

Mécatronique

Optimisation du changement de fréquence

Groupe 4 : Guitar elec



Mines ParisTech

Octobre 2015

Table des matières

| | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Position du problème | 2 |
| 1.1 | États et commandes du système | 2 |
| 1.2 | Définition du problème | 3 |
| 2 | Réponse au problème | 4 |
| 2.1 | Dynamique du système | 4 |
| 2.1.1 | Rejet de la dynamique | 4 |
| 2.1.2 | Prise en compte des vitesses moyennes | 4 |
| 2.2 | Graphiquement | 5 |
| 2.3 | Mathématiquement | 5 |
| 2.4 | Conditions aux limites | 6 |

1 Position du problème

1.1 États et commandes du système

Le système guitar-elec a la possibilité de faire varier à la fois la tension et la longueur utile de la corde vibrante. Afin d'optimiser le fonctionnement du système, nous nous sommes posés la question : quel est le chemin de variation de longueur et de tension qui minimise le temps entre deux notes ?

Cette question pose un problème mal défini. Notre système possède deux commandes et trois états. Les trois états sont la longueur de la corde, sa tension et sa fréquence. Les commandes sont les deux moteurs portant sur la modification de la tension et de la longueur de la corde. Nous ne connaissons pas bien la dynamique que suivent les moteurs contrôlant la tension et la longueur. Si L^* et T^* sont les valeurs finales sur lesquelles sont asservis les moteurs, on notera, en toute généralité :

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= u(L^*, L) \\ \frac{dT}{dt} &= v(T^*, T)\end{aligned}$$

où u, v sont des fonctions vérifiant de bonnes propriétés pour que le système, initialement en (L, T) converge vers (L^*, T^*) .

Nous savons que la fréquence de la corde vibrante est donnée par la formule :

$$f = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (1)$$

Cela permet de réduire le nombre d'état de notre système à seulement deux : L et T . On constate que la tension dépend quadratiquement de la longueur à fréquence constante.

$$T = 4\mu f^2 L^2$$

Ce que l'on peut représenter par le graphique :

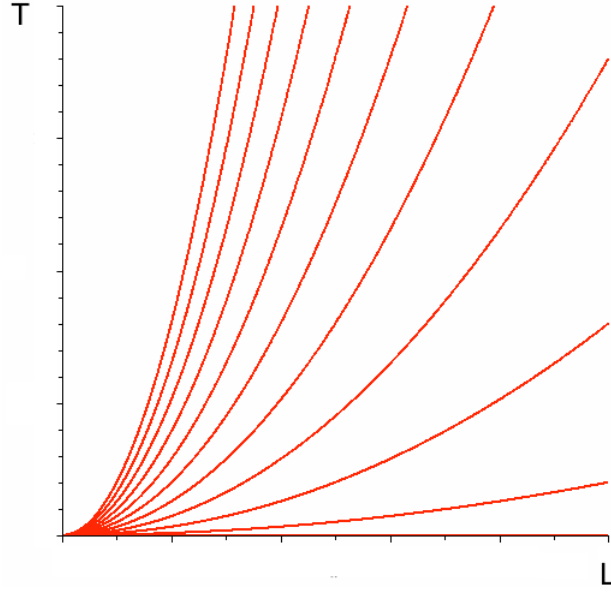


FIGURE 1 – Lignes de niveau de la fréquence dans l'espace (L, T) , unités arbitraires

1.2 Définition du problème

Par ce qui précède, on comprend que l'optimisation à réaliser est en deux étapes.

Premièrement l'asservissement en longueur et en tension est assuré par les moteurs. Le moteur pour la longueur est un servomoteur linéaire LinMot dont on peut paramétrer la vitesse maximale, l'accélération et la décélération. Le moteur pour la tension est également un servomoteur paramétrable.

