apc.umt@gmail.com | https://www.facebook.com/apc.umt

TOÁN HỌC

Tài liệu ôn tập CP dành cho
thành viên Câu lạc bộ Lập trình ứng dụng (APC)

Câu lạc bộ Lập trình ứng dụng - Applied Programming Club

Câu lạc bộ trực thuộc UMT - Khoa Công nghệ

Ngày 25 tháng 10 năm 2025

Mục lục

LỜI NÓI ĐẦU

Trong thời đại công nghệ số, lập trình không chỉ là một kỹ năng quan trọng mà còn là cánh cửa mở ra vô vàn cơ hội phát triển cho sinh viên trong lĩnh vực công nghệ thông tin và khoa học máy tính. Đặc biệt, với các cuộc thi lập trình như **Olympic Tin học Sinh viên Việt Nam (OLP)**, **International Collegiate Programming Contest (ICPC)** hay các kỳ thi trực tuyến toàn cầu, lập trình thi đấu (*Competitive Programming - CP*) đã trở thành môi trường tuyệt vời để sinh viên rèn luyện tư duy logic, kỹ năng phân tích và khả năng giải quyết vấn đề.

Với khát vọng tạo dựng một cộng đồng học thuật năng động tại Trường Đại học Quản lý và Công nghệ TP.HCM (UMT) và hỗ trợ sinh viên UMT tiếp cận *Competitive Programming* từ con số 0, **Câu lạc bộ Lập trình Ứng dụng (APC)** trực thuộc UMT - Khoa Công nghệ đã biên soạn bộ tài liệu này với mong muốn đồng hành cùng sinh viên từ những bước đi đầu tiên trong hành trình lập trình thi đấu.

Tài liệu này không chỉ là nguồn học tập, mà còn là cầu nối gắn kết các thành viên trong CLB APC, tạo ra một cộng đồng học thuật năng động, nơi các bạn sinh viên cùng nhau học hỏi, trao đổi và tiến bộ. Nhóm biên soạn hy vọng rằng với sự đồng hành của tài liệu này, mỗi bạn sinh viên đều có thể từng bước vươn lên, từ người mới bắt đầu đến thí sinh tự tin tham gia các kỳ thi lập trình, góp phần nâng cao vị thế của UMT trên các sân chơi học thuật trong và ngoài nước.

Trong quá trình biên soạn, nhóm đã nỗ lực hết mình để đảm bảo tính chính xác và tính thực tiễn. Tuy nhiên, do phạm vi kiến thức rộng lớn, khó tránh khỏi những thiếu sót. Chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến đóng góp từ bạn đọc để tài liệu ngày càng hoàn thiện hơn.

Thông tin liên hệ:

- Facebook: `https://www.facebook.com/apc.umt`
- Email: apc.sot@umt.edu.vn
- Số điện thoại: 0967 670 770 (An Khang)

TP. Hồ Chí Minh, Ngày 25 tháng 10 năm 2025

Nhóm biên soạn tài liệu APC

CHƯƠNG 1

TỔ HỢP (COMBINATORICS)

1.1 Lý thuyết

Tổ hợp là một ngành nghiên cứu toán học chuyên nghiên cứu về các trạng thái, các cấu hình của một sự vật, sự việc hoặc phương pháp nào đó.

1.1.1 Công cụ toán học cơ bản

Định nghĩa 1 (Giai thừa, chỉnh hợp, tổ hợp)**.** *Với $n \in \mathbb{N}$,* ***giai thừa*** $n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$ *(quy ước $0! = 1$).*

Chỉnh hợp $P(n,k) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$*: số cách chọn* có thứ tự *k phần tử từ n phần tử phân biệt.*

Tổ hợp $C(n,k) = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$*: số cách chọn* không thứ tự *k phần tử từ n phần tử phân biệt ($0 \le k \le n$).*

Tính chất 1 (Một số tính chất cơ bản)**.**

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \qquad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

1.1.2 Kỹ thuật tính toán trong lập trình thi đấu

Số học modulo (MOD nguyên tố) Trong đa số bài, MOD là số nguyên tố (ví dụ 10^9+7 hoặc 998 244 353). Với p nguyên tố và $a \not\equiv 0 \pmod p$:

$$a^{-1} \bmod p \equiv a^{p-2} \text{ (Fermat nhỏ).}$$

Chuẩn hoá số âm: `((x % MOD) + MOD) % MOD`.

