$$u(Q)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{y_0}{\left((x-x_0)^2+y_0^2+(z-z_0)^2\right)^{\frac{3}{2}}}f(x,z)\,dxdz$$

интеграл Пуассона для полупространства.

Найдите функцию Грина задачи Дирихле и опишите дальнейшую процедуру построения решения этой задачи для уравнения Пуассона в следующих четырех областях пространства:

6. $y>0,\quad z>0.$
7. $x>0,\quad y>0,\quad z>0.$
8. $0<x<1,\, 0<y<1,\, 0<z<1.$
9. $x^2+y^2+z^2<1.$

10. Методом зеркальных изображений найдите функцию Грина задачи Дирихле в полуплоскости: $D=\{y>0\}\subset R^2$. Запишите интегральное представление решения этой задачи для уравнения Лапласа. Получите этот же результат из интеграла Пуассона для полупространства, считая что в задаче 5 f зависит лишь от одной переменной x.

Найдите функцию Грина задачи Дирихле и опишите дальнейшую процедуру построения решения этой задачи для уравнения Пуассона в следующих четырех областях плоскости:

11. $x>0, y>0.$
12. $0<x<1, 0<y<1.$
13. $x^2+y^2<1.$
14. $x^2+y^2<1,\, y>0.$

15. Запишите интегральное представление решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в круге $0\le r\le a$.

Сравните полученное решение с решением задачи 2 темы 7.

Постройте решение задачи 17 темы 7 из полученного интегрального представления.

Дополнение к теме 8.

16. Пусть Ω - область в R^3 с границей S, $Q\{x_0, y_0, z_0\}$ - произвольная фиксированная точка внутри Ω, $P\{x, y, z\}$ - точка замкнутой области $\overline{\Omega}$. Обозначим через $\delta(P,Q)\equiv\delta(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ δ - функцию, сосредоточенную в точке Q. Применив вторую формулу Грина к решениям $u(P)$ и $G(P,Q)$ двух задач

$$\begin{cases}\Delta u(P)=-F(P) & в\ \Omega;\\ u|_{P\in S}=f(P);\end{cases}\qquad \begin{cases}\Delta_P G(P,Q)=-\delta(P,Q) & в\ \Omega;\\ G(P,Q)|_{P\in S}=0,\end{cases}$$

найдите $u(Q)$.

Тема 9.

Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом конформных отображений.

Литература: [1], гл. IV, §1, п.5, 6; [2], гл.7, §1, п.1-4; гл.6, §1, п.1-4; гл.6, §2; гл.6, §3; гл.3, §1, п.3, 4.

1. Пусть z и w — комплексные переменные, C_z и C_w — соответствующие комплексные плоскости. Среди следующих функций $w=\varphi(z)$ найдите те, которые осуществляют конформные отображения. Какие области плоскости C_z будут ими конформно отображены на области плоскости C_w? Дайте геометрическое описание действия этих отображений.

$w_1 = \dfrac{z-q}{z-\overline{q}}$, где q – комплексное число; $w_2 = \dfrac{z-q}{1-\overline{q}\cdot z}$;

$w_3 = \overline{z}$; $w_4 = z^n$ $(n = 2, 3, \ldots)$; $w_5 = e^z$; $w_6 = \sin z$;

$w_7 = \cos z$; $w_8 = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

2. Любые ли две односвязные области можно конформно отобразить друг на друга?

Указание. Ответ на вопрос о возможности конформно отобразить заданную область D_1 на заданную область D_2 в случае односвязных областей даётся теоремой Римана:

> Всякую односвязную область D, граница которой состоит более чем из одной точки, можно конформно отобразить на внутренность единичного круга.

Полная формулировка этой теоремы такова:

> Каковы бы ни были две односвязные области D_1 и D_2 расширенных комплексных плоскостей $\overline{C}_z$, $\overline{C}_w$, отличные от $\overline{C}_z$, $\overline{C}_w$ и от $\overline{C}_z$, $\overline{C}_w$ с какой-либо исключенной точкой , найдется бесконечное число аналитических однолистных в D_1 функций, каждая из которых осуществляет конформное отображение D_1 на D_2. При этом для любой пары точек $q_1 \in D_1$ $(q_1 \neq \infty)$ и $q_2 \in D_2$ и для любого числа α, $0 \le \alpha \le 2\pi$, найдется единственная функция $w = \varphi(z)$ из этого класса, для которой $\varphi(q_1) = q_2$, $\arg\varphi'(q_1) = \alpha$.

Являются ли односвязными областями круг, квадрат, полуплоскость, кольцо? Каков геометрический смысл задания $\arg\varphi'$ в точке $z = q_1$?

3. Пусть D_1– односвязная область на плоскости, граница которой состоит более чем из одной точки. Опишите процедуру построения решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в D_1 методом конформных отображений.

В сложность какой задачи переходит сложность задачи Дирихле? Чем определяется сложность задачи Дирихле: видом заданной функции f в краевом условии или геометрической формой области D_1?

Указание. Пусть $z = x + i\,y$. В области D_1 изменения действительных переменных x , y введём невырожденную замену независимых переменных действительной функции $u(x, y)$: $\begin{cases}\xi = \xi(x, y)\\ \eta = \eta(x, y)\end{cases}$. Эту замену будем интерпретировать как задание одной функции комплексной переменной: $w = \varphi(z) = \xi(x, y) + i\,\eta(x, y)$. При указанной замене переменных функция $u(x, y)$ превратится в функцию $U(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$. Если $u(x, y)$ гармонична в D_1 ,то каким должно быть отображение φ, чтобы и функция $U(\xi, \eta)$ была гармонической?

Предположим, что в области D_1 с границей γ_1 поставлена задача Дирихле для уравнения Лапласа относительно $u(x, y)$:

$$\Delta u = 0 \quad в \quad D_1 ;$$
$$u\big|_{\gamma_1} = f .$$

Выполнив указанную замену переменных, получим для $U(\xi,\eta)$ задачу в области D_2 с границей γ_2:

$$\Delta U = 0 \quad в \quad D_2;$$

$$U\big|_{\gamma_2} = g,$$

где D_2 — образ D_1 при отображении φ, а g — результат замены переменных в функции f. Если нам удалось найти значение решения U в одной точке (ξ_0,η_0), то в какой точке области D_1 можно найти значение решения u? Если мы полностью решим задачу в области D_2, то как найти решение задачи в области D_1?

Допустим теперь, что мы сумели построить не одно конформное отображение $w=\varphi(z;q_1)$ области D_1 на D_2, переводящее заданную точку $q_1 = x_0 + i\,y_0$ в заданную точку $q_2 = \xi_0 + i\,\eta_0$, а семейство таких отображений для каждой фиксированной точки $q_1 \in D_1$. Пусть при этом точка $q_2 \in D_2$ одна и та же для всех отображений этого семейства, т.е. мы можем конформно отобразить D_1 на D_2 так, что произвольная точка $q_1 \in D_1$ будет переведена в фиксированную точку $q_2 \in D_2$. Нужно ли тогда для решения задачи Дирихле в D_1 полностью решать задачу в D_2? Как найти $u(x_0,y_0)$ в произвольной точке (x_0,y_0)?

Выберем в качестве области D_2 единичный круг $|w|<1$, а в качестве фиксированной точки q_2 — его центр: $q_2=0$. Найдем значение $U(0,0)$ решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в центре этого круга. Для этого достаточно написать формулу среднего значения для гармонической функции U. Пусть

$h(w)=U(\xi,\eta)+i\,V(\xi,\eta)$; какова связь свойств аналитичности $h(w)$ и гармоничности $U(\xi,\eta)$ и $V(\xi,\eta)$? Выразите значение аналитической функции $h(w)$ в центре круга по интегральной формуле Коши. Введите в интеграле по окружности γ_2 переменную интегрирования θ — полярный угол. Возьмите действительные части обеих частей равенства. Вы должны получить искомую формулу среднего значения: $U(0,0)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} U\big|_{|w|=1}\,d\theta$.

Теперь вспомните, что $U\big|_{|w|=1} = g(\theta)$ — известная функция.

4. Решите задачу Дирихле для уравнения Лапласа в области $D_1 = \{-\infty < x < +\infty,\ y>0\}$.

Решение. Надо найти гармоническую и ограниченную в верхней полуплоскости функцию $u(x,y)$, непрерывно примыкающую к краевому условию $u(x,0)=f(x)$ на границе $\gamma_1 = \{y=0\}$. Найдем семейство конформных отображений области $D_1 = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ на область $D_2 = \{|w|<1\}$, которые произвольную точку $q_1 = x_0 + i\,y_0$ переводят в центр круга $q_2 = 0$. Такие отображения можно искать среди дробно-линейных. (Что является образом окружности при дробно-линейном отображении? Что является образом прямой линии? Что должно быть образом границы γ_1?) Искомое отображение должно иметь вид $w=\varphi(z)=\dfrac{z-q_1}{\dots}$, так как точка q_1 должна перейти в $q_2=0$. Чтобы найти знаменатель дроби, вспомните, как дробно-линейная функция отобразит две точки, симметричные относительно прямой линии; какие две точки называются симметричными относительно окружности? В качестве искомого отображения можно взять $w=\dfrac{z-q_1}{z-\bar{q}_1}$.

Решение задачи Дирихле в центре единичного круга даётся формулой среднего значения: $U(0,0)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}g(\theta)\,d\theta$, где g получается из f в результате замены независимой переменной. Но $u(x_0,y_0)=U(0,0)$, поэтому остаётся вернуться к переменным x, y в последнем интеграле. На окружности $\gamma_2=\{|w|=1\}$ $w=e^{i\theta}=\dfrac{x-q_1}{x-\bar{q}_1}$, поэтому на γ_2 $dw=ie^{i\theta}d\theta=d\left(\dfrac{x-q_1}{x-\bar{q}_1}\right)$.

Отсюда $d\theta=\dfrac{2y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}dx$ (проверьте!).

Ответ. Решение исходной задачи в произвольной точке (x_0,y_0) даётся интегралом Пуассона для полуплоскости

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}f(x)\,dx.$$

5. Решите задачу Дирихле для уравнения Лапласа в области $D_1=\{0\le r<a\}$ (r, ψ — полярные координаты).

Решение. Отобразите конформно круг D_1 на единичный круг D_2 так, чтобы произвольная точка $q_1=r_0e^{i\psi_0}$ перешла в центр $q_2=0$. Ищите отображение среди дробно-линейных. Найдите точку, симметричную к точке q_1 относительно окружности $\gamma_1=\{|z|=a\}$; что должно быть образом этой точки при искомом отображении? Теперь должно быть ясно, что нужное отображение имеет вид $w=\varphi(z)=k\dfrac{z-q_1}{a^2-\bar{q}_1z}$, где комплексный коэффициент k надо ещё выбрать. Так как отображение φ переведёт γ_1 в $\gamma_2=\{|w|=1\}$, то

$$\left|k\frac{ae^{i\psi}-q_1}{a^2-\bar{q}_1ae^{i\psi}}\right|=\left|\frac{k}{ae^{i\psi}}\right|\cdot\left|\frac{ae^{i\psi}-q_1}{ae^{-i\psi}-\bar{q}_1}\right|=\frac{|k|}{a}=1.$$

Значит, $k=ae^{i\alpha}$, где α — любое действительное число. (Найдите в точке $z=q_1$ коэффициент растяжения $|\varphi'(q_1)|$ и угол поворота $\arg\varphi'(q_1)$. Что значит задать какое-либо значение α?)

Выберите, например, $\alpha=\pi-\psi_0$. Тогда $\varphi(z)=\dfrac{a}{r_0}\cdot\dfrac{z-r_0e^{i\psi_0}}{z-\dfrac{a^2}{r_0}e^{i\psi_0}}$.

Осталось выразить через заданное краевое условие $u|_{\gamma_1}=f(\psi)$ уже известное значение решения $u(r_0,\psi_0)=U|_{w=0}=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}g(\theta)d\theta$. На γ_1 отображение φ имеет вид $w|_{\gamma_1}=e^{i\theta}=\dfrac{a}{r_0}\cdot\dfrac{a\cdot e^{i\psi}-r_0\cdot e^{i\psi_0}}{a\cdot e^{i\psi}-\dfrac{a^2}{r_0}\cdot e^{i\psi_0}}$. Дифференцируя последнее равенство, найдите

$$d\theta=\frac{a^2-r_0^2}{a^2+r_0^2-2ar_0\cos(\psi-\psi_0)}d\psi.$$

Запишите решение исходной задачи $u(r_0,\psi_0)$ в виде интеграла Пуассона для круга. Сравните ответ с полученным в задаче 2 темы 7 и в задаче 15 темы 8.

6.

$$\Delta v = 0, -\infty < x < +\infty, y > 0;$$

$$v(x,0) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & x > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x < 0. \end{cases}$$

Найдите $v(x, y)$. Существует ли $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0,\ y>0}} v(x, y)$? Найдите аналитическую в области $\operatorname{Re} z > 0$ функцию $h(z)$, $z = x + iy = r \cdot e^{i\psi}$, у которой $\operatorname{Im} h(z) = v(x, y)$. Каково поведение $h(z)$ в окрестности точки $z = 0$?

7.

$$\Delta v = 0, 0 < x < +\infty, 0 < y < +\infty;$$

$$v(x,0) = \frac{\pi}{2}, x > 0;$$

$$v(0, y) = -\frac{\pi}{2}, y > 0.$$

Найдите $v(x, y)$. Существует ли $\lim\limits_{\substack{x \to 0,\ x>0 \\ y \to 0,\ y>0}} v(x, y)$? Найдите аналитическую в области $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{2}$ функцию $h(z)$, $z = x + iy = r \cdot e^{i\psi}$, у которой $\operatorname{Im} h(z) = v(x, y)$. Каково поведение $h(z)$ в окрестности точки $z = 0$?

8.

$$\Delta u = 0, 0 \le r < a, 0 \le \psi < 2\pi,$$
$$u(a, \psi) = \sin\psi, 0 \le \psi \le 2\pi.$$

(r, ψ — полярные координаты).

Сравните решение в виде интеграла Пуассона с решением, полученным методом разделения переменных в задаче 1 темы 7.

В следующих девяти задачах найдите конформное отображение заданной области на единичный круг, переводящее произвольную точку q в центр круга. Опишите дальнейшую процедуру построения решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в заданной области.

9. $0 < r < \infty, 0 < \alpha < \psi < \beta < 2\pi$ (r, ψ — полярные координаты).

10. $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}, y > 0.$

11. $-\pi < x < 0, y > 0.$

12. $-\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{4}, -\infty < y < +\infty.$

13. $-\infty < x < +\infty, 0 < y < \pi.$

14. $x > 0, 0 < y < \pi.$

15. $x^2 + y^2 < 1, y > 0.$

16. $x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0.$

17. $x^2 + y^2 > 1, y > 0.$

18. Чем определяется сложность построения функции Грина задачи Дирихле в области $D \subset R^2$?

Чем определяется сложность построения решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в $D \subset R^2$?

Решение. Пусть в двумерной области D с границей γ поставлена задача

6.

$$\Delta v = 0, -\infty < x < +\infty, y > 0;$$

$$v(x,0) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & x > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x < 0. \end{cases}$$

Найдите $v(x, y)$. Существует ли $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0,\ y>0}} v(x, y)$? Найдите аналитическую в области $\operatorname{Re} z > 0$ функцию $h(z)$, $z = x + iy = r \cdot e^{i\psi}$, у которой $\operatorname{Im} h(z) = v(x, y)$. Каково поведение $h(z)$ в окрестности точки $z = 0$?

