Планы лекций по Методам Оптимизации,
(3 курс, 2 поток, 5 и 6 семестр, 2022/23 уч. год)
лектор доцент Артемьева Л.А., каф. ОУ

Лекция 1 01 сентября 2022

1. Общая информация о курсе

Курс годовой, лекции – 1 раз в неделю, в осеннем семестре семинаров нет, весной семинары – 1 раз в неделю в академических группах.

Форма отчетности – экзамен в июне.
Итоговая экзаменационная оценка формируется с учётом персональных результатов студента:

- оценки $\boldsymbol{S}$ за **работу на семинарах** (упражнениях) в весеннем семестре,
- оценки $\boldsymbol{Y}$ за **устный экзамен** по программе курса (проводится в форме экспресс-опроса по программе курса без проверки знания доказательств; проверяется знание основных определений, постановок задач, формулировок теорем и другого программного материала),
- оценки $\boldsymbol{P}$ за **письменные работы повышенной сложности**, проводимые лектором (наличие этой оценки обязательно только для тех студентов, которые претендуют на итоговую оценку **отлично**).

С подробностями «правил игры» можно ознакомиться по ссылке
`https://classroom.google.com/c/NTQ1MDY4OTU5Mzg5?cjc=cuukui5`

Там же размещены (и будут размещаться) и другие учебные и информационные материалы:

- программа курса в форме списка вопросов экзаменационных билетов со списком рекомендованной литературы,
- материалы лекций,
- образцы письменных заданий различного уровня сложности, критерии их оценок и др.

2. Цели курса и связь с другими дисциплинами

С задачами оптимизации вы встречались и не раз: в школе, на первом курсе (МА), на втором курсе (ДУ) вы изучали основы вариационного исчисления, сейчас вам читается курс ОУ, в этом году начинается чтение курса «Методы машинного обучения», так что класс задач вам более-менее знаком. Целями данного курса является формирование у вас целостного взгляда на оптимизационные задачи и адекватного представления об основной проблематике, связанной как с корректной постановкой таких задач, так и с методами их теоретического исследования и практического решения.

3. О структуре курса

Разделы:

I. Теоремы существования (Вейерштрасса)

II. Элементы дифференциального исчисления в нормированных пространствах

III. Элементы выпуклого анализа

IV. Итерационные методы минимизации

V. Методы «снятия» ограничений (метод штрафов, правило множителей Лагранжа)

VI. Линейное программирование

VII. Оптимальное управление

VIII. Регуляризация

4. Постановка задачи. Базовые обозначения

$$J(u) \to \inf, \quad u \in U \subset M. \tag{1}$$

Здесь M – некоторое пространство, U – заданное (допустимое) подмножество, $J: \; M \to R^1$ – заданная функция с числовыми значениями. Задачи *максимизации* отдельно не рассматриваются, так как они сводятся к задачам *минимизации* заменой исходной функции на функцию со значениями противоположного знака.

Что надо найти? *Нижнюю грань* функции

$$J_* = \inf_{u \in U} J(u),$$

множество *всех* оптимальных решений

$$U_* = \operatorname*{Arg\,min}_{u \in U} J(u) = \left\{ v \in U \;\middle|\; J(v) = J_* \right\}$$

или *один* из оптимальных элементов

$$u_* = \operatorname*{arg\,min}_{u \in U} J(u) \in U_*.$$

I. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ

Напомним формулировку классической конечномерной теоремы Вейерштрасса.

Теорема Вейерштрасса (классическая). *Пусть в задаче* (1) *пространство* M *конечномерно:* $M = R^n$, *допустимое множество* $U \subset R^n$ *замкнуто и ограничено, а функция* $J(u)$ *непрерывна на множестве* U. *Тогда нижняя грань конечна:* $J_* > -\infty$ *и достигается, т. е.* $U_* \neq \varnothing$.

Заметим, что при тех же самых условиях в задаче (1) достигается не только *минимум*, но и *максимум*. Заметим также, что существенно ослабить условия этой теоремы нельзя. На эту тему предлагается

Упражнение 1. *Приведите примеры непрерывных функций, не достигающих своих нижних граней на ограниченном, но незамкнутом множестве; замкнутом, но неограниченном множестве.*

Перейдём к рассмотрению некоторых обобщений классической теоремы Вейерштрасса на случай пространств бесконечной размерности. Начнём с метрических пространств.

