2 q_{\alpha}\left(t,u\right)}{\partial t\partial u}\delta u=\frac{d}{dt}\delta q_{\alpha}\left(t,u\right),\quad S=\int_{t_0}^{t_1}L\left(q\left(t,u\right),\dot{q}\left(t,u\right),t\right)dt\equiv S\left(u\right),\ ,$$

$$\delta S\equiv\delta S\left(u\right)=\frac{\partial S}{\partial u}\delta u\ ,\qquad S\left(l\right)=S\left(0\right)$$

对上式积分：$\int_0^l\frac{\partial S}{\partial u}\delta u=\int_0^l\sum_{\alpha}p_{\alpha 1}\frac{\partial q_{\alpha 1}\left(t_1,u\right)}{\partial u}\delta u-\int_0^l\sum_{\alpha}p_{\alpha 0}\frac{\partial q_{\alpha 0}\left(t_0,u\right)}{\partial u}\delta u$

左边$=S\left(l\right)-S\left(0\right)=0$ 右边$=\oint_{C_1}\sum_{\alpha}p_{\alpha 1}\delta q_{\alpha 1}-\oint_{C_0}\sum_{\alpha}p_{\alpha 0}\delta q_{\alpha 0}$ 于是上述命题得证。

我们来推广上述命题。我们把与正路管相交的超平面推广为超曲面，但仍要求它与每一条增广相轨道只有一个交点。这样，这些交点可以对应于不同的时间。我们仍从作用量 $S[q]=\int_{t_0}^{t_1}L(q,\dot{q},t)dt$ 的变分出发，仍仿前进行参数化。不同的是对端点时间也需要作相应的参数化 $t_0=t_0\left(u\right),\ t_1=t_1\left(u\right)$ 于是 $\delta t_0,\ \delta t_1$ 均可以不为零，而在积分区域内部仍有 $\delta t=0$

仍有 $d\delta=\delta d$ 从而 $\frac{d}{dt}\delta=\delta\frac{d}{dt}$ 因此 $\delta\dot{q}_{\alpha}=\delta\frac{dq_{\alpha}}{dt}=\frac{d}{dt}\delta q_{\alpha}$ 但在端点有

$$q_{\alpha 0}\left(t_0,C_i\left(u\right)\right)\equiv q_{\alpha}\left(t_0\left(u\right),u\right),\qquad\qquad q_{\alpha 1}\left(t_1,C_i\left(u\right)\right)\equiv q_{\alpha}\left(t_1\left(u\right),u\right)$$

因此端点坐标的变分由两部分组成：由相邻真实轨道的 C_i 不同引起的部分和由端点的时间不同引起的部分。（两者都已参数化，用参数 u 来刻划。） 注意：$\delta q_{\alpha 0}$，$\left(\delta q_{\alpha}\right)_{t=t_0}$；

$\delta q_{\alpha 1}$，$\left(\delta q_{\alpha}\right)_{t=t_1}$ 含义是不同的：$\left(\delta q_{\alpha}\right)_{t=t_0}=\left(\frac{\partial q_{\alpha 0}}{\partial u}\right)_{t_0}\delta u$，$\left(\delta q_{\alpha}\right)_{t=t_1}=\left(\frac{\partial q_{\alpha 1}}{\partial u}\right)_{t_1}\delta u$，

$$\delta q_{\alpha 0}=\left(\frac{\partial q_{\alpha 0}}{\partial t_0}\right)_u \delta t_0+\left(\frac{\partial q_{\alpha 0}}{\partial u}\right)_{t_0} \delta u=\left[\dot{q}_\alpha\right]_{t=t_0} \delta t_0+(\delta q_\alpha)_{t=t_0} \equiv \dot{q}_{\alpha 0}\delta t_0+\left(\delta q_\alpha\right)_{t=t_0}$$

$$\delta q_{\alpha 1}=\left(\frac{\partial q_{\alpha 1}}{\partial t_1}\right)_u \delta t_1+\left(\frac{\partial q_{\alpha 1}}{\partial u}\right)_{t_1} \delta u=\left[\dot{q}_\alpha\right]_{t=t_1} \delta t_1+(\delta q_\alpha)_{t=t_1} \equiv \dot{q}_{\alpha 1}\delta t_1+\left(\delta q_\alpha\right)_{t=t_1}$$

于是 $\delta S\left[q\right]=\delta\int_{t_0}^{t_1} L\left(q,\dot{q},t\right)dt=\int_{t_0}^{t_1}\delta L\left(q,\dot{q},t\right)dt+L_1\delta t_1-L_0\delta t_0$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\sum_\alpha \left[\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta \dot{q}_\alpha\right]dt+L_1\delta t_1-L_0\delta t_0$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\sum_\alpha \left[\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha\right)-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\delta q_\alpha\right]dt+L_1\delta t_1-L_0\delta t_0$$
$$=\sum_\alpha [\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha]\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\sum_\alpha \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\right]\delta q_\alpha dt+[L\delta t]\Big|_{t_0}^{t_1}$$

$$=\sum_\alpha \left[p_{\alpha 1}\left(\delta q_\alpha\right)_{t=t_1}-p_{\alpha 0}\left(\delta q_\alpha\right)_{t=t_0}\right]-\int_{t_0}^{t_1}\sum_\alpha \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\right]\delta q_\alpha dt+[L\delta t]\Big|_{t_0}^{t_1}$$

$$=\sum_\alpha \left[p_{\alpha 1}\left(\delta q_{\alpha 1}-\dot{q}_{\alpha 1}\delta t_1\right)-p_{\alpha 0}\left(\delta q_{\alpha 0}-\dot{q}_{\alpha 0}\delta t_0\right)\right]-\int_{t_0}^{t_1}\sum_\alpha \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\right]\delta q_\alpha dt+\left[L\delta t\right]\Big|_{t_0}^{t_1}$$

$$=(\sum_\alpha p_{\alpha 1}\delta q_{\alpha 1}-H_1\delta t_1)-(\sum_\alpha p_{\alpha 0}\delta q_{\alpha 0}-H_0\delta t_0)$$