7.

$$\Delta v = 0, 0 < x < +\infty, 0 < y < +\infty;$$

$$v(x,0) = \frac{\pi}{2}, x > 0;$$

$$v(0, y) = -\frac{\pi}{2}, y > 0.$$

Найдите $v(x, y)$. Существует ли $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\ x>0\\ y\to 0,\ y>0}} v(x, y)$? Найдите аналитическую в области $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{2}$ функцию $h(z)$, $z = x + iy = r \cdot e^{i\psi}$, у которой $\operatorname{Im} h(z) = v(x, y)$. Каково поведение $h(z)$ в окрестности точки $z = 0$?

8.

$$\Delta u = 0, 0 \le r < a, 0 \le \psi < 2\pi,$$
$$u(a, \psi) = \sin\psi, 0 \le \psi \le 2\pi.$$

(r, ψ — полярные координаты).

Сравните решение в виде интеграла Пуассона с решением, полученным методом разделения переменных в задаче 1 темы 7.

В следующих девяти задачах найдите конформное отображение заданной области на единичный круг, переводящее произвольную точку q в центр круга. Опишите дальнейшую процедуру построения решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в заданной области.

9. $0 < r < \infty, 0 < \alpha < \psi < \beta < 2\pi$ (r, ψ — полярные координаты).

10. $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}, y > 0.$

11. $-\pi < x < 0, y > 0.$

12. $-\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{4}, -\infty < y < +\infty.$

13. $-\infty < x < +\infty, 0 < y < \pi.$

14. $x > 0, 0 < y < \pi.$

15. $x^2 + y^2 < 1, y > 0.$

16. $x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0.$

17. $x^2 + y^2 > 1, y > 0.$

18. Чем определяется сложность построения функции Грина задачи Дирихле в области $D \subset R^2$?

Чем определяется сложность построения решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в $D \subset R^2$?

Решение. Пусть в двумерной области D с границей γ поставлена задача

21. Найдите функцию Грина задачи Дирихле в облас… $D=\{x>0\,,\,y>0\}$. Выразите G через координаты точ… $P(x,y)$ и $Q(x_0,y_0)$. Опишите дальнейшую процеду… построения решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона … области D.

22. Найдите функции Грина задач Дирихле в областях, указанных в пунктах 9 – 17 . Выразите G через моду… комплексных выражений, если последующие преобразова… кажутся громоздкими. Опишите дальнейшую процедуру построе… решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в этих областях.

Дополнение к теме 9.

23. Докажите, что задача конформного отображения односвязной области D на единичный круг и задача Дирихле для уравнения Лапласа в D эквивалентны.

Доказательство. Задача Дирихле уже была сведена к задаче конформ… отображения. Остаётся доказать, что если для D известно решение зад… Дирихле (т.е. мы умеем по произвольной заданной на границе γ функции … находить гармоническую в D функцию u), то можно построить конформ… отображение области D на $\{|w|<1\}$.

По теореме Римана искомое отображение $w=\varphi(z;q)$, … $\varphi(q,q)=0$, существует. Предположим сначала, что мы знаем это отображе… Рассмотрим функцию $\Phi(z)=\dfrac{\varphi(z;q)}{z-q}$ и доопределим её в т…

$$z=q:\quad \Phi(q)=\lim_{z\to q}\frac{\varphi(z;q)}{z-q}=\varphi'_z(q;q).$$

$\Phi(z)$ аналитична и отлична от нуля всюду в D ($\varphi(z;q)$ равна нулю тол… при $z=q$,

а $\varphi'_z(z;q)\neq 0$ в силу конформности отображения). Поэтому функ…

$u(x,y)=\ln|\Phi(z)|$,

$z=x+i\,y$, гармонична в области D (проверьте!). Ее значения на границе γ этой области

$$u_\gamma=\ln\left|\frac{\varphi(z;q)}{z-q}\right|_{z\in\gamma}=\ln\frac{1}{|z-q|}_{z\in\gamma}$$

не зависят от вида функции φ , ибо $|\varphi(z;q)|_{z\in\gamma}=1$.

На самом деле функция φ нам неизвестна. Но по предположению мы можем по любым заданным граничным значениям гармонической функции $u(x,y)$ однозначно восстановить её значения внутри D , т.е. решить задачу Дирихле. Выберем краевое условие $u\big|_\gamma=\ln\dfrac{1}{|z-q|}_{z\in\gamma}$ и найдём решение $u(x,y)$ задачи Дирихле с этим краевым условием. Теперь с помощью условий Коши – Римана найдем в D сопряженную к $u(x,y)$ гармоническую функцию $v(x,y)$; она определится с точностью до постоянного действительного слагаемого α . Таким образом, мы находим функцию $\ln\Phi(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)+i\,\alpha$ $\big(u(x,y)=\ln|\Phi(z)|\,,\ v(x,y)+\alpha=\arg\Phi(z)\big)$. И , наконец , получаем искомое конформное отображение

$$\varphi(z;q)=(z-q)\cdot\Phi(z)=e^{i\alpha}(z-q)\cdot\exp\{u(x,y)+i\,v(x,y)\}.$$

Оно определяется с точностью до поворота на угол α . Этот угол можно выбрать, например , заданием $\arg\varphi'_z(q;q)$.

24. Пусть решение задачи Неймана

$$\Delta u=0 \quad \text{в} \quad D\subset R^2\,;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\vec n}\right|_\gamma=g$$

имеет непрерывные частные производные вплоть до границы γ области D . Сведите указанную задачу Неймана к задаче Дирихле для гармонической функции $v(x,y)$, сопряженной к гармонической функции $u(x,y)$.

Указание. Пусть $h(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$, $z=x+i\,y$, — аналитическая функция комплексной переменной z. Комплексные числа n и t задают направления $\vec{n}$ и $\vec{t}$ в точке $(x,y)\in D$. Докажите, что если комплексные числа n и t таковы, что $|n|=|t|=1$ и $t=i\cdot n$, то производные по направлениям $\vec{n}$ и $\vec{t}$ функций u и v связаны соотношениями Коши-Римана $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}=\dfrac{\partial v}{\partial \vec{t}}$, $\dfrac{\partial v}{\partial \vec{n}}=-\dfrac{\partial u}{\partial \vec{t}}$. Пусть теперь $\vec{n}$ — вектор внешней нормали к кривой γ, а $\vec{t}$ – касательный вектор к γ в той же точке. Получите для v граничное условие $v(Q)\big|_{Q\in\gamma}=f=\int_{Q_0}^{Q} g\cdot d\gamma$, где интеграл берётся вдоль кривой γ от произвольной фиксированной точки $Q_0\in\gamma$ до точки $Q\in\gamma$.

Из тем 7, 8 и 9 видно, что краевые задачи для уравнений Лапласа, Пуассона реально удаётся решить аналитическими методами только в областях достаточно простой формы. Но и в них ответ может получаться в виде громоздких выражений, что снижает ценность такого ответа. Важные в практическом отношении задачи решают численно, а рассмотренные здесь аналитические методы применяют для решения упрощённых модельных задач.

Тема 10.

Волновое уравнение. Постановки начально-краевых задач для волнового уравнения и их редукция.

Литература: [1], гл. II, §1, п. 1, 2, 7, 8; гл. II, §3, п. 5.

1. Рассмотрите продольную упругую стационарную деформацию стержня под действием распределенной вдоль стержня силы и выведите уравнение стационарного растяжения стержня.

Запишите постановки краевых задач для этого уравнения со всеми различными комбинациями краевых условий 1-го и 2-го рода на концах стержня.

Решение. Пусть к упругому стержню длиной l приложены внешние силы, вызывающие смещение его частиц в новые положения равновесия. Тогда в стержне возникают внутренние упругие силы между соседними его частицами, которые препятствуют действию внешних сил. Деформация называется упругой, если она исчезает после снятия внешнего воздействия. При равенстве упругих и внешних сил дальнейший процесс деформации прекращается, т.е. деформация становится стационарной – не зависящей от времени. Будем считать, что всякое поперечное сечение покоящегося стержня не меняет своей формы при действии внешних сил, а только сдвигается вдоль стержня – вдоль оси x; такой стержень можно считать одномерным. Закон Гука утверждает, что нормальное напряжение σ (напряжение $\sigma=\dfrac{F_{упр}}{S}$ в поперечном сечении площади S под действием упругой силы $F_{упр}$) пропорционально относительному удлинению стержня: $\sigma=E\dfrac{\Delta l}{l}$. Здесь коэффициент $E>0$ определяется материалом стержня, а Δl – абсолютное удлинение стержня под действием внешних сил.

Запишите закон Гука не для всего стержня, а лишь для его участка $[x, x+\Delta x]$. Для этого предположите, что в покое (в отсутствии внешних сил) частица стержня имела координату x. Пусть в направлении оси x на стержень действует распределённая вдоль него внешняя сила $F(x)$ с линейной плотностью её распределения $f(x)$. (f — сила, приходящаяся на единицу длины : $f=\dfrac{d\,F}{d\,x}$.) Внешняя сила вызовет смещение указанной частицы на некоторую величину $u(x)$. Выделите внутри стержня в отсутствии внешней силы элемент $[x, x+\Delta x]$ и запишите координаты концов этого элемента при её действии. Найдите относительное удлинение выделенного элемента стержня и запишите его, используя теорему Лагранжа для функции $u(x)$ на $[x, x+\Delta x]$. Тогда закон Гука утверждает, что $\sigma(x) = E(x)\cdot u'_x(x+\theta\cdot\Delta x)$, где $0<\theta<1$. Если устремить $\Delta x \to 0$, то $\sigma(x) = E(x)\cdot u'_x(x)$, т.е. сила упругости в точке x равна $F_{упр}(x) = \sigma(x)\cdot S = S\cdot E(x)\cdot u'_x(x)$.

Теперь выделите произвольный промежуток $[x_1, x_2]$. Если состояние стержня стационарно, т.е. процесс растяжения прекратился, то для любого промежутка $[x_1, x_2]$ внутри стержня выполняется баланс сил:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + S\cdot E(x_2)\cdot u'_x(x_2) - S\cdot E(x_1)\cdot u'_x(x_1) = 0;$$

в точке x_2 на выделенный участок $[x_1, x_2]$ действует сила упругости со стороны части стержня $x > x_2$, направленная по оси x, а в точке x_1 — сила упругости со стороны части стержня $x < x_1$, направленная против оси x. Предположите теперь, что $f(x)$ непрерывна, а $u(x)$ дважды непрерывно дифференцируема. Запишите $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$ с помощью теоремы о среднем. Введите обозначение $S\cdot E(x) = k(x)$. Считайте, что стержень однороден, т.е. $E(x) = const$. Разделите уравнение баланса сил на $x_2 - x_1$ и устремите $x_1 \to x$, $x_2 \to x$. Вы должны получить уравнение продольного стационарного растяжения стержня: $u''_{xx}(x) = -\dfrac{f(x)}{k}$, $0 < x < l$. Это обыкновенное дифференциальное уравнение является уравнением Пуассона в одномерном случае. Как будет выглядеть это уравнение, если

$E(x) \neq const$, но является непрерывно дифференцируемой функцией (стержень сделан из переменного материала)?

Для вывода краевых условий на правом конце стержня $0 \le x \le l$ рассмотрите участок стержня $[l-\Delta x, l]$. Пусть на правый конец стержня действует со стороны внешней опоры сила упругого закрепления. Это значит, что в точке l действует сила, пропорциональная смещению $u(l)$ и направленная против смещения. Запишите для указанного участка баланс трёх сил: внешней распределённой силы $\int_{l-\Delta x}^{l} f(x)\,dx$, упругой силы $-S\cdot E\cdot u'_x(l-\Delta x)$ со стороны части стержня $x < l-\Delta x$ и силы $-æ\cdot u(l)$ упругого закрепления правого конца. Запишите $\int_{l-\Delta x}^{l} f(x)\,dx$ с помощью теоремы о среднем и учтите, что при $\xi \in (l-\Delta x, l)$ $f(\xi)\cdot\Delta x \approx F(l)$ в силу определения F и f. Устремите $\Delta x \to 0$.

Разделите уравнение баланса сил на правом конце на $k = S\cdot E$. Вы должны получить краевое условие 3-го рода вида $u'_x(l) + h\,u(l) = g(l)$, где $h = const > 0$, $g(l) = \dfrac{F(l)}{k}$. Как выглядит это условие, если внешней распределенной вдоль стержня силы на правом конце нет? Как оно выглядит, если нет силы упругого закрепления (краевое условие 2-го рода) ? Если нет ни той, ни другой силы (правый конец свободен) ? Рассмотрите краевое условие 1-го рода $u(l) = const$; какую информацию оно содержит? Как записать, что правый конец жёстко закреплён? Проведите аналогичные рассмотрения для левого конца стержня.

2. Однородный вертикальный стержень с закреплёнными концами находится в поле силы тяжести. Объёмная плотность массы стержня равна ρ. Поставьте краевую задачу для стационарного

смещения $u(x)$ точек стержня под действием силы тяжести и найдите $u(x)$ для $0 \le x \le l$.

3. Однородный вертикальный стержень в поле силы тяжести жёстко закреплён верхним концом на держащей его опоре. Нижний конец свободен. Найдите стационарное смещение $u(x)$ точек стержня под действием силы тяжести.

4. Однородный стержень с закреплённым левым концом растягивается силой F, приложенной к правому концу. Распределённой вдоль стержня силы нет. Найдите стационарное смещение $u(x)$.

5. Рассмотрите нестационарное состояние упругого стержня и выведите уравнение его продольных колебаний.

Решение. Пусть $u(x,t)$ — продольное смещение в момент времени t точки, имевшей в состоянии покоя координату x. Тогда $u'_t(x,t)$ — скорость движения в точке x в момент времени t. Если $\rho(x)$ — объёмная плотность массы в точке x (стержень можно считать неоднородным), то $\rho(x)S\,dx$ — масса участка стержня длиной dx. Выберите внутри стержня произвольный участок $[x_1, x_2]$. Изменение количества движения для этого участка в течение промежутка времени $[t_1, t_2]$ (изменение количества движения обусловлено действием внешней силы $F(x,t)$ с линейной плотностью её распределения вдоль стержня $f(x,t)$ и действием сил упругости за указанное время) равно

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[u'_t(x,t_2)-u'_t(x,t_1)\right]\cdot\rho(x)\cdot dx\cdot S=\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} f(x,t)\cdot dx\cdot dt+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\left[S\cdot E(x_2)\cdot u'_x(x_2,t)-S\cdot E(x_1)\cdot u'_x(x_1,t)\right]\cdot dt.$$

Предположите, что $f(x,t)$ непрерывна и запишите $\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} f(x,t)\,dx\,dt$ с помощью теоремы о среднем. Предположите существование непрерывных производных u''_{xx}, u''_{tt}. Запишите по теореме о среднем два других интеграла. Разделите равенство на $x_2 - x_1$ и на $t_2 - t_1$. Устремите $x_1 \to x$, $x_2 \to x$, $t_1 \to t$, $t_2 \to t$. Вы должны получить $\rho(x)S\,u''_{tt}(x,t)=\left(k(x)u'_x(x,t)\right)'_x+f(x,t)$. Если $k = const$, $\rho = const$, то уравнение можно записать в виде $u''_{tt}=a^2u''_{xx}+\dfrac{f}{\rho S}$, где $a^2=\dfrac{k}{\rho S}>0$. Оно называется волновым уравнением или уравнением колебаний. Во что оно превратится, если u не зависит от времени t?