Определение 1. *Пусть* M *— некоторое множество. Функция* $\rho : M \times M \to R^1$, *определённая на декартовом произведении* $M \times M$, *называется* ***метрикой*** *или* ***расстоянием***, *если она обладает свойствами*

- $\rho(u, v) = \rho(v, u) \quad \forall\, u, v \in M$ *(симметрия),*
- $\rho(u, v) \leqslant \rho(u, w) + \rho(w, v) \quad \forall\, u, v, w \in M$ *(нер-во треугольника),*
- $\rho(u, v) \geqslant 0 \quad \forall\, u, v \in M, \quad \rho(u, v) = 0 \iff u = v.$

Множество M, *наделённое метрикой* ρ, *называется* ***метрическим пространством***.

Определение 2. *Последовательность элементов (точек)* $u_n \in M$, $n = 1, 2, \ldots,$ *метрического пространства* M *называется* ***сходящейся*** *(*ρ*-сходящейся) к элементу* $u_0 \in M$, *если сходятся к нулю расстояния между* u_n *и* u_0 :

$$\lim_{n \to \infty} \rho(u_n, u_0) = 0.$$

Последовательность u_n *называется* ***фундаментальной***, *если*

$$\lim_{m, n \to \infty} \rho(u_n, u_m) = 0.$$

Замечание 1. *В конечномерном пространстве $M = R^n$ свойства сходимости и фундаментальности эквивалентны (по критерию Коши). Если $\dim M = \infty$, то из сходимости следует фундаментальность, а фундаментальная последовательность не обязательно сходится к некоторому элементу из M.*

Определение 3. *Метрическое пространство M, в котором любая фундаментальная последовательность сходится к некоторому элементу из M, называется* ***полным****.*

Понятно, что n-мерное пространство R^n с евклидовой метрикой

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ y = (y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

является полным.

Упражнение 2. *Докажите, что пространство $C[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций* ***является полным*** *относительно метрики (равномерной сходимости)*

$$\rho(f, g) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t) - g(t)|$$

и ***не является полным*** *относительно интегральной метрики (сходимости в среднем)*

$$\rho(f, g) = \sqrt{\int_a^b |f(t) - g(t)|^2 \, dt}\,.$$

Определение 4. *Пусть M — метрическое пространство, $J(u) : M \to R^1$ — некоторая определённая на этом пространстве функция и $u_0 \in M$ — некоторая фиксированная точка. Пусть u_n —* ***произвольная*** *последовательность, ρ-сходящаяся к точке u_0 : $\rho(u_n, u_0) \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда в зависимости от поведения значений $J(u_n)$ функция $J(u)$ называется*

- *(секвенциально)* ***непрерывной*** *в точке u_0, если существует*

$$\lim_{n \to \infty} J(u_n) = J(u_0),$$

- *(секвенциально)* ***полунепрерывной снизу*** *(п/н снизу) в точке u_0, если*

$$\varliminf_{n \to \infty} J(u_n) \geqslant J(u_0),$$

- *(секвенциально)* ***полунепрерывной сверху*** *(п/н сверху) в точке u_0, если*

$$\varlimsup_{n \to \infty} J(u_n) \leqslant J(u_0).$$

Определение 5. *Подмножество $U \subset M$ метрического пространства M называется*

- ***замкнутым**, если из условий*

$$u_n \in U,\ n = 1, 2, \dots, \quad u \quad \lim_{n\to\infty} \rho(u_n, u_0) = 0$$

следует, что $u_0 \in U$,

- ***ограниченным**, если существуют $u_0 \in M$ и $R > 0$, такие, что*

$$\rho(u, u_0) \leqslant R \quad \forall\, u \in U,$$

- *(секвенциально) **компактным**, если из **любой** последовательности элементов $u_n \in U$ можно выделить подпоследовательность $\{u_{n_m}\} \subset \{u_n\}$, ρ-сходящуюся к некоторому элементу $u_0 \in U$: $\rho(u_{n_m}, u_0) \to 0$ при $m \to \infty$.*

Замечание 2. *В конечномерном пространстве R^n множество U компактно тогда и только тогда когда оно замкнуто и ограничено. В бесконечномерном метрическом пространстве из компактности следует замкнутость и ограниченность, а обратного следствия, вообще говоря, нет.*

Упражнение 3. *Докажите, что единичный шар*

$$U = \left\{ f(t) \in C[a,b] \;\middle|\; \max_{t\in[a,b]} |f(t)| \leqslant 1 \right\}$$

в пространстве $C[a,b]$ является замкнутым ограниченным, но некомпактным множеством.

