第7节 离散数学

一、逻辑运算

逻辑运算又称布尔运算。它是数字符号化的逻辑推演法,包括联合、相交、相减。布尔是19世纪最重要的数学家之一,出版了《逻辑的数学分析》,通过使用数学方法研究逻辑问题,成功地建立了逻辑运算。

进行逻辑运算,需要先掌握各种运算,注意运算符的优先级比较,做题时要细心。

(一)常用的逻辑运算符

1.非:! 逻辑非,是逻辑运算中的一种,就是指本来值的反值。比如我们定义一个布尔型变量a,它的初值为true,!a的值就变成了false,所以!1100的值为0011。

2.与:& 逻辑与,比如1001&1100,就是按位相与,与运算只要都是1的进行运算结果才是1,1001&1100的结果是1000。

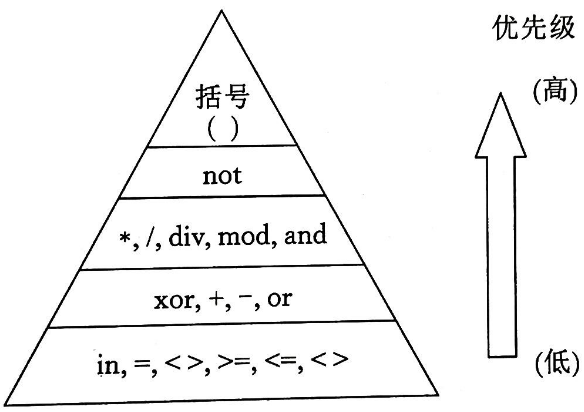
3.或:|,逻辑或,比如1001|1100,就是按位相或,或运算只要参与运算的有1,结果对应位就是1,所以1001|1100的结果是1101。

4.异或:^,异或运算,比如1001^1100,就是按位异或,异或运算只要参与运算的两个数对应位上的数不一样结果就是1,否则为0,所以1001^1100的结果是0101。

在初赛的时候,经常以选择题的形式出现,$\land$表示与,$\lor$表示或,$\neg$表示非。

(二)运算优先级比较

括号>非>与>或、异或(或和异或是同级别的),如果加入加减乘除,就是以下这样:



注意:同级的运算符不分高低,计算时按照从左到右运算。

下面我们通过试题分析来讲解逻辑运算的应用。

例题1. 若A=True,B=False,C=True,D=False,以下逻辑运算表达式真的有(　　)。

A. $(A\land B)\lor(C\land D\lor\neg A)$　　B. $((\neg A\land B)\lor C)\land\neg B$

C. $(B\lor C\lor D)\lor D\land A$　　D. $A\land(D\lor\neg C)\land B$

题解: 一个个算结果,比如A选项$(A\land B)\lor(C\land D\lor\neg A)$,根据运算级的比较,我们可以定下运算的顺序,然后按运算顺序计算结果。注意,这类题是有小技巧的。比如A选项可以先看中间的$\lor$,为什么呢?因为$\lor$的左右有一边是真就行,可以不去看另一边。

A选项的结果是:$(A\land B)\lor(C\land D\lor\neg A)$,$(A\land B)$=假,$(C\land D\lor\neg A)$中$C\land D$=假,$\neg A$=假,所以$(C\land D\lor\neg A)$=假。于是A选项可以简写为:假$\lor$(假$\lor$假)=假。

B选项的结果是:$((\neg A\land B)\lor C)\land\neg B$,如果$\neg B$是假那么就可以不去看前面的$((\neg A\land B)\lor C)$,可惜的是$\neg B$是真,那么就要看$((\neg A\land B)\lor C)$,发现C是真,所以不看

(¬A∧B)，于是 B 选项可以简写为：(? ∨真)∧真＝真。

C 选项的结果是：(B∨C∨D)∨D∧A．D∧A＝假，所以不得不看前面部分(B∨C∨D)，只要 BCD 有一个是真，那么(B∨C∨D)＝真，而容易发现 C＝true。所以 C 选项可以简写为：真∨假＝真。

D 选项的结果是：A∧(D∨¬C)∧B，我们很容易发现 D 选项的特殊结构为? ∧? ∧?，三个?有一个是假，那么 D 为假，A 和 B 不用计算便可看出，所以先发现 B＝假，所以 D＝假。

例题 2. 计算 23＋2|2&5 * 3－6^5＝(　　)。

题解： 数字也有逻辑运算，当然也可以混合加减乘除。

这里举例说明运算的操作：

&：22 & 5 22：10110 ——→　　10110 5：　101　(缺位补零)　　00101 (垂直对应两位 & 运算)　　00100＝4	|：22 | 5 22：10110 ——→　　10110 5：　101　(缺位补零)　　00101 (垂直对应两位 | 运算)　　10111＝23

二、集合运算

2004 和 2005 的初赛考题都出现了集合运算，虽然后来没有再出现，但集合的运算作为 NOIP 的基本考点，还是需要掌握的。

集合运算有以下四种，分别是并运算：∪；交运算：∩；差运算：－(区别于逻辑非运算—)，假设有 A 和 B 两个集合，A＝{a,b,c}，B＝{b,d,e}，我们以集合 A 和 B 为例，进行以下集合运算。

