Е. Д. Гарбер, О частотных критериях отсутствия периодических режимов, *Автомат. и телемех.*, 1967, выпуск 11, 178–182

Заметки

УДК 62-501.14

О ЧАСТОТНЫХ КРИТЕРИЯХ ОТСУТСТВИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ

Е. Д. ГАРБЕР

(Ленинград)

Рассматриваются критерии несуществования в нелинейных автоматических системах периодических режимов определенного вида.

1. Частотный критерий В. М. Попова [1] дает, как известно, достаточные условия абсолютной устойчивости нелинейных систем.

Пусть теперь эти условия не выполняются. Возникает вопрос, нельзя ли при этом судить о некоторых динамических свойствах системы. Оказывается, что если поставить задачу об определении условий, гарантирующих отсутствие у нелинейной автономной системы периодических решений некоторого диапазона частот, то такие критерии неколебательности могут быть получены. При этом формулировки критериев и, в особенности, их доказательства оказываются весьма простыми.

2. Будем рассматривать автономную систему

$$x + W(p)y = 0, \tag{1}$$

$$y = f(x), \tag{2}$$

где $W(p)$ — передаточная функция линейной части (не обязательно рациональная), $f(x)$ — кусочно-непрерывная нелинейная функция, удовлетворяющая условиям

$$0 \leqslant mx^2 \leqslant xf(x) \leqslant Mx^2, \qquad f(0) = 0. \tag{3}$$

Пусть сначала $f(x)$ однозначна и у системы (1), (2) существует разлагающееся в почти всюду сходящийся ряд Фурье симметричное периодическое решение частоты ω, так что

$$y(t) = f[x(t)] = \sum_{l=0}^{\infty} B_j \sin(j\omega t + \varphi_j), \qquad j = 2l + 1, \tag{4}$$

Согласно (3) имеет место неравенство

$$y\left(x - \frac{y}{M}\right) \geqslant 0, \tag{5}$$

или, используя (1) и прибавляя к обеим частям неравенства слагаемое $qypx$ при произвольном $q = \text{const}$

$$-y\left[(1 + qp)W(p) + \frac{1}{M}\right]y \geqslant qypx. \tag{6}$$

Интегрируя теперь (6) за период $T = \frac{2\pi}{\omega}$ и используя (4), получаем

$$-\sum_{l=0}^{\infty}\left[\operatorname{Re}(1 + qij\omega)W(ij\omega) + \frac{1}{M}\right]B_j^2 \geqslant 0. \tag{7}$$

Здесь использовано то обстоятельство, что функция (2) однозначна и, следовательно,

$$I = \int_0^T f(x)pxdt = 0. \tag{8}$$

Из (7) непосредственно следует, что симметричный периодический режим вида (4) может существовать лишь в том случае, если по крайней мере один из коэффициентов при B_j^2 отрицателен. Таким образом, частотный критерий неколебательности имеет вид: если для всех $j = 2l + 1$ и некоторого q выполняется условие

$$\operatorname{Re}[(1 + qij\omega) W(ij\omega)] + \frac{1}{M} \geqslant 0, \tag{9}$$

то система (1), (2) не имеет периодических режимов вида (4) частоты ω.

Практически доказанный критерий удобно применять в более слабой формулировке: не существует периодических режимов вида (4) частоты $\omega > \omega_*$, если для всех $\omega > \omega_*$ выполняется неравенство

$$\operatorname{Re}[(1 + qi\omega) W(i\omega)] + \frac{1}{M} \geqslant 0. \tag{10}$$

Очевидно, что если (10) выполняется для всех $\omega \geqslant 0$, то у системы не существует ненулевых периодических режимов любой частоты. В этом случае (10) совпадает с частотным критерием абсолютной устойчивости [1]; неколебательность является в этом случае очевидным следствием абсолютной устойчивости. Если же (10) имеет место лишь для $\omega \geqslant \omega_* > 0$, то условие абсолютной устойчивости не выполняется; полученный критерий позволяет в этом случае получить дополнительную информацию о невозможности высокочастотных колебаний (причем устойчивость этих колебаний не предполагается).

