МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Е.В. Захаров, И.В. Дмитриева, С.И. Орлик

Уравнения математической физики

Сборник задач

Методическое пособие

МАКС ПРЕСС

МОСКВА – 2009

УДК 519.7(075.8)
ББК 22.311я73
З-38

Печатается по решению Редакционно-издательского совета факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Рецензенты:
Иновенков И.Н. – доцент,
А.В. Разгулин – доцент

Захаров Е.В., Дмитриева И.В., Орлик С.И.

З-38 **Уравнения математической физики:** Сборник задач: Методическое пособие. – М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ имени М.В. Ломоносова (лицензия ИД N 05899 от 24.09.2001 г.); МАКС Пресс, 2009. – 160 с.
ISBN 978-5-89407-396-5
ISBN 978-5-317-03142-8

Данное методическое пособие предназначено для студентов, которые слушают лекции и посещают семинарские занятия. Пользоваться им надо после очередного семинара. Каждая тема пособия является формулировкой домашнего задания с указаниями к решениям задач. Пособие составлено для студентов 3 курса факультета ВМиК МГУ, обучающихся на кафедрах: Исследования операций; Автоматизации систем вычислительных комплексов; Оптимального управления; Системного анализа; Алгоритмических языков; Математической статистики; Системного программирования; Математических методов прогнозирования; Математической кибернетики.

УДК 519.7(075.8)
ББК 22.311я73

ISBN 978-5-89407-396-5
ISBN 978-5-317-03142-8

Темы семинарских занятий.

Литература.

1. А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. Уравнения математической физики. – М., " Наука", 1977.
2. А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов. Теория функций комплексной переменной. – М., "Наука", 1974.
3. Б.М.Будак, А.А.Самарский, А.Н.Тихонов. Сборник задач по математической физике. – М., "Наука", 1972.
4. В.С.Владимиров, В.П. Михайлов, А.А. Вашарин, Х.Х. Каримова, Ю.В. Сидоров, М.И. Шабунин. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М., "Наука", 1982.
5. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Основы математического анализа. Часть II. – М., " Наука", 1973.

Тема 1.

Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

Литература: [1], гл. I , § 1, п. 1, 3.

Всюду в данной теме будем предполагать, что коэффициенты при старших производных рассматриваемых уравнений нигде не обращаются в нуль одновременно.

1. Пусть в линейном относительно старших производных уравнении с непрерывными коэффициентами

$$a_{11}(x,y)\cdot u_{xx}+2\cdot a_{12}(x,y)\cdot u_{xy}+a_{22}(x,y)\cdot u_{yy}+$$
$$+F(x,y,u,u_x,u_y)=0\,,$$

где $u=u(x,y)$, производится невырожденная замена независимых переменных $\begin{cases}\xi=\varphi(x,y)\\ \eta=\psi(x,y)\end{cases}$. Искомая функция теперь имеет вид $u=u_1(\xi(x,y),\eta(x,y))$. Найдите коэффициенты при старших производных $u_{\xi\xi},u_{\xi\eta},u_{\eta\eta}$ в уравнении, записанном в новых переменных ξ, η.

Указание. Найдите частные производные $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$. Подставьте их в исходное уравнение и приведите подобные члены.

2. Тип линейного относительно старших производных уравнения

$$a_{11}(x,y)\cdot u_{xx}+2\cdot a_{12}(x,y)\cdot u_{xy}+a_{22}(x,y)\cdot u_{yy}+$$
$$+F(x,y,u,u_x,u_y)=0$$

можно найти с помощью отвечающей ему квадратичной формы

$$Q=a_{11}(x,y)\cdot q_1^2+2\cdot a_{12}(x,y)\cdot q_1\cdot q_2+a_{22}(x,y)\cdot q_2^2$$

от независимых переменных q_1, q_2 ; точку (x, y) считаем при этом фиксированной. Для этого симметричную матрицу коэффициентов квадратичной формы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $a_{12} = a_{21}$, приведём невырожденным линейным преобразованием B к диагональному виду. Это значит, что после преобразования переменных $\vec{q} = B\,\vec{p}$, $\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$, $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$, квадратичная форма примет канонический вид $Q = \alpha_1 \cdot p_1^2 + \alpha_2 \cdot p_2^2$ в новых независимых переменных p_1, p_2. Можно выбрать такое преобразование B, что коэффициенты α_1 и α_2 будут равны по модулю единице или нулю (такой вид квадратичной формы называется нормальным). Закон инерции квадратичных форм утверждает, что число положительных и число отрицательных членов в каноническом виде не зависит от способа приведения. Это и позволяет установить тип указанного дифференциального уравнения.

Уравнение в частных производных второго порядка называется уравнением эллиптического типа в точке (x, y), если коэффициенты α_1 и α_2 в каноническом виде квадратичной формы Q имеют одинаковые знаки. Их можно выбрать одновременно равными либо $+1$, либо -1. Каков в этом случае знак выражения $D = a_{12}^2(x, y) - a_{11}(x, y) \cdot a_{22}(x, y)$?

Указанное уравнение называется уравнением гиперболического типа в точке (x, y), если α_1 и α_2 имеют разные знаки. Их можно выбрать равными $+1$ и -1. Каков в этом случае знак выражения $D = a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22}$?

Указанное уравнение называется уравнением параболического типа в точке (x, y), если один из коэффициентов α_1, α_2 равен нулю. Тогда другой коэффициент можно выбрать по

модулю равным единице. Чему равно в этом случае выражение $D = a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22}$?

Вернитесь к задаче 1, в которой производилась замена независимых переменных в дифференциальном уравнении. Пусть новые независимые переменные ξ, η выбраны так, что $\xi_x = b_{11}, \xi_y = b_{21}, \eta_x = b_{12}, \eta_y = b_{22}$, где b_{ij} – элементы матрицы B, с помощью которой Q была приведена к каноническому виду. Докажите, что при такой замене переменных коэффициенты при вторых производных функции $u(x, y)$ будут преобразованы так же как коэффициенты квадратичной формы Q.

Замечание. Приведением к каноническому виду отвечающей уравнению квадратичной формы можно классифицировать дифференциальные уравнения в частных производных с произвольным числом независимых переменных.

3. К какому типу уравнений относится уравнение теплопроводности $u_t = a^2 \cdot u_{xx}$?

4. К какому типу уравнений относится уравнение Лапласа $u_{xx} + u_{yy} = 0$?

5. К какому типу уравнений относится волновое уравнение $u_{tt} = a^2 \cdot u_{xx}$?

В задачах 6 – 25 найдите области на плоскости x, y, в которых уравнение сохраняет тип. Укажите тип уравнения в каждой такой области.

6. $u_{xx} + y \cdot u_{yy} = 0$

7. $u_{xx} + xy \cdot u_{yy} = 0$

8. $y \cdot u_{xx} + x \cdot u_{yy} = 0$

9. $x \cdot u_{xx} + y \cdot u_{yy} = 0$

10. $y^2 \cdot u_{xx} - x^2 \cdot u_{yy} = 0$

11. $x^2 \cdot u_{xx} - y^2 \cdot u_{yy} = 0$

12. $x^2 \cdot u_{xx} + y^2 \cdot u_{yy} = 0$

13. $y^2 \cdot u_{xx} + x^2 \cdot u_{yy} = 0$

14. $y^2 \cdot u_{xx} + 2xy \cdot u_{xy} + x^2 \cdot u_{yy} = 0$

15. $x^2 \cdot u_{xx} + 2xy \cdot u_{xy} + y^2 \cdot u_{yy} = 0$

16. $x \cdot u_{xx} + 2x \cdot u_{xy} + (x-1) \cdot u_{yy} = 0$

17. $x \cdot u_{xx} + y \cdot u_{yy} + 2 \cdot u_x + 2 \cdot u_y = 0$

18. $u_{xx} + 2 \cdot u_{xy} + 4 \cdot u_{yy} + 2 \cdot u_x + 3 \cdot u_y = 0$

19. $u_{xx} + 2 \cdot u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y + u = 0$

20. $x^2 \cdot u_{xx} + 2xy \cdot u_{xy} + y^2 \cdot u_{yy} - 2y \cdot u_x + y \cdot e^{y/x} = 0$

21. $2 \cdot u_{xy} - 4 \cdot u_{yy} + u_x - 2 \cdot u_y + u + x = 0$

22. $u_{xy} + u_{xx} - u_y - 10 \cdot u + 4x = 0$

23. $3 \cdot u_{xx} + u_{xy} + 3 \cdot u_x + u_y - u + y = 0$

24. $u_{xx} - 2 \cdot u_{xy} + u_{yy} + 6u_x - 2u_y + u = 0$

25. $u_{xx} - 2x \cdot u_{xy} + \sin x = 0$

26. Упрощать уравнение можно и при помощи замены искомой функции. Пусть все коэффициенты линейного уравнения $a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b \cdot u + c_1 \cdot u_x + c_2 \cdot u_y + f(x,y) = 0$ постоянны. После приведения к канонической форме выполните замену неизвестной функции: $u(x,y) = e^{\alpha x + \beta y} \cdot v(x,y)$, где α и β – параметры. Как надо выбрать α и β, чтобы в канонической форме уравнения для новой функции v исчезли первые производные (для уравнений гиперболического или эллиптического типа) ? Как надо выбрать α и β, чтобы в канонической форме уравнения исчезла одна из первых производных и сама искомая функция (для уравнений параболического типа)? Найдите среди уравнений 6 – 25 уравнения с постоянными коэффициентами и приведите их к канонической форме без указанных членов.

одна из первых производных и сама искомая функция (для уравнений параболического типа)? Найдите среди уравнений 6 – 25 уравнения с постоянными коэффициентами и приведите их к канонической форме без указанных членов.

Тема 2.

Уравнение теплопроводности. Постановки начально-краевых задач для уравнения теплопроводности и их редукция.

Литература: [1], гл.III, §1, п.1-4; гл.III, §2, п.5; гл.III, §1, п.6.

1. Выведите дифференциальное уравнение теплопроводности с одной пространственной переменной.

Решение. Рассмотрим процесс теплопроводности в стержне, то есть процесс обмена тепловой энергией между соседними частями стержня. Обозначим через $u(x,t)$ температуру стержня в точке x в момент времени t. Мы предполагаем, что температура стержня не зависит от координат y и z. Если изменение температуры происходит только вследствие теплопроводности, то закон сохранения энергии для участка стержня $[x_1, x_2]$ утверждает, что тепловая энергия, затраченная на изменение температуры этого участка в течение промежутка времени $[t_1, t_2]$, равна количеству тепла, полученному участком $[x_1, x_2]$ за то же время через его концы. Это значит, что только потоки тепла через концы $x = x_1$ и $x = x_2$ выделенного участка определяют изменение $u(x,t)$. Поток тепла через поперечное сечение стержня (с координатой x) — это количество тепла, пересекающего данное сечение в направлении оси x в единицу времени. Плотностью потока тепла q (в точке x) называется поток через единицу площади поперечного сечения. Очевидно, что передача тепла происходит от части стержня с высокой температурой к части стержня с меньшей температурой; этот факт выражается законом Фурье, связывающим q и u: $q = -k \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x}$, где

$k > 0$ — коэффициент теплопроводности, который характеризует материал стержня. Теперь баланс тепла для $[x_1, x_2]$ и $[t_1, t_2]$ можно записать в виде

$$\int_{x_1}^{x_2} c \cdot \rho \cdot [u(x,t_2) - u(x,t_1)] dx = \int_{t_1}^{t_2} [q(x_1,\tau) - q(x_2,\tau)] d\tau =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[k \cdot \left.\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\right|_{x=x_2} - k \cdot \left.\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\right|_{x=x_1} \right] d\tau ,$$

где c – удельная теплоемкость, ρ – объёмная плотность массы стержня. Предполагая, что у функции $u(x,t)$ имеются непрерывные производные u_t и u_{xx}, запишем левую и правую части равенства по интегральной теореме о среднем, разделим на $x_2 - x_1$ и на $t_2 - t_1$, а затем стянем отрезок $[x_1, x_2]$ в точку x, а отрезок $[t_1, t_2]$ – в точку t. Тогда получим рассмотренный выше тепловой баланс в виде $u_t = a^2 \cdot u_{xx}$, где $a^2 = \dfrac{k}{c \cdot \rho}$. Это дифференциальное уравнение относительно $u(x,t)$ называется уравнением теплопроводности.

Замечание. Предположение об одномерности процесса передачи тепла в стержне означает, что в каждый момент времени изотермические сечения стержня совпадают с его поперечными сечениями $x = const$. Кроме того, площадь поперечных сечений постоянна.

При выводе дифференциального уравнения неявно предполагалось, что материал стержня однородный $(k = const, c = const, \rho = const)$ и что тепло не теряется через боковую поверхность стержня и не поступает от каких-либо внешних источников.

2. Запишите уравнение теплопроводности с учетом потерь тепла через боковую поверхность стержня. Сведите это уравнение к уравнению, содержащему только производные искомой функции.

Решение. Изменение температуры стержня кроме рассмотренной в задаче 1 теплопроводности может происходить еще и из-за обмена теплом между стержнем и окружающей его средой через боковую поверхность стержня. (Если такого обмена теплом нет, то боковая поверхность стержня называется теплоизолированной — поток тепла через нее равен нулю.) Пусть температура внешней среды не зависит ни от x, ни от t. Предположим, что плотность потока тепла, покидающего стержень через боковую поверхность, пропорциональна разности $u(x,t) - u_{среды}$ — закон Ньютона. Тогда учёт потерь тепла через боковую поверхность стержня вместо рассмотренного выше уравнения $u_t = a^2 \cdot u_{xx}$ приводит к уравнению $u_t = a^2 \cdot u_{xx} - b \cdot (u(x,t) - u_{среды})$, где $b = const > 0$.

Если вместо $u(x,t)$ ввести функцию $v(x,t) = u(x,t) - u_{среды}$, то она будет удовлетворять уравнению $v_t = a^2 \cdot v_{xx} - b \cdot v$. Чтобы избавиться от члена, содержащего новую неизвестную функцию $v(x,t)$, выполните ещё одну замену искомой функции: $v(x,t) = e^{\beta t} \cdot w(x,t)$. Подставьте это выражение в уравнение для v и подберите параметр β так, чтобы получить уравнение $w_t = a^2 \cdot w_{xx}$.

3. Температура стержня может изменяться не только из-за наличия теплопроводности в нем, но и от действия источников (или поглотителей) тепла в стержне. Приведите примеры внешних источников или поглотителей тепла, действие которых не зависит от температуры стержня $u(x,t)$. К какому уравнению относительно функции $u(x,t)$ приводит учёт этих источников?

Указание. Для описания действия внешних источников тепла надо указать как они распределены вдоль стержня и как их мощность зависит от времени. Функция $f(x,t)$ называется плотностью распределения источников тепла, если источник выделяет на участке стержня $[x, x+dx]$ за промежуток времени $[t, t+dt]$

количество тепла $f(x,t)dxdt$. Очевидно, тогда на участке $[x_1, x_2]$ за время $[t_1, t_2]$ этот источник выделит тепловую энергию $\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} f(x,t)dxdt$. Учтите в тепловом балансе из задачи 1 действие этих источников и получите требуемое уравнение теплопроводности.

4. Запишите нестационарное уравнение теплопроводности с тремя пространственными переменными для случая неоднородной среды.

Процесс распространения тепла называется стационарным, если он не зависит от времени. Запишите уравнение теплопроводности в пространстве для стационарной температуры в случае однородной среды (уравнение Пуассона). Запишите его, если в теле не действуют источники тепла (уравнение Лапласа). Запишите уравнение теплопроводности для двумерной плоской пластины, т.е. относительно функции $u = u(x,y,t)$. Во что перейдёт уравнение теплопроводности в пространстве, если все входящие в него функции не зависят от y и z? Запишите стационарное одномерное уравнение теплопроводности. Каково его общее решение?