Listing 1.1: Lũy thừa nhanh và nghịch đảo modulo (C++)

```cpp
const long long MOD = 1000000007LL;

long long modpow(long long a, long long e){
    long long r = 1 % MOD;
    a %= MOD;
    while(e){
        if(e & 1) r = (r * a) % MOD;
        a = (a * a) % MOD;
        e >>= 1;
    }
    return r;
}

long long modinv(long long a){
    a %= MOD; if(a < 0) a += MOD;
    return modpow(a, MOD - 2);
}
```

Tiền xử lý giai thừa & nghịch đảo giai thừa Sau $O(N)$ chuẩn bị, tính $\binom{n}{k}$ trong $O(1)$.

Listing 1.2: Precompute factorial / invfactorial; tính C(n,k)

```cpp
const int MOD = 1000000007;
const int MAXN = 2000000;

int fact[MAXN+1], invfact[MAXN+1];

```

```cpp
int modpow_int(int a, long long e){
    long long r = 1, b = (a % MOD + MOD) % MOD;
    while(e){
        if(e & 1) r = (r * b) % MOD;
        b = (b * b) % MOD;
        e >>= 1;
    }
    return (int)r;
}
void init_fact(){
    fact[0] = 1;
    for(int i=1;i<=MAXN;i++) fact[i] = (long long)fact[i-1]*i % MOD;
    invfact[MAXN] = modpow_int(fact[MAXN], MOD-2);
    for(int i=MAXN;i>=1;i--) invfact[i-1] = (long long)invfact[i]*i % MOD;
}
int C(int n, int k){
    if(k < 0 || k > n) return 0;
    return (long long)fact[n]*invfact[k]%MOD*invfact[n-k]%MOD;
}
```

1.2 Bài tập

Bài tập 1. Ball in Berland **link:** https://codeforces.com/problemset/problem/1475/C

Ở trường của Vasya đang chuẩn bị cho lễ tốt nghiệp. Một trong những tiết mục là buổi dạ hội, nơi các cặp nam–nữ sẽ khiêu vũ. Mỗi lớp phải cử *hai* cặp tham dự. Ở lớp của Vasya có a bạn nam và b bạn nữ muốn tham gia, nhưng không phải tất cả đều sẵn sàng nhảy cặp.

Cụ thể, bạn biết k cặp nam–nữ có thể ghép được. Hãy chọn **hai** cặp trong số đó sao cho **không người nào xuất hiện trong quá một cặp**.

Ví dụ, nếu $a = 3$, $b = 4$, $k = 4$ và các cặp $(1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 4)$ sẵn sàng nhảy (trong mỗi cặp, số của bạn nam đứng trước, rồi đến số của bạn nữ) thì các cách chọn hợp lệ gồm, chẳng hạn: $(1, 3)$ và $(2, 2)$; $(3, 4)$ và $(1, 3)$. Những cách không hợp lệ: $(1, 3)$ và $(1, 2)$ — nam số 1 xuất hiện hai lần; $(1, 2)$ và $(2, 2)$ — nữ số 2 xuất hiện hai lần.

Hãy đếm số cách chọn hai cặp thỏa điều kiện trên. Hai cách được coi là khác nhau nếu chúng gồm các cặp khác nhau.

Input

- Dòng đầu chứa một số nguyên t ($1 \le t \le 10^4$) — số bộ test.
- Với mỗi bộ test: dòng đầu chứa ba số nguyên a, b, k ($1 \le a, b, k \le 2 \cdot 10^5$) — số bạn nam, số bạn nữ và số cặp có thể ghép.
- Dòng thứ hai chứa k số $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ($1 \le a_i \le a$), trong đó a_i là số của bạn nam ở cặp thứ i.
- Dòng thứ ba chứa k số $b_1, b_2, \ldots, b_k$ ($1 \le b_i \le b$), trong đó b_i là số của bạn nữ ở cặp thứ i.
- Bảo đảm tổng các giá trị a, b và k qua tất cả các test không vượt quá $2 \cdot 10^5$.
- Bảo đảm mỗi cặp (a_i, b_i) xuất hiện nhiều nhất một lần trong một test.

Output

Với mỗi bộ test, in ra một số nguyên — số cách chọn hai cặp thỏa điều kiện.

Ví dụ

Sample Input	Sample Output
3 3 4 4 1 1 2 3 2 3 2 4 1 1 1 1 1 2 2 4 1 1 2 2 1 2 1 2	4 0 2

Phân tích bài toán

Gọi `boy[i]` và `girl[i]` lần lượt là chỉ số của bạn nam và bạn nữ trong cặp thứ i.