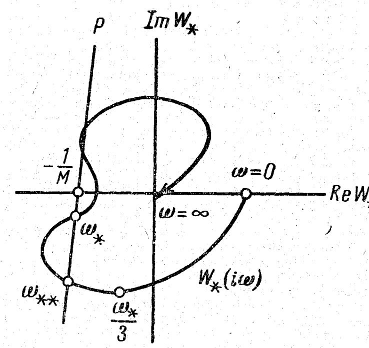

Рис. 1

Условие (10) допускает и соответствующую геометрическую интерпретацию, аналогичную построениям частотного метода анализа абсолютной устойчивости. Используя понятие видоизмененной амплитудно-фазовой характеристики W_*, $\operatorname{Re} W_* = \operatorname{Re} W(i\omega)$, $\operatorname{Im} W_* = \omega \operatorname{Im} W(i\omega)$, перепишем (10) в виде

$$\operatorname{Re} W_* + q \operatorname{Im} W_* + \frac{1}{M} \geqslant 0. \tag{11}$$

Это означает, что не существует периодических режимов вида (4) с частотой $\omega > \omega_*$ если для $\omega > \omega_*$ ветвь видоизмененной характеристики W_* лежит справа от прямой P с угловым коэффициентом $-\frac{1}{q}$, проходящей через точку вещественной оси с абсциссой $-\frac{1}{M}$ (рис. 1). Более того, возвращаясь непосредственно к (9), найдем, что не существует также периодических режимов, для которых $\frac{\omega_*}{3} < \omega < \omega_{**}$.

Заметим, что из (10) при $q = \infty$ (или непосредственно из (8)) в качестве частного случая получается важный вывод [2] о том, что если при $\omega > \omega_*$ величина $\operatorname{Im} W(i\omega)$ не меняет знака, то периодических режимов при $\omega > \omega_*$ не существует. В частности, поскольку для приближенных решений по методу гармонического баланса частоты ω_0 определяются в случае однозначных нелинейностей из уравнения $\operatorname{Im} W(i\omega_0) = 0$, то для всех возможных точных периодических решений $\omega \leqslant \max \omega_0$.

3. Укажем на возможности получения критериев, отличных от (10). Используя первое из неравенств (3), совершенно аналогично получим неравенство

$$\operatorname{Re}[(1 + qi\omega) W(i\omega)] + \frac{1}{m} \leqslant 0. \tag{12}$$

Для отсутствия периодических режимов частоты $\omega > \omega_*$ достаточно выполнения хотя бы одного из условий (10) или (12). Объединяя (10) и (12), получаем общий критерий вида

$$\sin\theta \left[\operatorname{Re}(1 + qi\omega) W(i\omega) + \frac{1}{M}\right] - \cos\theta \left[\operatorname{Re}(1 + q_1 i\omega) W(i\omega) + \frac{1}{m}\right] \geqslant 0, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

С другой стороны, выделяя линейную часть характеристики (2) путем замены $y = y_* + kx$ при $k < m$ получим, согласно (10)

$$\operatorname{Re}\left[(1 + qi\omega)\frac{W(i\omega)}{1 + kW(i\omega)}\right] + \frac{1}{M - k} \geqslant 0,$$

откуда имеем критерий неколебательности в виде

$$\frac{\operatorname{Re}[W(i\omega)(1+qi\omega)]+k|W(i\omega)|^2}{1+2k\operatorname{Re}W(i\omega)+k^2|W(i\omega)|^2}+\frac{1}{M-k}\geqslant 0. \tag{13}$$

Далее, если исходить не из прямых амплитудно-фазовых характеристик, а из обратных и оценивать интеграл $\int\limits_0^T (Mx-y-py)x\,dt$, то взамен (9) получим неравенство

$$\operatorname{Re}\frac{1+qij\omega}{W(ij\omega)}+M\leqslant 0. \tag{14}$$

Условия (14) и (9) в общем случае не равносильны.

