Лекция 3 (15 сентября 2022)
Теоремы Вейерштрасса (продолжение)

Приведём несколько типичных примеров *слабо п/н снизу* функций и *слабо компактных* множеств в гильбертовых пространствах H, $\dim H \leqslant \infty$.

1. *Линейный* функционал $J(u) = \langle c, u \rangle$, в котором $c \in H$ — некоторый фиксированный элемент из H, является *слабо непрерывным* на всём пространстве. Это простое следствие из определения слабой сходимости последовательности.

2. *Квадратичный* функционал $J(u) = \|Au - f\|_F^2$, в котором фиксированы *линейный ограниченный (непрерывный)* оператор $A : H \to F$, действующий в гильбертовых пространствах H и F, и элемент $f \in F$. Напомним, что линейный оператор $A : H \to F$ называется ***ограниченным (непрерывным)***, если его норма конечна:

$$\|A\| = \sup_{u \in H,\, u \neq 0} \frac{\|Au\|_F}{\|u\|_H} < +\infty\,. \tag{4}$$

В дальнейшем нам часто придётся иметь дело с линейными ограниченными операторами, поэтому зарезервируем для этого класса специальное обозначение: $L(H \to F)$. Убедимся в том, что квадратичная функция *непрерывна*. Фиксируем произвольную точку $u_0 \in H$ и рассмотрим любую сходящуюся к этой точке последовательность u_n, $\|u_n - u_0\|_H \to 0$. Сходимость значений $J(u_n) \to J(u_0)$ будет следовать из непрерывности оператора A и из неравенства

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\|, \tag{5}$$

являющегося следствием неравенства треугольника:

$$\Big|\|Au_n - f\|_F - \|Au_0 - f\|_F\Big| \overset{(5)}{\leqslant} \|Au_n - Au_0\|_F \overset{A\text{ лин.}}{=}$$

$$= \|A\,(u_n - u_0)\|_F \overset{A\text{ огр.}}{\leqslant} \|A\|\,\|u_n - u_0\|_H \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Теперь покажем, что квадратичная функция вида $J(u) = \|Au - f\|_F^2$ *выпукла*:

$$J(\alpha u + (1-\alpha)v) = \|A(\alpha u + (1-\alpha)v) - f\|_F^2 \overset{A\text{ лин.}}{=}$$

$$= \|\alpha(Au - f) + (1-\alpha)(Av - f)\|_F^2 \overset{\text{нер-во треуг.}}{\leqslant}$$

$$\leqslant \Big(\alpha\|Au - f\|_F + (1-\alpha)\|Av - f\|_F\Big)^2 \leqslant \big[\text{функция } y = x^2 \text{ выпукла}\big] \leqslant$$

$$\leqslant \alpha\|Au - f\|_F^2 + (1-\alpha)\|Av - f\|_F^2 = \alpha J(u) + (1-\alpha)J(v).$$

Из непрерывности и выпуклости следует *слабая п/н снизу*. Выпуклость функции одной переменной $y = x^2$ рекомендуется проверить самостоятельно по определению 12. Примером функции, слабо п/н снизу, но *не являющейся* при этом *слабо непрерывной*, может служить $J(u) = \|u\|_H^2$ в *бесконечномерном* гильбертовом пространстве H. Рекомендуется также привести пример линейного *неограниченного* оператора (в *бесконечномерном* пространстве).

3. *Невырожденный эллипсоид* в гильбертовом пространстве H описывается условиями

$$U = \Big\{ u \in H \;\Big|\; \|Au - f\|_F \leqslant R \Big\},$$

где F — гильбертово пространство, данные $f \in F$ и $R > 0$ фиксированы, $A \in L(H \to F)$ — линейный ограниченный оператор, причём такой, что существует обратный к нему оператор $A^{-1} \in L(F \to H)$, который также *ограничен* (в этом проявляется *невырожденность*). Свойства *выпуклости* и *замкнутости* такого эллипсоида предлагается проверить самостоятельно. Для доказательства его ограниченности укажем шар с центром в $u_0 = 0$, содежащий множество U. Для произвольной точки $u \in U$ имеем:

$$\|u\|_H = \|A^{-1}Au\|_H = \|A^{-1}(Au - f) + A^{-1}f\|_H \overset{\text{нер-во треуг.}}{\leqslant}$$

$$\leqslant \|A^{-1}(Au - f)\|_H + \|A^{-1}f\|_H \overset{A^{-1}\,\text{огр.}}{\leqslant}$$

$$\leqslant \|A^{-1}\|\,\|Au - f\|_F + \|A^{-1}f\|_H \overset{\text{опред. мн-ва}\,U}{\leqslant}$$

$$\leqslant \|A^{-1}\|\,R + \|A^{-1}f\|_H = R_0.$$

Значение R_0 из правой части неравенства и есть радиус искомого шара, накрывающего множество U. Таким образом, установлена *слабая компактность* рассматриваемого невырожденного эллипсоида, а наличие ограниченного обратного оператора A^{-1} позволило доказать ограниченность U. Простейшим примером невырожденного эллипсоида является шар $U = \{\|u\|_H \leqslant R\}$. Здесь мы выяснили, что он *слабо компактен*, а остутствие у шара свойства компактности было установлено ранее.

