Projet avec R SY01

À rendre sur moodle avant le 10/01/2025 dans le dépôt prévu à cet effet. Vous pouvez travailler à deux ou à trois mais vous devez déposer chacun un rendu, même s'ils sont identiques. Vous devez indiquer sur chacun des rendus tous les étudiants qui ont contribué à ce travail.

SY01

2024-12-02

Processus de Galton-Watson

Le processus de Galton-Walton est un modèle de dynamique de population.

De nombreux phénomènes d'évolution de population peuvent être modélisés en première approximation par un processus de Galton-Walton (réactions nucléaires en chaine, étude des gènes, survivance des noms de famille…).

Soit X une variable aléatoire définie sur $\mathbb{N}$ de loi $\mathbb{P}_X$. Considérons $(X_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$, une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant $\mathbb{P}_X$, la loi de X.

Nous définissons la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} Z_0 &= 1 \\ Z_{n+1} &= \sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Deux probabilités sont particulièrement intéressantes à calculer :

$$\pi_n = \mathbb{P}[Z_n = 0]$$

la probabilité que la variable Z_n soit égale à 0 et

$$\mathbb{P}_{\text{Extinction}} = \mathbb{P}[\exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } Z_n = 0]$$

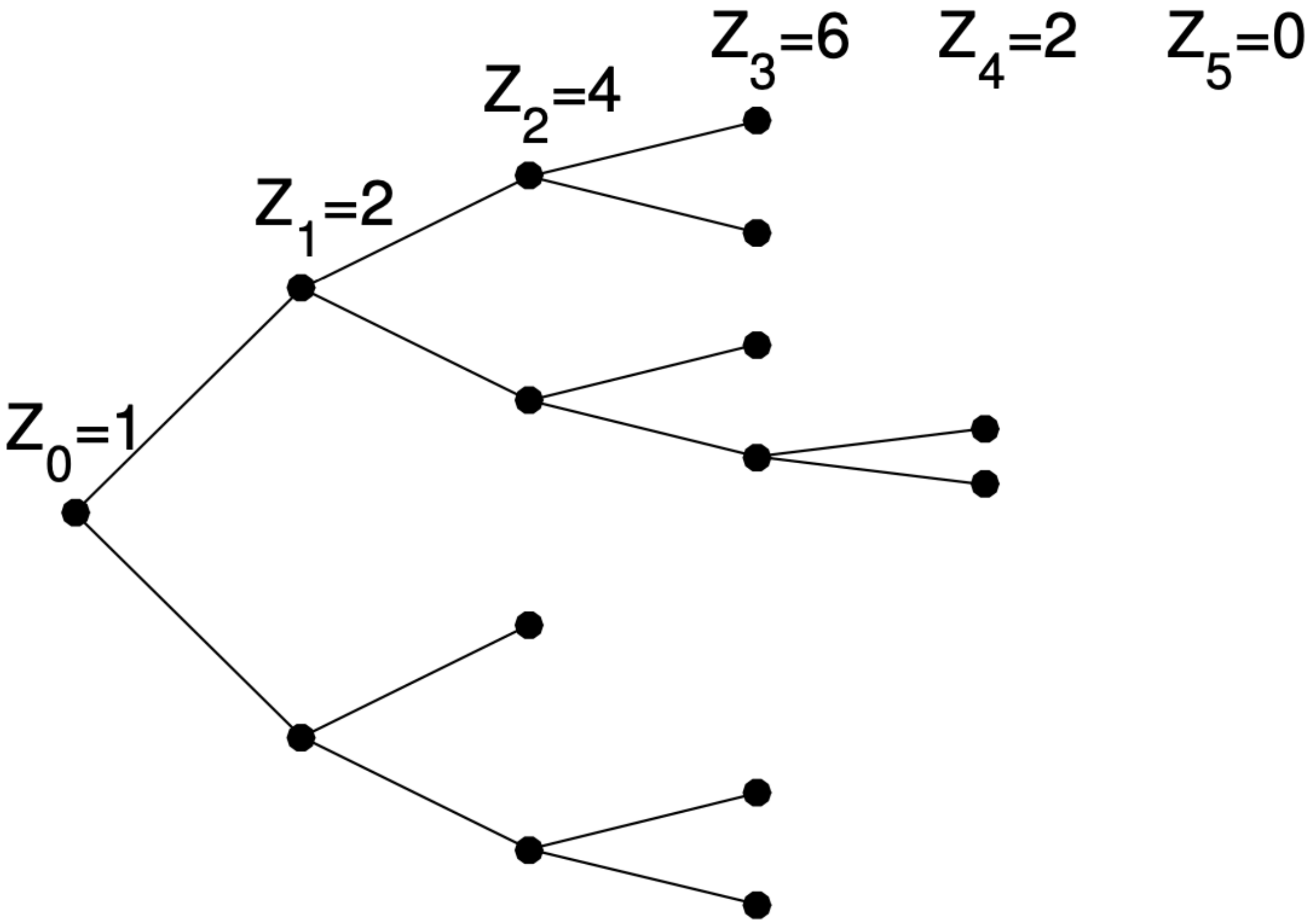
la probabilité qu'il existe un entier n pour lequel la variable Z_n est constante et égale à 0.

Exemple d'utilisation du processus de Galton-Watson.

