

## 第 10 章 数论

### 1. 【NOIP2010】哥德巴赫猜想

哥德巴赫猜想是指任一大于 2 的偶数都可以写成两个质数之和。迄今为止,这仍然是一个著名的世界难题,被誉为数学王冠上的明珠。试编写程序,验证任一大于 2 且不超过  $n$  的偶数都能写成两个质数之和。

```
#include<iostream>
using namespace std;
```

```
int main() {
```

```
    const int SIZE=1000;
```

```
    int n,r,p[SIZE],i,j,k,ans;
```

```
    bool tmp;
```

$p[n]$  存储  $n$  以内所有的质数

```
    cin>>n;
```

```
    r=1;
```

```
    p[1]=2;
```

```
    for (i=3;i<=n;i++){
```

```
        ①;
```

```
        for (j=1;j<=r;j++){
```

```
            if (i% ② ==0){
```

```
                tmp=false;
```

```
                break;
```

```
            }
```

```
            if (tmp){
```

```
                r++;
```

```
                ③;
```

```
            }
```

```
    }
```

查找  $n$  以内所有的质数

```
    ans=0;
```

```
    for (i=2;i<=n/2;i++){
```

```
        tmp=false;
```

```
        for (j=1;j<=r;j++){
```

```
            for (k=j;k<=r;k++){
```

```
                if (i+i== ④ ){
```

```
                    tmp=true;
```

```
                    break;
```

```
            }
```

```
            if (tmp)
```

```
                ans++;
```

```
        }
```

找已找到的质数是否符合

```
    cout<<ans<<endl;
```

```
    return 0;
```

```
}
```

若输入  $n$  为 2010, 则输出 ⑤ 时表示验证成功, 即大于 2 且不超过 2010 的偶数都满足哥德巴赫猜想。

● 选择题

(1) ①处应填( C )。

A.  $k=0$

C.  $\text{tmp}=\text{true}$

B.  $p[i]=i$

D.  $p[i]=r$

(2) ②处应填( A )。

A.  $p[j]$

C.  $n$

B.  $p[n]$

D.  $j$

(3) ③处应填( A )。

A.  $p[r]=i$

C.  $\text{tmp}=\text{true}$

B.  $p[j]=i$

D.  $\text{ans}++$

(4) ④处应填( B )。

A.  $j+k$

C.  $p[j]$

B.  $p[j]+p[k]$

D.  $p[k]$

(5) ⑤处应填( D )。

A. 2010

C. 2009

B. 1005

D. 1004

## 2. 【NOIP2017】快速幂

请完善下面的程序,该程序使用分治法求  $x^p \bmod m$  的值。

输入:三个不超过 10000 的正整数  $x, p, m$ 。

输出: $x^p \bmod m$  的值。

提示:若  $p$  为偶数,  $x^p = (x^2)^{p/2}$ ; 若  $p$  为奇数,  $x^p = x * (x^2)^{(p-1)/2}$ 。

```
#include<iostream>
using namespace std;
int x,p,m,i,result;
int main(){
    cin>>x>>p>>m;
    result= ① ;
    while ( ② ){
        if (p%2==1)
            result= ③ ;
        p/=2;
        x= ④ ;
    }
    cout<< ⑤ <<endl;
    return 0;
}
```

### ● 选择题

(1) ①处应填( B )。

A. 0

C.  $p/2$

B. 1

D.  $p-1/2$

(2) ②处应填( C )。

A.  $p$

C.  $p/2 \neq 0$

B.  $x$

D.  $A \& C$

(3) ③处应填( C )。

A.  $result \bmod m$

C.  $result * x \bmod m$

B.  $x \bmod m$

D.  $result * result$

(4) ④处应填( B )。

A.  $x * x$

C.  $x \bmod m$

B.  $x * x \bmod m$

D.  $x * x \bmod result$

(5) ⑤处应填( D )。

A.  $x$

C.  $p$

B.  $m$

D.  $result$

### 3. 【NOIP2017】大整数除法

给定两个正整数  $p$  和  $q$ , 其中  $p$  不超过  $10^{100}$ ,  $q$  不超过 100000, 求  $p$  除以  $q$  的商和余数。