注意其中积分对正路进行，拉格朗日方程成立。

作环路积分（并仿前进行参数化），得 $\oint_{C_1}(\sum_\alpha p_{\alpha 1}\delta q_{\alpha 1}-H_1\delta t_1)=\oint_{C_0}(\sum_\alpha p_{\alpha 0}\delta q_{\alpha 0}-H_0\delta t_0)$

上式表明：广义线形积分不变量 $I_G=\oint_C(\sum_\alpha p_\alpha\delta q_\alpha-H\delta t)$ 是个不变量。这个不变量称为 Poincaré-Cartan 积分不变量。这个不变量和哈密顿量有关，是和力学体系有关的，因此这个积分不变量不再称为“通用”积分不变量。

Poincaré-Cartan 积分不变量 $I_G=\oint_C(\sum_\alpha p_\alpha\delta q_\alpha-H\delta t)$ 的存在意味着 $(\sum_\alpha p_{\alpha 1}\delta q_{\alpha 1}-H_1\delta t_1)-(\sum_\alpha p_{\alpha 0}\delta q_{\alpha 0}-H_0\delta t_0)$ 是一个全变分，当 $t_1-t_0\to 0$ 时，上述论断就意味着 $\left(p_{\alpha 1},q_{\alpha 1}\right)$ 和 $\left(p_{\alpha 0},q_{\alpha 0}\right)$ 之间的关系是正则变换（无穷小正则变换）；也就是说，正则变量连续地经历着一系列正则变换的过程，这是和正则方程等价的。因此 Poincaré-Cartan 积分不变量 $I_G=\oint_C(\sum_\alpha p_\alpha\delta q_\alpha-H\delta t)$ 的存在也可以作为力学的第一性原理。

5．李华宗定理（参考资料[11]甘特马赫§22，117—120 页；[17]高等分析力学 523 页）

这条定理讨论的是通用积分不变量的“唯一性”。下面给出一阶情形下的表述：

如果 $I' = \oint_C \sum_{\alpha=1}^{s} \left[A_\alpha\left(p,q,t\right)\delta p_\alpha + B_\alpha\left(p,q,t\right)\delta q_\alpha \right]$ 是一阶通用相对积分不变量，

则 $I' = CI_1$，其中 C 为常数，I_1 为 Poincaré 积分。

证明：$0 = \dfrac{dI'}{dt} = \dfrac{d}{dt}\oint\left(A\delta p + B\delta q\right)$

$$= \oint\left[\frac{dA}{dt}\delta p + \frac{dB}{dt}\delta q + A\frac{d}{dt}\delta p + B\frac{d}{dt}\delta q\right] \qquad \text{利用}\ \frac{d}{dt}\delta = \delta\frac{d}{dt}$$

$$= \oint\left[\frac{dA}{dt}\delta p - \delta A\frac{dp}{dt} + \frac{dB}{dt}\delta q - \delta B\frac{dq}{dt}\right] + \oint\delta\left(A\frac{dp}{dt} + B\frac{dq}{dt}\right)$$

利用 $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{\partial A}{\partial p}\dfrac{dp}{dt} + \dfrac{\partial A}{\partial q}\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{\partial A}{\partial t}$， $\delta A = \dfrac{\partial A}{\partial p}\delta p + \dfrac{\partial A}{\partial q}\delta q$

$$= \oint\left\{\left[\left(\frac{\partial A}{\partial q} - \frac{\partial B}{\partial p}\right)\frac{dq}{dt} + \frac{\partial A}{\partial t}\right]\delta p + \left[\left(\frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial q}\right)\frac{dp}{dt} + \frac{\partial B}{\partial t}\right]\delta q\right\}$$

利用正则方程，并记 $Z = \dfrac{\partial B}{\partial p} - \dfrac{\partial A}{\partial q}$

$$= \oint\left\{\left[-Z\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial A}{\partial t}\right]\delta p + \left[-Z\frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial B}{\partial t}\right]\delta q\right\}$$

从全变分条件得到 $\dfrac{\partial}{\partial q}\left(-Z\dfrac{\partial H}{\partial p} + \dfrac{\partial A}{\partial t}\right) = \left(\dfrac{\partial}{\partial p}\left(-Z\dfrac{\partial H}{\partial q} + \dfrac{\partial B}{\partial t}\right)\right)$

即 $$\frac{\partial Z}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial Z}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial Z}{\partial t} = 0$$

由于 H 可以任意选取，得到 $\dfrac{\partial Z}{\partial p} = 0,\ \dfrac{\partial Z}{\partial q} = 0,\ \dfrac{\partial Z}{\partial t} = 0,\ \therefore Z = \dfrac{\partial B}{\partial p} - \dfrac{\partial A}{\partial q} = C$

即 $\dfrac{\partial A}{\partial q} = \dfrac{\partial(B - Cp)}{\partial p}$ 所以得到 $A\delta p + (B - Cp)\delta q = \delta\Phi\left(p,q,t\right)$ 为全变分，因此

$\oint(A\delta p + B\delta q) - C\oint p\delta q = \oint\delta\Phi = 0$ 即 $I' = CI_1$