6. Если величина продольного смещения u зависит от времени, то и краевые условия могут зависеть от времени t: $u(0,t)=\mu(t)$ — известен закон движения левого конца, $u'_x(0,t)=\nu(t)$ — на левом конце известна сила упругости, $u'_x(0,t)-h\,u(0,t)=g(t)$ — условие упругого закрепления левого конца. Запишите аналогичные условия на правом конце стержня. Для всех комбинаций краевых условий 1-го и 2-го рода на концах стержня запишите постановки начально-краевых задач для волнового уравнения. Какой физический смысл имеют величины $u(x,0)$, $u'_t(x,0)$?

7. Пусть функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ при $0 < x < l, t > 0$ и граничным условиям $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$ при $t > 0$. Достаточно ли этих условий для выделения единственного решения уравнения?

Указание. Рассмотрите однопараметрические семейства функций

$$\left\{ u_n(x,t) = \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right), n = 0, 1, 2, \ldots \right\},$$

$$\left\{ u_n(x,t) = \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right), n = 0, 1, 2, \ldots \right\}.$$

Если к этому уравнению и указанным граничным условиям добавить начальное условие $u(x,0) = \varphi(x)$ при $0 \le x \le l$, то позволит ли оно выделить единственное решение?

Указание. Рассмотрите начальное условие $u(x,0) = \varphi(x) = \sin\frac{\pi}{l} x$.

8. Выведите уравнение малых поперечных колебаний тонкой гибкой струны длиной l.

Указание. Искомая функция $u(x,t)$ — поперечное отклонение струны от горизонтального положения в точке x в момент времени t, которое возникает под действием поперечной внешней силы $F(x,t)$, распределённой вдоль струны с линейной плотностью $f(x,t)$.

Дайте физическую интерпретацию краевых условий 1-го и 2-го рода на концах струны. Запишите постановки начально-краевых задач для уравнения колебаний струны со всеми комбинациями краевых условий 1-го и 2-го рода. Какой физический смысл имеют величины $u(x,0)$, $u'_t(x,0)$?

Отличается ли построенная модель поперечных колебаний струны от модели продольных колебаний стержня?

9. Сведите поставленные в пунктах 6 и 8 задачи для волнового уравнения с неоднородными граничными условиями к задачам с нулевыми граничными условиями.

Указание. Выполните замену неизвестной функции $u(x,t) = v(x,t) + U(x,t)$; функцию $U(x,t)$ выберите, например, в виде многочлена первой или второй степени относительно x.

10. Если нас интересуют колебания струны только вблизи одного её конца (левого), то в некоторых случаях другой конец струны можно считать бесконечно удалённым. Тогда волновое уравнение мы рассматриваем в области $x > 0$. Если нас интересуют колебания струны вдали от обоих её концов, то иногда оба конца можно считать бесконечно удалёнными. В этом случае уравнение действует в области $-\infty < x < +\infty$. Запишите постановки начально-краевых задач на полупрямой и задачи с начальными условиями (задачи Коши) на всей прямой для волнового уравнения.

Тема 11.

<u>Характеристики. Характеристическое уравнение. Построение замены независимых переменных для приведения к канонической форме уравнения с двумя независимыми переменными.</u>

Литература: [1], гл. I, § 1, п. 1, 3.

1. Пусть кривая γ на плоскости x, y задана уравнением $\omega(x,y) = 0$, где ω – непрерывно дифференцируемая функция, причем во всех точках этой кривой $\omega_x^2 + \omega_y^2 \neq 0$. Кривая γ называется характеристикой уравнения $a_{11} \cdot u_{xx} + 2 \cdot a_{12} \cdot u_{xy} + a_{22} \cdot u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$,

если функция $\omega(x, y)$ удовлетворяет характеристическому уравнению

$$a_{11}(x, y) \cdot \omega_x^2 + 2 \cdot a_{12}(x, y) \cdot \omega_x \cdot \omega_y + a_{22}(x, y) \cdot \omega_y^2 = 0 .$$

Сколько семейств действительных характеристик имеют уравнения $u_t = a^2 \cdot u_{xx}$, $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $u_{tt} = a^2 \cdot u_{xx}$? Найдите эти семейства характеристик.

2. В каждой из областей на плоскости x, y, в которых уравнения 6 – 25 темы 1 сохраняют тип, найдите семейства действительных характеристик данного уравнения, если они имеются.

Указание. Функция $\omega(x, y)$ является частным решением уравнения

$$a_{11} \cdot \omega_x^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot \omega_x \cdot \omega_y + a_{22} \cdot \omega_y^2 = 0$$

тогда и только тогда, когда равенство $\omega(x, y) = const$ представляет собой общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения

$$a_{11} \cdot (dy)^2 - 2 \cdot a_{12} \cdot dx \cdot dy + a_{22} \cdot (dx)^2 = 0 .$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение называется дифференциальным уравнением характеристик.

Приведение к каноническому виду квадратичной формы Q, отвечающей уравнению в частных производных второго порядка, позволяет записать это уравнение в наиболее простой – канонической – форме в каждой фиксированной точке (x, y). Но оно не даёт способа нахождения переменных $\begin{cases} \xi = \varphi(x, y) \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases}$, в которых указанное уравнение будет записано в канонической форме сразу в некоторой области изменения этих независимых переменных. Для уравнений с двумя независимыми переменными (и только для них) такой способ существует; он описан ниже в задачах 3 – 6.

3. Пусть уравнение

$$a_{11}(x, y) \cdot u_{xx} + 2 \cdot a_{12}(x, y) \cdot u_{xy} + a_{22}(x, y) \cdot u_{yy} + F = 0 ,$$

в окрестности точки (x, y) имеет гиперболический тип. Пусть в этой окрестности $a_{11}(x, y) \neq 0$. Потребуйте, чтобы замена переменных $\begin{cases} \xi = \varphi(x, y) \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases}$ одновременно обращала в нуль коэффициенты при $u_{\xi\xi}$ и $u_{\eta\eta}$. Какими для этого надо выбрать новые переменные ξ, η? Запишите уравнение в новых переменных, разделив его на коэффициент при $u_{\xi\eta}$.

Замечание. В рассматриваемом случае дифференциальное уравнение характеристик имеет два независимых интеграла. Это и позволяет одновременно обратить в нуль коэффициенты при $u_{\xi\xi}$ и $u_{\eta\eta}$. Уравнение в найденных переменных ξ, η называется уравнением гиперболического типа в первой канонической форме.

4. В уравнении гиперболического типа, записанном в предыдущей задаче в первой канонической форме, выполните ещё одну замену переменных

$$\begin{cases} \tilde{\xi} = \tilde{\xi}(x, y) = \dfrac{\xi + \eta}{2}, \\ \tilde{\eta} = \tilde{\eta}(x, y) = \dfrac{\xi - \eta}{2}. \end{cases}$$

Запишите это уравнение в переменных $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$ – вторую каноническую форму уравнения гиперболического типа.

5. Пусть уравнение

$$a_{11}(x, y) \cdot u_{xx} + 2 \cdot a_{12}(x, y) \cdot u_{xy} + a_{22}(x, y) \cdot u_{xy} + F = 0$$

в окрестности точки (x, y) имеет эллиптический тип. Пусть в этой окрестности $a_{11}(x, y) \neq 0$. Выполните замену независимых переменных

$$\begin{cases} \tilde{\xi} = \tilde{\xi}(x, y) = \operatorname{Re} \xi , \\ \tilde{\eta} = \tilde{\eta}(x, y) = \operatorname{Im} \xi , \end{cases}$$

где функция $\xi(x, y)$ определена из следующего условия: $\xi(x, y) = const$ является комплексным интегралом дифференциального уравнения характеристик. Какой из коэффициентов при старших производных обратится при этом в нуль?

Замечание. В рассматриваемом случае дифференциальное уравнение характеристик имеет два комплексно сопряженных интеграла. Уравнение в переменных $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$ называется уравнением эллиптического типа в канонической форме.

6. Пусть уравнение $a_{11}(x,y)\cdot u_{xx} + 2\cdot a_{12}(x,y)\cdot u_{xy} + a_{22}(x,y)\cdot u_{yy} + F = 0$ в окрестности точки (x,y) имеет параболический тип. Пусть в этой окрестности $a_{11}(x,y)\neq 0$ и $a_{22}(x,y)\neq 0$. Выполните замену переменных $\begin{cases}\xi = \varphi(x,y),\\ \eta = \psi(x,y),\end{cases}$ где φ и ψ определены из следующих условий: $\varphi(x,y) = const$ является интегралом дифференциального уравнения характеристик, и функции φ и ψ независимы. Запишите уравнение в новых переменных, разделив его на коэффициент при $u_{\eta\eta}$.

Замечание. В рассматриваемом случае дифференциальное уравнение характеристик имеет лишь один интеграл, поэтому функцию ψ можно выбрать произвольной. Указанный выбор переменных ξ, η обращает в нуль коэффициенты при $u_{\xi\xi}$ и $u_{\xi\eta}$. Уравнение в этих переменных называется уравнением параболического типа в канонической форме.

7. Приведите к канонической форме уравнение $u_{xx} + x\cdot u_{yy} = 0$ в каждой области плоскости x, y, в которой оно сохраняет тип.

Решение. Запишем дифференциальное уравнение характеристик $(dy)^2 + x\cdot(dx)^2 = 0$. Если $x<0$, то исходное уравнение гиперболического типа. В этом случае $dy = \pm\sqrt{-x}\cdot dx$, и мы имеем два независимых действительных интеграла уравнения характеристик $y+\frac{2}{3}\cdot(-x)^{3/2} = const$, $y-\frac{2}{3}\cdot(-x)^{3/2} = const$. Выполните замену переменных

$$\begin{cases}\xi = y+\frac{2}{3}\cdot(-x)^{3/2}\\ \eta = y-\frac{2}{3}\cdot(-x)^{3/2}\end{cases}.$$

Для этого выразите u_x, u_{xx}, u_y, u_{yy} и

переменных ξ, η и подставьте u_{xx}, u_{yy} в исходное уравнение. Вы должны получить $u_{\xi\eta} = \dfrac{u_\xi - u_\eta}{8\cdot(-x)^{3/2}}$. В силу выполняемой замены переменных $(-x)^{3/2} = \dfrac{3}{4}\cdot(\xi-\eta)$. Окончательно: $u_{\xi\eta} = \dfrac{u_\xi - u_\eta}{6\cdot(\xi-\eta)}$ — первая каноническая форма уравнения в области $\xi>\eta$. Можно вместо ξ, η ввести другие переменные: $\begin{cases}\tilde{\xi} = y\\ \tilde{\eta} = \frac{2}{3}\cdot(-x)^{3/2}\end{cases}$. Снова выразите u_x, u_{xx}, u_y, u_{yy} в переменных $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$ и из исходного уравнения получите $u_{\tilde{\xi}\tilde{\xi}} - u_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}} = \dfrac{u_{\tilde{\eta}}}{3\tilde{\eta}}$ — его вторую каноническую форму. Зная, что $\begin{cases}\tilde{\xi} = \frac{1}{2}\cdot(\xi+\eta)\\ \tilde{\eta} = \frac{1}{2}\cdot(\xi-\eta)\end{cases}$, проверьте полученные ответы, переходя от первой канонической формы ко второй и наоборот.

Если $x>0$, то исходное уравнение эллиптического типа. В этом случае получаем два комплексно сопряженных интеграла уравнения характеристик: $y+\frac{2}{3}i\cdot x^{3/2} = const$, $y-\frac{2}{3}i\cdot x^{3/2} = const$. Выберем новые действительные независимые переменные: $\begin{cases}\tilde{\xi} = y\\ \tilde{\eta} = \frac{2}{3}\cdot x^{3/2}\end{cases}$. Выразите u_x, u_{xx}, u_y, u_{yy} в новых переменных и получите каноническую форму исходного уравнения $u_{\tilde{\xi}\tilde{\xi}} + u_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}} + \dfrac{u_{\tilde{\eta}}}{3\tilde{\eta}} = 0$ в области $\tilde{\eta}>0$.

Если $x = 0$, то формально исходное уравнение параболического типа. Но имеет ли смысл при $x = 0$ указывать его тип как тип уравнения в частных производных?

Замечание. Рассмотренное уравнение называется уравнением Трикоми. В газовой динамике оно описывает дозвуковое движение в области гиперболичности и сверхзвуковое движение в области эллиптичности.

8. Приведите к канонической форме уравнения 6 – 25 темы 1 в каждой области плоскости x, y, где сохраняется тип уравнения.

Тема 12.

Формула Д'Аламбера. Решение задач для однородного волнового уравнения методом распространяющихся волн.

Литература: [1], гл. II , § 2 , п. 1, 2, 3, 6, 7.

1. Решите задачу Коши для однородного волнового уравнения:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}\ , -\infty < x < +\infty\ , t > 0\ ;\ a > 0\ ;$$
$$u(x,0) = \varphi(x)\ , -\infty < x < +\infty\ ;$$
$$u_t(x,0) = \psi(x)\ , -\infty < x < +\infty\ .$$

Решение. Поставленную задачу можно интерпретировать как задачу о поперечных колебаниях бесконечной струны или о продольных колебаниях бесконечного стержня. Колебания свободные, т.е. в рассматриваемой модели не учитываются внешние силы: все движения обусловлены действием упругих сил.

Приведите однородное волновое уравнение к первой канонической форме уравнения гиперболического типа (см. тему 11). Для этого запишите дифференциальное уравнение характеристик $(dx)^2 - a^2(dt)^2 = 0$ и найдите два его интеграла. Введите новые независимые переменные ξ, η и запишите уравнение в новых переменных. Вы должны получить $u_{\xi\eta} = 0$.

(Поскольку исходное уравнение имеет постоянные коэффициенты, его характеристиками оказались прямые линии на плоскости x, t).

Интегрируя полученное уравнение по η и по ξ, найдите его общее решение: $u(\xi,\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$, где f_1, f_2 — произвольные дважды дифференцируемые функции. Вернитесь к прежним переменным: $u(x,t) = f_1(x+at) + f_2(x-at)$. Какой физический смысл имеет $f_1(x+at)$? $f_2(x-at)$? Какой физический смысл имеет параметр a?

Конкретный вид функций f_1, f_2 можно найти из начальных условий. Подставьте полученное решение $u(x,t)$ в начальные условия и проинтегрируйте по t второе из них. Решите относительно $f_1(x)$, $f_2(x)$ полученную систему линейных алгебраических уравнений. Запишите решение исходной задачи Коши. Вы должны получить формулу Д'Аламбера :

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz\ .$$

Какими должны быть функции φ и ψ в условии задачи Коши, чтобы формула Д'Аламбера давала её классическое решение? Что описывает эта формула, если зафиксировать момент времени $t = t_0$? Если зафиксировать координату $x = x_0$? Деформируется ли со временем в рассматриваемой модели профиль бегущей влево (вправо) волны или он только сдвигается вдоль оси x? Какова величина этого сдвига в момент времени t?

2. Плоскость переменных x, t называется фазовой плоскостью. Вдоль каких линий на фазовой плоскости будет сохранять постоянное значение функция $u = f(x-at)$? $u = f(x+at)$? Пусть функция $f(x)$ отлична от нуля только в промежутке $(x_1\ , x_2)$. Найдите на фазовой плоскости передний и задний фронты волны $u = f(x-at)$, бегущей вправо; волны

$u = f(x+at)$, бегущей влево. Найдите области, в которых волна ещё не добежала, создаёт возмущение , уже прошла.