Bài toán yêu cầu đếm số cặp (i, j) với $i \neq j$ sao cho `boy[i]` $\neq$ `boy[j]` và `girl[i]` $\neq$ `girl[j]`. Nếu làm trực tiếp bằng cách duyệt tất cả các cặp (i, j) thì độ phức tạp $O(k^2)$, quá lớn khi $k \le 2 \cdot 10^5$.

Ý tưởng tối ưu như sau:

- Khi đang xét cặp thứ i, rõ ràng có $i - 1$ cặp trước đó có thể kết hợp với nó.
- Ta phải loại bỏ những cặp trùng bạn nam hoặc bạn nữ:

- Có `mb[boy[i]]` cặp trước đó có cùng bạn nam.
- Có `mg[girl[i]]` cặp trước đó có cùng bạn nữ.

- Như vậy sau khi loại bỏ, ta còn M cặp thỏa mãn. Với mỗi cặp trong M cặp, ta đều ghép được với cặp thứ i. Vậy số cặp hợp lệ có thể ghép với i là: $(i-1) - $ `mb[boy[i]]` $-$ `mg[girl[i]]`

Độ phức tạp mỗi test là $O(k \log k)$, phù hợp với ràng buộc đề bài.

Cài đặt

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
#define int long long
using namespace std;

signed main() {
    int t; cin >> t;
    while (t--) {
        int a, b, k; cin >> a >> b >> k;
        vector<int> boy(k + 1), girl(k + 1);
        for (int i = 1; i <= k; i++) {
            cin >> boy[i];
        }
        for (int i = 1; i <= k; i++) {
            cin >> girl[i];
        }
        map<int,int> mb, mg;
        mb[boy[1]]++, mg[girl[1]]++;
        int ans = 0;
        for (int i = 2; i <= k; i++) {
            int group = i - 1;
            group -= mb[boy[i]];
            group -= mg[girl[i]];
            ans += group;
            mb[boy[i]]++;
            mg[girl[i]]++;
        }
        cout << ans << endl;
    }
}
```

Bài tập 2. Binomial Coefficients **link:** https://cses.fi/problemset/task/1079

Đề bài:

Nhiệm vụ của bạn là tính n hệ số nhị thức theo modulo $10^9 + 7$. Hệ số nhị thức $\binom{a}{b}$ được tính theo công thức:

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}.$$

Giả sử a, b là số nguyên và $0 \le b \le a$.

Input

- Dòng đầu chứa một số nguyên n: số lượng phép tính cần thực hiện.
- Sau đó là n dòng, mỗi dòng gồm hai số nguyên a và b.

Output

In ra kết quả của từng hệ số nhị thức theo modulo $10^9 + 7$.

Ràng buộc

- $1 \le n \le 10^5$
- $0 \le b \le a \le 10^6$

Ví dụ

Sample Input	Sample Output
3	
5 3	10
8 1	8
9 5	126

Phân tích bài toán

Bài toán yêu cầu tính $\binom{a}{b} \pmod{10^9+7}$ với nhiều truy vấn.

Với giá trị a có thể lên tới 10^6, và số truy vấn n có thể tới 10^5. Nếu mỗi lần tính giai thừa lại từ đầu thì quá chậm với độ phức tạp tệ nhất là $10^5 \cdot (10^6 + 10^6)$.

Ý tưởng tối ưu:

- Tiền xử lý mảng giai thừa `fact[i]` $= i!$ (mod MOD) với i từ $0 \to N$, $N = 10^6$.
- Cần thêm nghịch đảo giai thừa. Vì MOD là số nguyên tố, áp dụng định lý Fermat:

$$x^{-1} \equiv x^{MOD-2} \pmod{MOD}.$$

- Trước tiên, tính `invfact[N]` $= (N!)^{-1}$ (mod MOD) bằng một lần lũy thừa nhanh.
- Sau đó xây dựng toàn bộ mảng `invfact` bằng công thức:

$$invfact[i-1] = invfact[i] \cdot i \pmod{MOD}, \quad 1 \le i \le N.$$

- Khi đó, với mỗi truy vấn:

$$\binom{a}{b} = \texttt{fact}[a] \cdot \texttt{invfact}[b] \cdot \texttt{invfact}[a-b] \pmod{MOD}.$$

Độ phức tạp:

- Tính `fact`: $O(N)$.
- Tính một lần lũy thừa nhanh: $O(\log MOD)$.
- Xây dựng `invfact`: $O(N)$.
- Mỗi truy vấn trả lời trong $O(1)$.

Vậy tổng độ phức tạp: $O(N + \log MOD + n)$

Cài đặt

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
#define int long long
using namespace std;
const int MOD = 1e9 + 7;

int quick_mod(int a, int n) {
        if (n == 0) return 1;
        int x = quick_mod(a, n / 2);
        x = x * x % MOD;
        if (n % 2 == 1) x = x * a % MOD;
        return x;
}

signed main() {
        vector<int> fact(1e6 + 1), inv_fact(1e6+1);
        fact[0] = 1;
        for (int i = 1; i <= 1e6; i++) {
                fact[i] = (fact[i - 1] * i) % MOD;
        }
        inv_fact[0] = 1;
        for (int i = 1; i <= 1e6; i++) {
                inv_fact[i] = quick_mod(fact[i], MOD - 2) % MOD;
        }

        int n; cin >> n;
        while (n--) {
                int n, k; cin >> n >> k;
                cout << (fact[n] % MOD * inv_fact[k] % MOD * inv_fact[n - k] % MOD) % MOD << endl;
        }
}
```