Указание. Если в теле идёт процесс передачи тепла и действуют внешние источники тепла, то его температура $u(x,y,z,t)$ описывается уравнением $c \cdot \rho \cdot u_t = div(k \cdot grad\, u) + F(x,y,z,t)$, в котором $c = c(x,y,z)$, $\rho = \rho(x,y,z)$, $k = k(x,y,z)$ характеризуют неоднородность среды (здесь $grad$ берётся по пространственным переменным x, y, z). Получите из этого уравнения требуемые его частные случаи.

5. Пусть в уравнении теплопроводности $a^2 = 1$: $u_t = u_{xx}$, и пусть функция $U(x,t)$ удовлетворяет этому уравнению. Какие из следующих функций (c — произвольная постоянная) тоже являются его решениями:

$U_1(x,t) = U(x-c,t)$, $U_2(x,t) = U(x,t-c)$, $U_3(x,t) = U(cx,c^2t)$,

$U_4(x,t) = \exp\{-cx + c^2t\} \cdot U(x-2ct,t)$, $U_5(x,t) =$
$= (1+4ct)^{-1/2} \cdot \exp\{-cx^2/(1+4ct)\} \cdot U(x/(1+4ct), t/(1+4ct))$?

Является ли функция $U(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\{-x^2/(4t)\}$ решением указанного уравнения $(t > 0)$?

Найдите аналогичные решения для уравнения $u_t = a^2 \cdot u_{xx}, a^2 \neq 1$.

Найдите общий вид решения уравнения $u_t = u_{xx}$, которое зависит только от $x - ct$ $(c = const)$: $U(x,t) = V(x-ct)$ (найдите функцию одной переменной V).

Задача нахождения решения уравнения теплопроводности, удовлетворяющего заданным краевым условиям и начальному условию, называется начально-краевой. Если на обоих концах стержня заданы краевые условия 1-го рода (условия Дирихле), то задачу называют 1-ой краевой; если 2-го рода (условия Неймана), то — 2-ой краевой; в случае краевых условий разного рода на концах стержня — смешанной краевой задачей.

6. Для всех комбинаций краевых условий 1-го и 2-го рода на концах стержня запишите постановки начально-краевых задач для уравнения теплопроводности.

Каким требованиям должны удовлетворять заданные в начальном и краевых условиях функции чтобы решения поставленных задач были классическими?

7. Пусть функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению $u_t = a^2 \cdot u_{xx}$ при $0 < x < l$, $t > 0$ и граничным условиям $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$ при $t > 0$.

Достаточно ли этих условий для выделения единственного решения уравнения?

Указание. Рассмотрите однопараметрическое семейство функций

$$\left\{u_n(x,t)=\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\cdot\exp\left\{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2\cdot t\right\},\ n=0,1,2,\ldots\right\}.$$

8. Пусть функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению $u_t=a^2\cdot u_{xx}$ при $0<x<l,\ t>0$ и граничным условиям $u_x(0,t)=0,\ u_x(l,t)=0$ при $t>0$.

Достаточно ли этих условий для выделения единственного решения уравнения?

Указание. Рассмотрите семейство функций

$$\left\{u_n(x,t)=\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\cdot\exp\left\{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2\cdot t\right\},\ n=0,1,2,\ldots\right\}.$$

9. Пусть функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению $u_t=a^2\cdot u_{xx}$ при $0<x<l,\ t>0$ и условиям $u_x(0,t)=0$ при $t>0$, $u(x,0)=x$ при $0\le x\le l$.

Достаточно ли написанных здесь условий для выделения единственного решения уравнения?

Указание. Рассмотрите два случая изменения температуры стержня:

– если к написанным условиям добавлено условие $u(l,t)=l$;

– если к написанным условиям добавлено условие $u_x(l,t)=0$.

Какой будет температура стержня при $t\to+\infty$ в каждом из этих двух случаев?

10. Боковая поверхность однородного стержня $0\le x\le l$ теплоизолирована. Внешних источников тепла нет. Левый конец стержня поддерживается при температуре $u_1=const$, а правый – при температуре $u_2=const$. Начальное распределение температуры равно $u_0\cdot x$, $u_0=const$.

Запишите математическую постановку этой задачи.

Замечание. Обратите внимание на то, что требование сопряжения начального и краевых условий в данной задаче не выполняется.

11. Среда, в которой находится однородный стержень $0\le x\le l$, имеет постоянную температуру $u_{среды}$. На боковой поверхности стержня происходит теплообмен со средой по закону Ньютона. Других внешних источников тепла нет. Левый конец стержня теплоизолирован, а правый поддерживается при постоянной температуре $u_{среды}$. Начальное распределение температуры стержня равно $u_0=const$.

Запишите математическую постановку этой задачи.

12. Боковая поверхность однородного стержня $0\le x\le l$ теплоизолирована. Внешних источников тепла нет. Начальная температура стержня нулевая. При $t>0$ на концы стержня подаются одинаковые тепловые потоки мощностью $Q=const$, причем на левом конце поток тепла направлен внутрь стержня, а на правом – из стержня.

Запишите математическую постановку этой задачи.

13. Источник тепла известной мощности находится на конце стержня и подаёт тепло внутрь стержня. Запишите это краевое условие для левого, для правого конца.

14. Пусть среда, окружающая стержень, имеет известную температуру $\theta(t)$. Какой физический смысл имеет краевое условие 3-го рода (на левом конце): $-k\cdot\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\lambda\cdot(\theta(t)-u(0,t))$ $(\lambda=const)$? Во что превратится это краевое условие, если λ очень велико? Если λ исчезающе мало? Запишите аналогичное краевое условие на правом конце стержня.

Какой физический смысл имеет краевое условие $-k \cdot \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \lambda \cdot (\theta(t) - u(0,t)) + f(t)$?

15. Однородный стержень с теплоизолированной боковой поверхностью нагревается источником тепла постоянной мощности, равномерно распределённой по всему стержню. В начальный момент времени температура стержня равна нулю, а концы стержня всегда поддерживаются при нулевой температуре.

Запишите математическую постановку этой задачи.

16. Однородный стержень с теплоизолированной боковой поверхностью нагревается источником тепла постоянной мощности, равномерно распределённой по всему стержню. В начальный момент времени температура стержня равна нулю, а концы стержня теплоизолированы.

Запишите математическую постановку этой задачи. Может ли температура реального стержня неограниченно возрастать?

17. Сведите поставленные в пункте 6 начально-краевые задачи с неоднородными граничными условиями к задачам с нулевыми граничными условиями.

Пример решения для 1-ой краевой задачи.

$u_t = a^2 \cdot u_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$;

$u(0,t) = \mu_1(t)$, $u(l,t) = \mu_2(t)$, $t > 0$;

$u(x,0) = \varphi(x)$, $0 \le x \le l$.

Положим $u(x,t) = v(x,t) + U(x,t)$, где $U(x,t)$ выберем из условий $U(0,t) = \mu_1(t)$, $U(l,t) = \mu_2(t)$. Например, $U(x,t) = \frac{x}{l} \cdot (\mu_2(t) - \mu_1(t)) + \mu_1(t)$.

Заметим, что этими условиями $U(x,t)$ не определяется однозначно. Запишите задачу для функции v при такой замене.

Указание. В задачах с другими комбинациями краевых условий ищите $U(x,t)$ линейную по x или в виде многочлена второй степени относительно x.

Дополнение к теме 2.

18. Полуограниченный $(x > 0)$ стержень в момент времени $t = 0$ имел температуру $\varphi(x)$. Конец стержня сгорает с постоянной скоростью ω_0 и известной температурой горения $\psi(t)$. Поставьте задачу о температуре стержня. Приведите другой пример природного явления, описываемого задачей с подвижной границей для уравнения теплопроводности.

19. Выведите дифференциальное уравнение диффузии с одной пространственной переменной.

Решение. Рассмотрим процесс диффузии вещества в жидкости внутри тонкой трубки. Пусть, например, это процесс расплывания марганцовки $KMnO_4$ в трубке с водой. Предположение о том, что трубка тонкая, означает на самом деле одномерность процесса, то есть его зависимость лишь от одной пространственной переменной x. Площадь поперечного сечения трубки S будем считать не зависящей от x. Концентрацией вещества $(KMnO_4)$ называется его масса в единице объема. Обозначим через $u(x,t)$ концентрацию вещества в точке x в момент времени t. Поток вещества через поперечное сечение трубки (с координатой x) — это количество вещества, пересекающего данное сечение трубки в направлении оси x в единицу времени. Плотностью потока q (в точке x) называется поток, отнесенный к единице площади поперечного сечения трубки. Очевидно, что диффузия происходит от части трубки с высокой концентрацией вещества к части трубки с меньшей его концентрацией. Введенные величины q и u связаны законом Нернста: $q = -k \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$, где $k > 0$ — коэффициент диффузии; k характеризует само вещество и среду, в которой происходит диффузия. Запишите баланс диффундирующего вещества для участка трубки $[x_1, x_2]$ в течение промежутка времени $[t_1, t_2]$. Получите отсюда дифференциальное уравнение диффузии.

Тема 3.

Решение начально-краевых задач на отрезке для однородного уравнения теплопроводности методом разделения переменных.

Литература: [1], гл. III, § 2, п. 1.

Метод разделения переменных является одним из основных методов построения решения линейных начально-краевых задач для уравнений в частных производных. Идея метода состоит в том, что нетривиальные частные решения данного уравнения ищутся в виде произведения $X(x)\cdot T(t)$, где X зависит только от x, а T — только от t.Это сводит задачу для уравнения в частных производных к некоторой совокупности задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Методом разделения переменных решите 1-ую краевую задачу для уравнения теплопроводности:

$$u_t = a^2 \cdot u_{xx}\,, 0 < x < l\,, t > 0\,;$$
$$u(0,t) = 0\,, u(l,t) = 0\,, t > 0\,;$$
$$u(x,0) = \varphi(x)\,, 0 \le x \le l\,.$$

Решение. Сначала найдём частные решения уравнения вида $X(x)\cdot T(t)$, которые удовлетворяют краевым условиям. Если подставить произведение $X(x)\cdot T(t)$ в уравнение и разделить его на $a^2 \cdot X(x)\cdot T(t)$, то получим равенство

$$\frac{X''_{xx}(x)}{X(x)} = \frac{T'_t(t)}{a^2 T(t)}\quad ,$$

левая часть которого зависит только от x, а правая – только от t.Поскольку x и t являются независимыми переменными, равенство возможно только если обе его части равны постоянной.

Обозначим эту действительную постоянную через $(-\lambda)$ и запишем отдельно два уравнения относительно $X(x)$ и $T(t)$:

$$X''_{xx}(x) + \lambda \cdot X(x) = 0\;; \qquad T'_t(t) + a^2 \cdot \lambda \cdot T(t) = 0\,.$$

Подставим теперь произведение $X(x)\cdot T(t)$ в краевые условия и вспомним, что они выполнены при всех $t > 0$. Отсюда для рассматриваемой начально-краевой задачи получаем $X(0) = 0\,, X(l) = 0$. Чтобы найти интересующие нас функции $X(x)$, надо решить краевую задачу Штурма-Лиувилля на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения относительно $X(x)$:

$$\begin{cases} X''_{xx}(x) + \lambda \cdot X(x) = 0\,, 0 < x < l\,; \\ X(0) = 0\,, X(l) = 0\,. \end{cases}$$

Решение полученной задачи Штурма-Лиувилля было построено в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений, где было доказано, что имеется бесконечная последовательность собственных значений $\{\lambda_n\}$, все они действительны и каждому из них отвечает одна собственная функция $X_n(x)$ (с точностью до ненулевого постоянного множителя). Для рассматриваемых краевых условий 1-го рода

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\,, X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), n = 1,2,3,\ldots$$

Если задача Штурма-Лиувилля решена, то уравнение для $T(t)$ надо решать только при тех λ, которые оказались собственными значениями задачи для $X(x)$. При каждом таком λ_n надо найти общее решение уравнения относительно $T(t)$. В силу линейности исходной задачи сумма произведений $X_n(x)\cdot T_n(t)$, отвечающих различным λ_n, будет удовлетворять уравнению в частных производных и нулевым краевым условиям исходной начально-краевой задачи. Чтобы найти окончательное ее решение, надо выбрать коэффициенты этой линейной комбинации, исходя из оставшегося пока неиспользованным начального условия. Иными словами, из всевозможных решений исходного уравнения $u(x,t)=\sum_n X_n(x)\cdot T_n(t)$, которые удовлетворяют краевым условиям , надо отобрать единственное решение, удовлетворяющее начальному условию. Для рассматриваемых краевых условий 1-го рода получаем

$$T_n(t)=A_n\cdot\exp\left\{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2\cdot t\right\},\ A_n=const\ ,\ n=1,2,3,\ldots,$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\cdot\exp\left\{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2\cdot t\right\}$$

– удовлетворяющее краевым условиям общее решение уравнения теплопроводности. Коэффициенты A_n можно найти из начального условия:

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)=\varphi(x).$$

Для этого надо разложить заданную на $[0,l]$ функцию $\varphi(x)$ в ряд Фурье по системе функций $\{X_n(x)\}$ на указанном отрезке (в рассматриваемом случае – по системе $\left\{\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$). Тогда A_n равны коэффициентам Фурье функции $\varphi(x)$ по системе $\{X_n(x)\}$.

Замечание. При решении задачи методом разделения переменных возникают следующие вопросы. Является ли полученная система собственных функций задачи Штурма-Лиувилля ортогональной? Какова норма каждой собственной функции? Является ли эта система функций полной? Представима ли заданная функция $\varphi(x)$ рядом Фурье по системе найденных собственных

функций? Можно ли полученный в качестве решения ряд почленно дифференцировать (он должен удовлетворять дифференциальному уравнению)?

2. Методом разделения переменных решите 2-ую краевую задачу для уравнения теплопроводности:

$$u_t=a^2\cdot u_{xx},\ 0<x<l,\ t>0;$$
$$u_x(0,t)=0,\ u_x(l,t)=0,\ t>0;$$
$$u(x,0)=\varphi(x),\ 0\le x\le l.$$

Решение. Частные решения уравнения теплопроводности, которые удовлетворяют обоим краевым условиям, будем искать в виде $X(x)\cdot T(t)$. Подставьте это произведение в уравнение и разделите на $a^2\cdot X(x)\cdot T(t)$. Вы должны получить $\frac{X''_{xx}(x)}{X(x)}=\frac{T'_t(t)}{a^2\cdot T(t)}=-\lambda=const$. Теперь подставьте $X(x)\cdot T(t)$ в краевые условия. Вы получите две задачи

$$\begin{cases}X''_{xx}(x)+\lambda\cdot X(x)=0\,;\\ X'_x(0)=0\,,\ X'_x(l)=0\end{cases}\quad \text{и}\quad T'_t(t)+a^2\cdot\lambda\cdot T(t)=0\,.$$

Общее решение уравнения для функции $X(x)$ определяется знаком действительного параметра λ. Запишите характеристическое уравнение для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Рассмотрите отдельно случаи $\lambda<0,\ \lambda=0,\ \lambda>0$. В каждом случае запишите фундаментальную систему решений обыкновенного дифференциального уравнения и его общее решение. Общее решение содержит две произвольные постоянные. Можно ли однозначно определить эти постоянные из краевых условий при $\lambda<0$? При $\lambda=0$? При $\lambda>0$? Является ли ненулевая постоянная собственной функцией? Вы должны получить собственные значения $\lambda_0=0;\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2;\quad n=1\,,2\,,3\,,\ldots$ и отвечающие им собственные функции $X_0(x)=1$, $X_n(x)=\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$, $n=1,2,3,\ldots$. Скалярное произведение двух заданных на $[0,l]$ действительных функций $f(x)$ и $g(x)$ определяется выражением $(f,g)=\int\limits_0^l f(x)\cdot g(x)dx$. Проверьте, что $(X_i,X_j)=0$ при $i\neq j$ для системы собственных функций $\{X_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. Евклидова норма функции $f(x)$ — это $\|f\|=\sqrt{(f,f)}$. Найдите $\|X_n\|^2$ для всех n. Вы должны получить $\|X_0\|^2=\int\limits_0^l 1\cdot dx=l$, $\|X_n\|^2=\int\limits_0^l \cos^2\frac{\pi n}{l}x\,dx=\frac{l}{2}$, $n=1,2,3,\ldots$.