Зафиксируйте на фазовой плоскости точку $M(x_0, t_0)$, $t_0 > 0$. Проведите через M две характеристики: $x - at = x_0 - at_0$, $x + at = x_0 + at_0$. Пусть P и Q — точки их пересечения с осью x. Треугольник MPQ называется характеристическим. Чем в соответствии с формулой Д'Аламбера определяется значение решения u в точке x_0 в момент времени t_0 ?

Пусть в задаче Коши для однородного волнового уравнения начальные данные отличны от нуля только в промежутке (x_1, x_2). Проведите через точки фазовой плоскости $A(x_1,0)$ и $B(x_2,0)$ пары характеристик и разбейте ими полуплоскость $t > 0$ на шесть областей. Для каждой из этих областей укажите, создаёт ли в ней возмущение волна, бегущая вследствие начального возмущения вправо (влево). В каждой из шести областей выберите произвольную точку $M(x_0, t_0)$ и постройте для неё характеристический треугольник MPQ. Запишите значения $u(x_0, t_0)$ решения указанной задачи Коши в каждой из шести областей.

Пусть снова в задаче Коши для волнового уравнения начальные данные отличны от нуля только в (x_1, x_2). Найдите зависимость величины u от переменной x в каждый фиксированный момент времени $t_0 > 0$. Для этого проведите на фазовой плоскости прямую $t = t_0 = const > 0$. (Очевидно, придётся рассмотреть два случая). При каких значениях x эта прямая пересекает каждую из шести выделенных выше областей фазовой плоскости? Для каждого найденного промежутка изменения x запишите $u(x, t_0)$; нарисуйте в каждом случае характеристический треугольник.

Для той же задачи Коши с отличными от нуля на (x_1, x_2) начальными данными найдите зависимость величины u от переменной t при каждом фиксированном x_0. Проведите на фазовой плоскости прямую $x = x_0 = const$. (Очевидно, придётся рассмотреть четыре случая.) При каких значениях t эта прямая пересекает каждую из шести выделенных выше областей фазовой плоскости ? Для каждого найденного промежутка изменения t запишите $u(x_0, t)$; рисуйте в каждом случае характеристический треугольник.

Пусть теперь в задаче Коши для волнового уравнения начальные данные отличны от нуля только в двух непересекающихся промежутках (x_1, x_2) и (x_3, x_4). Разбейте фазовую плоскость на области проходящими через концы этих промежутков парами характеристик. Для каждой области фазовой плоскости укажите, какими волнами определяется там возмущение. В каждой области выберите произвольную точку $M(x_0, t_0)$ и постройте для неё характеристический треугольник MPQ. Как надо строить решение $u(x_0, t_0)$ в каждой из указанных областей?

3. Решите задачу Коши для однородного волнового уравнения в области $-\infty < x < +\infty$ с начальными условиями

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x|}{c}, & |x| \le c\,; \\ 0\,, & |x| > c\,, \end{cases} \qquad u_t(x,0) = 0\,.$$

Нарисуйте графики зависимости u от x для фиксированных значений $t = t_i = \dfrac{c \cdot i}{4a}$, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Указание. Сначала представьте $u(x,0)$ в виде суммы двух одинаковых треугольных волн высотой $\dfrac{1}{2}$. Затем в каждый момент времени складывайте профили двух разбегающихся указанных треугольных волн.

Можно ли полученное решение считать классическим решением задачи Коши для волнового уравнения? Приведите пример последовательности достаточно гладких функций, равномерно приближающих данное негладкое начальное условие.

4. Решите задачу Коши для однородного волнового уравнения в области $-\infty < x < +\infty$ с начальными условиями

$$u(x,0)=0\,,\quad u_t(x,0)=\begin{cases} V=const\neq 0\,, & |x|\le c\,;\\ 0\,, & |x|>c\,.\end{cases}$$

Нарисуйте графики зависимости u от x для фиксированных значений $t=t_i=\dfrac{c\cdot i}{4a}\,,\ i=0\,,2\,,4\,,6$.

Указание. Сначала нарисуйте график функции $\Psi(z)=\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{-\infty}^{z}\psi(\xi)\,d\xi$, где $\psi(\xi)=V$ при $-c\le x\le c$ и $\psi(\xi)=0$ вне этого отрезка. Во что превращается формула Д'Аламбера в рассматриваемом случае ? Складывайте в каждый момент времени профили разбегающихся волн $\Psi(x+at)$ и $-\Psi(x-at)$.

Можно ли полученное решение считать классическим решением задачи Коши для волнового уравнения? Приведите пример последовательности достаточно гладких функций, приближающих данное разрывное начальное условие. Может ли такое приближение быть равномерным?

5. В задаче 3 найдите формулы, определяющие зависимость u от x в произвольный момент времени $t>0$.

Указание. Найдите шесть указанных в пункте 2 областей фазовой плоскости. Рассмотрите случаи $0<t\le\dfrac{c}{a}$ и $t\ge\dfrac{c}{a}$. Для вывода формул пользуйтесь характеристическим треугольником.

Найдите формулы, определяющие зависимость u от t при фиксированном $x=x_0=\dfrac{c}{2}$. Нарисуйте график функции $u\left(\dfrac{c}{2},t\right)$.

6. В задаче 4 найдите формулы, определяющие зависимость u от x в произвольный момент времени $t>0$.

Найдите формулы, определяющие зависимость u от t при фиксированном $x=x_0=\dfrac{c}{2}$. Нарисуйте график функции $u\left(\dfrac{c}{2},t\right)$.

7. Решите задачу Коши для однородного волнового уравнения в области $-\infty < x < +\infty$ с начальными условиями

$$u(x,0)=0\,,\quad u_t(x,0)=\begin{cases} \cos x\,, & -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}\,,\\ 0\,, & |x|>\dfrac{\pi}{2}\,.\end{cases}$$

Скорость распространения волн вдоль оси x равна 1. Найдите зависимость u от времени t при каждом фиксированном $x=x_0$.

Можно ли считать решение $u(x,t)$ этой задачи классическим решением?

8. Если при описании поперечных колебаний струны или продольных колебаний стержня нас интересует участок, удалённый от одного конца, то в качестве модели колебаний получаем начально-краевую задачу для волнового уравнения на полупрямой $x\ge 0$. Дайте постановку этой задачи в случае краевого условия 1-го, 2-го рода. Проведите редукцию общей начально-краевой задачи на полупрямой; получите задачу с нулевым краевым условием.

Начально-краевую задачу для однородного волнового уравнения на полупрямой с нулевым краевым условием можно свести к задаче Коши на всей прямой. Это сведение основано на следующих двух фактах.

Если в задаче Коши для однородного волнового уравнения на прямой начальные данные $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ —нечётные функции, то её решение обращается в нуль при $x=0$ во все моменты времени t: $u(0,t)=0$.

Если в указанной задаче Коши $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — чётные функции, то производная u_x её решения обращается в нуль при $x=0$ во все моменты времени t: $u_x(0,t)=0$.

Сведите задачу

$$u_{tt}=a^2u_{xx}\,,0<x<+\infty\,,t>0\,;$$
$$u(0,t)=0\,,t>0\,;$$
$$u(x,0)=\varphi(x)\,,0\le x<+\infty\,;$$
$$u_t(x,0)=\psi(x)\,,0\le x<+\infty$$

к задаче Коши на всей прямой. С помощью формулы Д'Аламбера запишите решение исходной задачи на $0\le x<+\infty$. (Помните, что в ответе не может быть значений $x<0$.)

Сведите задачу

$$u_{tt}=a^2u_{xx}\,,0<x<+\infty\,,t>0\,;$$
$$u_x(0,t)=0\,,t>0\,;$$
$$u(x,0)=\varphi(x)\,,0\le x<+\infty\,;$$
$$u_t(x,0)=\psi(x)\,,0\le x<+\infty$$

к задаче Коши на всей прямой. С помощью формулы Д'Аламбера запишите решение исходной задачи на $0\le x<+\infty$.

9.

$$u_{tt}=a^2\cdot u_{xx}\,,\quad 0<x<+\infty\,,\quad t>0\,;$$
$$u(0,t)=0\,,\quad t>0\,;$$
$$u(x,0)=\begin{cases}1-\dfrac{|x-2c|}{c}\,, & c\le x\le 3c\,;\\ 0\,, & x\notin[c\,,3c]\,;\end{cases}$$
$$u_t(x,0)=0\,,\quad 0\le x<+\infty\,.$$

Нарисуйте график зависимости u от x в фиксированные моменты времени $t=t_i=\dfrac{c\cdot i}{2a}\,,i=0\,,2\,,3\,,4\,,7\,.$ Как происходит отражение волны от границы $x=0$ заданной области: с переворотом или без?

10.

$$u_{tt}=a^2\cdot u_{xx}\,,\quad 0<x<+\infty\,,\quad t>0\,;$$
$$u_x(0,t)=0\,,\quad t>0\,;$$
$$u(x,0)=0\,,\quad 0\le x<+\infty\,;$$
$$u_t(x,0)=\begin{cases}V=const\ne 0\,, & c\le x\le 2c\,;\\ 0\,, & x\notin[c\,,2c]\,.\end{cases}$$

Нарисуйте график зависимости u от x в фиксированные моменты времени $t=t_i=\dfrac{c\cdot i}{a}\,,i=0\,,1\,,2\,,4\,.$ Как происходит отражение волны от границы $x=0$ заданной области: с переворотом или без?

11. В задаче 9 найдите формулы, определяющие зависимость u от x в произвольный момент времени $t>0$. Сопоставьте эти формулы с рисунками из задачи 9.

Указание. Постройте нужное продолжение начальных данных. Разбейте фазовую полуплоскость $-\infty<x<+\infty\,,t>0$ на области при помощи характеристик. Оставьте только часть

$x>0$ этого разбиения. Сколько осталось областей в квадранте $x>0$, $t>0$? В каждой из них выберите произвольную точку M и постройте характеристический треугольник MPQ. В каких областях решение постоянно? Проведите прямые $t=t_0=const$ и найдите их пересечения с указанными областями. Сколько надо рассмотреть случаев выбора t_0? Для каждого случая запишите требуемые формулы.

12. В задаче 10 найдите формулы, определяющие зависимость u от x в произвольный момент времени $t>0$.

13. Решите начально-краевую задачу для однородного волнового уравнения в области $x \geq 0$ с условиями $u(0,t)=0$, $t>0$; $u(x,0)=\begin{cases}\sin x, & 0 \leq x \leq \pi;\\ 0, & x \geq \pi;\end{cases}$ $u_t(x,0)=0.$ Скорость распространения волн вдоль оси x равна 1.

Найдите зависимость u от x в каждый момент времени t. Найдите зависимость u от t для каждого фиксированного x.

14. Решите начально-краевую задачу для однородного волнового уравнения в области $x \geq 0$ с условиями $u(0,t)=0$, $t>0$; $u(x,0)=\sin(kx)$, $k=const>0$, $0 \leq x<+\infty$;
$u_t(x,0)=-k\cdot b\cdot\cos(kx)$, $0 \leq x<+\infty$, где b – скорость распространения волн вдоль оси x: $b=const>0$.

Нарисуйте график зависимости u от t при фиксированном $x=x_0=\dfrac{2\pi}{k}$. Нарисуйте график зависимости u от x при фиксированном $t=t_0=\dfrac{3\pi}{k\cdot b}$.

15. Решите начально-краевую задачу для однородного волнового уравнения в области $x \geq 0$ с условиями

$$u_x(0,t)=0,\quad t>0;\quad u(x,0)=\begin{cases}\cos x, & 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2};\\ 0, & x \geq \dfrac{\pi}{2};\end{cases}$$

$u_t(x,0)=0$, $0 \leq x<+\infty$. Скорость распространения волн вдоль оси x равна b.

Нарисуйте график зависимости u от t при фиксированном $x=x_0=\dfrac{\pi}{4}$. Нарисуйте график зависимости u от x при фиксированном $t=t_0=\dfrac{\pi}{4b}$.

16.

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\ 0<x<+\infty,\ t>0;$$
$$u(0,t)=\mu(t),\ t>0;$$
$$u(x,0)=0,\ 0 \leq x<+\infty;$$
$$u_t(x,0)=0,\ 0 \leq x<+\infty.$$

Найдите зависимость u от x в каждый момент времени $t>0$.

Указание. Граничный режим вызовет волну, бегущую вдоль оси x вправо. Найдите её профиль из краевого условия и учтите, что всегда будет область достаточно больших значений x, куда волна ещё не добежала.

17.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}\,,\ 0 < x < +\infty\,,\ t > 0\,;$$
$$u_x(0,t) = -\frac{F(t)}{k}\,,\ t > 0\,;\ F(t) = 0\,,\ t \le 0\,;$$
$$u(x,0) = 0\,,\ 0 < x < +\infty\,;$$
$$u_t(x,0) = 0\,,\ 0 < x < +\infty\,.$$

Смысл постоянной $k > 0$ см. в задаче 1 темы 10.

Найдите профиль волны, вызванной граничным режимом. Найдите зависимость u от x в каждый момент времени $t > 0$.

18.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}\,,\ 0 < x < l\,,\ t > 0\,;$$
$$u(0,t) = 0\,,\ u(l,t) = 0\,,\ t > 0\,;$$
$$u(x,0) = \sin\frac{\pi x}{l}\,,\ 0 \le x \le l\,;$$
$$u_t(x,0) = 0\,,\ 0 \le x \le l\,.$$

Постройте продолжение начальных данных на всю прямую $-\infty < x < +\infty$ из условий нечётности этого продолжения относительно точек $x = 0$ и $x = l$ и периодичности с периодом $2l$. Запишите формулу Д'Аламбера. Найдите решение исходной задачи на отрезке.

Дополнение к теме 12.

19. В момент времени $t = 0$ неограниченная струна $-\infty < x < +\infty$ получает поперечный укол иголкой в точке $x = 0$, передающий ей импульс I. Начальное поперечное отклонение равно нулю. Начальная поперечная скорость струны в точках $x \ne 0$ равна нулю. Найдите отклонение $u(x,t)$ точек струны от положения равновесия.

Решение. Пусть $\rho = const$ — масса струны, приходящаяся на единицу её длины. Тогда импульс элемента струны dx с координатой x в момент времени t равен $u_t(x,t)\rho\, dx$. Суммарный импульс, передаваемый струне, равен $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_t(x,0)\rho\, dx$. Надо только указать, что этот импульс сосредоточен в точке $x = 0$:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}\,,\ -\infty < x < +\infty\,,\ t > 0\,;$$
$$u(x,0) = 0\,,\ -\infty < x < +\infty\,;$$
$$u_t(x,0) = \frac{I}{\rho}\delta(x)\,,$$

где $\delta(x)$ — δ - функция, сосредоточенная в нуле (см. пункт 24 темы 5). Как и в задаче 4 нарисуйте сначала график функции $\Psi(z) = \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{z}\frac{I}{\rho}\delta(x)\,dx$.

Затем складывайте в каждый момент времени профили разбегающихся волн. Поскольку в постановке задачи присутствует обобщённая функция, её решение надо понимать в обобщённом смысле. В чём проявляется неклассичность построенного решения?

Эту задачу можно решить и по-другому. Распределите импульс I равномерно по отрезку $-c \le x \le c$. Это значит, что иголка заменена плоским молотком. Тогда получится постановка задачи 4 с $V = \dfrac{I}{2c\rho}$. Устремите в решении этой задачи $c \to 0+$.

Для построения решения исходной задачи не имеет значения, как именно приближать δ - функцию. Рассмотрите другие способы распределения импульса в окрестности точки $x = 0$. В любом случае для получения окончательного ответа надо ширину распределения устремить к нулю.

