Лекция 2 (08 сентября 2022)
Теоремы Вейерштрасса (продолжение)

Как правило, мы будем иметь дело с метрическими пространствами, над элементами которых определены линейные операции, а метрика ρ порождается нормой.

Определение 7. *Пусть L — некоторое линейное пространство. Функция $\|\cdot\| : L \to R^1$, определённая на L, называется* ***нормой****, если она обладает свойствами*

- $\|\lambda\, x\| = |\lambda|\, \|x\| \quad \forall\, \lambda \in R^1\, \forall\, x \in L$ *(положительная однородность),*
- $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \quad \forall\, x, y \in L$ *(нер-во треугольника),*
- $\|x\| \geqslant 0 \quad \forall\, x \in L, \quad \|x\| = 0 \iff x = 0.$

Линейное пространство L, наделённое нормой $\|\cdot\|$, называется ***нормированным пространством****. Нормированное пространство, полное относительно метрики $\rho(x, y) = \|x - y\|$, называется* ***ба́наховым****.*

Приведём пример, показывающий, что в банаховом пространстве непрерывная функция может не достигать свой нижней грани на замкнутом и ограниченном множестве.

Пример 1. *Задача минимизации:*

$$J(u) = \int_{-1}^{0} u(t)\, dt - \int_{0}^{1} u(t)\, dt \to \inf, \quad u \in U \subset C[-1, 1], \quad U = \{\|u\|_C \leqslant 1\}.$$

Здесь $C[-1, 1]$ — банахово пространство непрерывных на $[-1, 1]$ функций (см. упражнение 2), $J(u)$ — непрерывная (и к тому же линейная) на $C[-1, 1]$ функция, U — единичный шар в $C[-1, 1]$, являющийся замкнутым, ограниченным, но некомпактным в $C[-1, 1]$ множеством (см. упражнение 3), нижняя грань $J_* = -2$ и $U_* = \varnothing$. Непрерывность (на самом деле, даже липшиц-непрерывность) функции $J(u)$ следует из оценки

$$|J(u) - J(v)| = |J(u - v)| \leqslant \int_{-1}^{1} |u(t) - v(t)|\, dt \leqslant 2\, \|u - v\| \quad \forall\, u, v \in C[-1, 1],$$

а наименьшее значение функции $J_* = -2$ достигается на разрывной функции $u_*(t) = \operatorname{sign} t \notin C[-1, 1]$. Заменой функции $J(u)$ на

$$j(u) = \frac{1}{J_* - J(u)} = \frac{1}{-2 - J(u)}$$

получим пример, в котором $j_* = -\infty$ и $U_* = \varnothing$.

Следующий пример показывает, что требование компактности не является необходимым.

Пример 2. *Задача минимизации:*

$$J(u) = \int_{-1}^{1} u(t)\,dt \to \inf, \quad u \in U \subset C[-1,1], \quad U = \{\|u\|_C \leqslant 1\}.$$

Здесь также $J_* = -2$, *но теперь* $u_*(t) \equiv -1 \in U_* \neq \varnothing$.

Мы, в основном, будем иметь дело с линейными пространствами, наделёнными не только нормой, но и скалярными произведениями.

Определение 8. *Пусть* L *— некоторое линейное пространство. Функция* $\langle\cdot,\cdot\rangle : L \times L \to R^1$, *определённая на декартовом произведении* $L \times L$, *называется* ***скалярным произведением***, *если она обладает свойствами*

1) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \quad \forall\, x, y \in L$ *(симметрия),*

2) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle \quad \forall\, \alpha \in R^1\; \forall\, x, y \in L$ *(однород. по первой переменной),*

3) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle \quad \forall\, x, y, z \in L$ *(аддит. по первой переменной),*

4) $\langle x, x\rangle \geqslant 0 \quad \forall\, x \in L, \quad \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0.$

Линейное пространство L, *наделённое скалярным произведением* $\langle\cdot,\cdot\rangle$, *называется* ***евклидовым***. *Евклидово пространство, полное относительно метрики* $\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle}$, *называется* ***гильбертовым***.

Замечание 4. *Свойства 2) и 3) означают, что скалярное произведение линейно по первой переменной. С учётом 1) оно линейно и по второй переменной, т. е. является симметричной билинейной функцией (формой), обладающей дополнительным свойством 4).*

В данном определении гильбертова пространства не упоминается его размерность. Это значит, что все конечномерные линейные пространства мы будем относить к категории гильбертовых, поскольку в них всегда можно ввести скалярное произведение, например, по хорошо известному нам правилу

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i\,, \tag{2}$$

где x_i, y_i — координаты векторов x и y в некотором базисе. Типичным примером беконечномерного евклидова пространства, не являющегося гильбертовым (т. е. полным), может служить пространство непрерывных функций $C[a, b]$ со скалярным произведением (см. упражнение 2)