Теперь при найденных λ_n надо найти общее решение уравнения для $T(t)$. При $\lambda=\lambda_0=0$ получаем $T_0(t)=A_0=const$, а при $\lambda=\lambda_n, n=1,2,3,\ldots$

$$T_n(t)=A_n\cdot\exp\left\{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2\cdot t\right\},\ A_n=const.$$

Уравнению теплопроводности и краевым условиям для него удовлетворяют частные решения $X_0(x)\cdot T_0(t)=A_0=const$ и

$$X_n(x)\cdot T_n(t)=A_n\cdot\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\cdot\exp\left\{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t\right\},\ n=1,2,3,\ldots.$$

Поэтому и ряд $u(x,t)=A_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\cdot\exp\left\{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t\right\}\cdot\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$ формально удовлетворяет уравнению и краевым условиям. Подставьте полученный ряд при $t=0$ в начальное условие. Вы

получите $u(x,0)=A_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\cdot\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)=\varphi(x)$. Разложите $\varphi(x)$ в ряд Фурье по системе $\{X_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ на $[0,l]$. Коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$ по ненормированной системе элементов $\{X_n(x)\}$ определяются так: $\varphi_n=\frac{(\varphi,X_n)}{\|X_n\|^2}$, $n=0,1,2,\ldots$.

Поэтому $\varphi_0=\frac{1}{l}\int\limits_0^l\varphi(x)dx;\ \varphi_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\varphi(x)\cdot\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx$. Полагая $A_n=\varphi_n, n=0,1,2,\ldots$, получаем формальное решение исходной начально-краевой задачи. Запишите его. Почему это лишь формальное решение? Что надо еще доказать для полного обоснования решения?

Могут ли быть другие решения начально-краевой задачи, отличные от построенного?

3.

$$u_t=a^2u_{xx},\ 0<x<l,\ t>0;$$
$$u(0,t)=0,\ u_x(l,t)=0,\ t>0;$$
$$u(x,0)=\varphi(x),\ 0\le x\le l.$$

Найдите в общем виде решение $u(x,t)$.

4.

$$u_t=a^2u_{xx},\ 0<x<l,\ t>0;$$
$$u_x(0,t)=0,\ u(l,t)=0,\ t>0;$$
$$u(x,0)=\varphi(x),\ 0\le x\le l.$$

Найдите в общем виде решение $u(x,t)$.

5.

$$u_t = u_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0;$$
$$u_x(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0,\ t > 0;$$
$$u(x,0) = x^2 - 1,\ 0 \le x \le 1.$$

Найдите $u(x,t)$.

6.

$$u_t = u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0;$$
$$u_x(0,t) = 1,\ u(l,t) = 0,\ t > 0;$$
$$u(x,0) = 0.$$

Найдите $u(x,t)$.

7.

$$u_t = a^2 \cdot u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0;$$
$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ t > 0;$$
$$u(x,0) = \sin\frac{\pi}{l}x,\ 0 \le x \le l.$$

Найдите $u(x,t)$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t)$.

8.

$$u_t = a^2 \cdot u_{xx},\ 0 < x < \pi,\ t > 0;$$
$$u_x(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0,\ t > 0;$$
$$u(x,0) = \cos(3x/2),\ 0 \le x \le \pi.$$

Найдите $u(x,t)$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t)$. Нарисуйте график зависимости от времени функции $u(0,t)$.

9.

$$u_t = a^2 \cdot u_{xx},\ 0 < x < \pi,\ t > 0;$$
$$u(0,t) = 0,\ u_x(\pi,t) = 0,\ t > 0;$$
$$u(x,0) = \sin(5x/2),\ 0 \le x \le \pi.$$

Найдите $u(x,t)$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t)$. Нарисуйте график зависимости от времени функции $u(\pi,t)$.

10.

$$u_t = a^2 \cdot u_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0;$$
$$u_x(0,t) = 0,\ u_x(1,t) = 0,\ t > 0;$$
$$u(x,0) = x,\ 0 \le x \le 1.$$

Найдите $u(x,t)$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t)$.

11.

$$u_t = a^2 \cdot u_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0;$$
$$u(0,t) = u_1 = const,\ u(1,t) = u_2 = const,\ t > 0;$$
$$u(x,0) = u_0 \cdot x,\ 0 \le x \le 1;\ u_0 = const.$$

Найдите $u(x,t)$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t)$.

12.

$$u_t = a^2 \cdot u_{xx} - b \cdot (u - U),\ 0 < x < l,\ t > 0,$$
$$b = const > 0,\ U = const;$$
$$u_x(0,t) = 0,\ u(l,t) = U,\ t > 0;$$
$$u(x,0) = u_0 = const,\ 0 \le x \le l.$$

Найдите $u(x,t)$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t)$.

13.

$$u_t = a^2 \cdot u_{xx}\ ,\ 0 < x < l\ ,\ t > 0\ ;$$
$$u_x(0,t) = p\ ,\ u_x(l,t) = p\ ,\ t > 0\ ;\ p = const\ ;$$
$$u(x,0) = 0\ ,\ 0 \le x \le l\ .$$

Найдите $u(x,t)$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t)$.

Дополнение к теме 3.

14. Решите задачу

$$u_t = a^2 \cdot u_{xx}\ ,\ 0 < x < l\ ,\ t > 0\ ;$$
$$u_x(0,t) = 0\ ,\ u_x(l,t) + h \cdot u(l,t) = 0\ ,\ h = const > 0\ ,\ t > 0\ ;$$
$$u(x,0) = \varphi(x)\ ,\ 0 \le x \le l\ ,$$

методом разделения переменных.

Указание. Поставьте задачу Штурма-Лиувилля. Найдите общее решение уравнения для функции $X(x)$. При каких λ можно удовлетворить краевым условиям выбором постоянных в этом решении? Получите при $\lambda > 0$ из правого краевого условия уравнение $tg\left(\sqrt{\lambda}\cdot l\right) = \dfrac{h}{\sqrt{\lambda}}$ относительно λ. Сделайте в нем замену $\theta = \sqrt{\lambda}\cdot l$. Нарисуйте графики функций $tg\,\theta$ и $\dfrac{const}{\theta}$. Как найти собственные значения задачи Штурма-Лиувилля? Сколько их? Какова асимптотика λ_n на бесконечности? Найдите собственные функции задачи X_n. Образуют ли они ортогональную систему? Найдите норму каждой собственной функции. Зависит ли $\|X_n\|$ от параметра h? Во что превратится $\|X_n\|$, если положить $h = 0$? Во что превратится правое краевое условие при $h = 0$? Сравните решение этой задачи с решением задачи 2.

15.

$$u_t = a^2 \cdot u_{xx}\ ,\quad 0 < x < l\ ,\quad t > 0\ ;$$
$$u_x(0,t) - h \cdot u(0,t) = 0\ ,\quad h = const > 0\ ,\quad t > 0\ ;$$
$$u(l,t) = 0\ ,\quad t > 0\ ;$$
$$u(x,0) = \varphi(x),\quad 0 \le x \le l\ .$$

Тема 4.

Решение начально-краевых задач для неоднородного уравнения теплопроводности.

Литература: [1], гл.III, § 2, п.4.

1. Решите в общем виде четыре начально-краевые задачи (первую краевую, вторую краевую и две смешанные) с неоднородностью $f(x,t)$ в уравнении теплопроводности и с нулевыми граничными и начальными условиями.

Указание. Чтобы решить начально-краевую задачу для неоднородного уравнения $u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t)$ с нулевыми краевыми условиями 1-го или 2-го рода и нулевыми начальными условиями, решим сначала задачу Штурма-Лиувилля, отвечающую однородному уравнению $u_t = a^2 u_{xx}$ с теми же краевыми условиями. Разложим $f(x,t)$ при каждом фиксированном t в ряд Фурье по системе $\{X_n(x)\}$ собственных функций задачи Штурма-Лиувилля:

$$f(x,t) = \sum_n f_n(t) X_n(x)\ ,$$

где

$$f_n(t) = \frac{(f, X_n)}{\|X_n\|^2}$$

— коэффициенты Фурье заданной функции f (здесь t играет роль параметра). Теперь решение исходной задачи можно искать в виде ряда Фурье по системе $\{X_n(x)\}$: $u(x,t) = \sum\limits_n T_n(t) X_n(x)$, где коэффициенты Фурье $T_n(t)$ подлежат определению из неоднородного уравнения и начального условия. Для нахождения $T_n(t)$ надо сравнить коэффициенты при $X_n(x)$ в уравнении и в начальном условии и решить полученные задачи Коши.

2.

$$u_t = u_{xx} + \sin(3\pi x)\cdot e^{-9\pi^2 t},\ 0 < x < 1,\ t > 0;$$
$$u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0,\ t > 0;$$
$$u(x,0) = 0,\ 0 \le x \le 1.$$

Найдите $u(x,t)$.

3.

$$u_t = a^2 u_{xx} + f_0,\ 0 < x < l,\ t > 0;\ f_0 = const;$$
$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ t > 0;$$
$$u(x,0) = 0,\ 0 \le x \le l.$$

Решение.

$X_n(x) = \sin\dfrac{\pi n}{l}x$, $n = 1,2,3,\ldots,$ — собственные функции задачи Штурма - Лиувилля.

Коэффициенты Фурье постоянной функции f_0 по $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равны $f_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f_0 \sin\dfrac{\pi n}{l}x\,dx = \begin{cases} 0,\ \text{если } n = 2k, \\ \dfrac{4f_0}{\pi n},\ \text{если } n = 2k+1. \end{cases}$

Разложение её в ряд Фурье по $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на интервале $0 < x < l$ имеет вид $f_0 = \dfrac{4f_0}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{\sin\dfrac{\pi(2k+1)}{l}x}{2k+1}$. Для определения коэффициентов Фурье решения исходной задачи получаем задачи Коши:

$$T_n'(t) + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n(t) = 0,\quad T_n(0) = 0,\quad \text{если } n = 2k;$$

$$T_n'(t) + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n(t) = \frac{4f_0}{\pi n},\quad T_n(0) = 0,\quad \text{если } n = 2k+1.$$

Ненулевые коэффициенты Фурье равны

$$T_{2k+1}(t) = \frac{4f_0 l^2}{(\pi(2k+1))^3 a^2}\left(1 - \exp\left(-\left(\frac{\pi(2k+1)a}{l}\right)^2 t\right)\right),$$

$k = 0,1,2,\ldots$.

Запишите решение $u(x,t)$ в виде ряда. Найдите $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t)$.

4.

$$u_t = a^2 u_{xx} + f_0,\ 0 < x < l,\ t > 0;\ f_0 = const;$$
$$u_x(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0,\ t > 0;$$
$$u(x,0) = 0,\ 0 \le x \le l.$$

Найдите $u(x,t)$ (для этого не обязательно искать разложение в ряд Фурье). Существует ли конечный $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t)$?

5.

$$u_t = a^2 u_{xx} + f_0,\ 0 < x < l,\ t > 0;\ f_0 = const;$$
$$u(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0,\ t > 0;$$
$$u(x,0) = 0,\ 0 \le x \le l.$$

Найдите $u(x,t)$. Существует ли конечный $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t)$?

2.

$$u_t = u_{xx} + \sin(3\pi x)\cdot e^{-9\pi^2 t},\ 0 < x < 1,\ t > 0;$$
$$u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0,\ t > 0;$$
$$u(x,0) = 0,\ 0 \le x \le 1.$$

Найдите $u(x,t)$.

3.

$$u_t = a^2 u_{xx} + f_0,\ 0 < x < l,\ t > 0;\ f_0 = const;$$
$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ t > 0;$$
$$u(x,0) = 0,\ 0 \le x \le l.$$

Решение.

$X_n(x) = \sin\dfrac{\pi n}{l}x$, $n = 1,2,3,\ldots,$ — собственные функции задачи Штурма - Лиувилля.

Коэффициенты Фурье постоянной функции f_0 по $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равны $f_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f_0 \sin\frac{\pi n}{l}x\,dx = \begin{cases} 0,\ если\ n = 2k, \\ \dfrac{4f_0}{\pi n},\ если\ n = 2k+1. \end{cases}$

Разложение её в ряд Фурье по $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на интервале $0 < x < l$ имеет вид $f_0 = \dfrac{4f_0}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi(2k+1)}{l}x}{2k+1}$. Для определения коэффициентов Фурье решения исходной задачи получаем задачи Коши:

$$T_n'(t) + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n(t) = 0,$$
$$T_n(0) = 0,$$
если $n = 2k$;

$$T_n'(t) + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n(t) = \frac{4f_0}{\pi n},$$
$$T_n(0) = 0,$$
если $n = 2k+1$.

Ненулевые коэффициенты Фурье равны

$$T_{2k+1}(t) = \frac{4f_0 l^2}{(\pi(2k+1))^3 a^2}\left(1 - \exp\left(-\left(\frac{\pi(2k+1)a}{l}\right)^2 t\right)\right),$$

$k = 0,1,2,\ldots$.

Запишите решение $u(x,t)$ в виде ряда. Найдите $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t)$.

4.

$$u_t = a^2 u_{xx} + f_0,\ 0 < x < l,\ t > 0;\ f_0 = const;$$
$$u_x(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0,\ t > 0;$$
$$u(x,0) = 0,\ 0 \le x \le l.$$

Найдите $u(x,t)$ (для этого не обязательно искать разложение в ряд Фурье). Существует ли конечный $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t)$?

5.

$$u_t = a^2 u_{xx} + f_0,\ 0 < x < l,\ t > 0;\ f_0 = const;$$
$$u(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0,\ t > 0;$$
$$u(x,0) = 0,\ 0 \le x \le l.$$

Найдите $u(x,t)$. Существует ли конечный $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t)$?

13.

$$u_t = u_{xx} + u\,,\ 0 < x < 1\,,\ t > 0\,;$$
$$u(0,t) = 0\,,\ u(1,t) = t\,,\ t > 0\,;$$
$$u(x,0) = 0\,,\ 0 \le x \le 1\,.$$

14.

$$u_t = u_{xx} + u\,,\ 0 < x < 1\,,\ t > 0\,;$$
$$u_x(0,t) = t\,,\ u_x(1,t) = t\,,\ t > 0\,;$$
$$u(x,0) = 0\,,\ 0 \le x \le 1\,.$$

15.

$$u_t = u_{xx} - u\,,\ 0 < x < 1\,,\ t > 0\,;$$
$$u(0,t) = 0\,,\ u_x(1,t) = t\,,\ t > 0\,;$$
$$u(x,0) = 0\,,\ 0 \le x \le 1\,.$$

16.

$$u_t = u_{xx} - u - 1\,,\ 0 < x < 1\,,\ t > 0\,;$$
$$u_x(0,t) = t\,,\ u(1,t) = 0\,,\ t > 0\,;$$
$$u(x,0) = 0\,,\ 0 \le x \le 1\,.$$

17.

$$u_t = u_{xx} + u + \cos 2x \cdot \sin x\,,\ 0 < x < \pi\,,\ t > 0\,;$$
$$u(0,t) = 0\,,\ u_x(\pi,t) = 0\,,\ t > 0\,;$$
$$u(x,0) = 0\,,\ 0 \le x \le \pi\,.$$

Решите следующие задачи методом разделения переменных.

