化学学院本科生 2021——2022 学年第一学期《线性代数》课程期末考试试卷（A 卷）

专业：______________ 年级：____________ 学号：____________ 姓名：____________ 成绩：_________________

得 分

一 、选择题（本题共 24 分，每小题 4 分）

1. 若n阶方矩阵A,B,C满足$ABC=I$，I为单位矩阵，则（　　　　）

(A) $ACB=I$；　(B) $CBA=I$；　(C)$BAC=I$；　(D)$BCA=I$.

2. 设A矩阵经过初等行变换变为矩阵B, 则以下说法**正确**的是（　　　　）

(A) $Row(A)=Row(B)$；　(B) $Col(A)=Col(B)$；

(C) A与B的特征值相同；　(D) $\det A=\det B$.

3. 设A为实对称矩阵，若存在可逆矩阵P，使得$P^TAP=B$，则（　　　　）

(A) A与B有相同的特征值；　(B) A与B有相同的特征向量；

(C) $\det A=\det B$；　(D) B必可以对角化.

4. 向量组(I)$:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$中向量均可由向量组(II)$:\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$中向量线性表示，则以下说法**正确**的是（　　　　）

(A) 当$r<s$时，向量组(II)必线性相关；　(B) 当$r<s$时，向量组(I)必线性相关

(C) 当$r>s$时，向量组(II)必线性相关；　(D) 当$r>s$时，向量组(I)必线性相关.

5. 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_1x_3+x_2x_3$是（　　　　）二次型。

(A) 正定；　(B)不定；　(C)负定；　(D)半正定.

6. 设λ_1,λ_2为A的两个不同特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$为对应$\lambda_1,\lambda_2$的特征向量，则（　　　　）

(A) 任意常数$k_1\neq 0,k_2\neq 0$，$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$都是$A$的特征向量；

(B) 存在常数$k_1\neq 0,k_2\neq 0$，$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$为$A$的特征向量；

(C) 当$k_1\neq 0,k_2\neq 0$，$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$不可能为$A$的特征向量；

(D) 存在唯一常数$k_1\neq 0,k_2\neq 0$，使得$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$为$A$的特征向量.

得 分

二 、填空题（本题共 24 分，每小题 4 分）

1.已知$A=\begin{bmatrix}1&a&a\\a&1&a\\a&a&1\end{bmatrix}$，且$rank(A)=2$, 则$a$=__________.

2. 已知$A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，且$ad\neq bc$，则$A$的逆矩阵为________________.

3. 若$\boldsymbol{u}_1=\begin{bmatrix}2\\5\\-1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{u}_2=\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$,$W=span\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\}$，则$W$中距离$\boldsymbol{y}$最近的点为_________.

4. 设A,B为三阶方阵，且$AB+I=A^2+B$，其中I为三阶单位矩阵，若$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&3&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，则$B$的迹为______________.

5.已知$A=\begin{bmatrix}1&3\\1&-1\\1&1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}5\\1\\0\end{bmatrix}$，则不相容方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的最小二乘解为______________.

6.已知映射T:$T(a_0+a_1t+a_2t^2)=a_1+2a_2t$是线性变换，则$T$在基$\mathcal{B}=\{1,t,t^2\}$下的矩阵为_____________。

得 分

三 、判断题（本题共 16 分，每小题 2 分，用 T（True）、F（False）表示）

（　　） 1. A^TA可逆的充分必要条件是A的列线性无关.

（　　） 2. 设A为反对称矩阵，则$\det A = 0$.

（　　） 3. 设A, B为n阶方阵，且B可逆，则$rank(AB) = rank(B)$.

（　　） 4. 设A为n阶实对称矩阵，则A正定的充分必要条件是$\det A > 0$.

（　　） 5. 设A为$m \times n$矩阵，则$Row(A)$中的向量与 $Nul(A)$中的向量正交.

（　　） 6. 设A, B均为n阶方阵，且A可逆，则AB与BA相似.

（　　） 7. 若$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$有解，则存在唯一向量$\boldsymbol{p} \in Row(A)$，使得$A\boldsymbol{p} = \boldsymbol{b}$.

（　　） 8. 若n阶方阵A有n个线性无关的特征向量，则A可逆.

得 分

四、计算题（本题共 30 分，每小题 6 分）

1. 设$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$,（1）判断$A$是否可逆；（2）若$A$可逆，求$A$的逆矩阵。

2. 求非齐次线性代数方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的解，其中$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 6 & 1 \\ 1 & -8 & 7 & 7 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$，请将通解写成向量形式。

3. 设$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & -4 & 2\\ 1 & 3 & 0 & -3 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 1 & -4 & 3 & -2 & 2\end{bmatrix}$，求$Row(A), Col(A), Nul(A)$的基.

4. 设$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix}$，求正交矩阵$P$，使得$A=PDP^T$，其中$D$为对角形矩阵。

5．已知分解$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$，求$A$的$QR$的分解，其中$Q$为正交矩阵，$R$为上三角形矩阵.

得 分

五、设n阶方阵A与B相似，证明: A与B有相同的特征值. **（本题 6 分）**