A11. 正则变换的补充知识（参阅参考资料[12]涅符兹格利亚多夫§117－§120；[11]甘特马赫§22§23§24§25§29－§32）

1．辛内积、辛变换和辛矩阵

我们可以在线性空间 L 里，建立一种内积的概念，称为辛内积，记为 $<x,y>$，其中 x,y 为线性空间 L 的元素。辛内积满足以下条件：

（1）$<x,y>=-<y,x>$

（2）$<Cx,y>=C<x,y>$

（3）$<x+y,z>=<x,z>+<y,z>$

（4）如果 $<x,a>=0,\ \forall x\in L$，则 $a=0$

辛内积可以在 $2s$ 维线性空间 L 中具体地实现如下：

$$x=(x_1,\cdots x_s,x_1',\cdots x_s')^T\in L \qquad y=(y_1,\cdots y_s,y_1',\cdots y_s')^T\in L \qquad <x,y>=x^TJy$$

其中 $J=\begin{pmatrix}0 & -E\\ E & 0\end{pmatrix}=-i\sigma_2\otimes E \quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$ E 为单位矩阵。

易见矩阵 J 满足 $J^2=-E$， $J=-J^{-1}=-J^T$，因此 $<x,y>=\sum_{\alpha=1}^{s}(x_\alpha' y_\alpha - x_\alpha y_\alpha')$

经检验可知，这样定义的内积满足（1）—（4）各要求。

考虑线性空间 L 中的线性变换 S： $x\mapsto Sx$，如果线性变换 S 满足 $S^TJS=J$ 则线性变换 S 称为辛变换（symplectic），也称耦对变换；其矩阵形式称为辛矩阵（耦对矩阵）。由此可知辛变换保持辛内积不变：

$$<Sx,Sy>=(Sx)^T JSy=x^T(S^TJS)y=x^TJy=<x,y>$$

辛变换具有的这种对称性也称为耦对性。

2．正则方程、Poisson 括号在相空间中的矩阵形式

记 $z=\begin{pmatrix}p_1 & \cdots & p_s & q_1 & \cdots & q_s\end{pmatrix}^T$，$\nabla_{pq}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial p_s} & \frac{\partial}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial q_s}\end{pmatrix}^T$，于是

$$\nabla_{pq}H=\begin{pmatrix}\frac{\partial H}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial H}{\partial p_s} & \frac{\partial H}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial H}{\partial q_s}\end{pmatrix}^T$$

就可以把正则方程表为 $-J\nabla_{pq}H=\dfrac{dz}{dt}$ 或 $\nabla_{pq}H=J\dfrac{dz}{dt}$

Poisson 括号可以表为 $[\varphi,\psi]=(\nabla_{pq}\varphi)^T(-J)\nabla_{pq}\psi$

3．正则变换在相空间中的矩阵形式

记另一组正则变量为 $Z=\begin{pmatrix}P_1 & \cdots & P_s & Q_1 & \cdots & Q_s\end{pmatrix}^T$，既然都是正则变量，它们之间应有正则变换，可表为 $dZ=Mdz$，并有 $\nabla_{pq}=M^T\nabla_{PQ}$，其中矩阵

$$M=\begin{pmatrix}\frac{\partial P}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial q}\\ \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial Q}{\partial q}\end{pmatrix},\quad M^T=\begin{pmatrix}\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)^T & \left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)^T\\ \left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^T & \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^T\end{pmatrix}\text{其中}\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial P_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial p_s}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial P_s}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial P_s}{\partial p_s}\end{pmatrix},$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)^T=\begin{pmatrix}\frac{\partial P_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial P_s}{\partial p_1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial P_1}{\partial p_s} & \cdots & \frac{\partial P_s}{\partial p_s}\end{pmatrix}\text{即}\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)_{mn}=\frac{\partial P_m}{\partial p_n}=\left[\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)^T\right]_{nm}$$

易见$\det M=\dfrac{\partial\left(P_1,\cdots P_s,Q_1,\cdots Q_s\right)}{\partial\left(p_1,\cdots p_s,q_1,\cdots q_s\right)}$就是雅可比行列式

正则变换当然是非异变换，即$\det M=\dfrac{\partial\left(P_1,\cdots P_s,Q_1,\cdots Q_s\right)}{\partial\left(p_1,\cdots p_s,q_1,\cdots q_s\right)}\neq 0$，$M^{-1}$存在，并有

$dz=M^{-1}dZ$， $\nabla_{PQ}=(M^T)^{-1}\nabla_{pq}$从而有$\left(dZ\right)^T\nabla_{PQ}=\left(dz\right)^T\nabla_{pq}$

动力学方程都是正则方程：$\nabla_{pq}H=J\dfrac{dz}{dt}$，$\nabla_{PQ}H^*=J\dfrac{dZ}{dt}$；

在不显含时间的单价正则变换下$H^*=H$

$M^T\nabla_{PQ}H=JM^{-1}\dfrac{dZ}{dt}=M^TJ\dfrac{dZ}{dt}$， 或$(M^T)^{-1}\nabla_{pq}H=JM\dfrac{dz}{dt}=(M^T)^{-1}J\dfrac{dz}{dt}$

$JM^{-1}=M^TJ$， $JM=\left(M^T\right)^{-1}J$

于是得到$M^TJM=J$ 此式等价于$MJM^T=J$ 这是因为

$$M^TJM=J\Leftrightarrow J=(M^T)^{-1}JM^{-1}\Leftrightarrow J^{-1}=MJ^{-1}M^T\Leftrightarrow -J=M\left(-J\right)M^T\Leftrightarrow J=MJM^T$$