18.

$$u_t = 4u_{xx} + 2tx + 2\cos\frac{5\pi}{2}x\,,\ 0 < x < 1\,,\ t > 0\,;$$
$$u_x(0,t) = t^2 + 1\,,\ u(1,t) = t^2\,,\ t > 0\,;$$
$$u(x,0) = x - 1\,,\ 0 \le x \le 1\,.$$

19.

$$u_t = u_{xx} + x^2 - 2t + \cos 3x\,,\ 0 < x < \pi\,,\ t > 0\,;$$
$$u_x(0,t) = 1\,,\ u_x(\pi,t) = 2\pi t + 1\,,\ t > 0\,;$$
$$u(x,0) = x\,,\ 0 \le x \le \pi.$$

20.

$$u_t = u_{xx} + u + \cos x \cdot \sin\frac{x}{2}\,,\ 0 < x < \pi\,,\ t > 0\,;$$
$$u(0,t) = 0\,,\ u_x(\pi,t) = 0\,,\ t > 0\,;$$
$$u(x,0) = 0\,,\ 0 \le x \le \pi\,.$$

21.

$$u_t = u_{xx} + u - x + 2\sin 2x \cdot \cos x\,,$$
$$0 < x < \frac{\pi}{2}\,,\ t > 0\,;$$
$$u(0,t) = 0\,,\ u_x\left(\frac{\pi}{2},t\right) = 1\,,\ t > 0\,;$$
$$u(x,0) = x\,,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\,.$$

22.

$$u_t = u_{xx} - 2u_x + x + 2t\ ,\ 0 < x < 1\ ,\ t > 0\ ;$$
$$u(0,t) = 0\ \ ,\ \ u(1,t) = t\ ,\ t > 0\ ;$$
$$u(x,0) = e^x \sin \pi x\ ,\ 0 \le x \le 1\ .$$

23.

$$u_t = u_{xx} + 4u + x^2 - 2t - 4x^2 t + 2\cos^2 x\ ,$$
$$0 < x < \pi\ ,\ t > 0\ ;$$
$$u_x(0,t) = 0\ \ ,\ \ u_x(\pi,t) = 2\pi t\ ,\ t > 0\ ;$$
$$u(x,0) = 0\ ,\ 0 \le x \le \pi\ .$$

24.

$$u_t = u_{xx} - 2u_x + u + e^x \sin x - t\ ,$$
$$0 < x < \pi\ ,\ t > 0\ ;$$
$$u(0,t) = 1 + t\ \ ,\ \ u(\pi,t) = 1 + t\ ,\ t > 0\ ;$$
$$u(x,0) = 1 + e^x \sin 2x\ ,\ 0 \le x \le \pi\ .$$

25.

$$u_t = u_{xx} + u + xt(2 - t) + 2\cos t\ ,$$
$$0 < x < \pi\ ,\ t > 0\ ;$$
$$u_x(0,t) = t^2\ \ ,\ \ u_x(\pi,t) = t^2\ ,\ t > 0\ ;$$
$$u(x,0) = \cos 2x\ ,\ 0 \le x \le \pi\ .$$

Тема 5.

Задачи для уравнения теплопроводности на прямой и на полупрямой. Функция Грина.

Литература: [1], гл.III, § 1, п.7; гл.III, § 3, п.1,2; гл.III, § 2, п.2,4; Приложение IV к гл.III, п.1-3

1. Если при описании процесса распространения тепла в стержне нас интересует участок стержня, удалённый от обоих его концов, то в качестве модели, описывающей изменение температуры $u(x,t)$, получаем задачу с начальным условием — задачу Коши — для уравнения теплопроводности на прямой $-\infty < x < +\infty$. Дайте математическую постановку этой задачи в случае, когда боковая поверхность стержня теплоизолирована и нет внешних источников тепла.

Замечание. Обратите внимание на требование ограниченности функции $u(x,t)$. Что следует из этого требования? Каков его физический смысл?

Решите следующие задачи, пользуясь известными свойствами уравнения теплопроводности.

2.

$$u_t = 4u_{xx} + t + e^t\ \ ,\ -\infty < x < +\infty\ ,\ t > 0\ ;$$
$$u(x,0) = 2\ ,\ -\infty < x < +\infty.$$

Решение. Начальная температура и плотность распределения источников тепла не зависят от x. Поэтому $u(x,t) \equiv V(t)$, поскольку с течением времени тепло не будет передаваться от одного участка стержня к другому. Подставим $V(t)$ в уравнение и проинтегрируем его: $V_t'(t) = t + e^t$, $V(t) = \frac{t^2}{2} + e^t + const$. И[з]

начального условия найдем постоянную.

Ответ: $u(x,t) \equiv V(t) = \frac{t^2}{2} + e^t + 1$.

3.

$$u_t = u_{xx} + 3t^2, -\infty < x < +\infty, t > 0;$$

$$u(x,0) = \sin x, -\infty < x < +\infty.$$

Решение. Разобьём задачу на две:

$$u_t = u_{xx} + 3t^2, -\infty < x < +\infty, t > 0;$$
$$u(x,0) = 0, -\infty < x < +\infty.$$

$$u_t = u_{xx}, -\infty < x < +\infty, t > 0;$$
$$u(x,0) = \sin x, -\infty < x < +\infty.$$

Подобно задаче 2 находим решение задачи с неоднородным уравнением: $u_1(x,t) = t^3$.

Вторую задачу решаем методом разделения переменных с учетом периодичности начального условия. Метод разделения переменных даёт частные решения $u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$, где $X(x) = a(k)\cdot\cos kx + b(k)\cdot\sin kx$, $T(t) = e^{-k^2 t}$. Только при $k = 1$ частное решение уравнения удовлетворяет начальному условию: $u_2(x,t) = e^{-t}\cdot\sin x$.

Ответ: $u = u_1 + u_2$.

4.

$$u_t = u_{xx} + e^{-t}\cdot\cos x, -\infty < x < +\infty, t > 0;$$
$$u(x,0) = \cos x, -\infty < x < +\infty.$$

Указание. Учтите периодичность начального условия и неоднородности уравнения.

5.

$$u_t = u_{xx} + e^t\cdot\sin x, -\infty < x < +\infty, t > 0;$$
$$u(x,0) = \sin x, -\infty < x < +\infty.$$

6.

$$u_t = u_{xx} + \sin t, -\infty < x < +\infty, t > 0;$$
$$u(x,0) = e^{-x^2}, -\infty < x < +\infty.$$

Решение. Разобьём задачу на две:

$$u_t = u_{xx} + \sin t, -\infty < x < +\infty, t > 0;$$
$$u(x,0) = 0, -\infty < x < +\infty.$$

$$u_t = u_{xx}, -\infty < x < +\infty, t > 0;$$
$$u(x,0) = e^{-x^2}, -\infty < x < +\infty.$$

Задача с неоднородным уравнением имеет решение $u_1(x,t) \equiv V(t) = 1 - \cos t$. Чтобы решить вторую задачу, вспомните, что если $U(x,t)$ — решение уравнения $u_t = u_{xx}$, то и функция $\frac{1}{\sqrt{1+4ct}}\exp\left\{-\frac{cx^2}{1+4ct}\right\}\cdot U\left(\frac{x}{1+4ct}, \frac{t}{1+4ct}\right)$ является его решением (см. задачу 5 темы 2). Возьмите $U(x,t) \equiv 1$. Осталось найти постоянную c из начального условия: $c = 1$.

7.

$$u_t = u_{xx}, -\infty < x < +\infty, t > 0;$$
$$u(x,0) = xe^{-x^2}, -\infty < x < +\infty.$$

Указание. Заметьте, что $u(x,t) = x$ удовлетворяет уравнению.

8.

$$4\cdot u_t = u_{xx}\ ,-\infty < x < +\infty\ , t>0\ ;$$
$$u(x,0)=e^{2x-x^2}\ ,-\infty < x < +\infty\ .$$

9.

$$4\cdot u_t = u_{xx}\ ,-\infty < x < +\infty\ , t>0\ ;$$
$$u(x,0)=\sin x\cdot e^{-x^2}\ ,-\infty < x < +\infty\ .$$

10. Решите в общем виде методом разделения переменных задачу Коши

$$u_t = a^2\cdot u_{xx}\ ,-\infty < x < +\infty\ , t>0\ ;$$
$$u(x,0)=\varphi(x)\ ,-\infty < x < +\infty\ ;$$
$$|u(x,t)| < const\ .$$

Пусть в точке x_0 функция $\varphi(x)$ имеет разрыв первого рода. Каким должен оказаться $\lim\limits_{t\to 0+} u(x_0,t)$?

Указание. Нетрудно догадаться, что если в общем виде решать задачу с начальным условием для уравнения теплопроводности методом разделения переменных на всей прямой $-\infty < x < +\infty$, а не на конечном отрезке, то решение получим не в виде ряда Фурье, а в виде интеграла Фурье. Подставьте функцию $u(x,t)=X(x)\cdot T(t)$ в уравнение $u_t = a^2 u_{xx}$ и разделите переменные. Вы должны получить два уравнения: $X''_{xx}+\lambda\cdot X=0$ и $T'_t + a^2\cdot\lambda\cdot T=0$, где $\lambda=k^2>0$. Откуда следует условие $\lambda=k^2>0$? Все ли действительные k годятся? Запишите частное решение исходного уравнения теплопроводности, отвечающее фиксированному k. Запишите его общее решение. Вы должны получить $u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} A(k)\cdot\exp\{-a^2k^2t+ikx\}dk$ (i—мнимая единица). Осталось выбрать $A(k)$ из начального условия $u(x,0)=\varphi(x)$; как связаны $\varphi(x)$ и $A(k)$?

11. В решении задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности на прямой

$$u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\exp\{-ik\xi\}d\xi\right)\exp\{-a^2k^2t+ikx\}dk$$

поменяйте порядок интегрирования. Запишите интегральное представление решения вида $u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(x,\xi;t)\varphi(\xi)d\xi$.

Указание. После изменения порядка интегрирования решение исходной задачи выглядит так:

$u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(x,\xi;t)\varphi(\xi)d\xi$, где

$G(x,\xi;t)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-a^2k^2t+ik(x-\xi)\}dk$. Всегда ли выполнима операция изменения порядка интегрирования? В каком смысле существуют внутренний, внешний интегралы, задающие $u(x,t)$?

Вычислите интеграл, которым определена функция G. Рассмотрите для этого два интеграла: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\,dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\,dx$, где $\alpha = const>0$, и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha x^2}\sin\beta x\,dx$. Вычислите первый интеграл дифференцированием по параметру β. Вы должны получить

$$G(x,\xi;t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right\}.$$

Удовлетворяет ли G как функция переменных x и t при фиксированном значении ξ однородному уравнению теплопроводности?

Функция G называется функцией Грина уравнения теплопроводности на прямой или функцией влияния мгновенного точечного источника.

12. Зная функцию влияния мгновенного источника, запишите решение задачи

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), -\infty < x < +\infty, t > 0;$$
$$u(x,0) = 0, -\infty < x < +\infty.$$

Указание. Пусть $u(x,t) = 0$ для всех x при $t < 0$, а в момент времени $t = 0$ в точке с координатой ξ мгновенно выделилось количество тепла $Q = c\rho$ — сработал мгновенный точечный источник тепла (c, ρ см. в теме 2). Если боковая поверхность стержня теплоизолирована, то со временем переданное стержню тепло Q не изменится, но расплывётся по всей прямой $-\infty < x < +\infty$. Тогда температура в точке x в момент времени $t > 0$, обусловленная теплопроводностью в стержне, будет равна $G(x,\xi;t)$.

Пусть описанный выше мгновенный точечный источник тепла сработал в момент времени $\tau \geq 0$. Запишите $u(x,t)$. Пусть в один и тот же момент времени τ срабатывают два мгновенных источника различной мощности. Как найти $u(x,t)$? Как найти температуру $u(x,t)$, если одновременно срабатывающие источники тепла непрерывно распределены вдоль прямой $-\infty < x < +\infty$ с заданной плотностью их распределения? Наконец, пусть в каждый момент времени $\tau \geq 0$ в каждой точке ξ прямой $-\infty < x < +\infty$ срабатывает мгновенный точечный источник тепла. Как найти $u(x,t)$?

13. Найдите $\lim\limits_{t \to 0+} G_{x \neq \xi}$ и $\lim\limits_{t \to 0+} G_{x = \xi}$. Какова температура в точке, где срабатывает источник, в момент его срабатывания? Возможна ли такая температура в реальном стержне? Может ли реальный физический источник выделить конечное количество тепла в единственной точке ξ?

Нарисуйте графики функции G (при фиксированных ξ и t) в разные моменты времени. Что происходит при $t \to +\infty$? При $t \to 0+$?

Может ли температура в сколь угодно удаленной от ξ точке реального стержня сразу измениться из-за выделения тепла в точке ξ?

14. Выполнив замену искомой функции $u(x,t) = e^{-ht} v(x,t)$, найдите функцию Грина для уравнения $u_t = a^2 u_{xx} - hu$, $-\infty < x < +\infty$, $t > 0$. С помощью найденной функции Грина запишите решение задачи

$$u_t = a^2 u_{xx} - hu + f(x,t), -\infty < x < +\infty, t > 0;$$
$$u(x,0) = \varphi(x), -\infty < x < +\infty.$$

В следующих задачах решения выражаются через функцию

$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^z e^{-x^2} dx$ — интеграл ошибок. Полезно помнить, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}, \quad \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

15.

$$u_t = a^2 u_{xx}\ ,\ -\infty < x < +\infty\ ,\ t > 0\ ;$$

$$u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} u_1 = const\ ,\ x < 0\ ; \\ u_2 = const\ ,\ x > 0\ . \end{cases}$$

Решение.

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi;t)\varphi(\xi)d\xi = \frac{u_1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{0}\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right\}d\xi +$$

$$+\frac{u_2}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right\}d\xi\ .$$

Выполните замену переменной интегрирования: $\alpha = \dfrac{(x-\xi)}{2a\sqrt{t}}$. Вы должны получить

$$u(x,t) = \frac{u_1+u_2}{2} + \frac{u_2-u_1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\alpha^2}d\alpha = \frac{u_1+u_2}{2} + \frac{u_2-u_1}{2}\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

Найдите $\lim\limits_{t\to 0+} u(0,t)$, $\lim\limits_{t\to +\infty} u(x,t)$.

16.

$$u_t = a^2 u_{xx}\ ,\ -\infty < x < +\infty\ ,\ t > 0\ ;$$

$$u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} 0\ \ ,\ -\infty < x < -l\ ; \\ u_0 = const \neq 0\ ,\ -l < x < l\ ; \\ 0\ \ ,\ l < x < +\infty\ . \end{cases}$$

Найдите $u(x,t)$, $\lim\limits_{t\to 0+} u(-l,t)$, $\lim\limits_{t\to 0+} u(l,t)$.

17.

$$u_t = u_{xx}\ ,\ -\infty < x < +\infty\ ,\ t > 0\ ;$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 0\ \ ,\ x < 0\ ; \\ e^{-\alpha x}\ ,\ x > 0\ ; \end{cases}\quad \alpha = const > 0\ .$$

18. Если при описании температуры стержня нас интересует его участок, удалённый от одного конца стержня, то в качестве модели процесса получаем начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности на полупрямой $x \geq 0$. Дайте постановку этой задачи в случае краевого условия 1-го, 2-го рода. Проведите редукцию общей начально-краевой задачи на полупрямой; получите задачу с нулевым краевым условием. Найдите функцию Грина уравнения теплопроводности на полупрямой, отвечающую краевому условию 1-го, 2-го рода.