Чтобы разгрузить формулировку главного результата, дадим ещё одно

Определение 6. *Последовательность точек $u_n \in M$ называется **минимизирующей** для оптимизационной задачи (1), если*

$$u_n \in U \ \ \forall\, n = 1, 2, \dots, \quad u \quad \lim_{n\to\infty} J(u_n) = J_*.$$

Теорема 1. (метрический вариант теоремы Вейерштрасса) *Пусть M — метрическое пространство, U — компактное множество из M, а функция $J(u)$ п/н снизу на множестве U. Тогда в задаче (1) $J_* > -\infty$, $U_* \neq \varnothing$ и любая минимизирующая последовательность является ρ-сходящейся ко множеству оптимальных решений U_*.*

Доказательство. Минимизирующие последовательности в задаче (1) существуют по определению $\inf$. Пусть u_n — любая из них. По условию множество U компактно, поэтому из u_n можно выделить подпоследовательность $u_{n_m} \subset u_n$, ρ-сходящуюся к некоторому элементу $u_0 \in U$. Поскольку функция $J(u)$ п/н снизу в точке u_0, то справедливы соотношения

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n) = J_* \leqslant J(u_0) \leqslant \varliminf_{m\to\infty} J(u_{n_m}) = \lim_{n\to\infty} J(u_n) = J_*,$$

следовательно, $J(u_0) = J_*$ и, тем самым, установлено, что $J_* > -\infty$ и $U_* \neq \varnothing$.

Под *ρ-сходимостью ко множеству* U_* мы понимаем то, что *все* ρ-предельные точки *всех* минимизирующих последовательностей принадлежат множеству U_*. Для доказательства этого достаточно повторить приведённые выше рассуждения. Можно также показать, что такое понимание ρ-сходимости ко множеству равносильно её интерпретации как сходимости вида

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{u_*\in U_*} \rho(u_n, u_*) = 0.$$

Теорема 1 доказана. ▼

Замечание 3. *В случае, когда в задаче минимизации* (1) *выполняются все утверждения теоремы 1, эту задачу принято называть **корректно** (ρ-корректно) **поставленной** в метрическом пространстве M. Наиболее стеснительным требованием в теореме 1 считают требование компактности множества U.*

Лекция 2 (08 сентября 2022) **Теоремы Вейерштрасса** (продолжение)

Как правило, мы будем иметь дело с метрическими пространствами, над элементами которых определены линейные операции, а метрика ρ порождается нормой.

Определение 7. *Пусть L — некоторое линейное пространство. Функция $\|\cdot\| : L \to R^1$, определённая на L, называется **нормой**, если она обладает свойствами*

- $\|\lambda\, x\| = |\lambda|\, \|x\| \quad \forall\, \lambda \in R^1\, \forall\, x \in L$ *(положительная однородность),*
- $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \quad \forall\, x, y \in L$ *(нер-во треугольника),*
- $\|x\| \geqslant 0 \quad \forall\, x \in L, \quad \|x\| = 0 \iff x = 0.$

*Линейное пространство L, наделённое нормой $\|\cdot\|$, называется **нормированным пространством**. Нормированное пространство, полное относительно метрики $\rho(x,y) = \|x-y\|$, называется **ба́наховым**.*

Приведём пример, показывающий, что в банаховом пространстве непрерывная функция может не достигать свой нижней грани на замкнутом и ограниченном множестве.