雅可比矩阵M满足上述关系式是单价正则变换的充分必要条件。

【思考】上述结论应如何推广到一般的正则变换的情况？

以上讨论不难推广到不显含时间的非单价正则变换，$H^*=\lambda H$，所得结果为$M^TJM=\lambda J$

和$MJM^T=\lambda J$ 至于一般的显含时间的正则变换，上述结论依然成立，但证明过程冗长。

参阅 L.A.Pars, A Treatise on Analytical Dynamics, 1965, pp. 514-515

G.S.S.Ludford and D.W.Yannitell, *Am. J. Phys.*, 36, 231 (1968)

Goldstein et al.利用无穷小正则变换给出了显含时间的单价正则变换情况下的证明。参阅 H. Goldstein et al.,Classical Mechanics,third edition,2002,pp.381-388(中译本：经典力学，第二版，464－471 页，科学出版社)

4. 雅可比矩阵与 Poisson 括号的关系

$$MJM^T=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial P}{\partial p} & \dfrac{\partial P}{\partial q}\\ \dfrac{\partial Q}{\partial p} & \dfrac{\partial Q}{\partial q}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -E\\ E & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left(\dfrac{\partial P}{\partial p}\right)^T & \left(\dfrac{\partial Q}{\partial p}\right)^T\\ \left(\dfrac{\partial P}{\partial q}\right)^T & \left(\dfrac{\partial Q}{\partial q}\right)^T\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\left(\dfrac{\partial P}{\partial p}\right)\left(\dfrac{\partial P}{\partial q}\right)^T+\left(\dfrac{\partial P}{\partial q}\right)\left(\dfrac{\partial P}{\partial p}\right)^T & -\left(\dfrac{\partial P}{\partial p}\right)\left(\dfrac{\partial Q}{\partial q}\right)^T+\left(\dfrac{\partial P}{\partial q}\right)\left(\dfrac{\partial Q}{\partial p}\right)^T\\ -\left(\dfrac{\partial Q}{\partial p}\right)\left(\dfrac{\partial P}{\partial q}\right)^T+\left(\dfrac{\partial Q}{\partial q}\right)\left(\dfrac{\partial P}{\partial p}\right)^T & -\left(\dfrac{\partial Q}{\partial p}\right)\left(\dfrac{\partial Q}{\partial q}\right)^T+\left(\dfrac{\partial Q}{\partial q}\right)\left(\dfrac{\partial Q}{\partial p}\right)^T\end{pmatrix}$$

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^T+\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)^T=$$

$$=-\begin{pmatrix}\dfrac{\partial P_1}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial P_1}{\partial p_s}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial P_s}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial P_s}{\partial p_s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial Q_s}{\partial q_1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial Q_1}{\partial q_s} & \cdots & \dfrac{\partial Q_s}{\partial q_s}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{\partial P_1}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial P_1}{\partial q_s}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial P_s}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial P_s}{\partial q_s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial Q_1}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial Q_s}{\partial p_1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial Q_1}{\partial p_s} & \cdots & \dfrac{\partial Q_s}{\partial p_s}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-[P_1,Q_1] & \cdots & -[P_1,Q_s]\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ -[P_s,Q_1] & \cdots & -[P_s,Q_s]\end{pmatrix}\equiv-\left([P,Q]\right)\qquad \left([P,Q]\right)_{\alpha\beta}=\left[P_\alpha,Q_\beta\right]$$

其中[，]为 Poisson 括号。另三个子矩阵也可相仿计算。

$$-\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^T+\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)^T=$$

$$=\begin{pmatrix}-[Q_1,P_1] & \cdots & -[Q_1,P_s]\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ -[Q_s,P_1] & \cdots & -[Q_s,P_s]\end{pmatrix}\equiv-\left([Q,P]\right)\qquad \left([Q,P]\right)_{\alpha\beta}=\left[Q_\alpha,P_\beta\right]$$

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^T+\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)^T=$$

$$=\begin{pmatrix}-[P_1,P_1] & \cdots & -[P_1,P_s]\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ -[P_s,P_1] & \cdots & -[P_s,P_s]\end{pmatrix}\equiv-\left([P,P]\right)\qquad \left([P,P]\right)_{\alpha\beta}=\left[P_\alpha,P_\beta\right]$$

$$-\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^T+\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)^T=$$

$$=\begin{pmatrix} -[Q_1,Q_1] & \cdots & -[Q_1,Q_s] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -[Q_s,Q_1] & \cdots & -[Q_s,Q_s] \end{pmatrix} \equiv -([Q,Q]) \quad ([Q,Q])_{\alpha\beta} = [Q_\alpha, Q_\beta]$$

由以上的结果可以得到 $MJM^T = \begin{pmatrix} -([P,P]) & -([P,Q]) \\ -([Q,P]) & -([Q,Q]) \end{pmatrix}$

5．正则变换的充分必要条件的证明

正则变换的充分必要条件：$\lambda\left(\sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha dq_\alpha - Hdt\right) + \left(H^* dt - \sum_{\alpha=1}^{s} P_\alpha dQ_\alpha\right) = dF_1(q,Q,t)$

充分性的证明：采用以前对单价正则变换的证明方法即可证明。

必要性的证明：设力学体系的哈密顿量为 $H(p,q,t)$，设 C 为 $(2s+1)$ 维增广相空间 (p,q,t) 中的闭合回路，且它与每一条增广相轨道的交点不多于一个。与闭合回路 C 相交的所有增广相轨道组成一个正路管。当 C 沿这个正路管滑动时有

