



# 视觉SLAM：从理论到实践

## 第六次课 光流法与直接法



主讲人 高翔

清华大学 自动控制与工程 博士  
慕尼黑工业大学计算机视觉组 博士后  
Email: [gao.xiang.thu@gmail.com](mailto:gao.xiang.thu@gmail.com)



# 第六讲 光流法与直接法

---

1. 光流法
2. 直接法

# 1. 光流法

---

# 1. 光流法

- 特征点法流程：

1. 在图像中提取特征点并计算特征描述
2. 在不同图像中寻找特征匹配
3. 利用匹配点信息计算相机位姿

非常耗时 ~10+ms in ORB

非常耗时  $O(n^2)$  in brute force matching

比较快速 < 1ms

- 能否不使用特征匹配计算VO?

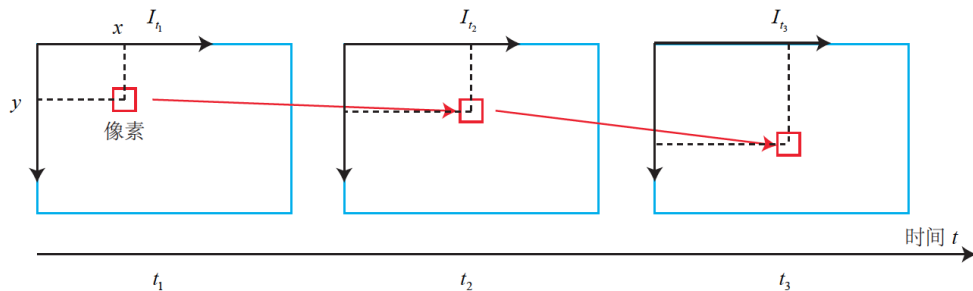
# 1. 光流法

---

- 不使用特征匹配的思路：
  - 通过其他方式寻找配对点：光流
  - 不需要配对点：直接法

# 1. 光流法

- 光流：追踪源图像某个点在其他图像中的运动
- 一般分为稀疏光流和稠密光流
  - 稀疏以Lucas-Kanade (LK) 光流为代表
  - 稠密以Horn - Schunck (HS) 光流为代表
- 本质上是估计像素在不同时刻图像中的运动



灰度不变假设:  $I(x_1, y_1, t_1) = I(x_2, y_2, t_2) = I(x_3, y_3, t_3)$

图 8-1 LK 光流法示意图。

# 1. 光流法

- 设  $t$  时刻位于  $x, y$  处像素点的灰度值为  $I(x, y, t)$ .
- 在  $t+dt$  时刻, 该像素运动到了  $I(x + dx, y + dy, t + dt)$
- 希望计算运动  $dx, dy$
  
- 灰度不变假设:  $I(x + dx, y + dy, t + dt) = I(x, y, t)$ .
- 注意: 灰度不变是一种理想的假设, 实际当中由于高光/阴影/材质/曝光等不同, 很可能不成立。

# 1. 光流法

$$I(x + dx, y + dy, t + dt) = I(x, y, t).$$

- 对  $t+dt$  时刻的灰度进行Taylor展开并保留一阶项:

$$I(x + dx, y + dy, t + dt) \approx I(x, y, t) + \frac{\partial I}{\partial x}dx + \frac{\partial I}{\partial y}dy + \frac{\partial I}{\partial t}dt.$$

- 由于灰度不变, 所以

$$\frac{\partial I}{\partial x}dx + \frac{\partial I}{\partial y}dy + \frac{\partial I}{\partial t}dt = 0. \quad \text{因此} \Rightarrow \quad \frac{\partial I}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial I}{\partial y} \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial I}{\partial t}.$$

x方向梯度

随时间变化

- 希望求解 $dx/dt$ ,  $dy/dt$

y方向梯度



# 1. 光流法

- 但本式是一个二元一次线性方程，欠定
  - 需要引用额外的约束
  - 假定一个窗口 ( $w \times w$ ) 内光度不变：
- 通过超定最小二乘解求得运动  $u, v$

$$\frac{\partial I}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial I}{\partial y} \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial I}{\partial t}.$$

$$\begin{bmatrix} I_x & I_y \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = -I_{tk}, \quad k = 1, \dots, w^2.$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} [I_x, I_y]_1 \\ \vdots \\ [I_x, I_y]_k \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} I_{t1} \\ \vdots \\ I_{tk} \end{bmatrix}.$$