Deuxièmement, l'état final (L^*, T^*) à passer en argument aux moteurs pour qu'ils réalisent l'asservissement doit être tel que le changement de fréquence est optimal. Avec les notations, *si le changement de fréquence correspond au passage de $f_1 = f(L, T)$ à f_2 , il faut trouver (L^*, T^*) minimisant la distance entre (L, T) et (L^*, T^*) sous la contrainte $f(L^*, T^*) = f_2$* . Cependant cette contrainte ne suffit pas. On veut que notre système soit **réversible**. C'est à dire que partant de $f_2 = f(L^*, T^*)$ et voulant aller en f_1 , il faut que le résultat de l'optimisation soit (L, T) . On revient sur nos pas.

On s'intéressera seulement au second problème (le premier étant de l'asservissement). Ainsi on recherche un chemin, ie une fonction F vérifiant :

$$F(f) = \begin{pmatrix} L^* \\ T^* \end{pmatrix}$$

nous donnant l'argument (L^*, T^*) à passer aux moteurs à partir de la fréquence souhaitée.

2 Réponse au problème

2.1 Dynamique du système

2.1.1 Rejet de la dynamique

La longueur et la tension suivent une certaine dynamique que l'on peut représenter par deux classes de fonctions du temps $(t \rightarrow v_{L^*}(t))_{L^*}$ et $(t \rightarrow v_{T^*}(t))_{T^*}$ représentant la vitesse de variation de L et T lorsque (L^*, T^*) est l'état final et $(0, 0)$ l'état initial. Ces classes de fonctions vérifient :

$$\int_0^{+\infty} v_L(t) dt = L$$

$$\int_0^{+\infty} v_T(t) dt = T$$

Elles sont nulles à partir d'un certain temps, que l'on notera τ_L et τ_T . On a alors :

$$\int_0^{\tau_L} v_L(t) dt = L$$

$$\int_0^{\tau_T} v_T(t) dt = T$$

On a fait des hypothèses d'invariance par translation et par symétrie, c'est-à-dire que le temps pour passer de (L, T) à (L^*, T^*) est le même que celui pour passer de $(0, 0)$ à $(|L^* - L|, |T^* - T|)$. On peut alors définir une distance :

$$d((L, T), (L^*, T^*)) = \max(\tau_{|L^* - L|}, \tau_{|T^* - T|})$$

La prise en compte de la dynamique du système pose le problème sous la forme :

Partant de $f_1 = f(L, T)$, trouver (L^, T^*) qui minimise $d((L, T), (L^*, T^*))$ sous la contrainte $f(L^*, T^*) = f_2$.*

Cette formulation du problème ne prend pas en compte la notion de réversibilité que nous souhaitons et elle ne pourra jamais la prendre en compte. Faisant une distinction entre les fréquences proches et les fréquences éloignées, la prise en compte de la dynamique ne peut pas fournir un unique chemin ne dépendant pas de la grandeur $|f_2 - f_1|$. C'est pourquoi nous rejetons la prise en compte de la dynamique du système dans notre optimisation.

2.1.2 Prise en compte des vitesses moyennes

Cependant il faut bien rendre compte des vitesses de variation de la longueur et de la tension, on note $t = \frac{T}{v_T}$ et $l = \frac{L}{v_L}$ où v_T et v_L sont respectivement la vitesse moyenne de variation de la tension et la vitesse moyenne de variation de la longueur. Cela revient à définir une distance :

$$d((L, T), (L^*, T^*)) = \sqrt{\frac{(L^* - L)^2}{v_L^2} + \frac{(T^* - T)^2}{v_T^2}}$$

Ainsi t et l sont des durées. On pose également $\lambda = f^2$. On a ainsi

$$t = 4 \frac{v_L^2}{v_T} \mu \lambda l^2 \quad (2)$$

Les lignes de niveau de λ dans l'espace (l, t) ont la même forme que celles de la figure 1.

2.2 Graphiquement

Le chemin le plus court dans l'espace (l, t) pour passer d'une valeur λ_1 correspondant à (l, t) à une autre valeur λ_2 est une droite orthogonale à la courbe $\lambda = \lambda_2$ et passant par (l, t) . Cependant cette solution ne prend pas en compte la réversibilité évoquée plus haut. La solution pour intégrer cette réversibilité dans notre problème est de considérer des valeurs de λ infiniment proches. C'est à dire entre λ et $\lambda + d\lambda$. La droite se transforme alors en une courbe orthogonale au faisceau de lignes de niveaux tracé sur la figure 1.

