化学学院本科生 2019——2020 学年第一学期《线性代数》课程期末考试试卷（A 卷）

专业：______________ 年级：____________ 学号：____________ 姓名：____________ 成绩：_________________

得 分

一 、选择题（本题共 24 分，每小题 4 分）

1.非齐次线性方程组$Ax=b$有解的充要条件是　　　　（　　　　）

(A) $rank(A)=rank([A\ b])$；　(B) A的列线性无关；　(C) $Ax=0$有非零解；　(D) $A^TAx=A^Tb$有解.

2. 齐次线性方程组$Ax=0$有非零解的充要条件是（　　　　）

(A) A的列线性无关；(B) $|A|=0$ ；　(C) A的列线性相关；　(D) A的行线性相关.

3. 设A,B为非零矩阵，且满足$AB=0$，则必有（　　　　）

(A) A的列向量组线性相关,B的行向量组线性相关；

(B) $rank(A)+rank(B)<n$；

(C) $A=0$或者$B=0$；

(D) A的行向量组线性相关,B的列向量组线性相关.

4. 已知A为$m\times n$矩阵, 则必有　　　　（　　　　）

(A)$\dim\big(col(A)\big)<\dim\,(Row(A))$；　　(B) $\dim\big(col(A)\big)>\dim\,(Row(A))$；

(C) $\dim\big(col(A)\big)=\dim\,(Nul(A))$；　　(D) $\dim\big(Row(A)\big)+\dim\big(Nul(A)\big)=n$.

5.设A为 n 阶实对称矩阵，则下面说法**错误**的是　　　　（　　　　）

(A) A的特征值都是实数；　　(B) A与对角矩阵相似；

(C) A有 n 个两两正交的特征向量；　　(D)二次型x^TAx的标准形是唯一的。

6. 设A,B为 n 阶方阵, 则必有　　　　（　　　　）

(A) $AB=BA$；　　(B) $|A+B|=|A|+|B|$；

(C) $|AB|=|BA|$；　　(D) 存在可逆矩阵P和Q, 使$PAQ=B$.

得 分

二 、填空题（本题共 24 分，每小题 4 分）

1. 设$A=\begin{bmatrix}3&-2&8\\0&t&-2\\0&-4&3\end{bmatrix}$与对角矩阵$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&7\end{bmatrix}$相似, 则$t$ =__________.

2. 设A为三阶方阵，且满足$A^2+A=2I$，$|A|=4$, 则A的特征值为________________.

3. 向量子空间$span\{[1,0,1,1]^T,[-2,1,3,2]^T,[7,-2,-3,-1]^T\}$的维数为______________.

4. 已知$v_1=[1,1,0]^T, v_2=[0,1,1]^T, W=span\{v_1,v_2\}$，则$v=[1,1,1]^T$在$W$上的正交投影为______________.

5.已知$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&-1\\0&1&1\\-1&1&-1\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}2\\5\\6\\6\end{bmatrix}$，则不相容方程组$Ax=b$的最小二乘解为_____________.

6.设$f(x_1,x_2)=4x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2$，则$f(x_1,x_2)$为_______二次型.（填“正定”，“负定”，“不定”之一）

得 分

三 、判断题（本题共 16 分，每小题 2 分，用 T（True）、F（False）表示）

（　　）1. 可对角化的矩阵一定是实对称矩阵。

（　　）2. 任意 n 阶可逆矩阵均可以写成初等变换矩阵的乘积。

（　　）3. 若矩阵A,B是行等价的，则它们有相同的约化阶梯形。

（　　）4. 设V为一向量子空间，则$V \cap V^{\perp} = \{0\}$.

（　　）5. 若$AB = I$，则矩阵A是可逆的.

（　　）6. 设A为$\mathrm{m} \times \mathrm{n}$矩阵，若线性映射$x \longmapsto Ax$是满射，则$rank(A) = m$.

（　　）7. 设A为$\mathrm{m} \times \mathrm{n}$矩阵，若$A$的列线性相关，则必有$\mathrm{m} \geq \mathrm{n}$.

（　　）8. 设A为$\mathrm{m} \times \mathrm{n}$矩阵， 则$Ax = 0$与$A^T Ax = 0$同解。

得 分

四、计算题（本题共 30 分，每小题 6 分）

1. 设$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -6 & 2 \\ 1 & -1 & -4 & 3 & 2 \\ -7 & 1 & 10 & 3 & -7 \\ 4 & -1 & -7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$,（1）求$rank(A), dimNul(A)$.（2）.求$Col(A), Row(A)$及$Nul(A)$的基。

2. 设$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，求$\det A$.

3. 已知$A=\begin{bmatrix}4&3&1&1\\3&4&1&1\\1&1&4&3\\1&1&3&4\end{bmatrix}$，求正交矩阵$P$，使得$A=PDP^T$，其中$D$为对角形矩阵。

4. 设$W=span\{v_1,v_2,v_3\}$，其中$v_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}$, $v_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$，试求$W^{\perp}$空间，这里$W^{\perp}$表示$W$的正交补空间。

5．已知$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 8 \end{bmatrix}$，将$A$分解为$A = QR$形式，其中$Q$的列向量正交，$R$为上三角形矩阵。

得 分

五、设A, B为n阶方阵，且A可逆，证明: AB与BA有相同的特征值. **（本题 6 分）**