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt\,. \tag{3}$$

Одним из важных для данного курса эталонных примеров бесконечномерного гильбертова пространства является пространство Лебега $L^2(a,b)$, которое может быть получено пополнением пространства $C[a,b]$ пределами последовательностей непрерывных на $[a,b]$ функций, фундаментальных относительно интегральной нормы

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,dt},$$

порождённой скалярным произведением (3), в котором интеграл понимается в смысле Лебега. В курсе ФА обычно дается другое эквивалентное определение пространства $L^2(a,b)$. Так или иначе, это пространство состоит из функций $f(t)$, измеримых по Лебегу на (a,b) и интегрируемых по Лебегу на (a,b) вместе со своими квадратами $f^2(t)$.

Другим эталонным примером бесконечномерного гильбертова пространства является пространство l^2, состоящее из числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$, таких, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < +\infty.$$

Скалярное произведение в пространстве l^2 вводится по правилу

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\, y_i\,,$$

подобному конечномерному скалярному произведению (2).

Замечание 5. *Любое евклидово пространство является нормированным:*

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}\,,$$

а любое нормированние пространство является метрическим:

$$\rho(u,v) = \|u - v\|\,.$$

Обсудим кратко свойство компактности множества. Разумеется, в любом (бесконечномерном) нормированном пространстве X компактными будут любые замкнутые ограниченные множества, принадлежащие конечномерным подпространствам этого пространства X. В упражнении 3 в *конкретном* бесконечномерном банаховом пространстве $X = C[a,b]$ указано замкнутое и ограниченное множество, которое не является компатктным. В следующем примере речь идёт о *произвольном* бесконечномерном гильбертовом пространстве.

Пример 3. *В любом бесконечномерном евклидовом пространстве замкнутый единичный шар $U = \{\|u\| \leqslant 1\}$ не является компактным множеством. В качестве последовательности $u_n \in U$, из которой нельзя выделить ни одной сходящейся подпоследовательности, можно взять произвольную ортонормированную систему (ОНС) элементов*

$$e_n \in U: \quad \langle e_n, e_m \rangle = 0 \; \forall \, n \neq m, \quad \langle e_n, e_n \rangle = \|e_n\|^2 = 1 \;\; \forall \, n = 1, 2, \ldots$$

Дело в том, что никакая подпоследовательность элементов такой ОНС не может сходиться из-за отсутствия у неё свойства фундаментальности:

$$\|e_n - e_m\|^2 = \langle e_n, e_n \rangle - 2\langle e_n, e_m \rangle + \langle e_m, e_m \rangle \stackrel{n \neq m}{=} 2 \not\to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to \infty.$$

В следующих упражнениях представлены примеры *бесконечномерных* компактных подмножеств.

Упражнение 4. *Докажите, что в банаховом пространстве $C[a,b]$ множество U функций, равномерно ограниченных на $[a,b]$ и удовлетворяющих на $[a,b]$ условию Липшица с одной и той же константой, является компактным:*

$$U = \left\{ f(t) \in C[a,b] \;\middle|\; \|f\|_{C[a,b]} \leqslant R, \; |f(t) - f(s)| \leqslant L|t - s| \; \forall t, s \in [a,b] \right\}.$$

Упражнение 5. *Докажите, что так называемый «гильбертов кирпич»*

$$U = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in l^2 \;\middle|\; |x_n| \leqslant 2^{-n}, \; n = 1, 2, \ldots \right\}$$

является компактным множеством в гильбертовом пространстве l^2.

В формулировке следующей обобщённой теоремы Вейерштрасса мы ослабим требование ко множеству и усилим требование к функции. Для этого нам понадобится понятие *слабой* сходимости.

Определение 9. *Пусть H — гильбертово пространство. Последовательность u_n элементов из H называется* ***слабо сходящейся*** *к точке $u_0 \in H$, если для любого фиксированного $h \in H$*

$$\langle u_n, h \rangle \to \langle u_0, h \rangle \quad \text{при} \quad n \to \infty\,.$$

Обратим внимание на то, что в конечномерных пространствах разницы между сильной и слабой сходимостью нет. В бесконеномерных пространствах из сильной сходимости следует слабая сходимость:

$$|\langle u_n, h \rangle - \langle u_0, h \rangle| = |\langle u_n - u_0, h \rangle| \stackrel{\text{К-Б}}{\leqslant} \|u_n - u_0\| \, \|h\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty\,.$$

Примером последовательности, сходящейся слабо, но не сильно, служит любая бесконечная ОНС, состоящая из попарно ортогональных элементов e_n единичной длины. Покажем, что она *слабо* в H сходится к нулю. Фиксируем произвольный элемент $h \in H$ и запишем для него неравенство Бесселя (МА, 2 курс):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle h, e_n \rangle^2 \leqslant \|h\|^2 .$$