Bài tập 3. Distributing Apples **link:** https://cses.fi/problemset/task/1716

Đề bài:

Có n đứa trẻ và m quả táo sẽ được phân phát cho chúng. Nhiệm vụ của bạn là đếm số cách phân phát. Ví dụ, nếu $n = 3$ và $m = 2$, có 6 cách:

$$[0,0,2], [0,1,1], [0,2,0], [1,0,1], [1,1,0], [2,0,0].$$

Input

- Dòng duy nhất chứa hai số nguyên n và m.

Output

In ra số cách phân phát modulo $10^9 + 7$.

Ràng buộc

- $1 \le n, m \le 10^6$

Ví dụ

Sample Input	Sample Output
3 2	6

Phân tích bài toán

Xét bài toán chia kẹo Euler: Có N viên kẹo, K đứa trẻ, hãy đếm số cách chia sao cho **mỗi đứa phải có ít nhất 1** viên kẹo.
Ví dụ chia kẹo Euler: $N = 4$, $K = 3$. Những cách chia thỏa là: $[1, 1, 2], [1, 2, 1], [2, 1, 1]$.
Để trực quan hơn, tưởng tượng 4 viên kẹo được minh họa như sau (ký tự "o" đại diện 1 viên kẹo):

$$o \;\; o \;\; o \;\; o$$

Việc chia kẹo cho 3 đứa trẻ giống như đặt $K - 1 = 2$ vách ngăn vào các *khe* giữa các viên kẹo; mỗi phần được ngăn cách là số kẹo của một đứa trẻ, mỗi cách đặt cho ta một cách chia khác nhau. Ký hiệu "|" là vách ngăn:

$$o \mid o \mid o\, o$$

$$o\, o \mid o \mid o$$

$$o \mid o\, o \mid o$$

Như vậy, bài toán chia kẹo Euler đưa về: đếm số cách đặt $K - 1$ vách ngăn vào $N - 1$ khe kẹo. Suy ra đáp án là $\binom{N-1}{K-1}$.

Quay lại **bài toán hiện tại** (mỗi đứa có thể nhận 0): với ví dụ $N = 4$, $K = 3$, ta có thể hình dung như sau.
Ta *tạm* chia $(N + K)$ quả táo cho K đứa trẻ sao cho **mỗi đứa có ít nhất 1** quả. Sau khi chia xong, ta *lấy lại* mỗi đứa 1 quả.
Rõ ràng phép "cộng mỗi đứa 1 rồi trừ đi 1" này là tương ứng 1–1 với các cách chia ban đầu có thể nhận 0.
Do đó số cách cần tìm là số cách chia của tổng $N + K$, tức:

$$\binom{N + K - 1}{K - 1} = \binom{N + K - 1}{N}$$

Cài đặt

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define int long long
const int MOD = 1e9 + 7;
const int MAXN = 2e6;

int fact[MAXN+1], invfact[MAXN+1];

int power(int a, int b) {
    int res = 1;
    while (b) {
        if (b & 1) res = res * a % MOD;
        a = a * a % MOD;
        b >>= 1;
    }
    return res;
}