Пример 1. *Задача минимизации:*

$$J(u) = \int_{-1}^{0} u(t)\,dt - \int_{0}^{1} u(t)\,dt \to \inf, \quad u \in U \subset C[-1,1], \quad U = \{\|u\|_C \leqslant 1\}.$$

Здесь $C[-1,1]$ — банахово пространство непрерывных на $[-1,1]$ функций (см. упражнение 2), $J(u)$ — непрерывная (и к тому же линейная) на $C[-1,1]$ функция, U — единичный шар в $C[-1,1]$, являющийся замкнутым, ограниченным, но некомпактным в $C[-1,1]$ множеством (см. упражнение 3), нижняя грань $J_* = -2$ и $U_* = \varnothing$. Непрерывность (на самом деле, даже липшиц-непрерывность) функции $J(u)$ следует из оценки

$$|J(u) - J(v)| = |J(u-v)| \leqslant \int_{-1}^{1} |u(t) - v(t)|\,dt \leqslant 2\,\|u-v\| \quad \forall\, u, v \in C[-1,1],$$

а наименьшее значение функции $J_* = -2$ достигается на разрывной функции $u_*(t) = \operatorname{sign} t \notin C[-1,1]$. Заменой функции $J(u)$ на

$$j(u) = \frac{1}{J_* - J(u)} = \frac{1}{-2 - J(u)}$$

получим пример, в котором $j_* = -\infty$ и $U_* = \varnothing$.

Следующий пример показывает, что требование компактности не является необходимым.

Пример 2. *Задача минимизации:*

$$J(u) = \int_{-1}^{1} u(t)\,dt \to \inf, \quad u \in U \subset C[-1,1], \quad U = \{\|u\|_C \leqslant 1\}.$$

Здесь также $J_* = -2$, *но теперь* $u_*(t) \equiv -1 \in U_* \neq \varnothing$.

Мы, в основном, будем иметь дело с линейными пространствами, наделёнными не только нормой, но и скалярными произведениями.

Определение 8. *Пусть* L *— некоторое линейное пространство. Функция* $\langle \cdot, \cdot \rangle : L \times L \to R^1$, *определённая на декартовом произведении* $L \times L$, *называется* ***скалярным произведением***, *если она обладает свойствами*

1) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \quad \forall\, x, y \in L$ *(симметрия),*

2) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle \quad \forall\, \alpha \in R^1\ \forall\, x, y \in L$ *(однород. по первой переменной),*

3) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle \quad \forall\, x, y, z \in L$ *(аддит. по первой переменной),*

4) $\langle x, x\rangle \geqslant 0 \quad \forall\, x \in L, \quad \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0.$

Линейное пространство L, *наделённое скалярным произведением* $\langle \cdot, \cdot \rangle$, *называется* ***евклидовым***. *Евклидово пространство, полное относительно метрики* $\rho(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$, *называется* ***гильбертовым***.

Замечание 4. *Свойства 2) и 3) означают, что скалярное произведение линейно по первой переменной. С учётом 1) оно линейно и по второй переменной, т. е. является симметричной билинейной функцией (формой), обладающей дополнительным свойством 4).*

В данном определении гильбертова пространства не упоминается его размерность. Это значит, что все конечномерные линейные пространства мы будем относить к категории гильбертовых, поскольку в них всегда можно ввести скалярное произведение, например, по хорошо известному нам правилу

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i\,, \tag{2}$$

где x_i, y_i — координаты векторов x и y в некотором базисе. Типичным примером беконечномерного евклидова пространства, не являющегося гильбертовым (т. е. полным), может служить пространство непрерывных функций $C[a,b]$ со скалярным произведением (см. упражнение 2)

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt\,. \tag{3}$$

Одним из важных для данного курса эталонных примеров бесконечномерного гильбертова пространства является пространство Лебега $L^2(a,b)$, которое может быть получено пополнением пространства $C[a,b]$ пределами последовательностей непрерывных на $[a,b]$ функций, фундаментальных относительно интегральной нормы

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,dt},$$

порождённой скалярным произведением (3), в котором интеграл понимается в смысле Лебега. В курсе ФА обычно дается другое эквивалентное определение пространства $L^2(a,b)$. Так или иначе, это пространство состоит из функций $f(t)$, измеримых по Лебегу на (a,b) и интегрируемых по Лебегу на (a,b) вместе со своими квадратами $f^2(t)$.

Другим эталонным примером бесконечномерного гильбертова пространства является пространство l^2, состоящее из числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$, таких, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < +\infty.$$

Скалярное произведение в пространстве l^2 вводится по правилу

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\, y_i\,,$$

подобному конечномерному скалярному произведению (2).