On attend alors une courbe de la même forme que la courbe en bleu représentée sur la figure 2. Bien évidemment cette courbe doit vivre dans un espace de la forme $[l_{min}, l_{max}] \times [t_{min}, t_{max}]$.

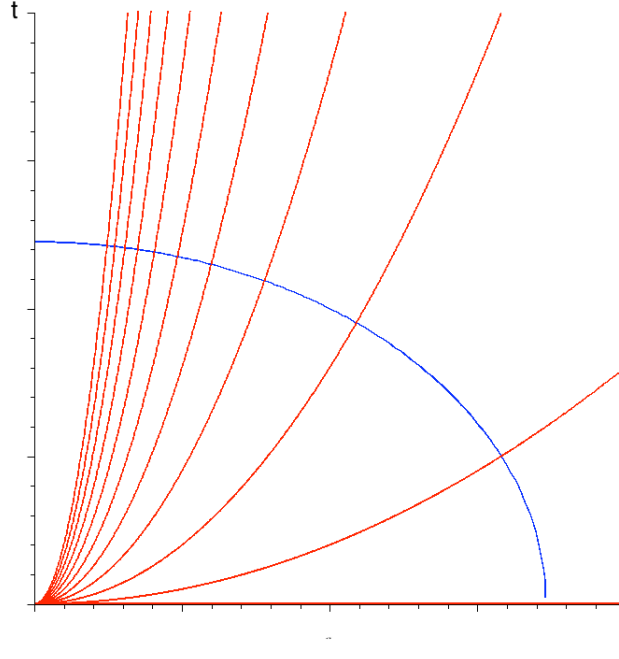


FIGURE 2 – Lignes de niveau de la fréquence dans l'espace (l, t) (en rouge) et chemin le plus court (en bleu), unités de temps arbitraires

2.3 Mathématiquement

Notons C_λ l'ensemble des lignes de niveau dépendant du paramètre λ .

$$C_\lambda = \{M(s, \lambda) = (s, 4 \frac{v_L^2}{v_T} \mu \lambda s^2), s \geq 0\}$$

On cherche une courbe $M(s, \lambda(s))$ orthogonale à toutes les courbes C_λ .

Le vecteur directeur de C_λ s'exprime :

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \frac{v_L^2}{v_T} \mu \lambda s \end{pmatrix}$$

Le vecteur directeur de la courbe recherchée $M(s, \lambda(s))$ s'exprime :

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial s} + \lambda'(s) \frac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \frac{v_L^2}{v_T} \mu \lambda s + 4 \lambda'(s) \frac{v_L^2}{v_T} \mu s^2 \end{pmatrix}$$

La condition d'orthogonalité s'exprime :

$$\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial s} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial s} + \lambda'(s) \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial \lambda} \right) = 0$$

$$1 + 64 \frac{v_L^4}{v_T^2} \mu^2 \lambda(s)^2 s^2 + 64 \frac{v_L^4}{v_T^2} \mu^2 \lambda(s) s^3 = 0$$

En posant $u(s) = \lambda(s)^2$ et $\alpha = 4 \frac{v_L^2}{v_T} \mu$, l'équation devient :

$$u' + \frac{4u}{s} + \frac{1}{\alpha^2 s^3} = 0$$

Cette équation du premier ordre se résout en :

$$u(s) = \frac{C}{s^4} - \frac{1}{2\alpha^2 s^2}$$

avec C une constante positive. En effet si $C < 0$ alors $u < 0$ pour $s \geq 0$, ce qui implique l'absurdité $\lambda^2 < 0$.