signed main() {
    fact[0] = 1;
    for (int i = 1; i <= MAXN; i++) fact[i] = fact[i-1] * i % MOD;

    invfact[MAXN] = power(fact[MAXN], MOD-2);
    for (int i = MAXN; i > 0; i--) invfact[i-1] = invfact[i] * i % MOD;
    int N, K; cin >> K >> N;
    cout << fact[N + K - 1] * invfact[K - 1] % MOD * invfact[N + K - 1 - (K - 1)] % MOD;
}
```

Bài tập 4. Sum of Divisors **link:** https://cses.fi/problemset/task/1082

Đề bài:

Kí hiệu $\sigma(n)$ là tổng các ước của số nguyên n. Ví dụ: $\sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$.
Nhiệm vụ của bạn là tính:

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma(i) \pmod{10^9 + 7}.$$

Input

- Dòng duy nhất chứa một số nguyên n.

Output
In ra giá trị $\sum_{i=1}^{n} \sigma(i)$ theo modulo $10^9 + 7$.
Ràng buộc

- $1 \leq n \leq 10^{12}$

Ví dụ

Sample Input	Sample Output
5	21

Phân tích bài toán
Vì $1 \leq n \leq 10^{12}$, ta không thể áp dụng cách duyệt trực tiếp theo n vì độ phức tạp quá lớn. Ta phải tìm cách nhóm các phần tử lại để tính nhanh.

Xét ví dụ $n = 4$:

- $f(1) = 1$
- $f(2) = 1 + 2$
- $f(3) = 1 + 3$
- $f(4) = 1 + 2 + 4$

Nếu nhìn theo đóng góp của từng ước số:

- Ước 1 đóng góp 4 lần.
- Ước 2 đóng góp 2 lần.
- Ước 3 đóng góp 1 lần.
- Ước 4 đóng góp 1 lần.

Tổng sẽ là $4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 15$. Tổng quát hơn, công thức có dạng: $S(n) = \sum_{d=1}^{n} d \cdot \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$.

Xét $\sqrt{n}$, với $i \leq \sqrt{n}$ thì ta có thể tính trực tiếp $d \cdot \lfloor n/d \rfloor$. Nhưng với d lớn hơn $\sqrt{n}$, ta quan sát rằng giá trị $\lfloor n/d \rfloor$ lặp lại nhiều lần, nên ta gom nhóm để tính nhanh.
Chia bài toán làm 2 phần:

- **Phần 1:** với $d = 1 \to \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Khi đó số lần d đóng góp là $\lfloor n/d \rfloor$. Ta cộng: ans $+= d \cdot \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$.
- **Phần 2:** với $d > \sqrt{n}$. Đặt $q = \lfloor n/d \rfloor$, khi đó tồn tại cả một đoạn $d \in [L, R]$ có cùng giá trị q. Cụ thể:

$$L = \left\lfloor \frac{n}{q+1} \right\rfloor + 1, \quad R = \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor.$$

  Toàn bộ các d trong đoạn $[L, R]$ đều có cùng số lần đóng góp là q. Vậy: ans $+= q \cdot \sum_{d=L}^{R} d = q \cdot \left(\frac{R(R+1)}{2} - \frac{L(L-1)}{2} \right)$.

Ví dụ: $n = 38$, $\lfloor \sqrt{38} \rfloor = 6$.

- Với $q = 1$: $d \in [20, 38]$, mỗi d xuất hiện 1 lần.
- Với $q = 2$: $d \in [13, 19]$, mỗi d xuất hiện 2 lần.
- Với $q = 3$: $d \in [10, 12]$, mỗi d xuất hiện 3 lần.
- Với $q = 4, 5, 6$: tính tương tự.

Kết hợp 2 phần, ta thu được kết quả bài toán.

Cài đặt

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define int long long
const int MOD = 1e9 + 7;

int power(int a, int b) {
    int res = 1;
    while (b > 0) {
        if (b & 1) res = res * a % MOD;
        a = a * a % MOD;
```

```
        b >>= 1;
    }
    return res;
}

signed main() {
    int n; cin >> n;
    int sN = sqrt(n);
    int ans = 0;

    int inv2 = power(2, MOD - 2);

    for (int i = 1; i <= sN; i++) {
        (ans += (n / i) % MOD * i % MOD) %= MOD;
        int l = n / (i + 1) + 1, r = n / i;
        if (l <= sN) l = sN + 1;
        int sum = ((r % MOD * ((r+1) % MOD) % MOD * inv2 % MOD)
                   - ((l-1) % MOD * (l % MOD) % MOD * inv2 % MOD) + MOD) % MOD;
        (ans += i % MOD * sum % MOD) %= MOD;

    }
    cout << ans;
}
```