Замечание 5. *Любое евклидово пространство является нормированным:*

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}\,,$$

а любое нормированние пространство является метрическим:

$$\rho(u,v) = \|u - v\|\,.$$

Обсудим кратко свойство компактности множества. Разумеется, в любом (бесконечномерном) нормированном пространстве X компактными будут любые замкнутые ограниченные множества, принадлежащие конечномерным подпространствам этого пространства X. В упражнении 3 в *конкретном* бесконечномерном банаховом пространстве $X = C[a,b]$ указано замкнутое и ограниченное множество, которое не является компатктным. В следующем примере речь идёт о *произвольном* бесконечномерном гильбертовом пространстве.

Пример 3. *В любом бесконечномерном евклидовом пространстве замкнутый единичный шар $U = \{\|u\| \leqslant 1\}$ не является компактным множеством. В качестве последовательности $u_n \in U$, из которой нельзя выделить ни одной сходящейся подпоследовательности, можно взять произвольную ортонормированную систему (ОНС) элементов*

$$e_n \in U: \quad \langle e_n, e_m \rangle = 0 \; \forall \, n \neq m, \quad \langle e_n, e_n \rangle = \|e_n\|^2 = 1 \;\; \forall \, n = 1, 2, \ldots$$

Дело в том, что никакая подпоследовательность элементов такой ОНС не может сходиться из-за отсутствия у неё свойства фундаментальности:

$$\|e_n - e_m\|^2 = \langle e_n, e_n \rangle - 2\langle e_n, e_m \rangle + \langle e_m, e_m \rangle \overset{n \neq m}{=} 2 \not\to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to \infty.$$

В следующих упражнениях представлены примеры *бесконечномерных* компактных подмножеств.

Упражнение 4. *Докажите, что в банаховом пространстве $C[a,b]$ множество U функций, равномерно ограниченных на $[a,b]$ и удовлетворяющих на $[a,b]$ условию Липшица с одной и той же константой, является компактным:*

$$U = \left\{ f(t) \in C[a,b] \;\middle|\; \|f\|_{C[a,b]} \leqslant R, \; |f(t) - f(s)| \leqslant L|t - s| \; \forall t, s \in [a,b] \right\}.$$

Упражнение 5. *Докажите, что так называемый «гильбертов кирпич»*

$$U = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in l^2 \;\middle|\; |x_n| \leqslant 2^{-n}, \; n = 1, 2, \ldots \right\}$$

является компактным множеством в гильбертовом пространстве l^2.

В формулировке следующей обобщённой теоремы Вейерштрасса мы ослабим требование ко множеству и усилим требование к функции. Для этого нам понадобится понятие *слабой* сходимости.

Определение 9. *Пусть H — гильбертово пространство. Последовательность u_n элементов из H называется* ***слабо сходящейся*** *к точке $u_0 \in H$, если для любого фиксированного $h \in H$*

$$\langle u_n, h \rangle \to \langle u_0, h \rangle \quad \text{при} \quad n \to \infty \, .$$

Обратим внимание на то, что в конечномерных пространствах разницы между сильной и слабой сходимостью нет. В бесконеномерных пространствах из сильной сходимости следует слабая сходимость:

$$|\langle u_n, h \rangle - \langle u_0, h \rangle| = |\langle u_n - u_0, h \rangle| \overset{\text{К-Б}}{\leqslant} \|u_n - u_0\| \, \|h\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty \, .$$

Примером последовательности, сходящейся слабо, но не сильно, служит любая бесконечная ОНС, состоящая из попарно ортогональных элементов e_n единичной длины. Покажем, что она *слабо* в H сходится к нулю. Фиксируем произвольный элемент $h \in H$ и запишем для него неравенство Бесселя (МА, 2 курс):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle h, e_n \rangle^2 \leqslant \|h\|^2 .$$

Из сходимости числового ряда следует, что его общий член стремится к нулю, значит,

$$\langle h, e_n \rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 = \langle h, 0 \rangle .$$

При этом сильная сходимость ОНС к нулю, разумеется, отсутствует:

$$\|e_n - 0\| = \|e_n\| = 1 \not\to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty .$$