Finalement,

$$\lambda(s) = \sqrt{\frac{C}{s^4} - \frac{1}{2\alpha^2 s^2}} = \frac{1}{\alpha s^2} \sqrt{\alpha^2 C - \frac{s^2}{2}}$$

et

$$\boxed{M(s, \lambda(s)) = \left(\frac{s}{\sqrt{\alpha^2 C - \frac{s^2}{2}}} \right)} \text{ avec } \boxed{\alpha = 4 \frac{v_L^2}{v_T} \mu} \quad (3)$$

En fonction de la fréquence les équations deviennent :

$$L(f) = v_L \sqrt{2(\alpha^2 C - f^4)} \quad (4)$$

$$T(f) = 2v_T \alpha f^2 (\alpha^2 C - f^4) \quad (5)$$

Reste à déterminer C . C'est ce que font les conditions aux limites.

2.4 Conditions aux limites

Les conditions aux limites s'expriment :

$$\text{Cas 1 : } \lambda_{min} = \frac{t_{min}}{\alpha l_{max}^2}$$

$$\text{Cas 2 : } \lambda_{max} = \frac{t_{max}}{\alpha l_{min}^2}$$

Ce qui devient

$$\frac{1}{\alpha l_{max}^2} \sqrt{\alpha^2 C_1 - \frac{l_{max}^2}{2}} = \frac{t_{min}}{\alpha l_{max}^2}$$

$$\frac{1}{\alpha l_{min}^2} \sqrt{\alpha^2 C_2 - \frac{l_{min}^2}{2}} = \frac{t_{max}}{\alpha l_{min}^2}$$

On exprime alors la constante C dans les deux cas :

$$C_1 = \frac{1}{\alpha^2} \left(t_{min}^2 + \frac{l_{max}^2}{2} \right)$$

$$C_2 = \frac{1}{\alpha^2} \left(t_{max}^2 + \frac{l_{min}^2}{2} \right)$$

Si la condition $C_1 = C_2$ n'est pas vérifiée, la solution trouvée précédemment ne peut pas atteindre les deux extrémités de la portion de l'espace $[l_{min}, l_{max}] \times [t_{min}, t_{max}]$. On note λ_1, λ_2 les solutions obtenues avec respectivement C_1 et C_2 :

1er cas

Si $C_1 > C_2$ alors

$$\lambda_1(l_{min}) > \lambda_2(l_{min}) = \lambda_{max}$$

et

$$\lambda_2(l_{max}) < \lambda_1(l_{max}) = \lambda_{min}$$

Que l'on choisisse C_1 ou C_2 , la solution sort du pavé $[l_{min}, l_{max}] \times [t_{min}, t_{max}]$.

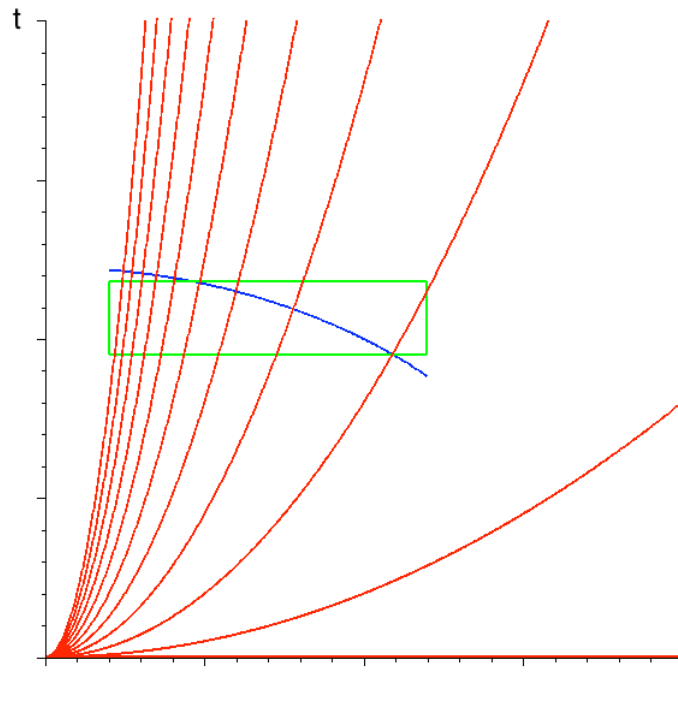


FIGURE 3 – Schématisation du cas 1. En rouge les lignes de niveaux, en bleu la solution et en vert les limites du système

2ème cas

Si $C_1 < C_2$ alors

$$\lambda_1(l_{min}) < \lambda_2(l_{min}) = \lambda_{max}$$

et

$$\lambda_2(l_{max}) > \lambda_1(l_{max}) = \lambda_{min}$$

Que l'on choisisse C_1 ou C_2 , la solution n'atteint pas les valeurs limites de l'intervalle $[\lambda_{min}, \lambda_{max}]$.