Обратим внимание на то, что в случае, когда обратный к A оператор A^{-1} не существует или существует, но неограничен, эллипсоид U может утратить свойство ограниченности, а вместе с ним и свойство слабой компактности. Примером супервырождения может служить эллипсоид с данными $A = 0,\ f = 0$, когда $U = H$. Пример, в котором обратный оператор A^{-1} существует, но неограничен, возможен только в бесконечномерном пространстве.

Рассмотрим конкретное пространство $H = L^2(0,\pi)$ и интегральный оператор $A : L^2(0,\pi) \to L^2(0,\pi)$, действующий по правилу

$$u(\cdot) \in L^2(0,\pi) \longmapsto (Au)(t) = \int_0^t u(s)\,ds, \quad t \in (0,\pi).$$

У этого оператора существует обратный, но он *определён не на всём пространстве* $L^2(0,\pi)$ и *не является ограниченным*, поскольку можно привести пример последовательности $u_n(t) = n\cos nt,\ n = 1,2,\ldots,$ для которой

$$\|u_n\|_{L^2(0,\pi)} \to +\infty, \quad Au_n = \sin nt, \quad \|Au_n\|_{L^2(0,\pi)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad n = 1,2,\ldots$$

Эллипсоид U, заданный в пространстве $L^2(0,\pi)$ с помощью такого оператора, оказался бы *неограниченным* и, следовательно, *не мог бы быть слабо компактным.*

4. *«Параллелепипед»* в пространстве Лебега $L^2(a,b)$ задаётся условиями

$$U = \Big\{ u(\cdot) \in L^2(a,b) \;\Big|\; \alpha(t) \overset{\text{п.в.}}{\leqslant} u(t) \overset{\text{п.в.}}{\leqslant} \beta(t) \Big\},$$

в которых $\alpha(\cdot)$ и $\beta(\cdot)$ — две фиксированные функции из $L^2(a,b)$, такие, что $\alpha(t) \overset{\text{п.в.}}{\leqslant} \beta(t)$, а *«п.в.»* — сокращение для *«почти всюду»* на (a,b), означающее, что соответствующие неравенства выполняются во всех точках $t \in (a,b)$ за исключением, быть может, подмножества точек, мера Лебега которого равна нулю. Название *«параллелепипед»* объясняется сходством конструкций этого множества с классическим конечномерным параллелепипедом

$$\Pi = \Big\{ u = (u_1,u_2,\ldots,u_n) \in R^n \;\Big|\; \alpha_i \leqslant u_i \leqslant \beta_i,\ i = 1,2,\ldots,n \Big\},$$

в котором аналогом непрерывно меняющегося параметра t является номер i координаты u_i вектора u. Свойства *выпуклости* и *ограниченности* «параллелепипеда» U предлагается проверить самостоятельно. Для доказательства его *замкнутости* воспользуемся следующим фактом [3, гл.VII, §2, п.5]: *из последовательности функций $u_n(t) \in L^2(a,b)$, сходящейся в $L^2(a,b)$ по норме, т.е. в среднем, можно выделить подпоследовательность $\{u_{n_m}(t)\} \subset \{u_n(t)\}$, сходящуюся к тому же самому пределу $u_0(t)$ почти всюду на (a,b)* при $m \to \infty$. С помощью этого свойства мы сможем, переходя к поточечному пределу при $m \to \infty$, убедиться в том, что предельная функция $u_0(t)$ почти всюду на (a,b) удовлетворяет двусторонним ограничениям из определения «параллелепипеда» U и, тем самым, установить, что «параллелепипед» в $L^2(a,b)$ является *слабо компактным* множеством.

Упражнение 6. *Докажите, что «параллелепипед» с постоянными границами* $\alpha(t) \equiv \alpha < \beta \equiv \beta(t)$ *не является компактным множеством в пространстве Лебега* $L^2(a,b)$.

II. ЭЛЕМЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Дифференциальное исчисление является фундаментальной составляющей математического аппарата теории экстремума. Дадим определение производной, являющееся естественным обобщением уже известных вам определений дифференцируемости на случай пространств бесконечной размерности.

Определение 13. *Пусть $F : X \to Y$ — некоторое отображение, действующее в нормированных пространствах X и Y. Это отображение называется* ***дифференцируемым по Фреше́*** *в точке $x_0 \in X$, если существует линейный ограниченный оператор $A \in L(X \to Y)$, такой, что*

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + Ah + o(\|h\|_X) \quad \forall\, h \in X,$$

$$\text{причём} \quad \frac{\|o(\|h\|_X)\|_Y}{\|h\|_X} \to 0 \quad \text{при} \quad \|h\|_X \to 0. \qquad (6)$$

При этом оператор A называют ***производной Фреше́*** *отображения F в точке x_0 и используют обозначение $A = F'(x_0)$.*