Bài tập 5. SPC2 **link:** Spring Contest 2020

Pokemon Go là một trò chơi rất nổi tiếng vào những năm 2015–2016. Khi chơi, các loài Pokemon sẽ xuất hiện trên bản đồ và người chơi lần lượt đi thu phục chúng. Huy là một tín đồ cuồng trò chơi này và cậu ấy muốn thu phục toàn bộ N con Pokemon. Xem con đường gần nhà Huy là một đường thẳng, nhà Huy nằm ở điểm S (coi như điểm 0). N con Pokemon sẽ xuất hiện tại các điểm cách S lần lượt là $a_i > 0$ (khác nhau). Huy biết trước các vị trí (khoảng cách) a_i nhưng **không biết thứ tự xuất hiện**. Vì vậy sẽ có đúng $N!$ thứ tự (hoán vị) xuất hiện.

Khi một Pokemon xuất hiện ở vị trí cách S là a_x, Huy lập tức chạy đến đó để bắt. Sau khi bắt xong, một Pokemon khác xuất hiện ở vị trí cách S là a_y, và Huy chạy tiếp từ vị trí hiện tại đến đó. Nếu hai lần liên tiếp là $a_x \to a_y$ thì quãng đường Huy chạy thêm là $|a_x - a_y|$. Tính cả bước đầu tiên từ $S(=0)$ đến con đầu tiên.

Gọi $L(\pi)$ là tổng quãng đường Huy phải chạy theo một thứ tự xuất hiện π của N con. Yêu cầu: **tính trung bình cộng** các giá trị $L(\pi)$ trên toàn bộ $N!$ thứ tự, rồi **rút gọn phân số**. Nếu phân số tối giản là $a : b$ thì in ra hai số nguyên dương a và b đó.

Ví dụ minh họa: Với $a = \{2, 3, 5\}$, tất cả 6 thứ tự cho tổng các quãng đường lần lượt là $5, 7, 7, 8, 9, 8$.

- S -> 1 -> 2 -> 3. Độ dài: $|2 - 0| + |3 - 2| + |5 - 3| = 5$
- S -> 1 -> 3 -> 2. Độ dài: $|2- 0| + |5 - 2| + |3 - 5| = 7$
- S -> 2 -> 1 -> 3. Độ dài: $|3 - 0| + |2 - 3| + |5 - 2| = 7$
- S -> 2 -> 3 -> 1. Độ dài: $|3 - 0| + |5 - 3| + |2 - 5| = 8$
- S -> 3 -> 1 -> 2. Độ dài: $|5 - 0| + |2 - 5| + |2 - 3| = 9$
- S -> 3 -> 2 -> 1. Độ dài: $|5 - 0| + |3 - 5| + |2 - 3| = 8$

Trung bình $= \frac{44}{6} = \frac{22}{3}$ nên in `22 3`.

Input

- Dòng đầu chứa số nguyên dương T $(1 \le T \le 40)$ — số bộ dữ liệu.
- Với mỗi bộ dữ liệu:
  - Dòng 1: số nguyên dương N — số Pokemon.
  - Dòng 2: N số nguyên dương *khác nhau* $a_1, a_2, \ldots, a_N$ $(1 \le a_i \le 10^6)$ — khoảng cách từ S đến từng điểm xuất hiện.

Output

Gồm T dòng. Dòng thứ i in hai số nguyên dương — tử số và mẫu số của **phân số tối giản** biểu diễn quãng đường trung bình của bộ dữ liệu thứ i.

Ràng buộc

- Small Dataset: $1 \le N \le 8$.
- Large Dataset: $1 \le N \le 100000$.
- Trong mọi dataset: $1 \le a_i \le 10^6$, các a_i **đôi một khác nhau**.

Ví dụ

Sample Input	Sample Output
4 1 19 2 2 10 3 2 3 5 20 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20	19 1 14 1 22 3 287 2

Giải thích ví dụ

- Ví dụ 1: chỉ có một điểm cách 0 là 19, đường đi duy nhất $S \to 19$, trung bình $= 19 : 1$.
- Ví dụ 2: hai thứ tự cho tổng 10 và 18, trung bình $= \frac{28}{2} = 14 : 1$.
- Ví dụ 3: như mô tả ở đề, trung bình $= 22 : 3$.
- Ví dụ 4: dùng để tự kiểm tra, không xuất hiện trong Small Dataset.