输入: 第一行是  $p$  的位数  $n$ , 第二行是正整数  $p$ , 第三行是正整数  $q$ 。

输出: 两行, 分别是  $p$  除以  $q$  的商和余数。

```
#include<iostream>
using namespace std;
int p[100];
int n,i,q,rest;
char c;
int main(){
    cin>>n;
    for (i=0;i<n;i++){
        cin>>c;
        p[i]=c-'0';
    }
    cin>>q;
    rest= ① ;
    i=1;
    while ( ② && i<n){
        rest=rest*10+p[i];
        i++;
    }
    if (rest<q)
        cout<<0<<endl;
    else {
        cout<< ③ ;
        while (i<n){
            rest= ④ ;
            i++;
            cout<<rest/q;
        }
        cout<<endl;
    }
    cout<< ⑤ <<endl;
    return 0;
}
```

#### ●选择题

(1) ①处应填( )。

A.  $q[0]$

C.  $p[0]$

B.  $n$

D. 0

(2) ②处应填( )。

A.  $rest<q$

C.  $rest<=q$

B.  $rest!=q$

D.  $rest$

(3) ③处应填( )。

A.  $rest/q$

C.  $rest$

B.  $rest\%q$

D.  $rest\&q$

(4)④处应填( )。

A.  $\text{pow}(i, 10) \% q + p[i]$

C.  $\text{rest} \% q * 10 + p[i]$

B.  $\text{rest} * 10 + p[i] \% q$

D.  $\text{rest} + p[i]$

(5)⑤处应填( )。

A.  $\text{rest} - q$

C.  $\text{rest} | q$

B.  $\text{rest}$

D.  $\text{rest} \% q$

#### 4. 【NOIP2018】最大公约数之和

下列程序想要求解整数  $n$  的所有约数两两之间最大公约数的和对 10007 求余后的值，试补全程序。

举例来说，4 的所有约数是 1, 2, 4。1 和 2 的最大公约数为 1；2 和 4 的最大公约数为 2；1 和 4 的最大公约数为 1。于是答案为  $1 + 2 + 1 = 4$ 。

要求：`getDivisor` 函数的复杂度为  $O(\sqrt{n})$ ，`gcd` 函数的复杂度为  $O(\log \max(n, m))$ 。

```
#include<iostream>
using namespace std;
const int N=110000, P=10007;
int n;
int a[N], len;
int ans;
void getDivisor() {
    len=0;
    for (int i=1; ① <=n; ++i)
        if (n%i==0) {
            a[++len]=i;
            if (② !=i) a[++len]=n/i;
        }
}
int gcd(int a, int b) {
    if (b==0) {
        ③ ;
    }
}
```



```

    }
    return gcd(b, ④);
}
int main() {
    cin >> n;
    getDivisor();
    ans = 0;
    for (int i = 1; i <= len; ++i) {
        for (int j = i + 1; j <= len; ++j) {
            ans = ( ⑤ ) % P;
        }
    }
    cout << ans << endl;
    return 0;
}

```

### ● 选择题

(1) ①处应填( )。

A.  $i * 2$

B.  $i * i$

C.  $i + i$

D.  $i * i * i$

(2) ②处应填( )。

A.  $n$

B.  $n / i$

C.  $n \% 2$

D.  $n - i$

(3) ③处应填( )。

A. `return a`

B. `return b`

C. `return a + b`

D. `return a - b`

(4) ④处应填( )。

A.  $a / b$

B.  $a$

C.  $a \% b$

D.  $b / a$

(5) ⑤处应填( )。

A. `gcd(a[i+1], a[j])`

B. `ans + gcd(a[i+1], a[j-1])`

C. `gcd(a[i], a[j])`

D. `ans + gcd(a[i], a[j])`