Производные более высокого порядка определяются рекуррентно и их структура быстро усложняется с ростом порядка. Так, например, при определении второй производной функции $F : X \to Y$ мы должны будем дифференцировать отображение

$$x \in X \longmapsto F'(x) \in L(X \to Y)$$

и вторая производная по определению окажется элементом пространства

$$F''(x) \in L(X \to L(X \to Y))\,.$$

В рамках данного курса нам не придётся иметь дело с производными выше второго порядка. К тому же, в роли F чаще всего будут выступать функционалы $J : H \to R^1$, действующие в гильбертовом пространстве, когда $X = H$ и $Y = R^1$. Укажем на те упрощения в структуре производных, которые при этом возможны. По определению $J'(u) \in L(H \to R^1)$. Напомним, что в случае нормированного пространства X пространство $L(X \to R^1)$ линейных ограниченных функционалов над X называют *сопряжённым* к X пространством и обозначают его через X^*. В пространстве $X^* = L(X \to R^1)$ вводится обычная для пространства линейных ограниченных операторов норма

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{x \in X,\, x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_X}\,, \qquad f \in X^*. \qquad (7)$$

Таким образом, первая и вторая производные дифференцируемого функционала $J : X \to R^1$ будут элементами пространств

$$J'(u) \in X^*, \qquad J''(u) \in L(X \to X^*).$$

В случае, когда пространство $X = H$ гильбертово, есть возможность отождествления пространства H с сопряжённым к нему пространством H^* по *теореме Рисса* [3, гл.IV, §2]. В этой теореме утверждается, что существует линейное взаимно однозначное отображение (оператор Рисса) $\mathcal{R}_H : H^* \to H$, позволяющее описывать действие функционалов через скалярные произведения:

$$\forall\, f \in H^* \quad \exists!\, \mathcal{R}_H f \in H : \quad f(h) = \langle \mathcal{R}_H f, h \rangle_H \quad \forall\, h \in H, \tag{8}$$

а также сохраняющее нормы и позволяющее наделить сопряжённое пространство H^* скалярным произведением:

$$\|\mathcal{R}_H f\|_H = \|f\|_{H^*}, \quad \langle f, g \rangle_{H^*} = \langle \mathcal{R}_H f, \mathcal{R}_H g \rangle_H \quad \forall\, f, g \in H^*. \tag{9}$$

Заметим, что *возможность* отождествления $H^* \simeq H$ отнюдь *не означает обязательности* использования этой возможности, но в рамках данного курса нам будет удобно пользоваться возможностью отождествления по Риссу $H^* = H$, а тогда

$$J'(u) \in H, \qquad J''(u) \in L(H \to H). \tag{10}$$

С учётом принятого отождествления $H^* = H$ приведём два соотношения, первое из которых *эквивалентно* определению (6) дифференцируемости функционала $J : H \to R^1$:

$$J(u_0 + h) = J(u_0) + \langle J'(u_0), h \rangle_H + o(\|h\|_H),$$

а второе является *следствием* его дважды дифференцируемости:

$$J(u_0 + h) = J(u_0) + \langle J'(u_0), h \rangle_H + \frac{1}{2}\, \langle J''(u_0)h, h \rangle_H + o(\|h\|_H^2). \tag{11}$$

Любопытно, что из (11) существование второй производной не следует, причём даже для функций одной переменной. На эту тему предагается

Упражнение 7. *Приведите пример функции $f : R^1 \to R^1$, для которой в окрестности нуля при некоторых $a, b, c \in R^1$ выполняется соотношение*

$$f(x) = a + bx + \frac{1}{2}cx^2 + o(x^2),$$

но которая не является дважды дифференцируемой в точке $x = 0$.

Производная Фреше́ обладает обычными свойствами: если производная существует, то она единственна; производная суммы равна сумме производных; постоянный множитель выносится за знак производной и т. д. Сохраняется в силе и правило дифференцирования сложной функции, которое мы приведём в развёрнутой форме, поскольку им удобно пользоваться при решении задач.

Утверждение. [3, гл.X] `(производная сложной функции)` *Пусть* X, Y, Z — *нормированные пространства, в которых действуют отображения* $F : X \to Y$ *и* $G : Y \to Z$. *Пусть отбражение* F *дифференцируемо по Фреше в точке* $x_0 \in X$, *а отображение* G *дифференцируемо по Фреше в точке* $y_0 = F(x_0)$, *т. е. существуют производные* $F'(x_0) \in L(X \to Y)$ *и* $G'(F(x_0)) \in L(Y \to Z)$. *Тогда суперпозиция* $(GF)(x) = G(F(x)) : X \to Z$ *дифференцируема по Фреше в точке* x_0 *и*

$$(GF)'(x_0) = G'(F(x_0))\, F'(x_0) \in L(X \to Z). \tag{12}$$

Список литературы

[1] *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации: В 2-х кн. М., МЦНМО, 2011 (Факториал Пресс, 2002).

[2] *Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.* Курс методов оптимизации. М., Физматлит, 2005 (Наука, 1986).

[3] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1976.

[4] *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М., Физматлит, 2005 (Наука, 1979).

[5] *Nocedal J., Wright S.J.* Numerical Optimization. Springer, NY, 2006.