20. Докажите, что $u(x,t) = \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_0^t \int\limits_{x-a\cdot(t-\tau)}^{x+a\cdot(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi\, d\tau$ является решением задачи

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t),\quad -\infty < x < +\infty,\quad t > 0\,;$$
$$u(x,0) = 0,\quad -\infty < x < +\infty\,;$$
$$u_t(x,0) = 0,\quad -\infty < x < +\infty\,,$$

если функция f непрерывна и имеет непрерывную производную $\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial x}$.

Указание. Пользуясь формулой Лейбница, найдите требуемые производные интеграла, зависящего от параметров x и t.

Тема 13.

<u>Решение начально-краевых задач для волнового уравнения методом разделения переменных.</u>

Литература: [1], гл. II, § 3, п. 1, 4, 5.

1.
$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0;$$
$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ t > 0;$$
$$u(x,0) = \sin\frac{\pi x}{l},\ 0 \le x \le l;$$
$$u_t(x,0) = 0,\ 0 \le x \le l.$$

Решение. Сначала найдём частные решения волнового уравнения вида $X(x)\cdot T(t)$, которые удовлетворяют краевым условиям. Для этого проведём разделение переменных и получим две задачи:

$$X''_{xx}(x) + \lambda\cdot X(x) = 0,\ 0 < x < l; \qquad T''_{tt}(t) + \lambda\cdot a^2\cdot T(t) = 0.$$
$$X(0) = 0,\ X(l) = 0;$$

Собственным значениям $\lambda_n = \left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2,\ n = 1, 2, \ldots,$ отвечают собственные функции $X_n(x) = \sin\dfrac{\pi n}{l}x$ и решения второго уравнения $T_n(t) = A_n\cos\left(\dfrac{\pi n a}{l}t\right) + B_n\sin\left(\dfrac{\pi n a}{l}t\right)$. Общее решение волнового уравнения, удовлетворяющее краевым условиям, имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\left(\frac{\pi n a}{l}t\right) + B_n\sin\left(\frac{\pi n a}{l}t\right)\right)\cdot\sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Коэффициенты A_n и B_n можно найти из начальных условий исходной задачи, раскладывая $u(x,0)$ и $u_t(x,0)$ в ряды Фурье по системе $\{X_n\}$.

Найдите A_n и B_n для заданных начальных условий и сравните построенное решение $u(x,t)$ с решением задачи 18 темы 12.

2. Решите начально-краевую задачу для однородного волнового уравнения в области $0 \le x \le \pi$ с условиями $u(0,t) = 0,\quad t > 0;\quad u_x(\pi,t) = 0,\quad t > 0;$

$$u(x,0) = \sin\frac{3x}{2} + \sin\frac{5x}{2},\quad 0 \le x \le \pi;$$

$$u_t(x,0) = b\cdot\sin\frac{7x}{2},\quad 0 \le x \le \pi,$$

где b – скорость распространения волн вдоль оси x, $b = const > 0$.

3.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}\ ,\ 0 < x < \pi\ ,\ t > 0\ ;$$
$$u_x(0,t) = 0\ ,\ u(\pi,t) = 0\ ,\ t > 0\ ;$$
$$u(x,0) = \cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{7x}{2}\ ,\ 0 \le x \le \pi\ ;$$
$$u_t(x,0) = a\cos\frac{5x}{2},\ 0 \le x \le \pi\ .$$

4. Решите начально-краевую задачу для однородного волнового уравнения в области $0 \le x \le 1$ с условиями $u_x(0,t)=0$, $t>0$; $u(1,t)=0$, $t>0$; $u(x,0)=1-x$, $0\le x\le 1$ $u_t(x,0)=0$, $0\le x\le 1$. Скорость распространения волн вдоль оси x равна 2.

5.

$$u_{tt} + 2u_t = u_{xx} + 8u + 2x(1-4t) + \cos 3x\ ,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}\ ,t > 0;$$
$$u_x(0,t) = t\ ,\ u\left(\frac{\pi}{2},t\right) = \frac{\pi t}{2}\ ,t > 0\ ;$$
$$u(x,0) = 0\ ,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2};$$
$$u_t(x,0) = x\ ,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}.$$

Указание. Сначала выполните замену неизвестной функции: $u(x,t)=v(x,t)+xt$; запишите задачу для v. Полученное уравнение можно упростить ещё одной заменой неизвестной

функции: $v(x,t)=e^{\alpha x+\beta t}w(x,t)$. Выберите α и β так, чтобы в уравнении для w не было члена, содержащего w_t. Найдите собственные функции $X_n(x)$, отвечающие краевой задаче для уравнения $w_{tt}=w_{xx}$. Ищите решение полученного неоднородного уравнения в виде $w(x,t)=\sum\limits_n X_n(x)\cdot T_n(t)$; разложите неоднородность уравнения в ряд Фурье по системе $\{X_n(x)\}$. Запишите задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно $T_n(t)$. При каких n их решения ненулевые?

Ответ: $u(x,t)=xt+\left(1-e^{-t}-t\,e^{-t}\right)\cos 3x$.

6.

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + f_0\ ,\ 0 < x < l\ ,\ t > 0\ ;\ f_0 = const \ne 0\ ;$$
$$u(0,t) = 0\ ,\ u(l,t) = 0\ ,\ t > 0\ ;$$
$$u(x,0) = 0\ ,\ 0 \le x \le l\ ;$$
$$u_t(x,0) = 0\ ,\ 0 \le x \le l\ .$$

7.

$$u_{tt} = u_{xx} + \cos t\ ,\ 0 < x < \pi\ ,\ t > 0\ ;$$
$$u(0,t) = 0\ ,\ u(\pi,t) = 0\ ,\ t > 0\ ;$$
$$u(x,0) = 0\ ,\ 0 \le x \le \pi\ ;$$
$$u_t(x,0) = 0\ ,\ 0 \le x \le \pi\ .$$

8.

$$u_{tt} = 4u_{xx}\,,\,0 < x < \frac{\pi}{2}\,,\,t > 0\,;$$

$$u(0,t) = t\,,\,u_x\left(\frac{\pi}{2},t\right) = \pi\,,\,t > 0\,;$$

$$u(x,0) = 2\sin 5x + \pi x\,,\,0 \le x \le \frac{\pi}{2}\,;$$

$$u_t(x,0) = 1\,,\,0 \le x \le \frac{\pi}{2}\,.$$

9.

$$u_{tt} = 4u_{xx} + 2\,,\,0 < x < \pi\,,\,t > 0\,;$$
$$u(0,t) = t^2\,,\,u(\pi,t) = 4\pi + t^2\,,\,t > 0\,;$$
$$u(x,0) = \sin x + 4x\,,\,0 \le x \le \pi\,;$$
$$u_t(x,0) = 0\,,\,0 \le x \le \pi\,.$$

10.

$$u_{tt} = 4u_{xx} + 2\,,\,0 < x < \pi\,,\,t > 0\,;$$
$$u(0,t) = t^2\,,\,u(\pi,t) = 4\pi + t^2\,,\,t > 0\,;$$
$$u(x,0) = 4x\,,\,0 \le x \le \pi\,;$$
$$u_t(x,0) = 2\sin 3x\,,\,0 \le x \le \pi\,.$$

11.

$$u_{tt} = u_{xx} + 3u + \sin t \cdot \cos 2x\,,\,0 < x < \pi\,,\,t > 0\,;$$
$$u_x(0,t) = 0\,,\,u_x(\pi,t) = 0\,,\,t > 0\,;$$
$$u(x,0) = 0\,,\,0 \le x \le \pi\,;$$
$$u_t(x,0) = 0\,,\,0 \le x \le \pi\,.$$

12.

$$u_{tt} + 2u_t = u_{xx} - u\,,\,0 < x < \pi\,,\,t > 0\,;$$
$$u_x(0,t) = 0\,,\,u(\pi,t) = 0\,,\,t > 0\,;$$
$$u(x,0) = 0\,,\,0 \le x \le \pi\,;$$
$$u_t(x,0) = x\,,\,0 \le x \le \pi\,.$$

Дополнение к теме 13.

13.

$$u_{tt} = a^2 \cdot u_{xx}\,,\quad 0 < x < l\,,\quad t > 0\,;$$
$$u(0,t) = 0\,,\quad u(l,t) = 0\,,\quad t > 0\,;$$
$$u(x,0) = 0\,,\quad 0 \le x \le l\,;$$
$$u_t(x,0) = \delta(x - x_0)\,,\quad 0 \le x \le l\,,\quad 0 < x_0 < l\,.$$

14.

$$u_{tt} = u_{xx} - \sin t, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$$
$$u(0,t) = \sin t, \quad u_x(1,t) + u(1,t) = \cos t, \quad t > 0;$$
$$u(x,0) = x, \quad 0 \le x \le 1;$$
$$u_t(x,0) = 1, \quad 0 \le x \le 1.$$

15.

$$u_{tt} = u_{xx} - \sin t, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$$
$$u_x(0,t) = \cos t, \quad u_x(1,t) + u(1,t) = \sin t + \cos t, \quad t > 0;$$
$$u(x,0) = x - 1, \quad 0 \le x \le 1;$$
$$u_t(x,0) = 1, \quad 0 \le x \le 1 .$$

16.

$$u_{tt} = u_{xx} - 4 \cdot e^{-t} \cdot \cos t, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$$
$$u_x(0,t) + 2 \cdot u(0,t) = 3e^{-t} \cdot \sin t,$$
$$u(1,t) = e^{-t} \cdot \sin t, \quad t > 0;$$
$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1;$$
$$u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1 .$$

Тема 14.

Решение задач математической физики методами интегральных преобразований Фурье и Лапласа.

Литература: [2], гл. VIII; [5], гл. X, § 6.

Функция $\hat{u}(\lambda) = \int\limits_a^b K(\lambda,\zeta)u(\zeta)d\zeta$ называется интегральным преобразованием функции $u(\zeta)$. Интегральное преобразование задаётся выбором промежутка интегрирования (a,b) и ядра $K(\lambda,\zeta)$. Интегральное преобразование определено на некотором классе функций $u(\zeta)$, называемых **оригиналами**, $\hat{u}(\lambda)$ называют при этом **изображением** оригинала $u(\zeta)$. Применение интегральных преобразований для решения задач математической физики состоит в том, что вместо непосредственного определения функции u, удовлетворяющей дифференциальному уравнению в частных производных, ищется сначала её интегральное преобразование определённого типа (по выбранной переменной ζ). После выполнения этого преобразования над уравнением получим для $\hat{u}$ более простое уравнение в пространстве изображений, в котором число независимых переменных на 1 меньше. Дополнительные условия (кроме условий, гарантирующих возможность применения интегрального преобразования) также переводятся в соответствующие дополнительные условия для $\hat{u}$. После решения построенной в пространстве изображений задачи надо восстановить оригинал u по найденному его изображению $\hat{u}$. Это можно сделать при помощи соответствующей формулы обращения интегрального преобразования или по таблицам прямых и обратных преобразований часто встречающихся функций.

Напомним некоторые интегральные преобразования и формулы их обращения; всюду далее будем считать выполненными условия их применимости.

Преобразование Фурье:

$$\hat{u}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda\zeta}\cdot u(\zeta)d\zeta; \qquad u(\zeta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda\zeta}\cdot\hat{u}(\lambda)d\lambda.$$

Синус-преобразование Фурье:

$$\hat{u}_S(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\sin(\lambda\zeta)\cdot u(\zeta)d\zeta;$$

$$u(\zeta)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\sin(\lambda\zeta)\cdot\hat{u}_S(\lambda)d\lambda.$$

Косинус-преобразование Фурье:

$$\hat{u}_C(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\cos(\lambda\zeta)\cdot u(\zeta)d\zeta;$$

$$u(\zeta)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\cos(\lambda\zeta)\cdot\hat{u}_C(\lambda)d\lambda.$$

Преобразование Лапласа (вместо λ пишем p):

$$U(p)=\int_0^{+\infty}e^{-p\zeta}\cdot u(\zeta)d\zeta,$$ $p=\xi+i\eta-$ комплексная переменная;

$$u(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty}e^{p\zeta}\cdot U(p)dp,$$ где интеграл берётся вдоль любой вертикальной прямой $\operatorname{Re}p=\xi$, ξ больше показателя степени роста оригинала u.

Замечание. В каждой из задач 1 – 12 изображение искомой функции удовлетворяет задаче Коши для некоторого обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Решить эту задачу Коши можно, например, методом преобразования Лапласа.

1. $u_t=a^2u_{xx}$, $-\infty<x<+\infty$, $t>0$;
$u(x,0)=\varphi(x)$, $-\infty<x<+\infty$.

Решите задачу методом преобразования Фурье по переменной x.

2. $u_t=a^2u_{xx}+f(x,t)$, $-\infty<x<+\infty$, $t>0$;
$u(x,0)=0$, $-\infty<x<+\infty$.

Решите задачу методом преобразования Фурье по переменной x.

3. $u_t=a^2u_{xx}$, $0<x<+\infty$, $t>0$;
$u(0,t)=0$, $t>0$; $u(x,0)=\varphi(x)$, $0\le x<+\infty$.

Решите задачу методом синус-преобразования Фурье по переменной x.

4. $u_t=a^2u_{xx}$, $0<x<+\infty$, $t>0$;
$u_x(0,t)=0$, $t>0$; $u(x,0)=\varphi(x)$, $0\le x<+\infty$.

Решите задачу методом косинус-преобразования Фурье по переменной x.

5. $u_t=a^2u_{xx}$, $0<x<+\infty$, $t>0$;
$u(0,t)=\mu(t)$, $t>0$; $u(x,0)=0$, $0\le x<+\infty$.

Решите задачу методом синус-преобразования Фурье по переменной x.

6. $u_t=a^2u_{xx}$, $0<x<+\infty$, $t>0$;
$u_x(0,t)=\nu(t)$, $t>0$; $u(x,0)=0$, $0\le x<+\infty$.

Решите задачу методом косинус-преобразования Фурье по переменной x.

7. $u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ 0 < x < +\infty,\ t > 0;$

$u(0,t) = 0,\ t > 0;\quad u(x,0) = 0,\ 0 \le x < +\infty.$

Решите задачу методом синус-преобразования Фурье по переменной x.

8. $u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ 0 < x < +\infty,\ t > 0;$

$u_x(0,t) = 0,\ t > 0;\quad u(x,0) = 0,\ 0 \le x < +\infty.$

Решите задачу методом косинус-преобразования Фурье по переменной x.

9. $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ -\infty < x < +\infty,\ t > 0;$

$u(x,0) = \varphi(x),\quad u_t(x,0) = \psi(x),\ -\infty < x < +\infty.$

Решите задачу методом преобразования Фурье по переменной x.

10. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), -\infty < x < +\infty,\ t > 0;$

$u(x,0) = 0,\quad u_t(x,0) = 0,\ -\infty < x < +\infty.$

Решите задачу методом преобразования Фурье по переменной x.

11. $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < +\infty,\ t > 0;$

$u(0,t) = 0,\quad t > 0;$

$u(x,0) = \varphi(x),\quad u_t(x,0) = \psi(x),\ 0 \le x < +\infty.$

Решите задачу методом синус-преобразования Фурье по переменной x.

12. $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < +\infty,\ t > 0;$

$u_x(0,t) = 0,\quad t > 0;$

$u(x,0) = \varphi(x),\quad u_t(x,0) = \psi(x),\ 0 \le x < +\infty.$

Решите задачу методом косинус-преобразования Фурье по переменной x.

13. Задачу 5 решите методом преобразования Лапласа по переменной t.