Poincaré-Cartan 积分不变量 $\quad I_G = \oint_C [\sum_\alpha p_\alpha \delta q_\alpha - H\delta t]$ ＝常数

在正则变换下，$(p_\alpha, q_\alpha) \to (P_\alpha, Q_\alpha)$， $H(p,q,t) \to H^*(P,Q,t)$， $C \to C^*$

其中 C^* 是 $(2s+1)$ 维增广相空间 (P,Q,t) 中对应的闭合回路。当 $C^\bullet$ 沿这个正路管滑动时有

Poincaré-Cartan 积分不变量 $\quad I'_G = \oint_{C^*} [\sum_\alpha P_\alpha \delta Q_\alpha - H^* \delta t]$

用 $t=$ 常数的超平面分别截这两个正路管，得到闭合回路 C_0 和 C_0^* 于是得

$$I_G = \oint_C [\sum_\alpha p_\alpha \delta q_\alpha - H\delta t] = \oint_{C_0} \sum_\alpha p_\alpha \delta q_\alpha$$

$$I'_G = \oint_{C^*} [\sum_\alpha P_\alpha \delta Q_\alpha - H^* \delta t] = \oint_{C_0^*} \sum_\alpha P_\alpha \delta Q_\alpha$$

由李华宗定理得，$\oint_{C_0^*} \sum_\alpha P_\alpha \delta Q_\alpha = \lambda \oint_{C_0} \sum_\alpha p_\alpha \delta q_\alpha$ 其中 λ 是常数。

于是 $\oint_{C^*} [\sum_\alpha P_\alpha \delta Q_\alpha - H^* \delta t] = \lambda \oint_C [\sum_\alpha p_\alpha \delta q_\alpha - H\delta t]$

C, C^* 是对应的闭合回路，上式可写成 $\oint_C [\sum_\alpha P_\alpha \delta Q_\alpha - H^* \delta t] - \lambda [\sum_\alpha p_\alpha \delta q_\alpha - H\delta t] = 0$

被积表达式应为全变分，命题得证。

上述充分必要条件的另外三种形式也可由此利用 Legendre 变换得到证明。

6．关于正则变换充分必要条件的四种类型和四种类型的母函数

正则变换充分必要条件的四种类型，严格说来，并非总是完全等价，因为它们涉及四种类型的母函数，而这四种类型的母函数并非总是都存在。我们以第一类型的母函数

$F_1(q,Q,t)$为例进行讨论，$F_1(q,Q,t)$存在就意味着(q,Q)能作为独立变量。在正则变换中，

$\begin{cases} P_\alpha = P_\alpha(p,q,t) \\ Q_\alpha = Q_\alpha(p,q,t) \end{cases}$，$\begin{cases} p_\alpha = p_\alpha(P,Q,t) \\ q_\alpha = q_\alpha(P,Q,t) \quad \alpha = 1,2\cdots s \end{cases}$满足$\dfrac{\partial(P_1\cdots P_s,Q_1\cdots Q_s)}{\partial(p_1\cdots p_s,q_1\cdots q_s)} \neq 0$，新旧

正则变量都可以分别作为独立变量，但(q,Q)就不一定能作为独立变量了。要求(q,Q)能

作为独立变量，即可以把(p,P)表为

$$\begin{cases} p_\alpha = p_\alpha(q,Q,t) \\ P_\alpha = P_\alpha(q,Q,t) \quad \alpha = 1,2\cdots s \end{cases}$$

比较以上各式

由于$\begin{cases} p_\alpha = p_\alpha(q,Q,t) \\ Q_\alpha = Q_\alpha(p,q,t) \end{cases}$得$\left[\dfrac{\partial(Q_1,\cdots Q_s)}{\partial(p_1,\cdots p_s)}\right]_{q,t} \neq 0$

或者由于$\begin{cases} q_\alpha = q_\alpha(P,Q,t) \\ P_\alpha = P_\alpha(q,Q,t) \end{cases}$得$\left[\dfrac{\partial(q_1,\cdots q_s)}{\partial(P_1,\cdots P_s)}\right]_{Q,t} \neq 0$

如果上述两个不等式之一成立，(q,Q,t)就可以取作独立变量，母函数$F_1(q,Q,t)$ 就存在。

事实上，在$\dfrac{\partial(P_1\cdots P_s,Q_1\cdots Q_s)}{\partial(p_1\cdots p_s,q_1\cdots q_s)} \neq 0$的条件下，上述两个不等式是等价的。

对另外三种类型母函数，也可同样进行讨论。将结果汇集如下：

正则变换

$$\begin{cases} P_\alpha = P_\alpha(p_1\cdots p_s,q_1\cdots q_s,t) \\ Q_\alpha = Q_\alpha(p_1\cdots p_s,q_1\cdots q_s,t) \quad \alpha = 1,2\cdots s \end{cases}$$

必须有逆变换存在：

$$\begin{cases} p_\alpha = p_\alpha(P_1\cdots P_s,Q_1\cdots Q_s,t) \\ q_\alpha = q_\alpha(P_1\cdots P_s,Q_1\cdots Q_s,t) \quad \alpha = 1,2\cdots s \end{cases}$$

因而必须满足$\dfrac{\partial(P_1\cdots P_s,Q_1\cdots Q_s)}{\partial(p_1\cdots p_s,q_1\cdots q_s)} \neq 0$，但是其有关子行列式不一定不为零。如果

$$\left[\frac{\partial(Q_1\cdots Q_s)}{\partial(p_1\cdots p_s)}\right]_{qt} \neq 0,\quad \left[\frac{\partial(P_1\cdots P_s)}{\partial(p_1\cdots p_s)}\right]_{qt} \neq 0,\quad \left[\frac{\partial(Q_1\cdots Q_s)}{\partial(q_1\cdots q_s)}\right]_{pt} \neq 0,\quad \left[\frac{\partial(P_1\cdots P_s)}{\partial(q_1\cdots q_s)}\right]_{pt} \neq 0$$