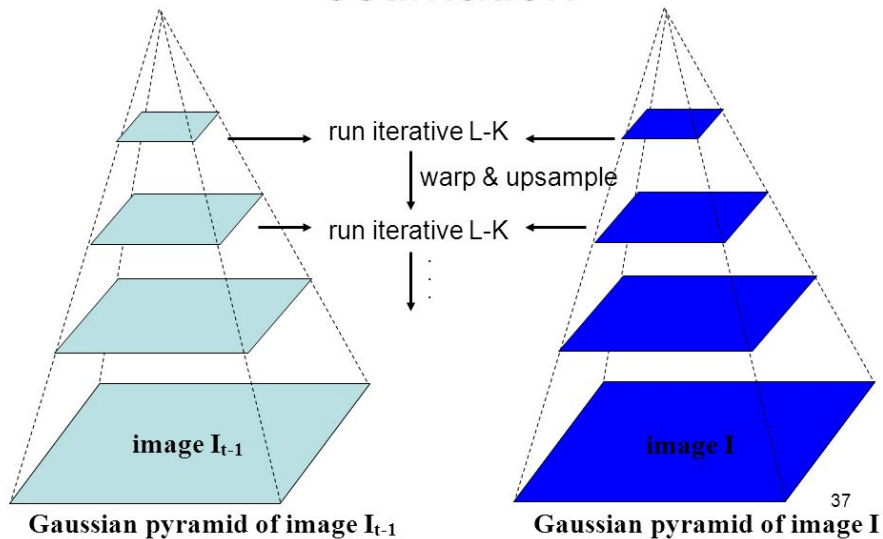
$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^* = -(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}.$$

# 1. 光流法

LK光流的结果依赖于图像梯度

- 但梯度不够平滑，可能剧烈变化
- 局部的梯度不能用于预测长期图像走向
- 解决方式：多层光流

## Coarse-to-fine optical flow estimation



# 1. 光流法

- 注解:

- 可以看成最小化像素误差的非线性优化
- 每次使用了Taylor一阶近似，在离优化点较远时效果不佳，往往需要迭代多次
- 运动较大时要使用金字塔
- 可以用于跟踪图像中的稀疏关键点的运动轨迹
- 得到配对点后，后续计算与特征法VO中相同
- 按方法可分为正向/反向+平移/组合的方式，具体在习题中介绍



## 2. 实践：LK光流

---

### 3. 直接法

---

### 3. 直接法

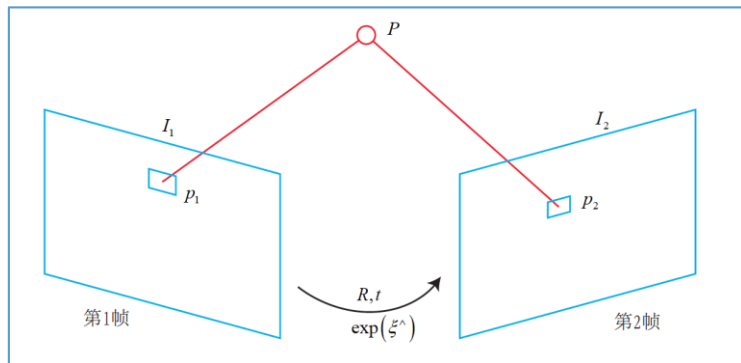
---

- 光流仅估计了像素间的平移，但
  - 没有用到相机本身的几何结构
  - 没有考虑到相机的旋转和图像的缩放
  - 对于边界上的点，光流不好追踪
  - 直接法则考虑了这些信息

# 3. 直接法

- 直接法的推导

- 假设有两个帧，运动未知，但有初始估计  $R, t$
- 第1帧上看到了点  $P$ ，投影为  $p_1$
- 按照初始估计， $P$  在第2帧上投影为  $p_2$



投影关系：

$$p_1 = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}_1 = \frac{1}{Z_1} K P,$$
$$p_2 = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}_2 = \frac{1}{Z_2} K (R P + t) = \frac{1}{Z_2} K (\exp(\xi^\wedge) P)_{1:3}.$$

### 3. 直接法

- 为了估计相机的运动，建立最小化问题

最小化光度误差： $e = I_1(p_1) - I_2(p_2)$ .  $\min_{\xi} J(\xi) = \sum_{i=1}^N e_i^T e_i, \quad e_i = I_1(p_{1,i}) - I_2(p_{2,i})$ .

- 待估计的量为相机运动  $\chi$ ，我们关心误差相对于相机的导数



### 3. 直接法

$$\begin{aligned} e(\delta T \oplus T) &= I_1(p_1) - I_2 \left( \frac{1}{Z_2} K \exp(\delta \xi^\wedge) T P \right) \\ &\approx I_1(p_1) - I_2 \left( \frac{1}{Z_2} K (1 + \delta \xi^\wedge) T P \right) \\ &= I_1(p_1) - I_2 \left( p_2 + \frac{1}{Z_2} K \delta \xi^\wedge T P \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q &= \delta \xi^\wedge \exp(\xi^\wedge) P, \\ u &= \frac{1}{Z_2} K q. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e(\delta T \oplus T) &= I_1(p_1) - I_2(p_2 + u) \\ &\approx I_1(p_1) - I_2(p_2) - \frac{\partial I_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \delta \xi} \delta \xi \\ &= e - \frac{\partial I_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \delta \xi} \delta \xi \end{aligned}$$

### 3. 直接法

$$e(\xi) = \frac{\partial I_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \delta \xi} \delta \xi.$$

- 第一部分：图像梯度
- 第二部分：像素对投影点导数（见上一章）

$$\frac{\partial u}{\partial q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} & \frac{\partial u}{\partial Y} & \frac{\partial u}{\partial Z} \\ \frac{\partial v}{\partial X} & \frac{\partial v}{\partial Y} & \frac{\partial v}{\partial Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f_x}{Z} & 0 & -\frac{f_x X}{Z^2} \\ 0 & \frac{f_y}{Z} & -\frac{f_y Y}{Z^2} \end{bmatrix}.$$

- 第三部分：投影点对位姿导数： $\frac{\partial q}{\partial \delta \xi} = [I, -q^\wedge].$
- 综上：

$$J = -\frac{\partial I_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \delta \xi}, \quad \frac{\partial u}{\partial \delta \xi} = \begin{bmatrix} \frac{f_x}{Z} & 0 & -\frac{f_x X}{Z^2} & -\frac{f_x XY}{Z^2} & f_x + \frac{f_x X^2}{Z^2} & -\frac{f_x Y}{Z} \\ 0 & \frac{f_y}{Z} & -\frac{f_y Y}{Z^2} & -f_y - \frac{f_y Y^2}{Z^2} & \frac{f_y XY}{Z^2} & \frac{f_y X}{Z} \end{bmatrix}.$$

### 3. 直接法

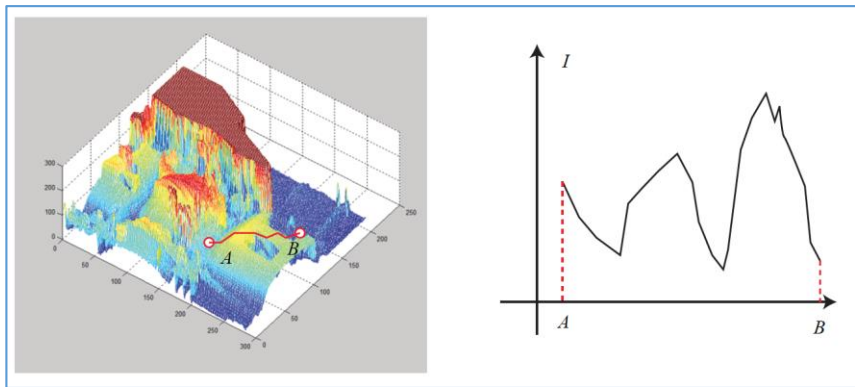
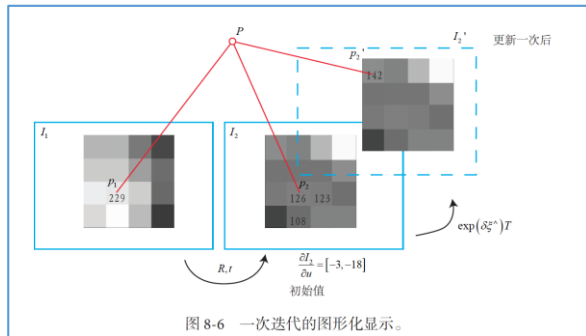
$$e(\xi) = \frac{\partial I_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \delta \xi} \delta \xi.$$

- 可以看到，直接法的雅可比项有一个图像梯度因子
  - 因此，在图像梯度不明显的地方，对相机运动估计的贡献就小
- 根据使用的图像信息不同，可分为：
  - 稀疏直接法：只处理稀疏角点或关键点
  - 稠密直接法：使用所有像素
  - 半稠密直接法：使用部分梯度明显的像素

# 3. 直接法

- 直接法的直观解释

- 像素灰度引导着优化的方向
- 要使优化成立，必须保证从初始估计到最优估计中间的梯度一直下降
- 这很容易受到图像非凸性的影响（可部分地由金字塔减轻）



# 3. 直接法

- 优缺点小结
- 优势
  - 省略特征提取的时间
  - 只需有像素梯度而不必是角点（对白墙等地方有较好效果）
  - 可稠密或半稠密
- 劣势
  - 灰度不变难以满足（易受曝光和模糊影响）
  - 单像素区分性差
  - 图像非凸性

## 4. 实践：直接法

---