14. В задачах 6, 7, 12 темы 13 найдите условия, которые для решения $u(x,t)$ определяют его преобразование Лапласа по переменной t.

15. $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0;$

$u(0,t) = 0,\quad u_x(l,t) = A\sin(\omega t),\quad t > 0;$

$A = const,\quad \omega = const;$

$u(x,0) = 0,\quad u_t(x,0) = 0,\ 0 \le x \le l.$

Найдите преобразование Лапласа по переменной t решения задачи $u(x,t)$.

Ответы

Тема I.
(о характеристиках см. тему II)

3. Уравнение теплопроводности параболического типа.

4. Уравнение Лапласа эллиптического типа.

5. Волновое уравнение гиперболического типа.

8. В области $\begin{cases} x<0 \\ y>0 \end{cases}$ уравнение гиперболического типа, имеет два семейства действительных характеристик $(-x)^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}=const$ и $(-x)^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}=const$. Заменой переменных $\begin{cases} \xi=(-x)^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}} \\ \eta=(-x)^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}} \end{cases}$ уравнение приводится к первой канонической форме $u_{\xi\eta}=\dfrac{2}{3(\xi^2-\eta^2)}\cdot(\eta\cdot u_\xi-\xi\cdot u_\eta)$, а заменой переменных $\begin{cases} \tilde\xi=(-x)^{\frac{3}{2}} \\ \tilde\eta=y^{\frac{3}{2}} \end{cases}$ оно приводится ко второй канонической форме

$$u_{\tilde\xi\tilde\xi}-u_{\tilde\eta\tilde\eta}=\frac{1}{3}\left(\frac{u_{\tilde\eta}}{\tilde\eta}-\frac{u_{\tilde\xi}}{\tilde\xi}\right).$$

В области $\begin{cases} x>0 \\ y<0 \end{cases}$ уравнение гиперболического типа, имеет два семейства действительных характеристик $x^{\frac{3}{2}}+(-y)^{\frac{3}{2}}=const$ и $x^{\frac{3}{2}}-(-y)^{\frac{3}{2}}=const$. Заменой переменных $\begin{cases} \xi=x^{\frac{3}{2}}+(-y)^{\frac{3}{2}} \\ \eta=x^{\frac{3}{2}}-(-y)^{\frac{3}{2}} \end{cases}$ уравнение приводится к той же первой канонической форме, а заменой переменных $\begin{cases} \tilde\xi=x^{\frac{3}{2}} \\ \tilde\eta=(-y)^{\frac{3}{2}} \end{cases}$ оно приводится к той же второй канонической форме.

В области $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$ уравнение эллиптического типа, действительных характеристик не имеет. Заменой переменных $\begin{cases} \tilde\xi=x^{\frac{3}{2}} \\ \tilde\eta=y^{\frac{3}{2}} \end{cases}$ уравнение приводится к канонической форме $u_{\tilde\xi\tilde\xi}+u_{\tilde\eta\tilde\eta}=-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{u_{\tilde\eta}}{\tilde\eta}+\dfrac{u_{\tilde\xi}}{\tilde\xi}\right)$.

В области $\begin{cases} x<0 \\ y<0 \end{cases}$ уравнение эллиптического типа. Заменой переменных $\begin{cases} \tilde\xi=(-x)^{\frac{3}{2}} \\ \tilde\eta=(-y)^{\frac{3}{2}} \end{cases}$ оно приводится к той же канонической форме.

9. В области $\begin{cases} x<0 \\ y>0 \end{cases}$ уравнение гиперболического типа, имеет два семейства действительных характеристик $\sqrt{-x}+\sqrt{y}=const$ и $\sqrt{-x}-\sqrt{y}=const$. Заменой переменных $\begin{cases} \xi=\sqrt{-x}+\sqrt{y} \\ \eta=\sqrt{-x}-\sqrt{y} \end{cases}$

уравнение приводится к первой канонической форме $u_{\xi\eta}=\dfrac{1}{\xi^2-\eta^2}\cdot\left(\xi\cdot u_\eta-\eta\cdot u_\xi\right)$, а заменой переменных $\begin{cases}\tilde{\xi}=\sqrt{-x}\\ \tilde{\eta}=\sqrt{y}\end{cases}$

оно приводится ко второй канонической форме $u_{\tilde{\xi}\tilde{\xi}}-u_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}}=\dfrac{u_{\tilde{\xi}}}{\tilde{\xi}}-\dfrac{u_{\tilde{\eta}}}{\tilde{\eta}}$.

В области $\begin{cases}x>0\\ y<0\end{cases}$ уравнение гиперболического типа, имеет два семейства действительных характеристик $\sqrt{x}+\sqrt{-y}=const$ и $\sqrt{x}-\sqrt{-y}=const$. Заменой переменных $\begin{cases}\xi=\sqrt{x}+\sqrt{-y}\\ \eta=\sqrt{x}-\sqrt{-y}\end{cases}$ уравнение приводится к той же первой канонической форме, а заменой переменных $\begin{cases}\tilde{\xi}=\sqrt{x}\\ \tilde{\eta}=\sqrt{-y}\end{cases}$ оно приводится к той же второй канонической форме.

В области $\begin{cases}x>0\\ y>0\end{cases}$ уравнение эллиптического типа, действительных характеристик не имеет. Заменой переменных $\begin{cases}\tilde{\xi}=\sqrt{x}\\ \tilde{\eta}=\sqrt{y}\end{cases}$ уравнение приводится к канонической форме $u_{\tilde{\xi}\tilde{\xi}}+u_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}}=\dfrac{u_{\tilde{\xi}}}{\tilde{\xi}}+\dfrac{u_{\tilde{\eta}}}{\tilde{\eta}}$.

В области $\begin{cases}x<0\\ y<0\end{cases}$ уравнение эллиптического типа. Заменой переменных $\begin{cases}\tilde{\xi}=\sqrt{-x}\\ \tilde{\eta}=\sqrt{-y}\end{cases}$ оно приводится к той же канонической форме.

19. Уравнение с постоянными коэффициентами всюду на плоскости x, y параболического типа, имеет одно семейство действительных характеристик $x-y=const$. Заменой переменных $\begin{cases}\xi=x-y\\ \eta=x+y\end{cases}$ уравнение приводится к канонической форме $u_{\eta\eta}+\dfrac{1}{2}u_\eta+\dfrac{1}{4}u=0$, являющейся обыкновенным дифференциальным уравнением.

24. Уравнение с постоянными коэффициентами всюду на плоскости x, y параболического типа, имеет одно семейство действительных характеристик $x+y=const$. Заменой переменных $\begin{cases}\xi=x+y\\ \eta=x-y\end{cases}$ уравнение приводится к канонической форме $u_{\xi\xi}+u_\xi+2u_\eta+\dfrac{1}{4}u=0$. Заменой искомой функции $u=e^{-\frac{\xi}{2}}\cdot v$ получаем $v_{\xi\xi}+2v_\eta=0$.

Тема 2.

2. $\beta=-b$.

3. $u_t=a^2\cdot u_{xx}+f(x,t)$.

9. $\lim\limits_{t\to+\infty}u(x,t)=l$ в первом случае; $\lim\limits_{t\to+\infty}u(x,t)=\dfrac{l}{2}$ во втором случае.

10. См. задачу 11 темы 3.

11. См. задачу 12 темы 3.

12. См. задачу 13 темы 3 при $p = -\dfrac{Q}{k \cdot S}$, где k – коэффициент теплопроводности, S – площадь поперечного сечения стержня.

15. См. задачу 3 темы 4.

16. См. задачу 4 темы 4.
Температура реального стержня неограниченно возрастать с течением времени не может. В рассматриваемой модели это не отражено; модель применима лишь для конечного интервала изменения t.

18.
$$u_t = a^2 \cdot u_{xx}, \quad \omega_0 \cdot t < x < +\infty, \quad t > 0;$$
$$u(\omega_0 \cdot t, t) = \psi(t), \quad t > 0;$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x < +\infty.$$

19. $u_t = k \cdot u_{xx}$.

Тема 3.

3. $$u = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot \exp\left\{-\left(\frac{\pi(2n+1)a}{2l}\right)^2 t\right\} \cdot \sin\frac{\pi(2n+1)}{2l}x,$$ где
$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \cdot \sin\frac{\pi(2n+1)}{2l}x \cdot dx.$$

4. $$u = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot \exp\left\{-\left(\frac{\pi(2n+1)a}{2l}\right)^2 t\right\} \cdot \cos\frac{\pi(2n+1)}{2l}x,$$

где $$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \cdot \cos\frac{\pi(2n+1)}{2l}x \cdot dx.$$

5. $$u = \frac{32}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^3} \cdot \exp\left\{-\left(\frac{\pi(2n+1)}{2}\right)^2 t\right\} \cdot \cos\frac{\pi(2n+1)}{2}x.$$

6. $$u = (x-l) + \frac{8l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \exp\left\{-\left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}\right)^2 t\right\} \cdot \cos\frac{\pi(2n+1)}{2l}x.$$

7. $$u = e^{-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t} \cdot \sin\frac{\pi}{l}x; \quad \lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0.$$

8. $$u = e^{-\frac{9a^2}{4}t} \cdot \cos\frac{3x}{2}; \quad \lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0.$$

9. $$u = e^{-\frac{25a^2}{4}t} \cdot \sin\frac{5x}{2}; \quad \lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0.$$

10. $$u = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \exp\left\{-(\pi(2n+1)a)^2 t\right\}\cos(\pi(2n+1)x);$$
$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = \frac{1}{2}.$$

11.

$$u=(x\cdot(u_2-u_1)+u_1)+$$

$$+\frac{2}{\pi}\cdot(u_0+u_1-u_2)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot e^{-(\pi n a)^2 t}\cdot\sin(\pi n x)-$$

$$-\frac{4}{\pi}\cdot u_1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}\cdot e^{-(\pi(2n+1)a)^2 t}\cdot\sin(\pi(2n+1)x);$$

$$\lim_{t\to+\infty}u(x,t)=x\cdot(u_2-u_1)+u_1.$$

12.

$$u=U+\frac{4}{\pi}\cdot e^{-bt}\cdot(u_0-U)\cdot$$

$$\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot\exp\left\{-\left(\frac{\pi(2n+1)a}{2l}\right)^2 t\right\}\cdot\cos\frac{\pi(2n+1)}{2l}x;$$

$$\lim_{t\to+\infty}u(x,t)=U.$$

13. $$u=p\left[\left(x-\frac{l}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cdot\exp\left\{-\left(\frac{\pi(2n+1)a}{t}\right)^2 t\right\}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{l}(2n+1)x\right)\right];$$

$$\lim_{t\to+\infty}u(x,t)=p\left(x-\frac{l}{2}\right).$$

14. $X_n(x)=\cos\sqrt{\lambda_n}x$, где λ_n – корни уравнения

$$tg(\sqrt{\lambda}\cdot l)=\frac{h}{\sqrt{\lambda}};\qquad \|X_n\|^2=\frac{l}{2}+\frac{h}{2\cdot(h^2+\lambda_n)}.$$

15. $X_n(x)=\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\cdot(l-x)\right)$, где λ_n – корни уравнения

$$tg(\sqrt{\lambda}\cdot l)=-\frac{\sqrt{\lambda}}{h};\quad \|X_n\|^2=\frac{l}{2}+\frac{h}{2\cdot(h^2+\lambda_n)}.$$

Тема 4.

2. $$u=t\cdot e^{-9\pi^2 t}\cdot\sin(3\pi x).$$

4. Начальная температура и плотность распределения источников тепла не зависят от x. Поэтому $u(x,t)=V(t)$, поскольку с течением времени тепло не будет передаваться от одного участка стержня к другому и не будет теряться через концы стержня. $u(x,t)=V(t)=f_0\cdot t$. $\lim\limits_{t\to+\infty}u(x,t)=\infty$.

5. $$u=\frac{16f_0l^2}{a^2\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\left(1-e^{-\frac{\pi^2a^2(2n+1)^2}{4l^2}t}\right)\sin\frac{\pi(2n+1)}{2l}x;$$

$$\lim_{t\to+\infty}u(x,t)=\frac{16f_0l^2}{a^2\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\sin\frac{\pi}{2l}(2n+1)x.$$

7. $$u=p\left[\frac{x^2}{2l}+\frac{a^2}{l}t-\frac{l}{6}-\frac{2l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\right].$$

8. $$u=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)\cdot\left[1+(2k+1)^4\right]}\cdot\left(\sin t+(2k+1)^2\cos t-\right.$$

$$\left.-(2k+1)^2e^{-(2k+1)^2 t}\right)\cdot\sin(2k+1)x.$$

9. $$u=2t+e^{-25t}\cdot\sin 5x.$$

10. $$u = 2t + \frac{2}{25}\left(1 - e^{-25t}\right)\cdot \sin 5x.$$

11. $$u = e^{-4t}\cdot \sin 2x + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\left(1 - e^{-n^2 t}\right)\cdot \sin nx.$$

13.
$$u = xt - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(\pi^2 n^2 - 1)}\left[t - \frac{\pi^2 n^2}{\pi^2 n^2 - 1}\left(1 - e^{-(\pi^2 n^2 - 1)t}\right)\right]\sin(\pi n x)$$

14.
$$u = xt - \frac{t}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2\left(\pi^2(2k+1)^2 - 1\right)}t\cdot\cos(\pi(2k+1)x) +$$

$$+4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1 - \exp\left\{-\left(\pi^2(2k+1)^2 - 1\right)\cdot t\right\}}{\left(\pi^2(2k+1)^2 - 1\right)^2}\cdot\cos(\pi(2k+1)x).$$

15.
$$u = xt - \frac{32}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\lambda_k^{\,2}\left(\pi^2\lambda_k^{\,2} + 4\right)}t\cdot\sin\frac{\pi\lambda_k}{2}x -$$

$$-\frac{32}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\pi^2}{\left(\pi^2\lambda_k^{\,2} + 4\right)^2}\cdot\left(1 - e^{-\frac{4+\pi^2\lambda_k^{\,2}}{4}t}\right)\cdot\sin\frac{\pi\lambda_k}{2}x,$$

$$\lambda_k = 2k+1.$$

16. $$u = t(x-1) + \frac{32}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t}{\lambda_k^{\,2}\left(\pi^2\lambda_k^{\,2} + 4\right)}\cdot\cos\frac{\pi\lambda_k}{2}x -$$

$$-\frac{16}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(4 + \pi^2\lambda_k^{\,2}\right) - 2\pi\lambda_k}{\lambda_k\left(\pi^2\lambda_k^{\,2} + 4\right)^2}\cdot\left(1 - e^{-\frac{4+\pi^2\lambda_k^{\,2}}{4}t}\right)\cdot\cos\frac{\pi\lambda_k}{2}x, \quad \lambda_k = 2k+1.$$

17. $$u = \frac{16}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2 - 4}\left[\frac{3}{(2n-5)(2n+7)} -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(2n-1)(2n+3)}\right]\cdot\left(1 - e^{\frac{4-(2n+1)^2}{4}t}\right)\cdot\sin\frac{1+2n}{2}x.$$

18. $$u = \left(t^2 + 1\right)\cdot x - 1 + \frac{2}{25\pi^2}\cdot\left(1 - e^{-25\pi^2 t}\right)\cdot\cos\frac{5\pi}{2}x.$$

19. $$u = t\cdot x^2 + x + \frac{1}{9}\cdot\left(1 - e^{-9t}\right)\cdot\cos 3x.$$

20. $$u = \frac{2}{3}\cdot\left(1 - e^{\frac{3}{4}t}\right)\cdot\sin\frac{x}{2} + \frac{2}{5}\cdot\left(1 - e^{-\frac{5}{4}t}\right)\cdot\sin\frac{3x}{2}.$$

21. $$u = x + \frac{1}{8}\cdot\left(1 - e^{-8t}\right)\cdot\sin 3x + t\cdot\sin x.$$

22. $$u = t\cdot x + e^{x-(1+\pi^2)t}\cdot\sin\pi x.$$

23. $$u = t\cdot x^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(e^{4t} - 1\right) + t\cdot\cos 2x.$$

24. $$u = 1 + t + e^x\cdot\left(1 - e^{-t}\right)\cdot\sin x + e^{x-4t}\cdot\sin 2x.$$

25. $$u = x\cdot t^2 + e^{-3t}\cdot\cos 2x + \sin t - \cos t + e^t.$$

Тема 5.