则可以解出 $p_\alpha = p_\alpha(q,Q,t) \quad p_\alpha = p_\alpha(q,P,t) \quad q_\alpha = q_\alpha(p,Q,t) \quad q_\alpha = q_\alpha(p,P,t)$

于是 $\begin{aligned} P_\alpha &= P_\alpha(p(q,Q,t),q,t) \\ &\equiv P_\alpha(q,Q,t) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} P_\alpha &= P_\alpha(p,q(p,Q,t),t) \\ &\equiv P_\alpha(p,Q,t) \end{aligned}$

$$Q_\alpha = Q_\alpha\left(p\left(q,P,t\right),q,t\right) \equiv Q_\alpha\left(q,P,t\right) \qquad Q_\alpha = Q_\alpha\left(p,q\left(p,P,t\right),t\right) \equiv Q_\alpha\left(p,P,t\right)$$

$$\alpha = 1,2\cdots s$$

可以以 $\left(q,Q\right)$ $\left(q,P\right)$ $\left(p,Q\right)$ $\left(p,P\right)$

为独立变量。因而有以下母函数：

$$F_1\left(q,Q,t\right) \qquad F_2\left(q,P,t\right) \qquad F_3\left(p,Q,t\right) \qquad F_4\left(p,P,t\right)$$

应满足 $\det\left\|\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_\alpha \partial Q_\beta}\right\| \neq 0 \quad \det\left\|\frac{\partial^2 F_2}{\partial q_\alpha \partial P_\beta}\right\| \neq 0 \quad \det\left\|\frac{\partial^2 F_3}{\partial p_\alpha \partial Q_\beta}\right\| \neq 0 \quad \det\left\|\frac{\partial^2 F_4}{\partial p_\alpha \partial P_\beta}\right\| \neq 0$

这是用母函数表达的上述子行列式不为零的条件。或者如果

$\left[\frac{\partial\left(q_1\cdots q_s\right)}{\partial\left(P_1\cdots P_s\right)}\right]_{Qt} \neq 0$，$\left[\frac{\partial\left(q_1\cdots q_s\right)}{\partial\left(Q_1\cdots Q_s\right)}\right]_{Pt} \neq 0$，$\left[\frac{\partial\left(p_1\cdots p_s\right)}{\partial\left(P_1\cdots P_s\right)}\right]_{Qt} \neq 0$，$\left[\frac{\partial\left(p_1\cdots p_s\right)}{\partial\left(Q_1\cdots Q_s\right)}\right]_{Pt} \neq 0$，

也可以用类似的方法得到和上面一样的结论。

由此可见，

（1）在 $\frac{\partial\left(P_1\cdots P_s,Q_1\cdots Q_s\right)}{\partial\left(p_1\cdots p_s,q_1\cdots q_s\right)} \neq 0$ 的条件下，正则变换四种形式的母函数不一定都存在。只有当四个子行列式都不为零，四个对应的母函数才能都存在。

（2）我们已经看到，按照常规的计算程序求得的“母函数”，有时为零，有时虽不为零，却不能给出新老正则变量之间正确的函数关系，这表明我们错选了一种由于某些条件不满足而不存在的母函数类型。只有满足正则变换的充要条件，而且满足相应的附加条件，因而能正确地给出正则变换的关系式的，才能成为母函数。

7．母函数的一般形式

是否任何正则变换总可构造属于上述四种类型的母函数？答案是否定的。例如，[1]273 页第八章习题 8．7（4）$Q_1 = q_1$，$P_1 = p_1$，$Q_2 = p_2$，$P_2 = -q_2$ 是正则变换，有母函数，例如可以构造

$F\left(q_1,q_2,P_1,Q_2\right) = q_1 P_1 + q_2 Q_2$，也还可以构造其它形式的母函数，但都不属于上述四种类型。对于一般情况，有下述引理成立：

引理：如果给定了依赖于 2s 个独立变量 $\left(p_\alpha,q_\alpha\right)$ 的 2s 个独立函数 $\left(P_\alpha,Q_\alpha\right)$，$(\alpha = 1,2,\cdots s)$，则由 4s 个量 $p_\alpha,q_\alpha,P_\alpha,Q_\alpha(\alpha = 1,2,\cdots s)$ 中，永远可以选出 2s 个独立的变量，使其中不包含任何一对共轭量 $\left(p_\alpha,q_\alpha\right)$ 或 $\left(P_\alpha,Q_\alpha\right)$。

这条引理见参考资料[11]（甘特马赫）。(P_α,Q_α) 既然是独立函数，当然也可以作为 2s 个独立变量来表述 2s 个 (p_α,q_α)，即这两组变量之间存在着非异的变换关系。但它们由组成，分别由老变量或新

变量组成；引理断言，在这些成对的新旧共轭变量中还有一类独立变量，也是 2s 个，但不含成对的共轭量，（由此可知，每对共轭量中，必含其一，且新老变量各占一半）。经过适当编号，这 2s 个独立变量可表为：$q_1,Q_1,\cdots q_l,Q_l,q_{l+1},P_{l+1}\cdots q_m,P_m,p_{m+1},P_{m+1},\cdots p_n,P_n,p_{n+1},Q_{n+1}\cdots p_s,Q_s$