Phân tích bài toán

Xét mảng $[\_, \_, \_, \ldots, \_]$ có N phần tử. Số cách đặt hai phần tử (a, b) liền kề trong mảng là $2 \cdot (N-1)!$. Trong mảng N phần tử, có $\frac{N(N-1)}{2}$ cặp có thể hình thành. Mỗi cặp trong đó xuất hiện đúng $2 \cdot (N-1)!$ lần, và mỗi lần đóng góp giá trị $|a-b|$. Do đó,

$$\text{Tổng từ các cặp } = 2 \cdot (N-1)! \sum_{i<j} |a_i - a_j|.$$

Xét đóng góp từ S đến phần tử đầu tiên trên đường đi:

- Mỗi a_i có thể đứng đầu dãy, đóng góp giá trị là $|0 - a_i| = a_i$.
- Với a_i đứng đầu, số hoán vị là $(n-1)!$
- Vậy, tổng từ các cặp này: $(n-1)! \sum_{i=1}^{n} a_i$

Vậy, ta có kết quả bài toán là:

$$\frac{(n-1)! \sum a_i}{n!} + \frac{2 \cdot (n-1)! \sum_{i<j} |a_i - a_j|}{n!} = \frac{(n-1)! \sum a_i + 2 \cdot (n-1)! \sum_{i<j} |a_i - a_j|}{n!} = \frac{\sum a_i + 2 \sum_{i<j} |a_i - a_j|}{n}$$

Để tính nhanh $\sum_{i<j} |a_i - a_j|$, trước hết ta sắp xếp mảng a theo thứ tự tăng dần để loại bỏ dấu giá trị tuyệt đối. Khi đó:

$$\begin{aligned}\sum_{i<j} (a_j - a_i) = &\left[(a_n - a_{n-1}) + (a_n - a_{n-2}) + \cdots + (a_n - a_1)\right] \\ &+ \left[(a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_{n-1} - a_{n-3}) + \cdots + (a_{n-1} - a_1)\right] \\ &+ \cdots \\ &+ (a_2 - a_1).\end{aligned}$$

Quan sát, mỗi a_i xuất hiện dương $(i-1)$ lần (khi đứng sau $a_1, \ldots, a_{i-1}$), và mỗi phần tử a_j với $j < i$ xuất hiện âm đúng một lần. Do đó, đóng góp của a_i vào tổng là

$$(i-1)\, a_i - \sum_{k=1}^{i-1} a_k.$$

Tóm lại, kết quả bài toán sau khi sắp xếp mảng a tăng dần theo giá trị là:

$$\frac{\sum a_i + 2(i-1)\, a_i - \sum_{k=1}^{i-1} a_k}{n}$$

Cài đặt

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
#define int long long
#define endl "\n"
using namespace std;

signed main() {
    int t; cin >> t;
    while (t--) {
```

```
        int n; cin >> n;
        vector<int> a(n + 1);
        for (int i = 1; i <= n; i++) cin >> a[i];

        sort(a.begin() + 1, a.end());

        vector<int> f(n + 1, 0);
        for (int i = 1; i <= n; i++) f[i] = f[i-1] + a[i];

        int A = 0;
        for (int i = 1; i <= n; i++) A += a[i];