Указание. Начально-краевую задачу для однородного уравнения теплопроводности на полупрямой с нулевым краевым условием можно свести к задаче Коши на всей прямой. Это сведение основано на следующих двух фактах.

Если $\varphi(x)$ — нечётная функция на $-\infty < x < +\infty$, то функция

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right\}\varphi(\xi)d\xi$$

обращается в нуль при $x = 0$ во все моменты времени t: $u(0,t) = 0$.

Если $\varphi(x)$ — чётная функция на $-\infty < x < +\infty$, то производная u_x указанной функции обращается в нуль при $x = 0$ во все моменты времени t: $u_x(0,t) = 0$.

Сведите задачу

$$u_t = a^2 u_{xx}\ ,\ 0 < x < +\infty\ ,\ t > 0\ ;$$

$$u(0,t) = 0\ ,\ t > 0\ ;$$

$$u(x,0) = \varphi(x)\ ,\ 0 \leq x < +\infty$$

к задаче Коши на всей прямой. Найдите функцию Грина $G(x,\xi;t)$ исходной задачи на $0 \le x < +\infty$. (Помните, что в ответе не може[т] быть значений $x < 0$.) Запишите её решение в вид[е]

$$u(x,t) = \int_0^{+\infty} G(x,\xi;t)\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Запишите решение аналогично[й] задачи для неоднородного уравнения.

Сведите задачу

$$u_t = a^2 u_{xx}\,,\ 0 < x < +\infty\,,\ t > 0;$$
$$u_x(0,t) = 0\,,\ t > 0;$$
$$u(x,0) = \varphi(x)\,,\ 0 < x < +\infty$$

к задаче Коши на всей прямой. Найдите функцию Грина $G(x,\xi;t)$ исходной задачи на $0 \le x < +\infty$. Запишите её решение в вид[е]

$$u(x,t) = \int_0^{+\infty} G(x,\xi;t)\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Запишите решение аналогично[й] задачи для неоднородного уравнения.

19.

$$u_t = a^2 u_{xx}\,,\ 0 < x < +\infty\,,\ t > 0;$$
$$u_x(0,t) = 0\,,\ t > 0;$$
$$u(x,0) = \begin{cases} u_0 = const \ne 0\,,\ 0 \le x \le l; \\ 0\,,\ l < x < +\infty. \end{cases}$$

Найдите $u(x,t)$, $\lim\limits_{t\to 0+} u(l,t)$, $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t)$. Нарисуйте график изменения температуры в точке $x = 0$.

20. Боковая поверхность полуограниченного стержня $x \ge 0$ и его конец $x = 0$ теплоизолированы. Начальная температура равна $e^{-\alpha x^2}$, $\alpha = const > 0$.

Найдите температуру стержня $u(x,t)$ во все моменты времени и $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t)$.

21. Полуограниченный стержень $x \ge 0$ имеет нулевую начальную температуру. Его боковая поверхность теплоизолирована, а конец $x = 0$ поддерживается при температуре $u_0 = const \ne 0$ при $t > 0$. Найдите температуру стержня $u(x,t)$ во все моменты времени и $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t)$. Найдите поток тепла через конец $x = 0$ при $t \ge 0$.

22.

$$u_t = a^2 u_{xx} - h(u - u_0)\,,\ 0 < x < +\infty\,,\ t > 0;$$
$$h = const > 0;\ u(0,t) = u_0 = const\,,\quad t > 0;$$
$$u(x,0) = 0\,,\ 0 \le x < +\infty.$$

Дайте физическую интерпретацию задачи и решите её.

23. Решения начально-краевых задач на конечном отрезке $0 \le x \le l$ тоже можно записать через функцию Грина соответствующей задачи. Например, полученное методом разделения переменных решение задачи

$$u_t = a^2 u_{xx}\,,\ 0 < x < l\,,\ t > 0;$$
$$u(0,t) = 0\,,\ u(l,t) = 0\,,\ t > 0;$$
$$u(x,0) = \varphi(x)\,,\ 0 \le x \le l\,,$$

имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi\right)\exp\left\{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x =$$

$$= \int_0^l\left(\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left\{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot\sin\frac{\pi n}{l}\xi\right)\varphi(\xi)\,d\xi =$$

$$=\int_0^l G(x,\xi;t)\varphi(\xi d\xi).$$

Запишите решение аналогичной задачи для неоднородного уравнения.

Найдите функции Грина задач 2, 3, 4 из темы 3. Как выглядят решения аналогичных задач для неоднородного уравнения?

Дополнение к теме 5.

24. Функция Грина (функция влияния мгновенного точечного источника) $G(x,\xi;t-\tau)$ — это изменение температуры в точке x за время $t-\tau$, которое обусловлено мгновенным выделением тепла $Q=c\rho$ в точке ξ в момент времени τ. Зададимся следующими вопросами. Что подразумевается под мгновенным выделением конечного количества тепла? Что значит выделение тепла в единственной точке? Можно ли указанный мгновенный точечный источник тепла учесть в виде неоднородности уравнения теплопроводности? Эти вопросы приводят к важному понятию δ - функции — математическому объекту, который не является функцией в обычном смысле.

Пусть на прямой $-\infty<x<+\infty$ имеется достаточно большой запас "пробных функций" $\psi(x)$. Можно считать, что все они бесконечно дифференцируемы и обращаются в нуль на бесконечности. Функционал f — это отображение, которое каждой функции ψ ставит в соответствие число; функция ψ — аргумент функционала. Действие функционала с именем f на функцию ψ можно записать в виде (f,ψ). Нас будут интересовать линейные по ψ функционалы (и в определенном смысле непрерывные по ψ). Некоторые из них можно задать при помощи обычных функций $f(x)$ и присвоить им имена этих функций: $(f,\psi)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\psi(x)dx$. Другие функционалы нельзя задать таким способом; например, $(\delta,\psi)=\psi(0)$. Последнее равенство определяет функционал с именем δ, который и называют "δ - функцией" (сосредоточенной в точке $x=0$). Если мы хотим иметь возможность сдвигать значение аргумента x пробной функции ψ в этом равенстве, то введём функционал с именем $\delta(x-x_0)$ по правилу $(\delta(x-x_0),\psi)=\psi(x_0)$. Таким образом, сосредоточенная в нуле δ - функция — это $\delta(x)$. Здесь x нельзя рассматривать как аргумент функции в обычном смысле: $\delta(x)$ — единый символ, имя функционала; аргумент этого функционала —пробная функция ψ. Указанные линейные и непрерывные по ψ функционалы называют обобщенными функциями.

Иногда действие функционала $\delta(x-x_0)$ на пробную функцию ψ записывают в виде $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0)\psi(x)dx$, понимая этот интеграл либо как единый символ, эквивалентный $(\delta(x-x_0),\psi)=\psi(x_0)$, либо как результат приближения δ - функции обычными функциями. Говорят, что последовательность обобщённых функций $\{f_n\}$ сходится к обобщённой функции f, если для любой пробной функции ψ числовая последовательность (f_n,ψ) сходится к (f,ψ) при $n\to\infty$. Тем самым обобщённую функцию f можно приближать, например, обычными функциями $f_n(x)$ в том смысле, что для любой пробной функции ψ $\int_{-\infty}^{+\infty}f_n(x)\psi(x)dx\to(f,\psi)$ при $n\to\infty$. Это вовсе не означает, что $\{f_n(x)\}$ сходится к f при каждом фиксированном x. Вспомните предел при $t_n\to 0+$ функций $G(x,\xi;t_n)$ из задачи 13:

$$\lim_{t\to 0+}G(x,\xi;t)=\begin{cases}0\,,x\neq\xi;\\+\infty,x=\xi.\end{cases}$$

Последний предел не является разумным образом определённой функцией. На самом деле речь идёт о сходимости последовательности обычных функций одной переменной x $G(x,\xi;t_n)$ (ξ — параметр) к $\delta(x-\xi)$ в смысле обобщённых функций.

Бессмысленно говорить о "значении" δ - функции в какой-либо точке x, но её можно приблизить обычными функциями с любой точностью в указанном выше смысле. Понятие обобщённой функции даёт возможность выразить в математически корректной форме такие идеализированные понятия, как интенсивность мгновенного источника тепла, объёмную плотность сосредоточенной в одной точке массы и т.д. С другой стороны, это понятие отражает тот факт, что реально нельзя измерить значение физической величины в точке, а можно измерять лишь её средние значения в достаточно малых окрестностях данной точки. Для прояснения сказанного попробуйте определить объёмную плотность единичной точечной массы, сосредоточенной в начале координат. Если равномерно распределить эту массу внутри шара радиуса ε с центром в начале координат, то средняя плотность массы равна

$$\rho_\varepsilon(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{3}{4\pi\varepsilon^3}, \sqrt{x^2+y^2+z^2}<\varepsilon,\\ 0 \quad , \sqrt{x^2+y^2+z^2}>\varepsilon.\end{cases}$$

Если в качестве искомой плотности взять поточечный предел , то получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\rho_\varepsilon(x,y,z)=\begin{cases}0 \quad ,\sqrt{x^2+y^2+z^2}\neq 0,\\ +\infty, x=y=z=0.\end{cases}$$

Но от искомой плотности естественно требовать , чтобы интеграл от неё по любой пространственной области , содержащей начало координат, давал бы массу вещества этой области, т.е. единицу. Поэтому поточечный предел ρ_ε при $\varepsilon\to 0+$ не годится на роль плотности сосредоточенной в точке массы. Вместо него надо взять слабый предел, т.е. предел в смысле сходимости обобщённых функций. Этот предел как раз и есть δ - функция:

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\iiint\limits_{\sqrt{x^2+y^2+z^2}<\varepsilon}\rho_\varepsilon(x,y,z)\psi(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\psi(0,0,0)$$ для любой ψ из запаса пробных функций (докажите этот факт, пользуясь непрерывностью $\psi(x,y,z)$).

Приведите примеры последовательностей обычных функций, сходящихся в слабом смысле к δ - функции.

Выберем дифференцируемую обычную функцию одной переменной $f(x)$ и зададим функционал f': $(f',\psi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f'(x)\psi(x)dx$. Вычислим интеграл по частям и вспомним, что мы выбирали пробные функции $\psi(x)$, для которых $\psi(-\infty)=\psi(+\infty)=0$.

Тогда $(f',\psi)=-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\psi'(x)dx=-(f,\psi')$. Производная любой обобщённой функции определяется точно так же: если f — обобщённая функция, то f' — имя функционала, действующего по правилу $(f',\psi)=-(f,\psi')$ для каждой пробной функции ψ. Тем самым все обобщённые функции имеют обобщённые производные любого порядка. Например, разрывная обычная функция $\theta(x)=\begin{cases}0, x<0\\ 1, x\geq 0\end{cases}$ имеет обобщённую производную $\theta'=\delta(x)$, поскольку

$$(\theta',\psi)=-(\theta,\psi')=-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\theta(x)\psi'(x)dx=-\int\limits_{0}^{+\infty}\psi'(x)dx=\psi(0)=$$
$$=(\delta(x),\psi).$$

Если у всех пробных функций ψ существует преобразование Фурье $\widehat{\psi}$ (мы можем выбрать такой запас функций ψ), то преобразование Фурье обобщённой функции f — это функционал $\widehat{f}$, действующий по правилу $(\widehat{f},\psi)=(f,\widehat{\psi})$.

Можно выбрать запас пробных функций ψ, определённых на интервале $-l<x<l$. Тогда обобщённые функции можно раскладывать в ряды Фурье. Например, $\delta(x)=\dfrac{1}{2l}+\dfrac{1}{l}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\dfrac{\pi n}{l}x$. Последний ряд, который в обычном смысле расходится, надо понимать как имя функционала, действие которого на разложимую в ряд Фурье по системе $\left\{1,\cos\frac{\pi}{l}x,\sin\frac{\pi}{l}x,\ldots,\cos\frac{\pi n}{l}x,\sin\frac{\pi n}{l}x,\ldots\right\}$ на $-l<x<l$ функцию $\psi(x)$ аналогично действию функционала $\delta(x)$. В самом деле: $\psi(x_0)=\int\limits_{-l}^{l}\delta(x-x_0)\psi(x)dx$, а с другой стороны,

$$\int\limits_{-l}^{l}\left(\frac{1}{2l}+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi n}{l}(x-x_0)\right)\psi(x)dx=$$

$$=\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l}\psi(x)dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}\cos\frac{\pi n}{l}x\cdot\psi(x)dx\right)\cos\frac{\pi n}{l}x_0+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot\psi(x)dx\right)\sin\frac{\pi n}{l}x_0\right)=\psi(x_0),$$

поскольку ψ разложима в ряд Фурье. Следовательно, функционалы с имен[illegible]

$$\delta(x-x_0) \text{ и } \left(\frac{1}{2l}+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi n}{l}(x-x_0)\right)$$ действуют одинаково.

Докажите, что на интерва[illegible]

$$0<x<l \quad \delta(x-x_0)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot\sin\frac{\pi n}{l}x_0 .$$

Совершенно аналогично можно выбрать запас пробных функций $\psi(x,t)$ и ввести обобщённые функции как действующие на ψ линейные непрерыв[illegible] функционалы. Тогда можно определить обобщённые частные производ[illegible] обобщённых функций:

$$(f'_x,\psi)=-(f,\psi'_x),\ (f'_t,\psi)=-(f,\psi'_t),\ (f''_{xx},\psi)=(-1)^2(f,\psi''_{xx})$$

и т.д. Уравнение теплопроводности $u_t=a^2u_{xx}$, например, означает тен[illegible] равенство обобщённых функций u_t и a^2u_{xx}: $(u_t,\psi)=(a^2u_{xx},\psi)$ [illegible] любой ψ. Теперь становится ясно, как действие мгновенного точечного источни[illegible] тепла записать в дифференциальном уравнении. Пусть в точке ξ в момент време[illegible] τ мгновенно выделилось количество тепла Q (а температура стержня до момен[illegible] τ была нулевой). Тогда дифференциальное уравнение баланса тепла имеет [illegible]

$$c\rho u_t=ku_{xx}+Q\delta(x-\xi,t-\tau)$$

[illegible]

$$u_t=a^2u_{xx}+\frac{Q}{c\rho}\delta(x-\xi,t-\tau).$$ По определению функции Грина решени[illegible] этого уравнения при $t>\tau$ является $u(x,t)=G(x,\xi;t-\tau)\dfrac{Q}{c\rho}$. Ес[illegible] источники тепла распределены по пространственной переменной и по времени, то [illegible] их действия надо просуммировать.

Понятие обобщённого решения задачи для дифференциального уравнения [illegible] даже только использование обобщённых функций в постановке задачи мож[illegible] существенно упростить ответы на многие вопросы.