Des particules sont capables de générer des particules de la même famille. Chaque particule a la probabilité p_k d'engendrer k particules indépendantes et cette probabilité est constante au cours des générations.

Une particule originale représente la génération 0. Les descendants de la n-ième génération forment la $(n+1)$-ième génération. Z_n est le nombre d'individus à la génération n. Chaque individu i de la n-ième génération a un nombre $X_{i,n}$ de descendants (1iZ_n). Comme les $X_{i,n}$ sont i.i.d., celui implique que chaque individu a la même distribution du nombre de ses descendants.

Dans la figure ci-dessous, la loi de $X_{i,n}$ est telle que $X_{i,n}/2$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, c'est-à-dire $\mathbb{P}[X_{i,n}/2 = 1] = 1/2$ et $\mathbb{P}[X_{i,n}/2 = 0] = 1/2$. La population évolue d'un seul individu au départ, à deux à la première génération ($n = 1$), à quatre à la seconde génération ($n = 2$), à six à la troisième génération ($n = 3$), à deux à la quatrième génération ($n = 4$) et à zéro à la cinquième génération ($n = 5$).



Dans cet exemple, $\pi_n = \mathbb{P}[Z_n = 0]$ est la probabilité d'extinction à la génération n et $\mathbb{P}_{\text{Extinction}}$ est la probabilité d'extinction de la population.

Dans ce projet, nous allons étudier la suite (Z_n), en particulier s'il existe un entier n tel que $Z_n = 0$, c'est-à-dire si la population s'éteint.

Exercice 1 - Étude du cas particulier précédent

Dans cet exercice, la loi de $X_{i,n}$ est telle que $X_{i,n}/2$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, c'est-à-dire $\mathbb{P}[X_{i,n} = 1] = 1/2$ et $\mathbb{P}[X_{i,n} = 0] = 1/2$.

1. Construire une fonction avec `R`, nommée `generation_n_exo1`, qui permet de simuler l'état de la population à la génération n.
2. Construire une fonction avec `R`, nommée `taille_moyenne_n_exo1`, qui permet de calculer la valeur approchée de la taille moyenne de la population à la génération n.
3. Calculer, avec `R`, une valeur approchée de $\pi_n = \mathbb{P}[Z_n = 0]$.
4. Calculer, avec `R`, une valeur approchée de $\mathbb{P}_{\text{Extinction}}$.
5. Calculer, avec `R`, une valeur approchée du nombre moyen de générations avant d'observer l'extinction de la population.

Exercice 2 - Une réaction en chaîne

Dans cet exercice, la loi de $X_{i,n}$ est une loi de binomiale $\mathcal{B}(3, p)$, avec $0 < p < 1$.

6. Construire une fonction avec `R` , nommée `generation_n_exo2` , qui permet de simuler l'état de la population à la génération n.
7. Construire une fonction avec `R` , nommée `taille_moyenne_n_exo2` , qui permet de calculer la valeur approchée de la taille moyenne de la population à la génération n.
8. Utiliser les fonctions précédentes pour montrer que :
   - Si $p < 1/3$, alors il y a extinction de la réaction en chaîne.
   - Si $p > 1/3$, alors la réaction en chaîne n'est pas contrôlée et elle "explose".
   - Si $p = 1/3$, que se passe-t-il ?
9. Calculer, avec `R` et pour $p \in 0,1; 0,15; 0,2; 0,25; 0,3; 0,35; 0,4; 0,45; 0,5$, une valeur approchée de $\pi_n = \mathbb{P}[Z_n = 0]$.
10. Calculer, avec `R` et pour $p \in 0,1; 0,15; 0,2; 0,25; 0,3; 0,35; 0,4; 0,45; 0,5$, une valeur approchée de $\mathbb{P}_{\text{Extinction}}$.
11. Calculer, avec `R` et pour $\lambda \in 0,1; 0,15; 0,2; 0,25; 0,3$, une valeur approchée du nombre moyen de générations avant d'observer l'extinction de la réaction en chaîne.

Exercice 3 - Avec une loi de Poisson

Dans cet exercice, la loi de $X_{i,n}$ est une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda > 0$.

12. Construire une fonction avec `R` , nommée `generation_n_exo3` , qui permet de simuler l'état de la population à la génération n.
13. Construire une fonction avec `R` , nommée `taille_moyenne_n_exo3` , qui permet de calculer la valeur approchée de la taille moyenne de la population à la génération n.
14. Utiliser les fonctions précédentes pour montrer que :
    - Si $\lambda < 1$, alors il y a **sûrement** extinction de la lignée, c'est-à-dire $\mathbb{P}_{\text{Extinction}} = 1$.
    - Si $\lambda > 1$, alors la taille de la population n'est pas contrôlée et elle "explose".
    - Si $\lambda = 1$, que se passe-t-il ?
15. Calculer, avec `R` et pour $\lambda \in 0,25; 0,5; 0,75; 1; 1,5; 2; 5$, une valeur approchée de $\pi_n = \mathbb{P}[Z_n = 0]$.
16. Calculer, avec `R` et pour $\lambda \in 0,25; 0,5; 0,75; 1; 1,5; 2; 5$, une valeur approchée de $\mathbb{P}_{\text{Extinction}}$.
17. Calculer, avec `R` et pour $\lambda \in 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9$, une valeur approchée de du nombre moyen de générations avant d'observer l'extinction de la lignée.