并运算：比如 A∪B，就是 A 集合和 B 集合里所有元素组成一个新集合，重复的元素只保留一份。A∪B＝{a,b,c,b,d,e}＝{a,b,c,d,e}。

交运算：比如 A∩B，就是同时在 A 集合和 B 集合的元素组成一个新集合。A∩B={b}。

差运算：比如 A－B，就是 A 集合删去 A－B 里的元素后组成一个新集合。A－B={a,c}。

非运算：非运算是单目运算符，比如 A。非运算有个特殊的要求：一定要说明全集。那么 A 就全集删去 A 集合中的元素，剩下的全集中的元素组成一个新集合。比如 C 是全集，C 集合中的元素为 C＝{a,b,c,d,e,f,g}，那么非 A 即：A＝{d,e,f,g}。

课堂练习

1.【NOIP2008】设 A＝true，B＝false，C＝true，D＝false，以下逻辑运算表达式值为真的是(　　)。

A. (A∧B)∨(C∧D∨¬A)　　　　B. ((¬A∧B)∨C)∧¬D

C. (B∨C∨D)∧D∧A　　　　D. A∧(D∨¬C)∧B

2.【NOIP2008】在 C++ 程序中，表达式 200|10 的值是（　　）。

A. 20　　B. 1　　C. 220　　D. 202

3.【NOIP2010】以下逻辑表达式的值恒为真的是（　　）。

A. $P \lor (\neg P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)$

B. $Q \lor (\neg P \land Q) \lor (P \land \neg Q)$

C. $P \lor Q \lor (P \land \neg Q) \lor (\neg P \land Q)$

D. $P \lor \neg Q \lor (P \land \neg Q) \lor (\neg P \land \neg Q)$

4.【NOIP2013】逻辑表达式（　　）的值与变量 A 的真假无关。

A. $(A \lor B) \land \neg A$

B. $(A \lor B) \land \neg B$

C. $(A \land B) \lor (\neg A \land B)$

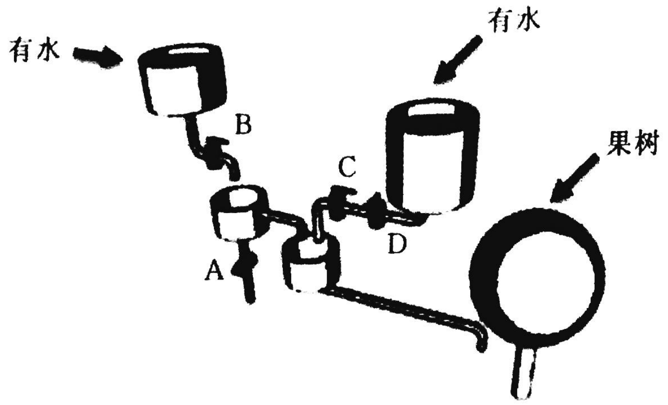
D. $(A \lor B) \land \neg A \land B$

5.【NOIP2012】本题中，我们约定布尔表达式只能包含 p、q、r 三个布尔变量，以及“与”（$\land$）、“或”（$\lor$）、“非”（$\neg$）三种布尔运算。如果无论 p、q、r 如何取值，两个布尔表达式的值总是相同，则称它们等价。例如，$(p \lor q) \lor r$ 和 $p \lor (q \lor r)$ 等价，$p \lor \neg p$ 和 $q \lor \neg q$ 也等价；而 $p \lor q$ 和 $p \land q$ 不等价。那么，两两不等价的布尔表达式最多有________个。

6.【NOIP2018】甲乙丙丁四人在考虑周末要不要外出郊游。

已知①如果周末下雨，并且乙不去，则甲一定不去；②如果乙去，则丁一定去；③如果丙去，则丁一定不去；④如果丁不去，而且甲不去，则丙一定不去。如果周末丙去了，则甲________（去了/没去），乙________（去了/没去），丁________（去了/没去），周末________（下雨/没下雨）。

7.【NOIP2016】下图表示一个果园灌溉系统，有 A、B、C、D 四个阀门，每个阀门可以打开或关上，所有管道粗细相同，以下设置阀门的方法中，可以让果树浇上水的是（　　）。



A. B 打开，其他都关上

B. AB 都打开，CD 都关上

C. A 打开，其他都关上

D. D 打开，其他都关上

8.【NOIP2001】在 a,b,c,d,e,f 六件物品中，按下面的条件能选出的物品是（　　）。

(1)a,b 两样至少有一样

(2)a,d 不能同时取

(3)a,e,f 中必须有 2 样

(4)b,c 要么都选，要么都不选

(5)c,d 两样中选一样

(6)若 d 不选，则 e 也不选

9.【NOIP2004】75 名儿童到游乐场去玩。他们可以骑旋转木马，坐滑行铁道，乘宇宙飞船，已知其中 20 人这三种东西都玩过，55 人至少玩过其中的两种。若每样乘坐一次的费用是 5 元，游乐场总共收入 700，可知有（　　）名儿童没有玩过其中任何一种。