25.
$$u_t=a^2u_{xx},\ 0<x<+\infty,\ t>0;$$
$$u_x(0,t)=\gamma(t),\ t>0;$$
$$u(x,0)=0,\ 0\le x<+\infty.$$

Решение. Задание потока тепла в точке $x=0$ можно рассматривать как источник тепла мощности $Q(t)=-k\gamma(t)$, помещённый на конце стержня. Следовательно, при фиксированном τ уравнение и краевое условие можно записать в виде

$$u_t=a^2u_{xx}+\left(-\frac{k\gamma(\tau)}{c\rho}\right)\delta(x,t-\tau).$$ Так как источник поставляет тепло на стержень во все моменты времени τ, $0<\tau<t$, то решение исходной задачи имеет вид

$$u(x,t)=\int_0^t\left(-\frac{k\gamma(\tau)}{c\rho}\right)G(x,\xi=0;t-\tau)\,d\tau,$$ где G — функция Грина для уравнения теплопроводности на полупрямой с краевым условием второго рода (см.пункт18).

$$u(x,t)=-a^2\int_0^t\left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^{-1}\cdot\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}_{\xi=0}\cdot\gamma(\tau)\,d\tau-$$

$$-a^2\int_0^t\left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^{-1}\cdot\exp\left\{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}_{\xi=0}\cdot\gamma(\tau)\,d\tau=$$

$$=-\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\gamma(\tau)\,d\tau$$

26.

$$u_t = a^2 u_{xx}\,,\ 0 < x < l\,,\ t > 0\,;$$
$$u(0,t) = 0\,,\ u(l,t) = 0\,,\ t > 0\,;$$
$$u(x,0) = \delta(x-\xi) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi n}{l}x \sin\frac{\pi n}{l}\xi\,,$$
$$0 < x < l,\ 0 < \xi < l\,.$$

Найдите функцию Грина, исходя из разложения решения этой задачи в ряд по собственным функциям. Сравните с результатом задачи 23.

Найдите таким же способом функции Грина задач 2, 3, 4 из темы 3. Обоснуйте для этого соответствующие разложения δ - функции в ряды по собственным функциям этих задач.

Тема 6.

Уравнения Лапласа и Пуассона . Постановки внутренних и внешних задач Дирихле и Неймана. Фундаментальное решение уравнения Лапласа.

Литература: [1], гл. IV , §1, п.1,2,4,5; гл. IV , §2, п.3,4,6,7,8; гл. IV , §5, п.2.

1. Для следующих функций $u = u(x,y,z)$ ($x\,,\ y\,,\ z$ – декартовы координаты точки в пространстве) найдите $grad\,u$ и $div\,grad\,u$. Какие из указанных функций являются гармоническими?

$u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $x^2+y^2+z^2 \neq 0$; $\quad u_2 = e^{xyz}$;

$u_3 = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z$; $\quad u_4 = \sin 3x \cdot \sin 4y \cdot sh 5z$.

2. Среди следующих векторных полей $\vec{A} = \vec{A}(x,y,z)$ найдите те, для которых выполнено условие $rot\,\vec{A} = 0$, и представьте найденные поля в виде $\vec{A} = grad\,u(x,y,z)$.

$\vec{A}_1 = \dfrac{\{x,\,y,\,z\}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\quad x^2+y^2+z^2 \neq 0$;

$\vec{A}_2 = \{\sin y \cdot \sin z,\ \sin x \cdot \sin z,\ \sin x \cdot \sin y\}$;

$\vec{A}_3 = \{yz\,,\ xz\,,\ xy\}$; $\quad \vec{A}_4 = \{xz\,,\ yz\,,\ xy\}$.

3. В каждой точке сферы $x^2+y^2+z^2 = a^2$ найдите производную функции $u = u(x,y,z)$ по направлению внешней нормали к сфере в этой точке.

$u_1 = x \cdot y \cdot z$; $\quad u_2 = x^2+y^2+z^2$;

$u_3 = x^3+y^3+z^3$.

4. Найдите поток вектора $\vec{A} = \vec{A}(x,y,z)$ через сферу $x^2+y^2+z^2 = a^2$.

$\vec{A}_1 = \{x,\,y,\,z\}$; $\quad \vec{A}_2 = \{x^3,\,y^3,\,z^3\}$; $\quad \vec{A}_3 = \{x^2yz,\,xy^2z,\,xyz^2\}$.

Указание. Примените формулу Остроградского.

5. Среди следующих функций $u = u(x,y)$ ($x\,,\ y$ – декартовы координаты точки на плоскости) найдите гармонические.

$u_1 = \ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $x^2+y^2 \neq 0$; $\quad u_2 = x^2 - y^2 + xy$;

$u_3 = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $\quad x^2+y^2 \neq 0$; $\quad u_4 = \cos x \cdot sh\,y - sh\,x \cdot \sin y$;

$u_5 = e^{\frac{y}{x}}$, $x \neq 0$; $u_6 = e^{xy}$; $u_7 = \mathrm{Re}\left(z^2 \cdot e^z\right)$, $z = x + iy$

$u_8 = e^{x^2+y^2}$; $u_9 = \mathrm{Im}(\sin z - ch\, z)$, $z = x + iy$;

$u_{10} = v^2(x,y)$, где $v(x,y)$ – гармоническая функци $v \neq const$.

6. Запишите стационарное уравнение теплопроводности пространстве в случае однородной среды (уравнение Пуассона). Запишите его для случая, когда в теле нет источников теп (уравнение Лапласа).

Указание. См. задачу 4 темы 2.

7. В области Ω пространства движется жидкость с скоростью $\vec{v}(x,y,z,t)$; $\rho(x,y,z,t)$ – объёмная плотност массы жидкости в точке (x,y,z) в момент времени t. В облас Ω нет источников или стоков жидкости. Выведите уравнени неразрывности $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho \cdot \vec{v}) = 0$.

Запишите уравнение неразрывности для несжимаемо жидкости ($\rho = const$). Запишите это уравнение дл потенциального (т.е. безвихревого) течения. Что получилось бы если бы в Ω действовали источники жидкости?

Указание. Рассмотрите течение жидкости в произвольно подобласти Ω' с гладкой границей S. Если жидкость тольк протекает через Ω, а не впрыскивается внутрь области и н отсасывается изнутри, то масса жидкости в Ω' определяется е количеством, пересекающим границу S. Запишите массу жидкости в Ω' в фиксированный момент времени. Запишите массу жидкости, покидающей область Ω' в единицу времени в момент t (т.е. поток вектора $\rho\vec{v}$ через S; учтите, что $\vec{n}$ — внешняя нормаль к S). Запишите баланс вещества за промежуток времени $[t_1, t_2]$: изменение массы жидкости в Ω' за указанный промежуток времени обусловлено протеканием её через границу S. Примените формулу Остроградского к потоку вектора $\rho\vec{v}$ через S, разделите уравнение баланса вещества на $t_2 - t_1$ и устремите $t_2 - t_1$ к нулю. Вы должны получить $\iiint\limits_{\Omega}\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\vec{v})\right)dx\,dy\,dz = 0$ — закон сохранения массы (баланс вещества) в интегральной форме. Используя произвольность области Ω', запишите закон сохранения массы в дифференциальной форме.

8. Выведите дифференциальное уравнение для потенциала электростатического поля.

Выведите дифференциальное уравнение для потенциала стационарного электрического тока.

Указание. В классической электродинамике для описания электромагнитного поля в материальной среде вводятся четыре векторных поля: напряженность электрического поля $\vec{E}$, электрическая индукция $\vec{D}$, напряженность магнитного поля $\vec{H}$ и магнитная индукция $\vec{B}$, которые зависят от точки (x,y,z) пространства и времени t. Электромагнитное поле описывается уравнениями Максвелла, которые в абсолютной системе физических единиц Гаусса имеют вид:

$$rot\,\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j},$$

$$rot\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

$$div\,\vec{B} = 0,$$

$$div\,\vec{D} = 4\pi\rho,$$

где $\rho(x,y,z,t)$ — заданная объёмная плотность электрического заряда, $\vec{j}(x,y,z,t)$ — заданное векторное поле плотности электрического тока (заряд, проходящий в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению его движения), а c — скорость света в вакууме. ρ и $\vec{j}$ — источники тока. Для большинства сред выполнены уравнения состоян $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$, $\vec{B}=\mu\vec{H}$ и $\vec{j}=\sigma\vec{E}$ — закон Ома ; здесь ε — диэлектрическая проницаемость среды, μ — её магнит проницаемость, σ — удельная электропроводность. Из уравнен Максвелла следует уравнение неразрывности $\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\,\vec{j}=0$, выражающее закон сохранения электрического заряда (сравните пунктом 7).

Рассмотрите случай электростатики, когда электрические заряды неподвижны. Как выглядит в этом случ второе уравнение Максвелла? Во что превращается четверт уравнение? Во что оно превращается, если в рассматриваем области пространства электрических зарядов нет?

Рассмотрите случай, когда в интересующей нас облас пространства нет источников тока (т.е. $div\,\vec{j}=0$) электрический ток стационарный (как тогда выглядит втор уравнение?). Какому уравнению удовлетворяет потенци стационарного тока?

9. Запишите постановку внутренней (т.е. в ограниченно области $\Omega\subset R^3$ или $D\subset R^2$) задачи Дирихле для уравнен Лапласа. Зачем надо требовать непрерывность искомой функции замкнутой области?

10. Запишите постановку внешней (т.е. вне ограниченно области) задачи Дирихле для уравнения Лапласа в пространственно случае. Какое условие гарантирует единственность решения это задачи? Приведите пример задачи, имеющей более одного решени если указанным условием пренебречь.

Запишите постановку внешней задачи Дирихле дл уравнения Лапласа в плоском случае. Какое условие тепер гарантирует единственность решения? Приведите пример задачи, имеющей более одного решения, если указанным условием пренебречь. Можно ли это условие заменить на его аналог из пространственного случая?

11. Запишите постановку внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа (в ограниченной области $\Omega\subset R^3$ или $D\subset R^2$). Какому условию должны подчиняться данные на границе, чтобы решение задачи существовало? Каков физический смысл этого условия? В каком смысле решение задачи единственно?

12. Пусть Ω – ограниченная область в пространстве. Приведите примеры гармонических в $R^3\setminus\Omega$ функций, которые регулярны на бесконечности; не являются регулярными на бесконечности.

Приведите аналогичные примеры функций вне ограниченной области D на плоскости.

Замечание. Заданная вне ограниченной области гармоническая функция u называется регулярной на бесконечности, если при $\sqrt{x^2+y^2+z^2}\to\infty$ $u(x,y,z)=o(1)$ в пространственном случае или при $\sqrt{x^2+y^2}\to\infty$ $u(x,y)=O(1)$ в плоском случае. Функция u называется решением задачи Неймана для уравнения Лапласа во внешности ограниченной области, если она там гармонична, непрерывно дифференцируема в замыкании неограниченной области, удовлетворяет условию $\frac{\partial u}{\partial n}=\nu$ на границе и регулярна на бесконечности. Внешняя задача Неймана для уравнения Лапласа в пространственном случае не может иметь более одного решения, а в плоском случае решение (если оно существует) определяется с точностью до постоянного слагаемого.

13. Пусть r, φ — полярные координаты, а x, y — декартовы координаты на плоскости. Считая, что $u=u(r(x,y),\varphi(x,y))$, найдите производные u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy} и выражение для оператора Лапласа $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}$ в полярной системе координат. Как выглядит оператор Лапласа в цилиндрической системе координат r, φ, z в пространстве? Во

что превращается уравнение Лапласа в центрально-симметричном случае на плоскости (в осесимметричном случае в пространстве)?

14. Пусть r, φ, θ — сферические координаты, а x, y, z — декартовы координаты в пространстве. Считая, что $u = u(r(x,y,z),\varphi(x,y,z),\theta(x,y,z))$, найдите производные u_x, u_y, u_z, u_{xx}, u_{yy}, u_{zz} и выражение для оператора Лапласа $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ в сферической системе координат. Во что превращается уравнение Лапласа в сферически симметричном случае в пространстве? Найдите его общее решение в этом случае.

15. Пусть r, φ, θ — сферические координаты в пространстве. Функция $u = \frac{1}{r}$ называется фундаментальным решением уравнения Лапласа в пространстве. Проверьте, что $\frac{1}{r}$ удовлетворяет уравнению Лапласа всюду, кроме начала координат. Дайте электростатическую интерпретацию этому решению.

16. Пусть r, φ — полярные координаты на плоскости x, y. Функция $u = \ln\frac{1}{r}$ называется фундаментальным решением уравнения Лапласа на плоскости. Проверьте, что $\ln\frac{1}{r}$ удовлетворяет уравнению Лапласа всюду, кроме начала координат. Дайте электростатическую интерпретацию этому решению.

Указание. Пусть ось z декартовой системы координат в пространстве равномерно заряжена с постоянной линейной плотностью заряда e (т.е. заряд, приходящийся на единицу длины оси, равен e). Зависит ли напряженность $\vec{E}$ создаваемого всей осью z электростатического поля в точке (x,y,z) от координаты z? От чего зависит напряженность этого поля? Нарисуйте вектор $\vec{E}$. Выберите точку P на расстоянии r от оси z и произвольный малый промежуток на оси z длиной dz. Найдите напряженность $\vec{E}_{dz}$ поля в точке P, создаваемого выбранным промежутком dz. Найдите составляющую вектора $\vec{E}_{dz}$, перпендикулярную оси z. Интегрируя по всей оси z, найдите величину вектора $\vec{E}$. Вспомните, что $\vec{E} = -grad\, u$, где u — потенциал электростатического поля. Запишите вектор $grad\, u$ в рассматриваемом осесимметричном случае в цилиндрической системе координат. Найдите потенциал $u(r)$ равномерно заряженной оси z.

Тема 7.

Решение краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона методом разделения переменных в двумерных областях.

Литература: [1], гл. IV ,§3, п.1, 2.

Методом разделения переменных можно получить решения указанных задач лишь в достаточно простых областях.

1. Решите задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге $0 \le r \le a$ методом разделения переменных.

Решение. Задачу естественно решать в полярных координатах r, φ. Надо найти функцию $u(r,\varphi)$, гармоническую в круге $0 \le r < a$, $0 \le \varphi < 2\pi$ и непрерывно примыкающую к данным на границе :

$$\Delta u \equiv \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0\,,\ 0\le r<a\,,\ 0\le\varphi<2\pi\,;$$

$$u(a,\varphi)=f(\varphi),\ 0\le\varphi<2\pi\,.$$

Будем считать, что f — непрерывная функция на окружност[и] $r=a$, $0\le\varphi\le 2\pi$ (следовательно, $f(0)=f(2\pi)$). Удобн[о] полагать, что переменная φ принимает все действительны[е] значения, и тогда из однозначности функции u для все[х] φ $u(r,\varphi)=u(r,\varphi+2\pi)$, а $f(\varphi)$ должна быть периодическ[и] продолжена на $-\infty<\varphi<+\infty$ с периодом 2π.

Найдём сначала нетривиальные частные решения уравнени[я] Лапласа в круге вида $u(r,\varphi)=R(r)\cdot\Phi(\varphi)$. Подставьте эт[о] произведение в уравнение и разделите его на $\dfrac{R(r)\cdot\Phi(\varphi)}{r^2}$. Проведите разделение переменных. Вы должны получить две задач[и] для отличных от тождественного нуля функций $\Phi(\varphi)$ и $R(r)$:

$$\Phi''_{\varphi\varphi}+\lambda\cdot\Phi=0\,; \qquad r\cdot\frac{d}{dr}\left(r\cdot\frac{dR}{dr}\right)=\lambda\cdot R,$$

$$\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi),\ -\infty<\varphi<+\infty\,; \qquad 0\le r<a\,;$$

с подлежащим определению параметром λ.

Запишите уравнение для R в виде линейног[о] однородного обыкновенного дифференциального уравнения второг[о] порядка. Как называется это уравнение? Заменой $R=R(r(p))$ независимой переменной $r\ge 0$ приведите его к уравнению [с] постоянными коэффициентами. Запишите линейно независимые решения в случаях $\lambda=0$ и $\lambda>0$ (другие λ нам не понадобятся). Вернитесь к прежней независимой переменной r. Вы должны получить при $\lambda=0$ $R(r)=A_0=const\ne 0$ [и] $R(r)=\ln r$, а при $\lambda>0$ $R(r)=r^{\sqrt{\lambda}}$ и $R(r)=r^{-\sqrt{\lambda}}$

Вспомните, что $u(r,\varphi)$ должна быть непрерывной в круге; какие полученные частные решения $R(r)$ надо отбросить?