        int B = 0;
        for (int i = 1; i <= n; i++) {
            B += (i - 1) * a[i] - f[i-1];
        }
        int num = A + 2 * B, den = n;
        int g = gcd(num, den);
        num /= g;
        den /= g;
        cout << num << "␣" << den << endl;
    }
}
```

Bài tập 6. Lộ Trình Diễu Hành Mừng Quốc Khánh 2025 **link:** Tham khảo đề thi THT Tây Ninh 2022

Năm 2025 đánh dấu cột mốc thiêng liêng: tròn 80 năm Cách mạng Tháng Tám và Quốc khánh 2/9. Trong buổi sớm tinh khôi ngày 2/9/2025, tại Quảng trường Ba Đình, Thủ đô Hà Nội, hàng vạn con tim cùng hòa nhịp trong Lễ kỷ niệm và diễu binh - diễu hành cấp quốc gia. Từ 6h30 sáng, không khí trang nghiêm lan tỏa với những nghi thức trọng thể: rước đuốc truyền thống, thắp sáng đài lửa khát vọng dân tộc - biểu tượng bất diệt của tinh thần Việt Nam. Ngay sau đó, khúc tráng ca diễu binh trên bộ hùng tráng ngân vang khắp các nẻo đường, hòa quyện cùng màn diễu binh trên biển từ vịnh Cam Ranh, được truyền hình trực tiếp về Quảng trường, như một bản giao hưởng của sức mạnh dân tộc trên cả đất liền và biển trời. Với quy mô khoảng 40.000 người, 87 khối tham dự, sự kiện không chỉ làm nức lòng hàng triệu người dân trong nước mà còn để lại ấn tượng sâu sắc trong mắt bạn bè quốc tế. Biển cờ đỏ sao vàng tung bay rực rỡ, âm vang bước chân và khí thế hào hùng đã tạo nên bức tranh lịch sử sống động, khắc sâu niềm tự hào và khát vọng vươn lên của dân tộc Việt Nam.

Giữa biển cờ hoa và không khí hào hùng ấy, Bruce - một sinh viên UMT năng động, yêu nước - đang theo dõi diễu hành. Bruce rất ấn tượng khi thấy các đoàn xe và khối quần chúng nối tiếp nhau qua từng tuyến phố, rồi khép vòng để trở lại điểm ban đầu. Là một người yêu toán, Bruce nảy ra trong đầu một hình ảnh rất toán học: nếu coi thành phố như một mạng lưới giao thông, mỗi ngã tư là một đỉnh, mỗi tuyến phố là một cạnh, thì một vòng diễu hành chẳng khác nào một chu trình trong đồ thị. Anh bắt đầu suy nghĩ xem vòng diễu hành dài nhất có thể trông như thế nào.

Mạng giao thông của thành phố có N ngã tư. Giữa hai ngã tư có tối đa một tuyến phố hai chiều nối trực tiếp. Một vòng diễu hành được định nghĩa như sau:

- Xuất phát từ một ngã tư, đi qua một số tuyến phố và quay trở lại đúng ngã tư ban đầu.
- Không ngã tư nào (trừ điểm xuất phát/đích) được đi qua hai lần.
- Không tuyến phố nào được đi qua hai lần.

Thành phố có thể có nhiều vòng diễu hành như vậy, nhưng để đảm bảo an toàn, ta giả định rằng mỗi tuyến phố thuộc về nhiều nhất một vòng diễu hành hợp lệ.

Nhiệm vụ: Hãy xác định số lượng tuyến phố lớn nhất mà một vòng diễu hành hợp lệ có thể đi qua. Nếu không tồn tại vòng nào, in ra 0.

Input

- Dòng đầu: hai số nguyên N, M — số ngã tư và số tuyến phố ($1 \le N \le 5000$, $1 \le M \le 100000$).
- M dòng tiếp theo: mỗi dòng gồm hai số nguyên u, v ($1 \le u, v \le N$), mô tả một tuyến phố nối ngã tư u và v.

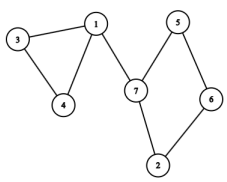
Output

Một số nguyên duy nhất: số tuyến phố tối đa của vòng diễu hành hợp lệ dài nhất.

Ví dụ:

Sample Input	Sample Output
7 8 3 4 1 4 1 3 7 1 2 7 7 5 5 6 6 2	4

Giải thích: Một vòng hợp lệ: $2 \to 7 \to 5 \to 6 \to 2$.



CHƯƠNG 2

QUY HOẠCH ĐỘNG + TỔ HỢP

Contents

CHƯƠNG 3

XÁC SUẤT (PROBABILITIES)

CHƯƠNG 4

KỲ VỌNG (EXPECTED VALUE)

CHƯƠNG 5

LÝ THUYẾT TRÒ CHƠI (GAME THEORY)

CHƯƠNG 6

MỘT SỐ ĐỊNH LÝ VÀ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH TOÁN HỌC

CHƯƠNG 7

INCLUSIVE - EXCLUSIVE

CHƯƠNG 8

GAME THEORY SOLVING BY GRUNDY NUMBER

CHƯƠNG 9

EULER TOTIENT FUNCTION

CHƯƠNG 10

MOBIUS FUNCTION

CHƯƠNG 11

GEOMETRY

CHƯƠNG 12

CONVEX HULL + OPTIMIZE DP BY CONVEX HULL

CHƯƠNG 13

FFT