1.

$$u_t = a^2 \cdot u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0;$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty;$$
$$|u(x,t)| < const.$$

Из ограниченности решения следует его единственность.

4. $$u = (1+t)\cdot e^{-t} \cdot \cos x.$$

5. $$u = cht \cdot \sin x.$$

6. $$u = 1 - \cos t + \frac{1}{\sqrt{1+4t}} \cdot \exp\left\{-\frac{x^2}{1+4t}\right\}.$$

7. $$u = \frac{x}{(1+4t)^{\frac{3}{2}}} \cdot \exp\left\{-\frac{x^2}{1+4t}\right\}.$$

8. $$u = \frac{1}{\sqrt{1+t}} \cdot \exp\left\{-\frac{x^2 - 2x - t}{1+t}\right\}.$$

9. $$u = \frac{1}{\sqrt{1+t}} \cdot \sin\frac{x}{1+t} \cdot \exp\left\{-\frac{4x^2 + t}{4(1+t)}\right\}.$$

10. $$\lim_{t\to 0+} u(x_0, t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x_0 - 0) + \varphi(x_0 + 0)\right].$$

12. $$u(x,t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi;t-\tau)\cdot f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

13. $\lim\limits_{t\to 0+} G_{x\neq\xi} = 0$, $\lim\limits_{t\to 0+} G_{x=\xi} = +\infty$. Температура реального стержня в точке $x \neq \xi$ не может мгновенно измениться из-за выделения тепла в точке ξ. В рассматриваемой модели это не отражено.

15. $$\lim_{t\to 0+} u(0,t) = \frac{u_1 + u_2}{2}, \quad \lim_{t\to +\infty} u(x,t) = \frac{u_1 + u_2}{2}.$$

16. $$u = \frac{u_0}{2}\left[\Phi\left(\frac{x+l}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-l}{2a\sqrt{t}}\right)\right]; \quad \lim_{t\to 0+} u(\pm l, t) = \frac{u_0}{2}.$$

17. $$u = \frac{1}{2}\cdot e^{\alpha^2 t - \alpha x}\cdot\left[1 - \Phi\left(\frac{2\alpha t - x}{2\sqrt{t}}\right)\right].$$

18. В случае краевого условия 1-го рода

$$G(x,\xi;t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot\left[\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right\} - \exp\left\{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}\right\}\right];$$

в случае краевого условия 2-го рода

$$G(x,\xi;t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot\left[\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right\} + \exp\left\{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}\right\}\right].$$

19. $$u = \frac{u_0}{2}\left[\Phi\left(\frac{x+l}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-l}{2a\sqrt{t}}\right)\right];$$

$$\lim_{t\to 0+} u(l,t) = \frac{u_0}{2}; \quad \lim_{t\to +\infty} u(x,t) = 0.$$

20. $$u=\frac{1}{\sqrt{1+4a^2\cdot\alpha\cdot t}}\cdot\exp\left\{-\frac{\alpha x^2}{1+4a^2\cdot\alpha\cdot t}\right\};$$
$\lim\limits_{t\to+\infty}u(x,t)=0$.

21. $$u=u_0\cdot\left[1-\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right];\quad \lim_{t\to+\infty}u(x,t)=u_0.$$

Плотность потока тепла через конец стержня равна $\dfrac{k\cdot u_0}{a\cdot\sqrt{\pi t}}$.

22. $$u=u_0\cdot\left[1-e^{-ht}\cdot\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right].$$

Тема 6.

1. u_1 и u_4 – гармонические функции; u_2 и u_3 – не являются гармоническими.

2. $\vec{A}_1=-grad\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\vec{A}_3=grad(xyz)$; $\vec{A}_2$ и $\vec{A}_4$ не являются потенциальными.

3.
$$\frac{\partial u_1}{\partial n}=\frac{3}{a}\cdot x\cdot y\cdot z;\quad \frac{\partial u_2}{\partial n}=2a;\quad \frac{\partial u_3}{\partial n}=\frac{3}{a}\left(x^3+y^3+z^3\right).$$

4. $4\pi a^3$; $\dfrac{12}{5}\pi a^5$; 0.

5. u_1, u_2, u_3, u_4, u_7, u_9 – гармонические функции; u_5, u_6, u_8, u_{10} не являются гармоническими.

13. $$\Delta u=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$$ – оператор Лапласа в полярной системе координат.

14. Если сферические координаты r, φ, θ связаны с декартовыми координатами x, y, z формулами
$x=r\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi$, $y=r\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi$, $z=r\cdot\cos\theta$, то
$$\Delta u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$$

Тема 7.

2. $$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2-r^2}{r^2-2ar\cdot\cos(\varphi-\xi)+a^2}\cdot f(\xi)d\xi.$$

6. Не выполнено необходимое условие разрешимости: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=a}\cdot d\varphi\neq 0$.

7. $r^3\sin 3\varphi$; $\dfrac{1}{2}\left(1-r^2\cdot\cos 2\varphi\right)$; $\dfrac{1}{2}\left(1+r^2\cdot\cos 2\varphi\right)$.

8. $r\cdot\sin\varphi+const$; $r\cdot(\sin\varphi+\cos\varphi)+const$; нет решений.

9. $u=\dfrac{1}{r}\cos\varphi$.

10. $u=\dfrac{1}{r}\cos\varphi+const$.

12. $$u=\log_{\frac{a}{b}}\frac{\sqrt{a}\,r}{\sqrt{b}\,b}+\frac{r^4-a^2b^2}{2r^2\left(a^2-b^2\right)}\cdot\cos 2\varphi .$$

14. $$u=\left(\frac{r}{2}\right)^{3\pi}\sin(3\pi\varphi).$$

16.
$$u=\left(3^{2\pi}\cdot\left(\frac{2}{r}\right)^{\pi}-(2\cdot r)^{\pi}\right)\cdot\frac{\sin(\pi\varphi)}{3^{2\pi}-2^{2\pi}}-$$
$$-\left(2^{3\pi}\cdot\left(\frac{3}{r}\right)^{\frac{3\pi}{2}}-(3\cdot r)^{\frac{3\pi}{2}}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\varphi\right)}{3^{3\pi}-2^{3\pi}}.$$

18.
$$u=\frac{r^2-a^2}{4}+\frac{b^2-a^2}{4}\cdot\ln_{\frac{a}{b}}\left(\frac{r}{a}\right)+$$
$$+\frac{a^3\left(b^2-r^2\right)\sin\varphi+b^3\left(r^2-a^2\right)\cos\varphi}{r\left(b^2-a^2\right)}.$$

21. $$u=\frac{\sin\frac{\pi x}{a}\cdot sh\frac{\pi(b-y)}{a}}{sh\frac{\pi b}{a}}+\frac{\sin\frac{\pi y}{b}\cdot sh\frac{\pi(a-x)}{b}}{sh\frac{\pi a}{b}}.$$

22. $$u=\frac{\sin\frac{\pi x}{a}\cdot sh\frac{\pi(b-y)}{a}}{sh\frac{\pi b}{a}}+\frac{\sin\frac{2\pi x}{a}\cdot sh\frac{2\pi y}{a}}{sh\frac{2\pi b}{a}}.$$

24. $$u=x-y+const.$$

25. $$u=\frac{\sin(3x)\cdot ch(3y)}{3\cdot sh(3\pi)}+\frac{sh(2x)\cdot\cos(2y)}{sh(2\pi)}-\frac{\sin(2x)\cdot ch(2(\pi-y))}{2sh(2\pi)}.$$

26. $$u=\frac{1}{4}\left(e^{-2y}-1\right)\cdot\sin(2x)+e^{-4y}\cdot\sin(4x).$$

27. $u=u_1+u_2+u_3+u_4-u_0$, где

$$u_1=\frac{\sin\frac{\pi x}{a}\cdot sh\frac{\pi(b-y)}{a}}{sh\frac{\pi b}{a}},\qquad u_2=\frac{\sin\frac{2\pi y}{b}\cdot sh\frac{2\pi x}{b}}{sh\frac{2\pi a}{b}},$$

$$u_3=\frac{\sin\frac{3\pi x}{a}\cdot sh\frac{3\pi y}{a}}{sh\frac{3\pi b}{a}},\qquad u_4=\frac{\sin\frac{4\pi y}{b}\cdot sh\frac{4\pi(a-x)}{b}}{sh\frac{4\pi a}{b}},$$

$$u_0=\frac{\sin\frac{5\pi x}{a}\cdot\sin\frac{6\pi y}{b}}{\frac{25\pi^2}{a^2}+\frac{36\pi^2}{b^2}}.$$

Тема 8.

3.

$$u(Q)=\iiint\limits_{\Omega}G(P,Q)\cdot F(P)\cdot dx\,dy\,dz-\iint\limits_{S}\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_P}\cdot f(P)\cdot dS_P\,.$$

$$u(Q)=\iint\limits_{D}G(P,Q)\cdot F(P)\cdot dx\,dy-\int\limits_{\gamma}\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_P}\cdot f(P)\cdot d\gamma_P\,.$$

6.

$$G(P,Q)=G(x,y,z;x_0,y_0,z_0)=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\sum_{j,k=0}^{1}\frac{(-1)^{j+k}}{\sqrt{(x-x_0)^2+\left(y-(-1)^j y_0\right)^2+\left(z-(-1)^k z_0\right)^2}}.$$

7.

$$G(P,Q)=G(x,y,z;x_0,y_0,z_0)=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\sum_{i,j,k=0}^{1}\frac{(-1)^{i+j+k}}{\sqrt{\left(x-(-1)^i x_0\right)^2+\left(y-(-1)^j y_0\right)^2+\left(z-(-1)^k z_0\right)^2}}.$$

11.

$$G(P,Q)=G(x,y;x_0,y_0)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{i,j=0}^{1}(-1)^{i+j}\cdot\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\left(x-(-1)^i x_0\right)^2+\left(y-(-1)^j y_0\right)^2}}\right).$$

16. См. ответ задачи 3.

Тема 9.

1. Все указанные функции, кроме w_3, осуществляют конформные отображения первого рода, т.е. в каждой точке сохраняют не только абсолютные величины углов, но и их знаки. Функция w_3 осуществляет конформное отображение второго рода, т.е. в каждой точке сохраняет абсолютные величины углов, но изменяет их знаки на противоположные. (Если $w=\varphi(z)$ задаёт конформное отображение первого рода, то $w=\overline{\varphi}(z)$ – второго. И наоборот.)

6. $v=arctg\dfrac{x}{y}=\dfrac{\pi}{2}-arctg\dfrac{y}{x}$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0,\ y>0}}v(x,y)$ не существует.

$h(z)=\left(c+i\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)-\ln z$, где c – произвольная действительная постоянная;

$z=0$ – точка ветвления функции $h(z)$.

7. $v=arctg\dfrac{x^2-y^2}{2xy}$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\ x>0\\ y\to 0,\ y>0}}v(x,y)$ не существует.

$h(z)=\left(c+i\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)-2\ln z$, где c – произвольная действительная постоянная; $z=0$ – точка ветвления.

10. Полуполосу $\left\{z=x+iy:\ -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2},\ \ y>0\right\}$ на верхнюю полуплоскость отображает функция $w=\sin z$. Она горизонтальные отрезки переводит в дуги эллипсов с фокусами -1 и $+1$, а вертикальные отрезки – в дуги гипербол с теми же фокусами.

12. Вертикальную полосу $\left\{z=x+iy:\ -\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{\pi}{4}\right\}$ на круг $\{w:\ |w|<1\}$ отображает функция $w=tg\,z$. Она каждую вертикальную

прямую $x = c = const$, $-\frac{\pi}{4} \le c \le \frac{\pi}{4}$, переводит в " меридиан " (в дугу окружности с концами i и $-i$, проходящую через точку $w = tg\, c$), а каждый горизонтальный отрезок $\left\{z = x + iy: \ -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}, \quad y = c = const, \quad -\infty < c < +\infty\right\}$ – в " параллель" (в дугу окружности, ортогональную " меридианам ", соединяющую левую часть единичной окружности с её правой частью и проходящую через точку $z = i \cdot th\, c$).

13. Горизонтальную полосу $\{z = x + iy: \ 0 < y < \pi\}$ на верхнюю полуплоскость отображает функция $w = e^z$. Она каждую горизонтальную прямую $y = c = const$ переводит в луч $\arg w = c$, а каждый вертикальный отрезок $\{z = x + iy: \ x = c = const, \ \alpha \le y \le \beta\}$ – в дугу окружности $\{w: \ |w| = e^c, \ \alpha \le \arg w \le \beta\}$.

17. Указание. Найдите образ заданной области при отображении $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ или при отображении $w = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$.

Тема 10.

2. $u(x) = \frac{\rho \cdot g}{2E} \cdot x \cdot (l - x)$, где g – ускорение свободного падения, E – модуль продольной упругости стержня.

3. $u(x) = \frac{\rho \cdot g}{2E} \cdot x \cdot (2l - x)$ (ρ, g, E см. в задаче 2).

4. $u(x) = \frac{F}{SE} \cdot x$, где S – площадь поперечного сечения стержня, E – модуль продольной упругости.

Тема 11.

1. Уравнение теплопроводности имеет одно семейство действительных характеристик: $t = t_0 = const$.

Уравнение Лапласа не имеет действительных характеристик.

Волновое уравнение имеет два семейства действительных характеристик: $x + at = const$, $x - at = const$.

3. $u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$.

4. $u_{\tilde{\xi}\tilde{\xi}} - u_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}} = \tilde{\Phi}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, u, u_{\tilde{\xi}}, u_{\tilde{\eta}})$.

5. $u_{\tilde{\xi}\tilde{\xi}} + u_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}} = \tilde{\Phi}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, u, u_{\tilde{\xi}}, u_{\tilde{\eta}})$.

6. $u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$.

Тема 12.