Определение 10. *Пусть H — гильбертово пространство, $J(u) : H \to R^1$ – некоторая определённая на этом пространстве функция и $u_0 \in H$ — некоторая фиксированная точка. Пусть u_n —* ***произвольная*** *последовательность, слабо в H сходящаяся к точке u_0. Тогда в зависимости от поведения значений $J(u_n)$ функция $J(u)$ называется*

- ***слабо непрерывной*** *в точке u_0, если существует*

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n) = J(u_0),$$

- ***слабо полунепрерывной снизу*** *(сл п/н сн) в точке u_0, если*

$$\varliminf_{n\to\infty} J(u_n) \geqslant J(u_0),$$

- ***слабо полунепрерывной сверху*** *(сл п/н св) в точке u_0, если*

$$\varlimsup_{n\to\infty} J(u_n) \leqslant J(u_0).$$

Определение 11. *Подмножество $U \subset H$ гильбертова пространства H называется*

- ***слабо замкнутым**, если из условий*

$$u_n \in U,\ n = 1, 2, \dots, \quad \text{и} \quad u_n \xrightarrow{\text{слабо}} u_0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

следует, что $u_0 \in U$,

- ***слабо компактным**, если из **любой** последовательности элементов $u_n \in U$ можно выделить подпоследовательность $\{u_{n_m}\} \subset \{u_n\}$, слабо в H сходящуюся при $m \to \infty$ к некоторому элементу $u_0 \in U$.*

Заметим, что в конечномерных пространствах нет разницы между слабой замкнутостью и замкнутостью, между слабой компактностью и компактностью. В бесконечномерных пространствах из компактности следует слабая компактность, но не наоборот; из слабой закнутости следует замкнутость, но не наоборот; из слабой непрерывности следует непрерывность, но не наоборот. Соответствующими *контрпримерами* в *бесконечномерном* гильбертовом пространстве могут служить:

- единичный шар $U = \{\|u\| \leqslant 1\}$, который компактен слабо, но не сильно,
- единичная сфера $U = \{\|u\| = 1\}$, которая замкнута сильно, но не слабо,
- функция $J(u) = \|u\|$, которая непрерывна в точке $u_0 = 0$ сильно, но не слабо.

Сформулируем так называемый «слабый» вариант теоремы Вейерштрасса. Её предлагается доказать самостоятельно в качестве упражнения по схеме, аналогичной «метрической» теореме 1.

Теорема 2. (слабый вариант теоремы Вейерштрасса) *Пусть H – гильбертово пространство, U – слабо компактное множество из H, а функция $J(u)$ слабо п/н снизу на множестве U. Тогда в задаче (1) $J_* > -\infty$, $U_* \neq \varnothing$ и произвольная слабая предельная точка любой минимизирующей последовательности принадлежит множеству оптимальных решений U_*.*

Замечание 6. *В случае, когда задача минимизации (1) обладает всеми перечисленными в утверждения теоремы 2 свойствами, её называют **слабо корректно поставленной** в гильбертовом пространстве H.*

Приведем без доказательства достаточные условия слабой компактности множества и слабой п/н снизу функции в гильбертовом пространстве. На экзамене требуется знание этих условий.

Утверждение. *Пусть H — гильбертово пространство. Тогда*

- *любое выпуклое замкнутое ограниченное множество $U \subset H$ является слабо компактным,*
- *любая функция $J(u)$, выпуклая и п/н снизу на выпуклом множестве $U \subset H$, является слабо п/н снизу на U.*

Приведём определения выпуклых множеств и функций.

Определение 12. *Пусть L — линейное пространство.*

- *Множество $U \subset L$ называется* ***выпуклым****, если*

$$\forall\, u,\, v \in U \quad \forall\, \alpha \in [0, 1] \quad \alpha u + (1 - \alpha) v \in U.$$

- *Пусть $U \subset L$ — выпуклое множество. Функция $J(u) : U \to R^1$ называется* ***выпуклой*** *на U, если*

$$\forall\, u,\, v \in U \quad \forall\, \alpha \in [0, 1] \quad J\big(\alpha u + (1 - \alpha) v\big) \leqslant \alpha J(u) + (1 - \alpha) J(v).$$

Участвующие в этих определениях линейные комбинации вида $\alpha u + (1 - \alpha) v$ со значниями $\alpha \in [0, 1]$ называют *выпуклыми линейными комбинациями.*