Отметим также, что связь полученных критериев с соответствующими необходимыми условиями неколебательности такова же, как для проблемы абсолютной устойчивости. Именно, если рассматривать линейные системы при $y=kx$, $m\leqslant k\leqslant M$, то для них условием существования периодических режимов будет равенство $1+kW(i\omega)=0$. Отсюда следует, что необходимым условием неколебательности нелинейной системы является отсутствие пересечений годографом $W(i\omega)$ отрезка вещественной оси между абсциссами $-\frac{1}{m}$ и $-\frac{1}{M}$. *Однако, в соответствии с (10), (12), это условие будет достаточным, только если видоизмененная характеристика W_* направлена при этом выпуклостью в нужную сторону или достаточно удалена от отрезка $\left[-\frac{1}{m}, -\frac{1}{M}\right]$.

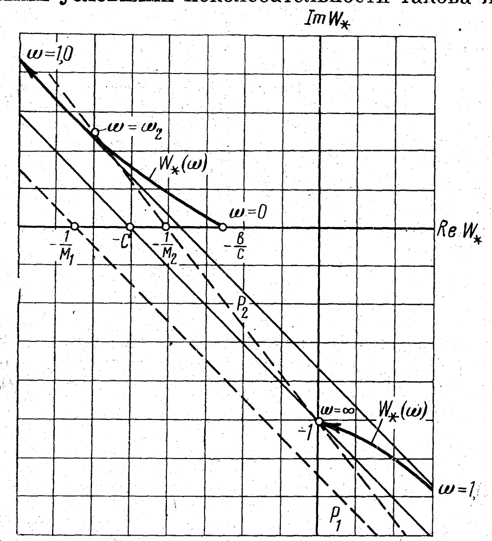

Рис. 2

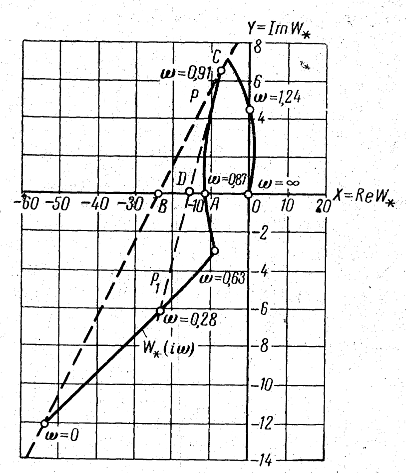

Рис. 3

4. Рассмотрим два примера применения критериев неколебательности к системам, для которых условие абсолютной устойчивости не совпадает с условием устойчивости соответствующих линейных систем. В качестве первого примера рассмотрим задачу В. А. Плисса [1], для которой

$$W(p)=\frac{p^2-b}{(p^2+1)(p+c)},\qquad b<c^2,$$

а функция $f(x)$ удовлетворяет (3) при $m=0$.

Построение годографа $W_*=\frac{(b+\omega^2)(c-i\omega^2)}{(\omega^2-1)(c^2+\omega^2)}$ представлено на рис. 2. Если $M=M_1$, $M_1<\frac{1}{c}$, то возможно проведение прямой P_1, оставляющей годограф W_*

---

* Заметим, что этот отрезок совпадает с годографом эквивалентной амплитудно-фазовой характеристики однозначной нелинейности, удовлетворяющей (3). Следовательно, при применении метода гармонического баланса указанное условие свидетельствует об отсутствии приближенных периодических решений.

в правой полуплоскости — система абсолютно устойчива. Если же $M = M_2$, $\frac{1}{c} < M_2 < \frac{c}{b}$, то проводя прямую P_2, получаем, что можно гарантировать лишь отсутствие периодических режимов с частотами $\omega > 1$ и $\frac{1}{3} < \omega < \omega_2$, если $\omega^2_2 = \frac{c(c - bM_2)}{c^2 - b - (1 - cM_2)} > \frac{1}{9}$. Линейная система, при $y = Mx$, устойчива в данном случае при $M < \frac{c}{b}$.