5. При $0 \le t_0 \le \dfrac{c}{a}$

$$u(x,t_0)=\begin{cases} 0 &, \quad x\le -at_0-c;\\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{|x+at_0|}{2c}, & -at_0-c\le x\le at_0-c;\\ 1-\dfrac{|x-at_0|+|x+at_0|}{2c}, & at_0-c\le x\le c-at_0;\\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{|x-at_0|}{2c}, & c-at_0\le x\le c+at_0;\\ 0 &, \quad x\ge c+at_0.\end{cases}$$

При $t_0 \ge \dfrac{c}{a}$

$$u(x,t_0)=\begin{cases} 0 &, \quad x\le -at_0-c;\\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{|x+at_0|}{2c}, & -at_0-c\le x\le c-at_0;\\ 0 &, \quad c-at_0\le x\le at_0-c;\\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{|x-at_0|}{2c}, & at_0-c\le x\le c+at_0;\\ 0 &, \quad x\ge c+at_0.\end{cases}$$

$$u\left(\frac{c}{2},t\right)=\begin{cases} \dfrac{1}{2} &, \quad 0\le t\le \dfrac{c}{2a};\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{c-2at}{4c} &, \quad \dfrac{c}{2a}\le t\le \dfrac{3c}{2a};\\ 0 &, \quad t\ge \dfrac{3c}{2a}.\end{cases}$$

6. При $0 \le t_0 \le \dfrac{c}{a}$

$$u(x,t_0)=\begin{cases} 0 &, \quad x\le -at_0-c;\\ \dfrac{V}{2a}(c+x+at_0), & -at_0-c\le x\le at_0-c;\\ Vt_0 &, \quad at_0-c\le x\le c-at_0;\\ \dfrac{V}{2a}(c-x+at_0), & c-at_0\le x\le c+at_0;\\ 0 &, \quad x\ge c+at_0.\end{cases}$$

При $t_0 \ge \dfrac{c}{a}$

$$u(x,t_0)=\begin{cases} 0 &, \quad x\le -at_0-c; \\ \dfrac{V}{2a}(c+x+at_0), & -at_0-c\le x\le c-at_0; \\ \dfrac{Vc}{a} &, \quad c-at_0\le x\le at_0-c; \\ \dfrac{V}{2a}(c-x+at_0), & at_0-c\le x\le c+at_0; \\ 0 &, \quad x\ge c+at_0. \end{cases}$$

$$u\left(\frac{c}{2},t\right)=\begin{cases} Vt &, \quad 0\le t\le \dfrac{c}{2a}; \\ \dfrac{V}{2a}\left(\dfrac{c}{2}+at\right) &, \quad \dfrac{c}{2a}\le t\le \dfrac{3c}{2a}; \\ \dfrac{Vc}{a} &, \quad t\ge \dfrac{3c}{2a}. \end{cases}$$

7. При $x_0\le -\dfrac{\pi}{2}$

$$u(x_0,t)=\begin{cases} 0 &, \quad 0\le t\le -\dfrac{\pi}{2}-x_0; \\ \dfrac{1}{2}(\sin(x_0+t)+1), & -\dfrac{\pi}{2}-x_0\le t\le \dfrac{\pi}{2}-x_0; \\ 1 &, \quad t\ge \dfrac{\pi}{2}-x_0. \end{cases}$$

При $-\dfrac{\pi}{2}\le x_0\le 0$

$$u(x_0,t)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}(\sin(x_0+t)-\sin(x_0-t)) &, \quad 0\le t\le \dfrac{\pi}{2}+x_0; \\ \dfrac{1}{2}(\sin(x_0+t)+1), & \dfrac{\pi}{2}+x_0\le t\le \dfrac{\pi}{2}-x_0; \\ 1 &, \quad t\ge \dfrac{\pi}{2}-x_0. \end{cases}$$

При $0\le x_0\le \dfrac{\pi}{2}$

$$u(x_0,t)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}(\sin(x_0+t)-\sin(x_0-t)) &, \quad 0\le t\le \dfrac{\pi}{2}-x_0; \\ \dfrac{1}{2}(1-\sin(x_0-t)), & \dfrac{\pi}{2}-x_0\le t\le \dfrac{\pi}{2}+x_0; \\ 1 &, \quad t\ge \dfrac{\pi}{2}+x_0. \end{cases}$$

При $x_0\ge \dfrac{\pi}{2}$

$$u(x_0,t)=\begin{cases} 0 &, \quad 0\le t\le x_0-\dfrac{\pi}{2}; \\ \dfrac{1}{2}(1-\sin(x_0-t)), & x_0-\dfrac{\pi}{2}\le t\le \dfrac{\pi}{2}+x_0; \\ 1 &, \quad t\ge \dfrac{\pi}{2}+x_0. \end{cases}$$

13. При $0 \le t_0 \le \pi$

$$u(x,t_0)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\sin(x+t_0)+\sin(x-t_0)\right), & 0\le x\le \pi-t_0;\\ \frac{1}{2}\sin(x-t_0), & \pi-t_0\le x\le t_0+\pi;\\ 0, & x\ge t_0+\pi.\end{cases}$$

При $t_0 \ge \pi$

$$u(x,t_0)=\begin{cases}0, & 0\le x\le t_0-\pi;\\ \frac{1}{2}\sin(x-t_0), & t_0-\pi\le x\le t_0+\pi;\\ 0, & x\ge t_0+\pi.\end{cases}$$

При $0 \le x_0 \le \pi$

$$u(x_0,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\sin(x_0+t)+\sin(x_0-t)\right), & 0\le t\le \pi-x_0;\\ \frac{1}{2}\sin(x_0-t), & \pi-x_0\le t\le x_0+\pi;\\ 0, & t\ge x_0+\pi.\end{cases}$$

При $x_0 \ge \pi$

$$u(x_0,t)=\begin{cases}0, & 0\le t\le x_0-\pi;\\ \frac{1}{2}\sin(x_0-t), & x_0-\pi\le t\le x_0+\pi;\\ 0, & t\ge x_0+\pi.\end{cases}$$

14. $$u(x,t)=\begin{cases}\sin(k(x-bt)), & x\ge bt;\\ 0, & 0\le x\le bt.\end{cases}$$

$$u(x_0,t)=\begin{cases}-\sin(kbt), & 0<t\le \frac{2\pi}{kb};\\ 0, & t\ge \frac{2\pi}{kb}.\end{cases}$$

$$u(x,t_0)=\begin{cases}0, & 0\le x\le \frac{3\pi}{k};\\ -\sin(kx), & x\ge \frac{3\pi}{k}.\end{cases}$$

15. $$u(x_0,t)=\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(bt), & 0<t\le \frac{\pi}{4b};\\ \frac{1}{2}\cos\left(bt-\frac{\pi}{4}\right), & \frac{\pi}{4b}\le t\le \frac{3\pi}{4b};\\ 0, & t\ge \frac{3\pi}{4b}.\end{cases}$$

$$u(x,t_0)=\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x, & 0\le x\le \frac{\pi}{4};\\ \frac{1}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right), & \frac{\pi}{4}\le x\le \frac{3\pi}{4};\\ 0, & x\ge \frac{3\pi}{4}.\end{cases}$$

13. При $0 \le t_0 \le \pi$

$$u(x,t_0)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\sin(x+t_0)+\sin(x-t_0)\right), & 0\le x\le \pi-t_0;\\ \frac{1}{2}\sin(x-t_0), & \pi-t_0\le x\le t_0+\pi;\\ 0, & x\ge t_0+\pi.\end{cases}$$

При $t_0 \ge \pi$

$$u(x,t_0)=\begin{cases}0, & 0\le x\le t_0-\pi;\\ \frac{1}{2}\sin(x-t_0), & t_0-\pi\le x\le t_0+\pi;\\ 0, & x\ge t_0+\pi.\end{cases}$$

При $0 \le x_0 \le \pi$

$$u(x_0,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\sin(x_0+t)+\sin(x_0-t)\right), & 0\le t\le \pi-x_0;\\ \frac{1}{2}\sin(x_0-t), & \pi-x_0\le t\le x_0+\pi;\\ 0, & t\ge x_0+\pi.\end{cases}$$

При $x_0 \ge \pi$

$$u(x_0,t)=\begin{cases}0, & 0\le t\le x_0-\pi;\\ \frac{1}{2}\sin(x_0-t), & x_0-\pi\le t\le x_0+\pi;\\ 0, & t\ge x_0+\pi.\end{cases}$$

14. $$u(x,t)=\begin{cases}\sin(k(x-bt)), & x\ge bt;\\ 0, & 0\le x\le bt.\end{cases}$$

$$u(x_0,t)=\begin{cases}-\sin(kbt), & 0<t\le \frac{2\pi}{kb};\\ 0, & t\ge \frac{2\pi}{kb}.\end{cases}$$

$$u(x,t_0)=\begin{cases}0, & 0\le x\le \frac{3\pi}{k};\\ -\sin(kx), & x\ge \frac{3\pi}{k}.\end{cases}$$

15. $$u(x_0,t)=\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(bt), & 0<t\le \frac{\pi}{4b};\\ \frac{1}{2}\cos\left(bt-\frac{\pi}{4}\right), & \frac{\pi}{4b}\le t\le \frac{3\pi}{4b};\\ 0, & t\ge \frac{3\pi}{4b}.\end{cases}$$

$$u(x,t_0)=\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x, & 0\le x\le \frac{\pi}{4};\\ \frac{1}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right), & \frac{\pi}{4}\le x\le \frac{3\pi}{4};\\ 0, & x\ge \frac{3\pi}{4}.\end{cases}$$

14.

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda_n+1)\cdot\left(\sin\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}\right)}{(\lambda_n-1)\sqrt{\lambda_n}\,(\lambda_n+2)}\Big[(\lambda_n-2)\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)+$$

$$+\sqrt{\lambda_n}\sin\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)+\cos t-\sin t\Big]\sin\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)+(\cos t-\sin t)\frac{x}{2}+\sin t$$

где λ_n – положительные корни уравнения $tg\sqrt{\lambda}=-\sqrt{\lambda}$.

15.

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(\lambda_n+1)\cdot\left(\cos\sqrt{\lambda_n}-1\right)}{(\lambda_n-1)\cdot\lambda_n\cdot(\lambda_n+2)}\cdot\left[\cos t-\cos\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)\right]\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)+$$

$+x\cdot\cos t+\sin t-\cos t$, где λ_n – корни уравнения $tg\sqrt{\lambda}=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$.

16.

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}\chi_n\cdot\frac{\lambda_n}{\lambda_n^2-4}\left(\cos\sqrt{\lambda_n}t-e^{-t}\cdot\cos t\right)-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\chi_n\frac{1}{\lambda_n^2-4}\left(\frac{\lambda_n-2}{\sqrt{\lambda_n}}\sin\sqrt{\lambda_n}t-2e^{-t}\sin t\right)+(2-x)e^{-t}\sin t,$$

где χ_n – коэффициенты Фурье функции $(2-x)$ по системе собственных функций $X_n=\dfrac{\sqrt{\lambda_n}}{2}\cos\sqrt{\lambda_n}x-\sin\sqrt{\lambda_n}x$, а λ_n – корни уравнения

$$tg\sqrt{\lambda}=\frac{\sqrt{\lambda}}{2}.$$

Тема 14.

1. Изображение решения исходной задачи $\bar{u}(\lambda,t)$ (t – параметр) удовлетворяет условиям

$$\frac{d\bar{u}}{dt}+a^2\lambda^2\bar{u}=0,\qquad \bar{u}(\lambda,0)=\bar{\varphi}(\lambda)$$

Решение этой задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка имеет вид $\bar{u}(\lambda,t)=\bar{\varphi}(\lambda)\cdot e^{-a^2\lambda^2 t}$. Применяя обратное преобразование Фурье, получим

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda x}\cdot\bar{u}(\lambda,t)d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}\cdot e^{i\lambda(x-\xi)}d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)d\xi\int_{0}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}\cdot\cos[\lambda(x-\xi)]d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right\}\cdot\varphi(\xi)d\xi.$$

В последнем равенстве мы учли, что

$$\int_{0}^{+\infty}e^{-\alpha^2\lambda^2}\cdot\cos(\lambda\beta)d\lambda=\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}\exp\left\{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right\}.$$

2. $$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp\left\{-\dfrac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}}{\sqrt{t-\tau}}f(\xi,\tau)d\xi.$$

3. Изображение решения $\bar{u}_S(\lambda,t)$ удовлетворяет задаче

$$\frac{d\bar{u}_S}{dt}+a^2\lambda^2\bar{u}_S=0,\qquad \bar{u}_S(\lambda,0)=\bar{\varphi}_S(\lambda).$$

Отсюда $\widehat{u}_S(\lambda,t)=\widehat{\varphi}_S(\lambda)\cdot e^{-a^2\lambda^2 t}$. Применяя обратное синус-преобразование Фурье, найдём $u(x,t)$ (см. задачу 18 темы 5).

4. См. ответ к задаче 18 темы 5.

5. Изображение решения $\widehat{u}_S(\lambda,t)$ удовлетворяет задаче

$$\frac{d\widehat{u}_S}{dt}+a^2\lambda^2\widehat{u}_S=a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\lambda\mu(t), \qquad \widehat{u}_S(\lambda,0)=0.$$

Отсюда $\widehat{u}_S(\lambda,t)=a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\lambda\int\limits_0^t e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\cdot\mu(\tau)d\tau$. Применяя обратное синус-преобразование Фурье, найдём

$$u(x,t)=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{\exp\left\{-\dfrac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\cdot\mu(\tau)d\tau.$$

6. Изображение решения $\widehat{u}_C(\lambda,t)$ удовлетворяет задаче

$$\frac{d\widehat{u}_C}{dt}+a^2\lambda^2\widehat{u}_C=-a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\nu(t), \qquad \widehat{u}_C(\lambda,0)=0.$$

Отсюда $\widehat{u}_C(\lambda,t)=-a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int\limits_0^t e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\cdot\nu(\tau)d\tau$. Применяя обратное косинус-преобразование Фурье, найдём $u(x,t)$ (см. задачу 25 темы 5).

9. Изображение решения $\widehat{u}(\lambda,t)$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{d^2\widehat{u}}{dt^2}+a^2\lambda^2\widehat{u}=0$. Его общее решение имеет вид $\widehat{u}(\lambda,t)=f_1(\lambda)\cdot e^{i\lambda at}+f_2(\lambda)\cdot e^{-i\lambda at}$, где f_1 и f_2 – произвольные функции от λ. Применяя обратное преобразование Фурье, найдём $u(x,t)=f_1(x+at)+f_2(x-at)$. Из начальных условий исходной задачи окончательно получим $u(x,t)$ (см. задачу 1 темы 12).

10. Изображение решения $\widehat{u}(\lambda,t)$ удовлетворяет задаче $\dfrac{d^2\widehat{u}}{dt^2}+a^2\lambda^2\widehat{u}=\widehat{f}(\lambda,t)$, $\widehat{u}(\lambda,0)=0$, $\dfrac{d\widehat{u}(\lambda,0)}{dt}=0$. Отсюда $\widehat{u}(\lambda,t)=\dfrac{1}{a\lambda}\int\limits_0^t\sin[a\lambda(t-\tau)]\cdot\widehat{f}(\lambda,\tau)d\tau$. Применяя обратное преобразование Фурье, найдём $u(x,t)$ (см. задачу 20 темы 12).

13. Изображение решения исходной задачи $U(x,p)$ (x – параметр) удовлетворяет условиям $\dfrac{d^2U}{dx^2}=\dfrac{p}{a^2}U$, $U(0,p)=M(p)$, где M – изображение функции $\mu(t)$. Из требования ограниченности функции $u(x,t)$ при $x\to+\infty$ вытекает ограниченность её изображения $U(x,p)$ при $x\to+\infty$. Отсюда $U(x,p)=M(p)\cdot\left[p\cdot\dfrac{1}{p}\cdot\exp\left\{-\dfrac{\sqrt{p}}{a}x\right\}\right]$. Оригинал функции $\dfrac{1}{p}\cdot e^{-\alpha\sqrt{p}}$ равен $1-\Phi\left(\dfrac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)$ (находим его по таблице), а выражение в квадратных скобках является изображением его производной по t. Для восстановления функции $u(x,t)$ остаётся применить теорему о произведении изображений.

15. $$U(x,p)=\frac{Aa\omega}{p(p^2+\omega^2)}\cdot\frac{sh\left(\dfrac{x}{a}p\right)}{ch\left(\dfrac{l}{a}p\right)}.$$