Существуют ли при $\lambda<0$ периодические решения уравнения для Φ? При $\lambda\ge 0$ общее решение этого уравнения имеет вид $\Phi(\varphi)=A\cos(\sqrt{\lambda}\varphi)+B\sin(\sqrt{\lambda}\varphi)$, а условие периодичности даёт $\sqrt{\lambda}=n=0,1,2,\ldots$. Итак, при каждом указанном n $\Phi_n(\varphi)=A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi$ — искомые решения.

Теперь $u_n(r,\varphi)=r^n\cdot(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)$, $n=0,1,2,\ldots,$ — частные решения уравнения Лапласа в круге, а в силу линейности уравнения

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}r^n\cdot(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)$$

— его общее решение. Для нахождения решения исходной задачи Дирихле подставьте полученный ряд в краевое условие и разложите $f(\varphi)$ в ряд Фурье по системе синусов и косинусов.

Ответ:

$$u(r,\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\cdot(\alpha_n\cdot\cos n\varphi+\beta_n\cdot\sin n\varphi)\text{, где}$$

$$\alpha_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\xi)d\xi\,, \qquad \alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\xi)\cos n\xi\,d\xi\,,$$

$$\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\xi)\sin n\xi\,d\xi\,.$$

Что требуется обосновать в этом формально полученном ответе? Можно ли считать f кусочно непрерывной на окружности в этой задаче?

2. Получите решение предыдущей задачи в виде интеграла Пуассона.

Указание. Подставьте выражения для α_n и β_n в ряд, дающий решение предыдущей задачи. Поменяйте порядок суммирования и интегрирования. Вы должны получить

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\cdot\cos n(\varphi-\xi)\right\}d\xi .$$

Для преобразования выражения в фигурных скобках вспомните, что

$$\cos n(\varphi-\xi)=\frac{1}{2}\left(\exp\{in(\varphi-\xi)\}+\exp\{-in(\varphi-\xi)\}\right)$$

(i – мнимая единица); учтите условие $0<\frac{r}{a}<1$, записывая суммы членов двух геометрических прогрессий со знаменателями $\frac{r}{a}\cdot\exp\{\pm in(\varphi-\xi)\}$. В результате вместо ряда Фурье решение $u(r,\varphi)$ должно получиться в виде интеграла; он называется интегралом Пуассона. Что является обоснованием возможности изменения порядка суммирования и интегрирования?

3. Решите задачу Дирихле для уравнения Лапласа вне круга методом разделения переменных. (Какому условию должна подчиняться функция $u(r,\varphi)$ при $r\to\infty$? Какие решения $R(r)$ надо сохранить, а какие отбросить?)

4. Решите задачу Неймана для уравнения Лапласа в круге методом разделения переменных. (Все ли коэффициенты A_n, B_n в общем решении можно определить из краевого условия?)

5. Решите задачу Неймана для уравнения Лапласа вне круга методом разделения переменных.

6. Разрешима ли задача для функции $u(r,\varphi)$:
$\Delta u=0$, $0\le r<a$, $0\le\varphi\le 2\pi$,
r , φ — полярные координаты на плоскости;
$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a}=1$, $0\le\varphi\le 2\pi$?

7. Решите задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге $0\le r\le 1$ с заданными краевыми условиями:
$u|_{r=1}=\sin 3\varphi$; $u|_{r=1}=\sin^2\varphi$; $u|_{r=1}=\cos^2\varphi$.

8. Решите задачи Неймана для уравнения Лапласа в круге $0\le r\le 1$ с заданными краевыми условиями:
$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1}=\sin\varphi$; $\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1}=\sin\varphi+\cos\varphi$; $\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1}=\cos^2\varphi$.

9. Решите задачу Дирихле для уравнения Лапласа вне круга $0\le r\le 1$ с краевым условием $u|_{r=1}=\cos\varphi$.

10. Решите задачу Неймана для уравнения Лапласа вне круга $0\le r\le 1$ с краевым условием $\left.\frac{\partial u}{\partial(-r)}\right|_{r=1}=\cos\varphi$.

11. Решите задачу Дирихле для уравнения Лапласа в кольце $0<a\le r\le b$.

Указание. Задачу естественно решать в полярных координатах r , φ. Надо найти функцию $u(r,\varphi)$, гармоническую в кольце $0<a<r<b$, $0\le\varphi<2\pi$ и непрерывно примыкающую к данным на обеих окружностях:

$$\Delta u = 0\,,\ a<r<b\,,\ 0\le\varphi<2\pi\,;$$
$$u(a,\varphi)=f_1(\varphi)\,,\ 0\le\varphi<2\pi\,;$$
$$u(b,\varphi)=f_2(\varphi)\,,\ 0\le\varphi<2\pi\,.$$

Будем считать, что непрерывные (или кусочно непрерывные функции $f_1\,,f_2$ периодически продолжены на $-\infty<\varphi<+\infty$ и $u(r,\varphi)=u(r,\varphi+2\pi)$ для всех φ. Разделяя переменны снова получим две задачи для определения функций $\Phi(\varphi)$ $R(r)$; отличаются ли они от случая, когда областью был круг Какие решения $R(r)$ теперь следует использовать? Запишите в частные решения уравнения Лапласа вида $R\cdot\Phi$ в кольце и е общее решение. Для нахождения решения исходной задачи Дирих подставьте полученный ряд в краевые условия и разложи $f_1(\varphi), f_2(\varphi)$ в ряды Фурье по системе синусов и косинус Получите пары линейных алгебраических уравнений для отыскан всех коэффициентов ряда.

12. Найдите функцию $u(r,\varphi)$, гармоническую в коль $0<a<r<b$ и непрерывно примыкающую к краевым услови $u|_{r=a}=1+\cos^2\varphi\,,\ u|_{r=b}=\sin^2\varphi\,.$

13. Решите задачу Дирихле для уравнения Лапласа в кругов секторе:

$$\Delta u=0\,,\ 0<r<a\,,\ 0<\varphi<\alpha<2\pi\,;$$
$$u(r,0)=0\,,\ u(r,\alpha)=0\,,\ 0\le r\le a;$$
$$u(a,\varphi)=f(\varphi)\,,\ 0<\varphi<\alpha\,.$$

Указание. Для решения этой задачи разделите переменные получите задачу Штурма-Лиувилля для определения $\Phi(\varphi)$ отрезке $0\le\varphi\le\alpha$ и уравнение для $R(r)$. Отберите нужн решения $R(r)$. Запишите все частные решения уравнения Лапла вида $R\cdot\Phi$ в секторе и его общее решение. Разложите $f(\varphi)$ в ря

Фурье на $0<\varphi<\alpha$ по собственным функциям полученной задачи Штурма-Лиувилля и постройте решение исходной задачи Дирихле в виде ряда.

14.
$$\Delta u=0\,,\ 0<r<2\,,\ 0<\varphi<1\,;$$
$$u(r,0)=0\,,\ u(r,1)=0\,,\ 0\le r\le 2\,;$$
$$u(2,\varphi)=\sin(3\pi\varphi)\,,\ 0<\varphi<1\,.$$

15. Решите задачу Дирихле для уравнения Лапласа в кольцевом секторе:

$$\Delta u=0\,,\ 0<a<r<b\,,\ 0<\varphi<\alpha\,;$$
$$u|_{\varphi=0}=0\,,\ u|_{\varphi=\alpha}=0\,,\ a\le r\le b\,;$$
$$u|_{r=a}=f_1(\varphi)\,,\ u|_{r=b}=f_2(\varphi)\,,\ 0<\varphi<\alpha\,.$$

16.
$$\Delta u=0\,,\ 2<r<3\,,\ 0<\varphi<2\,;$$
$$u|_{\varphi=0}=0\,,\ u|_{\varphi=2}=0\,,\ 2\le r\le 3\,;$$
$$u|_{r=2}=\sin(\pi\varphi)\,,\ u|_{r=3}=\sin\left(\frac{3\pi\varphi}{2}\right),\ 0<\varphi<2\,.$$

17. Решите задачу Дирихле для уравнения Пуассона в круге $0\le r\le a$:

$$\Delta u=\sin\varphi\,,\ 0\le r<a\,,\ 0\le\varphi<2\pi\,;$$
$$u(a,\varphi)=a^2\cdot\sin 2\varphi\,,\ 0\le\varphi<2\pi\,.$$

Указание. Для решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в области D с границей S

$$\Delta u=-F \quad в \quad D\,;$$
$$u|_S=f$$

надо найти какое-нибудь частное решение U этого неоднородно[го] уравнения в D, а затем сделать замену искомой функци[и] $u = v + U$. Если удаётся подобрать U, то для новой неизвестно[й] функции v получим задачу

$$\Delta v = 0 \quad в \quad D;$$

$$v|_S = (u - U)|_S = f - U|_S .$$

Частное решение уравнени[я] $r \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = r^2 \cdot \sin\varphi$ можно искать в вид[е] $A r^2 \sin\varphi$, $A = const$. Подставьте это выражение в уравнение [и] определите постоянную A. Запишите задачу для новой функци[и] v и решите её. Ответ: $u(r,\varphi) = \frac{r(r-a)}{3}\sin\varphi + r^2 \sin 2\varphi$.

Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в бол[ее] общих случаях обычно записывают с помощью функции Грина д[ля] оператора Лапласа в заданной области.

18.

$$\Delta u = 1,\ 0 < a < r < b,\ 0 \le \varphi < 2\pi;$$

$$u(a,\varphi) = a^2 \sin\varphi,\ 0 \le \varphi < 2\pi;$$

$$u(b,\varphi) = b^2 \cos\varphi,\ 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Указание: ищите частное решение вид[а] $U(r,\varphi) = A r^2$, $A = const$.

v 19. Решите задачу Дирихле для уравнения Лаплас[а] относительно $u(x,y)$ в полуполосе:

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0,\ 0 < x < \infty,\ 0 < y < a;$$

$u(0,y) = f(y)$, $f -$ непрерывная функция н[а] $0 \le y \le a$;

$$u(x,0) = f(0) = const,\ 0 \le x < \infty;$$

$$u(x,a) = f(a) = const,\ 0 \le x < \infty;$$

$$|u(x,y)| < const.$$

Решение. Задачу естественно решать в декартовых координатах x, y. Заметим сначала, что функция $U(x,y) = Ay + B$ гармонична, и выберем коэффициенты A, B из краевых условий: $U = \frac{f(a) - f(0)}{a} \cdot y + f(0)$. Положим $u = v + U$ и обозначим через $g(y)$ разность $f - U$. Тогда для новой неизвестной функции v получим задачу

$$\Delta v = 0,\ 0 < x < \infty,\ 0 < y < a; \quad |v(x,y)| < const;$$

$$v(0,y) = (u - U)|_{x=0} = g(y),\ 0 \le y \le a;$$

$$v(x,0) = 0,\ 0 \le x < \infty;$$

$$v(x,a) = 0,\ 0 \le x < \infty.$$

Найдём нетривиальные частные решения уравнения Лапласа в полуполосе вида $v(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$, которые удовлетворяют краевым условиям при $y = 0$ и $y = a$.

Подставьте это произведение в уравнение и в указанные краевые условия и разделите уравнение на $X(x) \cdot Y(y)$. Проведите разделение переменных. Вы должны получить две задачи для отличных от тождественного нуля функций $X(x)$ и $Y(y)$:

$$X''_{xx} - \lambda X = 0,\ 0 < x < \infty, \qquad Y''_{yy} + \lambda Y = 0,\ 0 < y < a;$$

$$|X(x)| < const; \qquad Y(0) = 0,\ Y(a) = 0.$$

Найдите собственные функции задачи Штурма-Лиувилля для Y и отвечающие её собственным значениям ограниченные решения уравнения для X. При каждом $n = 1,2,\dots$ запишите полученные $X_n(x) \cdot Y_n(y)$ и общее решение уравнения $\Delta v = 0$ в

полуполосе вида $v=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot X_n(x) \cdot Y_n(y)$. Остаётся на[йти]
коэффициенты A_n из последнего краевого условия при $x=$[…]
для этого разложите $g(y)$ в ряд Фурье по системе $\{Y_n\}$[…]
отрезке $0 \le y \le a$. Вернитесь к прежней искомой функ[ции]
$u(x,y)$ и запишите окончательный ответ.

20. Решите задачу с непрерывным краевым условием на [г]ранице прямоугольника:

$$u_{xx}+u_{yy}=0\,,\ 0<x<a\,,\ 0<y<b\,;$$
$$u\big|_{y=0}=f_1(x),\ 0\le x\le a\,;$$
$$u\big|_{x=a}=f_2(y),\ 0\le y\le b\,;$$
$$u\big|_{y=b}=f_3(x),\ 0\le x\le a\,;$$
$$u\big|_{x=0}=f_4(y),\ 0\le y\le b\,.$$

Решение. Из требования непрерывности краевого услов[ия] имеем:

$$f_1(0)=f_4(0),\ f_1(a)=f_2(0),\ f_2(b)=f_3(a),\ f_3(0)=f_4(b).$$

Для упрощения задачи сначала сделаем замену искомой функц[ии] $u=v+U$ так, чтобы новая неизвестная функция v бы[ла] гармонична и обращалась в нуль во всех вершинах прямоугольни[ка]. Функцию U надо подобрать из соображений её простот[ы]. Выберите $U(x,y)=A+Bx+Cy+Dxy$ (проверьте [её] гармоничность!) и найдите такие коэффициенты A,B,C,D[,] чтобы в задаче

$$v_{xx}+v_{yy}=0\,,\ 0<x<a\,,\ 0<y<b\,;$$
$$v\big|_{y=0}=\varphi_1(x)=f_1(x)-U(x,0),\ 0\le x\le a\,;$$
$$v\big|_{x=a}=\varphi_2(y)=f_2(y)-U(a,y),\ 0\le y\le b\,;$$
$$v\big|_{y=b}=\varphi_3(x)=f_3(x)-U(x,b),\ 0\le x\le a\,;$$
$$v\big|_{x=0}=\varphi_4(y)=f_4(y)-U(0,y),\ 0\le y\le b$$

краевые условия во всех вершинах обратились в нуль. Теперь задачу для v можно разбить на более простые:
$v=v_1+v_2+v_3+v_4$, где

$$\Delta v_1=0;\quad v_1\big|_{y=0}=\varphi_1(x);\quad v_1\big|_{x=a}=0;\quad v_1\big|_{y=b}=0;\quad v_1\big|_{x=0}=0;$$

$$\Delta v_2=0;\quad v_2\big|_{y=0}=0;\quad v_2\big|_{x=a}=\varphi_2(y);\quad v_2\big|_{y=b}=0;\quad v_2\big|_{x=0}=0;$$

$$\Delta v_3=0;\quad v_3\big|_{y=0}=0;\quad v_3\big|_{x=a}=0;\quad v_3\big|_{y=b}=\varphi_3(X);\quad v_3\big|_{x=0}=0;$$

$$\Delta v_4=0;\quad v_4\big|_{y=0}=0;\quad v_4\big|_{x=a}=0;\quad v_4\big|_{y=b}=0;\quad v_4\big|_{x=0}=\varphi_4(y).$$

Задачу для v_1 будем решать методом разделения переменных. Найдём нетривиальные частные решения уравнения Лапласа в прямоугольнике вида $X(x)\cdot Y(y)$, которые удовлетворяют трём нулевым краевым условиям. Подставьте произведение в уравнение и в указанные краевые условия, разделите уравнение на $X(x)\cdot Y(y)$. Проведите разделен переменных. Вы должны получить две задачи:

$$X''_{xx}+\lambda X=0\,,\,0<x<a\,; \qquad Y''_{yy}-\lambda Y=0\,,\,0<y<b$$
$$X(0)=0\,,\,X(a)=0\,; \qquad Y(b)=0.$$

Решите задачу Штурма-Лиувилля на отрезке $0\le x\le a$ и д каждого её собственного значения найдите решение второй зада (с точностью до постоянного множителя); в качест фундаментальной системы решений уравнения для Y удобно выбрать $sh\left(\sqrt{\lambda}(b-y)\right), ch\left(\sqrt{\lambda}(b-y)\right)$. При кажд $n=1\,,2\,,\ldots$ запишите полученные $X_n(x)\cdot Y_n(y)$ и общ решение уравнения $\Delta v_1=0$ в прямоугольнике ви $v_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\cdot X_n(x)\cdot Y_n(y)$. Остаётся найти коэффициенты A_n последнего краевого условия при $y=0$; для этого разложи $\varphi_1(x)$ в ряд Фурье по системе $\{X_n\}$ на отрезке $0\le x\le a$.