不定项选择题

1. 【NOIP2008】设 A=true，B=false，C=true，D=false，以下逻辑运算表达式值为真的有(　　)。

A. $(A \land B) \lor (C \land D \lor \neg A)$

B. $((\neg A \land B) \lor C) \land \neg D$

C. $(B \lor C \lor D) \lor D \land A$

D. $A \land (D \lor \neg C) \land B$

2. 【NOIP2011】在布尔逻辑中，逻辑"或"的性质有(　　)。

A. 交换律：$P \lor Q = Q \lor P$

B. 结合律：$P \lor (Q \lor R) = (P \lor Q) \lor R$

C. 幂等律：$P \lor P = P$

D. 有界律：$P \lor 1 = 1$（1 表示逻辑真）

3. 【NOIP2014】若逻辑变量 A、C 为真，B、D 为假，以下逻辑运算表达式为真的有(　　)。

A. $(B \lor C \lor D) \lor D \land A$

B. $((\neg A \land B) \lor C) \land \neg B$

C. $(A \land B) \lor (C \land D \lor \neg A)$

D. $A \land (D \lor \neg C) \land B$

4. 【NOIP2012】逻辑异或($\oplus$)是一种二元运算，其真值表如下所示。

a	b	$a \oplus b$
False	False	False
False	True	True
True	False	True
True	True	False

以下关于逻辑异或的性质，正确的有(　　)。

A. 交换律：$a \oplus b = b \oplus a$

B. 结合律：$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$

C. 关于逻辑与的分配律：$a \oplus (b \land c) = (a \oplus b) \land (a \oplus c)$

D. 关于逻辑或的分配律：$a \oplus (b \lor c) = (a \oplus b) \lor (a \oplus c)$

第8节 博弈论入门

有种很有意思的游戏，就是有物体若干堆，可以是火柴棍或是围棋子等。两个人轮流从堆中取物体若干，规定最后取光物体者取胜。这是我国民间很古老的一个游戏，别看这游戏极其简单，却蕴含着深刻的数学原理。下面我们来分析一下要如何才能够取胜。

（一）最简单取石子游戏

只有一堆 n 个物品，两个人轮流从这堆物品中取物，规定每次至少取一个，最多取 m 个，最后取完者得胜。

显然，如果 n＝m＋1，那么由于一次最多只能取 m 个，所以，无论先取者拿走多少个，后取者都能够一次拿走剩余的物品，后者取胜。因此我们发现了如何取胜的法则：如果 n＝(m＋1)r＋s，（r 为任意自然数，s≤m），那么先取者要拿走 s 个物品；如果后取者拿走 k(k≤m)个，那么先取者再拿走 m＋1－k 个，结果剩下（m＋1）＊（r－1）个，保持这样的取法，那么先取者肯定获胜。总之，要保持给对手留下（m＋1）的倍数，最后就能获胜。即若 n＝k(m＋1)，则后取者胜，反之，先取者获胜。若 n%(m＋1)＝＝0，先取者必败。

这个游戏还可以有其他变相的玩法：两个人轮流报数，每次至少报一个，最多报十个，谁能到 100 者获胜；从一堆 100 个石子中取石子，最后取完的获胜。

（二）Nim 取石子游戏

有 k 堆各 n 个石子，两个人轮流从某一堆取任意多的物品，规定每次至少取一个，多者不限，取走最后石子的人获胜。

这个问题就是最经典的 Nim 取石子问题。

令 C＝A(1) xor A(2) xor A(3) xor A(n)，若 C>0，则记为利己态，用 S 表示；若 C=0，则记为利他态，用 T 表示。

[证明]既然是 S 态，则此时 C>0，我们要使得 C 变为 0。

设 C 转化为二进制后，最高位的 1 是第 p 位。那么一定存在一个 A(t)的二进制最高位的 1 是第 p 位。（显然，C 的第 p 位不可能是 1）

然后，把第 t 堆石子的个数变为 x＝A(t) xor C。因为 A(t)和 C 的二进制最高位的 1 是同一位。那么异或之后这一位就变成了 0，所以 x 一定小于 A(t)。

此时的 C'＝A(1) xor A(2) xor … xor A(t) xor C xor A(t＋1) xor … xor A(n)。把 C 代入，得到 C'＝A(1) xor A(2) xor … xor A(n) xor A(1) xor A(2) xor … xor A(n)，由异或的性质可得，C'＝0。因此，只要在第 t 堆石子中取出 A(t)－x 颗石子，就把 S 态变为了 T 态。

课堂练习

1.【NOIP2005】取火柴游戏的规则如下：一堆火柴有 N 根，A、B 两人轮流取出。每人每次可以取 1 根或 2 根，最先没有火柴可取的人为败方，另一方为胜方。如果先取者有必胜策略则记为 1，先取者没有必胜策略记为 0。当 N 分别为 100，200，300，400，500 时，先取者有无必胜策略的标记顺序为________（回答应为一个由 0 或 1 组成的字符串）。