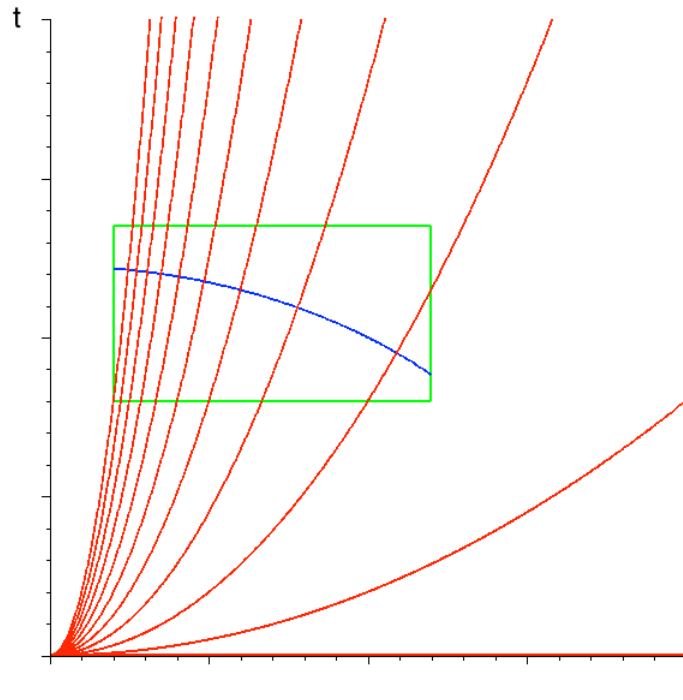


FIGURE 4 – Schématisation du cas 2. En rouge les lignes de niveaux, en bleu la solution et en vert les limites du système

3ème cas

Le 3ème cas, idéal mais complètement irréaliste correspond à $C_1 = C_2$. On a alors

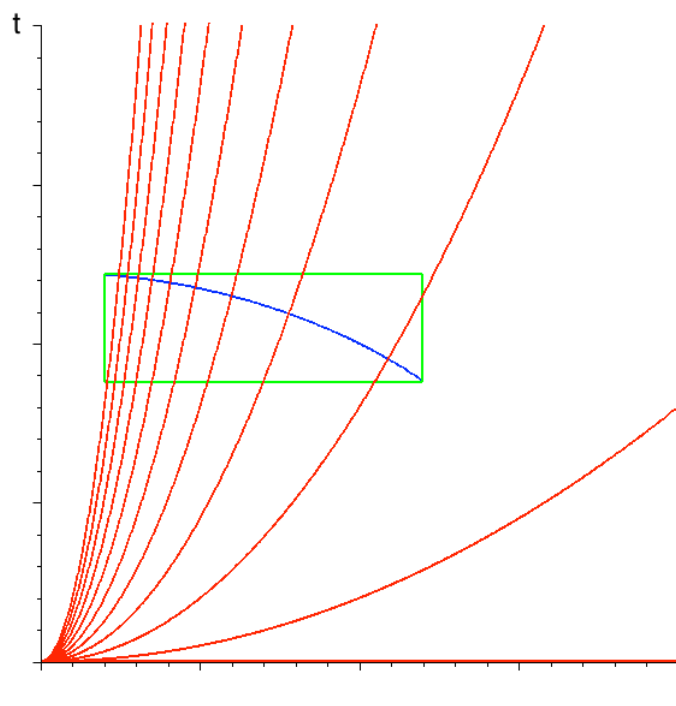


FIGURE 5 – Schématisation du cas 3. En rouge les lignes de niveaux, en bleu la solution et en vert les limites du système