Задачи для $v_2\,,\,v_3\,,\,v_4$ решаются аналогично. Но в си очевидной симметрии их решения можно записать немедленно глядя на решение v_1. Запишите решения $v_2\,,\,v_3\,,\,v_4$ и функци v. Вернитесь к прежней искомой функции $u(x,y)$ и запиши окончательный ответ.

21. $\Delta u=0\,,\,0<x<a\,,\,0<y<b\,;$

$u\big|_{y=0}=\sin\dfrac{\pi x}{a}\,,\,0\le x\le a\,;$

$u\big|_{x=a}=0\,,\,0\le y\le b\,;$

$u\big|_{y=b}=0\,,\,0\le x\le a\,;$

$u\big|_{x=0}=\sin\dfrac{\pi y}{b}\,,\,0\le y\le b\,.$

22. $\Delta u=0\,,\,0<x<a\,,\,0<y<b\,;$

$u\big|_{y=0}=\sin\dfrac{\pi x}{a}\,,\,0\le x\le a\,;$

$u\big|_{x=a}=0\,,\,0\le y\le b\,;$

$u\big|_{y=b}=\sin\dfrac{2\pi x}{a}\,,\,0\le x\le a\,;$

$u\big|_{x=0}=0\,,\,0\le y\le b\,.$

23. Решите задачу Дирихле для уравнения Лапласа в области $|x|+|y|<1$ с условием $u(x,y)=x$ на границе. Пришлось ли применять метод разделения переменных?

Указание. Если поиск решения вызвал трудности, то выполните замену независимых переменных: $\begin{cases}\xi=\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{1}{2}\\ \eta=\dfrac{y-x}{2}+\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

Запишите уравнение и краевые условия в переменных $\xi\,,\,\eta$. Найдите решение вида $U(\xi,\eta)=A+B\xi+C\eta+D\xi\eta$ и

вернитесь к прежним независимым переменным. Можно ли б[...]
сразу найти решение задачи?

24. Решите задачу Неймана для уравнения Лапласа в обл[...] $x>0$, $y>0$ с условиями $\left.\dfrac{\partial u}{\partial(-x)}\right|_{x=0}=-1$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial(-y)}\right|_{y=0}=1$ [...] границе. Является ли заданная область внешностью ограничен[...] области? Каково поведение решения на бесконечности?

25. Решите смешанную краевую задачу :

$$\Delta u=0\,,\ 0<x<\pi\,,\ 0<y<\pi\,;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=\sin 2x\,,\ 0<x<\pi\,;$$

$$u|_{x=\pi}=\cos 2y\,,\ 0\le y\le\pi\,;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\pi}=\sin 3x\,,\ 0<x<\pi\,;$$

$$u|_{x=0}=0\,,\ 0\le y\le\pi\,.$$

26.

$$\Delta u=\sin 2x\,,\ 0<x<\frac{\pi}{2}\,,\ 0<y<\infty\,;$$

$$u|_{x=0}=0\,,\ 0\le y<\infty\,;$$

$$u|_{y=0}=\sin 4x\,,\ 0\le x\le\frac{\pi}{2}\,,$$

$$u|_{x=\frac{\pi}{2}}=0\,,\ 0\le y<\infty\,.$$

27.

$$\Delta u=\sin\frac{5\pi x}{a}\cdot\sin\frac{6\pi y}{b}\,,\ 0<x<a\,,\ 0<y<b\,;$$

$$u|_{y=0}=\sin\frac{\pi x}{a}\,,\ 0\le x\le a\,;$$

$$u|_{x=a}=\sin\frac{2\pi y}{b}\,,\ 0\le y\le b\,;$$

$$u|_{y=b}=\sin\frac{3\pi x}{a}\,,\ 0\le x\le a\,;$$

$$u|_{x=0}=\sin\frac{4\pi y}{b}\,,\ 0\le y\le b\,.$$

Тема 8.

Решение задач Дирихле для уравнений Лапласа и Пуассона методом функций Грина.

Литература: [1], гл. IV, § 2, п. 1, 2; гл. IV, § 4, п. 1-4.

1. Пусть Ω – ограниченная область в R^3, границей которой является кусочно гладкая замкнутая поверхность S; Q – точка с координатами $\{x_0\,,\,y_0\,,\,z_0\}$ внутри области Ω, P – точка замкнутой области $\overline{\Omega}$ с координатами $\{x,\,y,\,z\}$, r_{PQ} – расстояние между этими точками. Докажите, что значение $u(Q)$ произвольной дважды непрерывно дифференцируемой функции $u(x,\,y,\,z)$ представимо в виде

$$u(Q)=\iint\limits_S\left(G(P,Q)\cdot\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}-u(P)\cdot\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_P}\right)\cdot dS_P -$$

$$-\iiint\limits_\Omega G(P,Q)\cdot\Delta u(P)\cdot dxdydz\,,$$

где $G(P,Q)=\dfrac{1}{4\pi r_{PQ}}+v(P)$, $v(P)$ – произвольн

гармоническая в Ω функция, а $\dfrac{\partial}{\partial n_P}$ означает производную п

внешней нормали в точке $P\in S$.

Указание. Примените третью (основную) формулу Гри для функции u и вторую формулу Грина для функций u и v.

2. Пусть D – ограниченная область в R^2, границей котор является кусочно гладкая замкнутая кривая γ; Q – точка координатами $\{x_0\,,\,y_0\}$ внутри области D, P – точка замкнут области $\overline{D}$ с координатами $\{x\,,\,y\}$, r_{PQ} – расстояние между эти точками. Докажите, что значение $u(Q)$ произвольной дважд непрерывно дифференцируемой функции $u(x\,,\,y)$ представимо виде

$$u(Q)=\int\limits_\gamma\left(G(P,Q)\cdot\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}-u(P)\cdot\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_P}\right)\cdot d\gamma_P -$$

$$-\iint\limits_D G(P,Q)\cdot\Delta u(P)\cdot dxdy\,,$$

где $G(P,Q)=\dfrac{1}{2\pi}\ln\left(\dfrac{1}{r_{PQ}}\right)+v(P)$, $v(P)$ – произвольн

гармоническая в D функция, а $\dfrac{\partial}{\partial n_P}$ означает производную п

внешней нормали в точке $P\in\gamma$.

3. Получите в точке $Q\in\Omega\subset R^3$ (в точке $Q\in D\subset R^2$) интегральное представление решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\begin{cases}\Delta u(P)=-F(P) \;\; в \;\; \Omega;\\ u|_{P\in S}=f(P);\end{cases} \qquad \begin{cases}\Delta u(P)=-F(P) \;\; в \;\; D;\\ u|_{P\in\gamma}=f(P),\end{cases}$$

где заданная функция F непрерывна в $\overline{\Omega}$ (соответственно – в $\overline{D}$), а заданная функция f непрерывна на границе области.

Указание. Выберите функцию $v(P)$ из условий

$$\begin{cases}\Delta v(P)=0 \;\; в \;\; \Omega;\\ v|_{P\in S}=-\dfrac{1}{4\pi r_{PQ}};\end{cases} \qquad либо \qquad \begin{cases}\Delta v(P)=0 \;\; в \;\; D;\\ v|_{P\in\gamma}=-\dfrac{1}{2\pi}\ln\left(\dfrac{1}{r_{PQ}}\right).\end{cases}$$

Это значит, что $v=v(P,Q)$, где Q – параметр, и определенная в задачах 1, 2 функция G удовлетворяет условию $G(P,Q)=0$, когда точка P принадлежит границе области.

Чем определяется сложность построения решения задачи Дирихле: видом заданных функций F и f или сложностью геометрической формы области?

Замечание. Полученная функция G называется функцией Грина задачи Дирихле. Возможность ввести функцию Грина в задаче Дирихле объясняется тем, что $\lambda=0$ не является собственным значением задачи

$\Delta u=\lambda\cdot u$ в заданной области;
$u=0$ на границе области,

т.е. однородная краевая задача

$\Delta u=0$ в заданной области;

$$u(Q)=\iint\limits_{S}\left(G(P,Q)\cdot\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}-u(P)\cdot\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_P}\right)\cdot dS_P-$$
$$-\iiint\limits_{\Omega}G(P,Q)\cdot\Delta u(P)\cdot dxdydz\,,$$

где $\quad G(P,Q)=\dfrac{1}{4\pi r_{PQ}}+v(P),\qquad v(P)$ – произвольная гармоническая в Ω функция, а $\dfrac{\partial}{\partial n_P}$ означает производную по внешней нормали в точке $P\in S$.

Указание. Примените третью (основную) формулу Грина для функции u и вторую формулу Грина для функций u и v.

2. Пусть D – ограниченная область в R^2, границей которой является кусочно гладкая замкнутая кривая γ; Q – точка с координатами $\{x_0\,,\,y_0\}$ внутри области D, P – точка замкнутой области $\overline{D}$ с координатами $\{x,\,y\}$; r_{PQ} – расстояние между этими точками. Докажите, что значение $u(Q)$ произвольной дважды непрерывно дифференцируемой функции $u(x,\,y)$ представимо в виде

$$u(Q)=\int\limits_{\gamma}\left(G(P,Q)\cdot\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}-u(P)\cdot\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_P}\right)\cdot d\gamma_P-$$
$$-\iint\limits_{D}G(P,Q)\cdot\Delta u(P)\cdot dxdy\,,$$

где $\quad G(P,Q)=\dfrac{1}{2\pi}\ln\left(\dfrac{1}{r_{PQ}}\right)+v(P),\quad v(P)$ – произвольная гармоническая в D функция, а $\dfrac{\partial}{\partial n_P}$ означает производную по внешней нормали в точке $P\in\gamma$.

3. Получите в точке $Q\in\Omega\subset R^3$ (в точке $Q\in D\subset R^2$) интегральное представление решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\begin{cases}\Delta u(P)=-F(P)\ \ в\ \ \Omega;\\ u\big|_{P\in S}=f(P);\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}\Delta u(P)=-F(P)\ \ в\ \ D;\\ u\big|_{P\in\gamma}=f(P),\end{cases}$$

где заданная функция F непрерывна в $\overline{\Omega}$ (соответственно – в $\overline{D}$), а заданная функция f непрерывна на границе области.

Указание. Выберите функцию $v(P)$ из условий

$$\begin{cases}\Delta v(P)=0\ \ в\ \ \Omega;\\ v\big|_{P\in S}=-\dfrac{1}{4\pi r_{PQ}};\end{cases}\qquad либо\qquad \begin{cases}\Delta v(P)=0\ \ в\ \ D;\\ v\big|_{P\in\gamma}=-\dfrac{1}{2\pi}\ln\left(\dfrac{1}{r_{PQ}}\right).\end{cases}$$

Это значит, что $v=v(P,Q)$, где Q – параметр, и определенная в задачах 1, 2 функция G удовлетворяет условию $G(P,Q)=0$, когда точка P принадлежит границе области.

Чем определяется сложность построения решения задачи Дирихле: видом заданных функций F и f или сложностью геометрической формы области?

Замечание. Полученная функция G называется функцией Грина задачи Дирихле. Возможность ввести функцию Грина в задаче Дирихле объясняется тем, что $\lambda=0$ не является собственным значением задачи

$$\Delta u=\lambda\cdot u\quad в\ заданной\ области;$$
$$u=0\quad на\ границе\ области,$$

т.е. однородная краевая задача

$$\Delta u=0\quad в\ заданной\ области;$$

$u = 0$ на границе области

имеет только тривиальное решение.

4. Дайте физическую интерпретацию функции Грина задачи Дирихле и опишите метод её построения.

Решение. Функция Грина задачи Дирихле $G(P,Q)$ допускает различные физические интерпретации. Мы примем электростатическую интерпретацию. Пусть поверхность S, ограничивающая область $\Omega \subset R^3$ сделана из идеального проводника и заземлена. Поместим в точке Q внутри Ω электрический заряд величины $\frac{1}{4\pi}$. Этот заряд индуцирует распределение зарядов на S. Поэтому потенциал электростатического поля в области Ω равен сумме потенциала $\frac{1}{4\pi r_{PQ}}$ поля точечного заряда и потенциала $v(P,Q)$ поля индуцированных зарядов. Эта сумма и равна $G(P,Q)$.

Если мысленно убрать индуцированные на S заряды, то для сохранения прежнего потенциала G в области Ω придется разместить некоторые точечные заряды вне поверхности S, которые в Ω создадут поле с потенциалом v. Эти заряды являются зеркальными относительно S изображениями заряда, помещенного в точку Q. Такой прием позволяет для областей простой геометрической формы найти $v(P,Q)$ и построить функцию Грина.

Вспомните, какова физическая интерпретация фундаментального решения уравнения Лапласа на плоскости (см. задачу 16 темы 6) и опишите метод зеркальных изображений для построения функции Грина задачи Дирихле в $D \subset R^2$.

5. Методом зеркальных изображений найдите функцию Грина задачи Дирихле в полупространстве: $\Omega = \{y > 0\} \subset R^3$. Запишите интегральное представление решения этой задачи для уравнения Лапласа.

Решение.

$$\begin{cases} \Delta u(x,y,z) = 0\,,\ -\infty < x < +\infty\,,\ y > 0\,,\ -\infty < z < +\infty\,; \\ u\big|_{y=0} = f(x,z)\,; \\ \textit{и равномерно стремится к } 0 \\ \textit{при } \sqrt{x^2+y^2+z^2} \to \infty\,. \end{cases}$$

Поскольку Ω – неограниченная область, то от функции Грина надо потребовать равномерного её стремления к нулю при $P \to \infty$.

Заряд величины $\frac{1}{4\pi}$, помещенный в точке $Q = \{x_0\,, y_0\,, z_0\}$, создал бы в точке $P = \{x\,, y\,, z\} \in \Omega$ потенциал $\frac{1}{4\pi r_{PQ}}$, если бы не было границы $S = \{y = 0\}$, на которой индуцируются заряды. Заменим эти индуцированные на S заряды на зеркальное изображение заряда, помещенного в точке Q; для этого надо в точке $T = \{x_0\,, -y_0\,, z_0\}$ поместить заряд величины $-\frac{1}{4\pi}$.

$$G(P,Q) = \frac{1}{4\pi r_{PQ}} - \frac{1}{4\pi r_{PT}}$$. Для получения решения $u(Q)$ найдем

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n_P}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial G}{\partial(-y)}\right|_{y=0} = \frac{-y_0}{2\pi \cdot \left((x-x_0)^2 + y_0^2 + (z-z_0)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Получили интегральное представление решения: