化学学院本科生 2020——2021 学年第一学期《线性代数》课程期末考试试卷（A 卷）

专业：______________ 年级：____________ 学号：____________ 姓名：____________ 成绩：_________________

得 分

一 、选择题（本题共 24 分，每小题 4 分）

1. 设$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$为 3 维向量，矩阵$A=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3), B=(\boldsymbol{a}_2,2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$, 若$\det A=3$，则$\det B=$(　　　　)

(A) 6；　(B) 3；　(C)-3；　(D)-6.

2. 设A矩阵经过初等行变换变为矩阵B, 则以下说法**正确**的是(　　　　)

(A)存在可逆矩阵P，使得$PA=B$；　(B) 存在可逆矩阵P，使得$AP=B$；

(C)存在可逆矩阵P，使得$A=BP$；　(D)　$\det A=\det B$.

3. 下列说法**错误**的是（　　　　）

(A) 如果$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$相容，则增广矩阵$[A\ \boldsymbol{b}]$的每一行都有一个主元位置；

(B) $\boldsymbol{b}$是矩阵A的列的线性组合当且仅当$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 至少有一个解；

(C) A为$m\times n$矩阵，若A的列向量集生成$\mathbb{R}^m$,则对$\mathbb{R}^m$中任意向量$\boldsymbol{b}$方程$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$相容；

(D) 若A是$m\times n$矩阵，且$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 对 $\mathbb{R}^m$中某个向量$\boldsymbol{b}$是不相容的， 则A不能在每一行都有一个主元位置.

4. 设A为$m\times n$矩阵, B为$n\times m$矩阵, I_m为m阶单位矩阵，若$AB=I_m$，则　(　　　　)

(A)$rank(A)=m, rank(B)=m$；　(B) $rank(A)=m, rank(B)=n$；

(C) $rank(A)=n, rank(B)=m$；　(D) $rank(A)=n, rank(B)=n$.

5. 设A,B为同阶可逆矩阵，则(　　　　)

(A) $AB=BA$；　(B)存在可逆矩阵P使得$P^{-1}AP=B$；

(C)存在可逆矩阵C使得$C^TAC=B$；　(D)存在可逆矩阵P,Q使得$PAQ=B$.

6. 设有任意两个n维向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$和$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$, 若存在两组不全为零的数$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$和$k_1,\cdots,k_m$, 使$(\lambda_1+k_1)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(\lambda_m+k_m)\boldsymbol{\alpha}_m+(\lambda_1-k_1)\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+(\lambda_m-k_m)\boldsymbol{\beta}_m=0$, 则　(　　　　)

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$和$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$都线性相关；　(B)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\cdots\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\beta}_m,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m-\boldsymbol{\beta}_m$线性无关；

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$和$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$都线性无关；　(D)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\cdots\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\beta}_m,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m-\boldsymbol{\beta}_m$线性相关.

得 分

二 、填空题（本题共 24 分，每小题 4 分）

1.设A是4×3矩阵，且$rank(A)=2$, 而$B=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{bmatrix}$, 则$rank(AB)$=__________.

2. 二阶旋转矩阵$A=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$的逆矩阵为________________.

3. 设$A=\begin{bmatrix}1&-2\\-2&4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}a&2\\2&b\end{bmatrix}$，且$A$与$B$相似，则$a=$_________, $b=$__________.

4. 已知$\boldsymbol{u}_1=[-7,1,4]^T,\boldsymbol{u}_2=[-1,1,2]^T,\boldsymbol{y}=[-9,1,6]^T, W=span\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\}$，则$Proj_W\boldsymbol{y}$=______________.

5.已知$A=\begin{bmatrix}2&1\\-2&0\\2&3\end{bmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}-5\\8\\1\end{bmatrix}$，则不相容方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的最小二乘解为_____________.

6.设向量$\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^3$，它在基$\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$下的坐标为$(x_1,x_2,x_3)^T$,则$\boldsymbol{\alpha}$在基$\{\varepsilon_1+k\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$下的坐标为_____________。

得 分

三 、判断题（本题共 16 分，每小题 2 分，用 T（True）、F（False）表示）

（　　）1. $\det(-A) = -\det A$.

（　　）2. $Nul(A)$的维数是方程$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$中的变量个数.

（　　）3. 方程$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$有解的充分必要条件是$\boldsymbol{b} \perp Nul(A^T)$.

（　　）4. 若$AB = I_n$，其中I_n为n阶单位矩阵，则A为可逆矩阵.

（　　）5. 一个具有单位正交列的矩阵是正交矩阵.

（　　）6. 若λ为可逆矩阵A的特征值，则λ^{-1}也是A^{-1}的特征值.

（　　）7. 设$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$为$\mathbb{R}^n$中的线性无关向量集，则$\{\boldsymbol{v}_1, 2\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1\}$也是线性无关向量集.

（　　）8. 对于方阵A，$Col(A)$中的向量与 $Nul(A)$中的向量正交.

得 分

四、计算题（本题共 30 分，每小题 6 分）

1. 设$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$,（1）判断$A$是否可逆;（2）若$A$可逆，求$A$的逆矩阵。

2. 解方程$\det\begin{bmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ -1 & x-1 & -1 \\ -1 & -1 & x-1 \end{bmatrix}$=0.

3. 设$A=\begin{bmatrix}4 & 5 & 9 & -2\\ 6 & 5 & 1 & 12\\ 3 & 4 & 8 & -3\end{bmatrix}$，求$Col(A), Nul(A)$的基.

4. 设$A=\begin{bmatrix}4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 4\end{bmatrix}$，求正交矩阵$P$，使得$A=PDP^T$，其中$D$为对角形矩阵。

5．已知分解$A=QR$，其中$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 2 & 4\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，$Q=\begin{bmatrix}2/3 & -1/3\\ 2/3 & 2/3\\ 1/3 & -2/3\end{bmatrix}$，$R=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}7\\ 3\\ 1\end{bmatrix}$，求$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的最小二乘解.

得 分

五、设A为n阶实对称矩阵，证明: A的不同特征值对应的特征向量正交.　　**（本题 6 分）**