$\left(0\le l\le m\le n\le s\right)$。当某些等号成立时，就包含了前面所举的四种特殊情况。

此引理最早由 C.Carathéodory 于 1956 年给出，但只限于正则变换情形给出了证明。这里引理的结论适用于更一般的情形，只要求 $\dfrac{\partial\left(P_1\cdots P_s,Q_1\cdots Q_s\right)}{\partial\left(p_1\cdots p_s,q_1\cdots q_s\right)}\neq 0$

由此可见，正则变换的充分与必要条件还应补充表达为

非异变换 $\begin{cases}P_\alpha=P_\alpha\left(p_1\cdots p_s,q_1\cdots q_s,t\right)\\ Q_\alpha=Q_\alpha\left(p_1\cdots p_s,q_1\cdots q_s,t\right)\quad \alpha=1,2\cdots s\end{cases}$ （1） $\dfrac{\partial\left(P_1\cdots P_s,Q_1\cdots Q_s\right)}{\partial\left(p_1\cdots p_s,q_1\cdots q_s\right)}\neq 0$

成为正则变换的充分与必要条件为

$$\lambda\left(\sum_{\alpha=1}^{m}p_\alpha dq_\alpha-\sum_{\beta=m+1}^{s}q_\beta dp_\beta-Hdt\right)-\left(\sum_{\alpha=1}^{l}P_\alpha dQ_\alpha+\sum_{\alpha=n+1}^{s}P_\alpha dQ_\alpha\right)-\sum_{\beta=l+1}^{n}Q_\beta dP_\beta-H^*dt$$
$$=dF_{lmn}\left(q_1,Q_1,\cdots q_l,Q_l,q_{l+1},P_{l+1}\cdots q_m,P_m,p_{m+1},P_{m+1},\cdots p_n,P_n,p_{n+1},Q_{n+1}\cdots p_s,Q_s,t\right)$$
$$=d\left[F_1\left(q,Q,t\right)-\lambda\sum_{\beta=m+1}^{s}q_\beta p_\beta+\sum_{\gamma=l+1}^{n}Q_\gamma P_\gamma\right]\qquad(2)$$

其中 dF_{lmn} 是某个函数的恰当微分。H^* 是用新变量 P_α,Q_α 以及 t 表示的 Hamilton 函数。换言之，如果 $H\left(p,q,t\right)$ 是正则变量 p_α,q_α 的任一 Hamilton 量。（意即正则方程

$\dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha}=\dot{q}_\alpha$，$\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha}=-\dot{p}_\alpha$，$\alpha=1,2,\cdots,s$ 成立）并且对于变换（1），存在 $H^*=H^*\left(P,Q,t\right)$，常数 λ 和母函数

$F_{lmn}\left(q_1,Q_1,\cdots q_l,Q_l,q_{l+1},P_{l+1}\cdots q_m,P_m,p_{m+1},P_{m+1},\cdots p_n,P_n,p_{n+1},Q_{n+1}\cdots p_s,Q_s,t\right)$ 使（2）成立，那么变换（1）就是正则变换。（意即 $\dfrac{\partial H^*}{\partial P_\alpha}=\dot{Q}_\alpha\quad\dfrac{\partial H^*}{\partial Q_\alpha}=-\dot{P}_\alpha\quad\alpha=1,2\cdots s$ 成立）其中 F_{lm} 称为母函数。

$$\frac{\partial F_{lmn}}{\partial q_\alpha}=\lambda p_\alpha\qquad\frac{\partial F_{lmn}}{\partial p_\beta}=-\lambda q_\beta\qquad\frac{\partial F_{lmn}}{\partial Q_\gamma}=-P_\gamma\qquad\frac{\partial F_{lmn}}{\partial P_\delta}=Q_\delta$$

$$\alpha=1,2,\cdots m\qquad\beta=m+1,\cdots s\qquad\gamma=1,2,\cdots l,n+1\cdots s\qquad\delta=l+1,\cdots n$$

8．下面我们来讨论判定正则变换的其它方法。从用$F_1(q,Q,t)$表达的充分与必要条件

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\lambda p_\alpha dq_\alpha - P_\alpha dQ_\alpha\right)+\left(H^* - \lambda H\right)dt = dF_1(q,Q,t)$$

出发。上式的关键是要求左边的求和式成为全变分，即

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\lambda p_\alpha \delta q_\alpha - P_\alpha \delta Q_\alpha\right) = \delta F_1(q,Q,t)$$

由此得$\lambda p_\alpha = \dfrac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial q_\alpha}$，$-P_\alpha = \dfrac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial Q_\alpha}$，，

应满足$\dfrac{\partial p_\alpha}{\partial q_\beta} = \dfrac{\partial p_\beta}{\partial q_\alpha} \quad \left[=\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial^2 F_1(q,Q,t)}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\right]$，$\dfrac{\partial P_\alpha}{\partial Q_\beta} = \dfrac{\partial P_\beta}{\partial Q_\alpha} \quad \left[=-\dfrac{\partial^2 F_1(q,Q,t)}{\partial Q_\alpha \partial Q_\beta}\right]$，

$\lambda\dfrac{\partial p_\alpha}{\partial Q_\beta} = -\dfrac{\partial P_\beta}{\partial q_\alpha} \quad \left[=\dfrac{\partial^2 F_1(q,Q,t)}{\partial q_\alpha \partial Q_\beta}\right]$

在给出以(q,Q)为独立变量的函数变换关系，即$p_\alpha = p_\alpha(q,Q,t)$，$P_\alpha = P_\alpha(q,Q,t)$时，用这种方法来判断变换关系的正则性是很方便的。

下面我们改用原来的正则变量(p,q)为独立变量来讨论：

利用$\delta Q_\alpha = \sum\limits_\beta \dfrac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\beta}\delta p_\beta + \sum\limits_\beta \dfrac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\beta}\delta q_\beta$ 得到

$$\sum_\alpha\left[\left(\lambda p_\alpha - \sum_\beta P_\beta(p,q)\frac{\partial Q_\beta}{\partial q_\alpha}\right)\delta q_\alpha - \sum_\beta P_\beta(p,q)\frac{\partial Q_\beta}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha\right] = \delta F_1$$

记为$\sum\limits_\alpha\left(\varphi_\alpha \delta q_\alpha + \psi_\alpha \delta p_\alpha\right) = -\delta F_1$

其中$\varphi_\alpha = \sum\limits_\gamma P_\gamma \dfrac{\partial Q_\gamma}{\partial q_\alpha} - \lambda p_\alpha$，　$\psi_\alpha = \sum\limits_\gamma P_\gamma \dfrac{\partial Q_\gamma}{\partial p_\alpha}$

上式既然要成为全变分，应有

$$\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q_\beta} = \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_\alpha} \quad \text{即} \quad \sum_\gamma\left[\frac{\partial P_\gamma}{\partial q_\beta}\frac{\partial Q_\gamma}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial P_\gamma}{\partial q_\alpha}\frac{\partial Q_\gamma}{\partial q_\beta}\right] = 0$$

$$\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial p_\beta} = \frac{\partial \psi_\beta}{\partial q_\alpha} \quad \text{即} \quad \sum_\gamma\left[\frac{\partial P_\gamma}{\partial p_\beta}\frac{\partial Q_\gamma}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial P_\gamma}{\partial q_\alpha}\frac{\partial Q_\gamma}{\partial p_\beta}\right] = \lambda\delta_{\alpha\beta}$$

$$\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial p_\beta} = \frac{\partial \psi_\beta}{\partial p_\alpha} \quad \text{即} \quad \sum_\gamma\left[\frac{\partial P_\gamma}{\partial p_\beta}\frac{\partial Q_\gamma}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial P_\gamma}{\partial p_\alpha}\frac{\partial Q_\gamma}{\partial p_\beta}\right] = 0$$

定义：拉格朗日括号$\left[u,v\right]_L=\sum_{\gamma=1}^{s}\frac{\partial\left(P_\gamma,Q_\gamma\right)}{\partial\left(u,v\right)}$

上面三个式子可以表为：$\left[q_\alpha,q_\beta\right]_L=0$，$\left[p_\alpha,p_\beta\right]_L=0$，$\left[p_\alpha,q_\beta\right]_L=\lambda\delta_{\alpha\beta}$

这是用拉格朗日括号表达的正则变换的必要与充分条件。

利用上述结果得到$M^TJM=\lambda J$

$$M^TJM=\lambda J\Rightarrow J=\lambda(M^T)^{-1}JM^{-1}\Rightarrow J^{-1}=\lambda^{-1}MJ^{-1}M^T\Rightarrow-\lambda J=M\left(-J\right)M^T$$

即$MJM^T=\lambda J$再与$MJM^T=\begin{pmatrix}-\left(\left[P,P\right]\right)&-\left(\left[P,Q\right]\right)\\-\left(\left[Q,P\right]\right)&-\left(\left[Q,Q\right]\right)\end{pmatrix}$相比较，即得$\left[P_\alpha,Q_\beta\right]=\lambda\delta_{\alpha\beta}$，

$\left[Q_\alpha,Q_\beta\right]=\left[P_\alpha,P_\beta\right]=0$这就是用 Poisson 括号表示的正则变换的充分必要条件。

9．关于雅可比行列式的讨论

由$M^TJM=\lambda J$可得$\det M^T\cdot\det J\cdot\det M=\lambda^{2s}\det J$即$\left(\det M\right)^2=\lambda^{2s}$

由此可见，对于正则变换。有$\det M=\frac{\partial\left(P_1\cdots P_s,Q_1\cdots Q_s\right)}{\partial\left(p_1\cdots p_s,q_1\cdots q_s\right)}=$常数；对于单价正则变换，

有$\det M=\frac{\partial\left(P_1\cdots P_s,Q_1\cdots Q_s\right)}{\partial\left(p_1\cdots p_s,q_1\cdots q_s\right)}=1$

【思考】上述命题的逆命题是否成立？

10．Poisson 括号在正则变换之下的变化

我们把不同正则坐标下的 Poisson 括号分别记为$\left[\varphi,\psi\right]_{(p,q)}$和$\left[\varphi,\psi\right]_{(P,Q)}$利用前面的结果，

得$\left[\varphi,\psi\right]_{(p,q)}\equiv\left(\nabla_{pq}\varphi\right)^T\left(-J\right)\nabla_{pq}\psi=\left(M^T\nabla_{PQ}\varphi\right)^T\left(-J\right)M^T\nabla_{PQ}\psi$

$$=\left(\nabla_{PQ}\varphi\right)^TM\left(-J\right)M^T\nabla_{PQ}\psi=\left(\nabla_{PQ}\varphi\right)^T\left(-\lambda J\right)\nabla_{PQ}\psi=\lambda\left[\varphi,\psi\right]_{(P,Q)}$$

对于单价正则变换$\lambda=1$，因此$\left[\varphi,\psi\right]_{(p,q)}=\left[\varphi,\psi\right]_{(P,Q)}$

这就证明了 Poisson 括号在单价正则变换之下的不变性。