Из сходимости числового ряда следует, что его общий член стремится к нулю, значит,

$$\langle h, e_n \rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 = \langle h, 0 \rangle .$$

При этом сильная сходимость ОНС к нулю, разумеется, отсутствует:

$$\|e_n - 0\| = \|e_n\| = 1 \not\to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty .$$

Определение 10. *Пусть H — гильбертово пространство, $J(u) : H \to R^1$ – некоторая определённая на этом пространстве функция и $u_0 \in H$ — некоторая фиксированная точка. Пусть u_n —* ***произвольная*** *последовательность, слабо в H сходящаяся к точке u_0. Тогда в зависимости от поведения значений $J(u_n)$ функция $J(u)$ называется*

- ***слабо непрерывной*** *в точке u_0, если существует*

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n) = J(u_0),$$

- ***слабо полунепрерывной снизу*** *(сл п/н сн) в точке u_0, если*

$$\varliminf_{n\to\infty} J(u_n) \geqslant J(u_0),$$

- ***слабо полунепрерывной сверху*** *(сл п/н св) в точке u_0, если*

$$\varlimsup_{n\to\infty} J(u_n) \leqslant J(u_0).$$

Определение 11. *Подмножество $U \subset H$ гильбертова пространства H называется*

- ***слабо замкнутым**, если из условий*

$$u_n \in U,\ n = 1, 2, \ldots, \quad \text{и} \quad u_n \overset{\text{слабо}}{\longrightarrow} u_0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

  следует, что $u_0 \in U$,

- ***слабо компактным**, если из **любой** последовательности элементов $u_n \in U$ можно выделить подпоследовательность $\{u_{n_m}\} \subset \{u_n\}$, слабо в H сходящуюся при $m \to \infty$ к некоторому элементу $u_0 \in U$.*

Заметим, что в конечномерных пространствах нет разницы между слабой замкнутостью и замкнутостью, между слабой компактностью и компактностью. В бесконечномерных пространствах из компактности следует слабая компактность, но не наоборот; из слабой закнутости следует замкнутость, но не наоборот; из слабой непрерывности следует непрерывность, но не наоборот. Соответствующими *контрпримерами* в *бесконечномерном* гильбертовом пространстве могут служить:

- единичный шар $U = \{\|u\| \leqslant 1\}$, который компактен слабо, но не сильно,
- единичная сфера $U = \{\|u\| = 1\}$, которая замкнута сильно, но не слабо,
- функция $J(u) = \|u\|$, которая непрерывна в точке $u_0 = 0$ сильно, но не слабо.

Сформулируем так называемый «слабый» вариант теоремы Вейерштрасса. Её предлагается доказать самостоятельно в качестве упражнения по схеме, аналогичной «метрической» теореме 1.

Теорема 2. (слабый вариант теоремы Вейерштрасса) *Пусть H – гильбертово пространство, U – слабо компактное множество из H, а функция $J(u)$ слабо п/н снизу на множестве U. Тогда в задаче (1) $J_* > -\infty$, $U_* \neq \varnothing$ и произвольная слабая предельная точка любой минимизирующей последовательности принадлежит множеству оптимальных решений U_*.*

Замечание 6. *В случае, когда задача минимизации (1) обладает всеми перечисленными в утверждения теоремы 2 свойствами, её называют **слабо корректно поставленной** в гильбертовом пространстве H.*

Приведем без доказательства достаточные условия слабой компактности множества и слабой п/н снизу функции в гильбертовом пространстве. На экзамене требуется знание этих условий.

Утверждение. *Пусть H — гильбертово пространство. Тогда*

- *любое выпуклое замкнутое ограниченное множество $U \subset H$ является слабо компактным,*
- *любая функция $J(u)$, выпуклая и п/н снизу на выпуклом множестве $U \subset H$, является слабо п/н снизу на U.*

Приведём определения выпуклых множеств и функций.

Определение 12. *Пусть L — линейное пространство.*

- *Множество $U \subset L$ называется* ***выпуклым****, если*

$$\forall\, u,\, v \in U \quad \forall\, \alpha \in [0,1] \quad \alpha u + (1-\alpha)v \in U.$$

- *Пусть $U \subset L$ — выпуклое множество. Функция $J(u) : U \to R^1$ называется* ***выпуклой*** *на U, если*

$$\forall\, u,\, v \in U \quad \forall\, \alpha \in [0,1] \quad J\big(\alpha u + (1-\alpha)v\big) \leqslant \alpha J(u) + (1-\alpha)J(v).$$

Участвующие в этих определениях линейные комбинации вида $\alpha u+(1-\alpha)v$ со значниями $\alpha \in [0,1]$ называют *выпуклыми линейными комбинациями.*