В качестве второго примера [3] рассмотрим систему непрямого регулирования с нелинейным усилителем, жесткой обратной связью и инерционным измерителем. Уравнения динамики системы имеют вид

$$\delta_и (T_r^2 \ddot{\eta} + T_k \dot{\eta} + \eta) = \varphi + \delta\mu,$$

$$T_a \dot{\varphi} + z\varphi = \mu,$$

$$\dot{\mu} + f(\eta) = 0, \quad 0 \leqslant \eta f(\eta) \leqslant \frac{\eta^2}{T_s}.$$

Передаточная функция линейной части при этом равна

$$W(p) = \frac{\delta T_a p + 1 + \delta z}{\delta_и p (T_a p + z)(T_r^2 p^2 + T_k p + 1)},$$

а $\frac{1}{M} = T_s$. При малых величинах δ и z область абсолютной устойчивости этой системы не совпадает с областью устойчивости линейной системы. На рис. 3 представлено построение видоизмененной характеристики W_* для $T_a = 5$ сек., $T_z = 1$ сек., $T_k = 0{,}3$ сек., $\delta = 0{,}2$; $z = 1{,}0$, $\delta_и = 0{,}1$. Линейная система, при $T_s \dot{\mu} + \eta = 0$, устойчива для значений $T_s > 10{,}5$ сек. (точка A). В то же время абсолютную устойчивость можно гарантировать лишь для $T_s > 24$ сек. (точка B). Пусть теперь $T_s = 15$ сек. (точка D), так что достаточные условия абсолютной устойчивости не выполнены. Проведя через точку D прямую P_1, касательную к W_*, получим, что можно, тем не менее, гарантировать отсутствие колебаний при $\omega > 0{,}28$, т. е. кроме самых низкочастотных.

5. Укажем теперь на возможности распространения полученных критериев на более широкий класс задач. Во-первых, аналогичные условия неколебательности могут быть получены для несимметричных автономных задач. При этом наличие постоянной составляющей у решения приводит к дополнительным условиям. Так, кроме (10), должно быть выполнено еще неравенство $\operatorname{Re} W(0) + \frac{1}{M} \geqslant 0$.

Далее, следуя [4, 5], можно видоизменить полученные критерии применительно к задачам с неоднозначными нелинейностями и характеристиками с ограниченными производными. Действительно, если считать, что (2) имеет петлю гистерезиса, направление обхода которой известно, то интеграл (8), хотя и отличен от нуля, имеет определенный знак. Так, если петля обходится против часовой стрелки (как это имеет место для большинства реальных нелинейных звеньев), то $I = -mS < 0$, где S — площадь петли, а m — число ее обходов за период.

Следовательно, если выбрать $q \leqslant 0$, то критерий (10) останется справедливым и в этом случае. При обратном направлении обхода петли $I = mS > 0$, и в этом случае следует в (10) выбирать $q \geqslant 0$.

Пусть теперь, помимо (3), нелинейная характеристика (2) дифференцируема и удовлетворяет условиям

$$k \leqslant f'(x) \leqslant l.$$

Тогда, как нетрудно видеть, при произвольных константах $\gamma \geqslant 0$, $\delta \geqslant 0$, $\zeta \geqslant 0$ имеет место неравенство

$$\gamma \dot{x}(\dot{y} - k\dot{x}) + \delta \dot{x}(l\dot{x} - \dot{y}) + \zeta(\dot{y} - k\dot{x})(l\dot{x} - \dot{y}) =$$
$$= [\gamma(f' - k) + \delta(l - f') + \zeta(f' - k)(l - f')]\dot{x}^2 \geqslant 0.$$

Отсюда, используя (1), получаем

$$\gamma p W(p) y p[1 - kW(p)]y + \delta p W(p) y p[lW(p) - 1]y +$$
$$+ \zeta p[1 - kW(p)] y p[lW(p) - 1] y \geqslant 0.$$

Складывая теперь последнее неравенство с (2.6) и вновь интегрируя за период с учетом (4), получим

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left\{-\left[\operatorname{Re}(1+qij\omega)W(ij\omega)+\frac{1}{M}\right]+(\delta-\gamma)j^2\omega^2\operatorname{Re}W(ij\omega)+\right.$$

$$\left.+(\delta l-k\gamma)j^2\omega^2|W(ij\omega)|^2-\xi j^2\omega^2[1-(k+l)\operatorname{Re}W(ij\omega)+kl|W(ij\omega)|^2]\right\}B_j^2\geqslant 0.$$

Следовательно, критерий отсутствия периодических режимов, обобщающий (10), принимает в этом случае вид

$$\operatorname{Re}[(1+qi\omega)W(i\omega)]+\frac{1}{M}+(\gamma-\delta)\omega^2\operatorname{Re}W(i\omega)+(k\gamma-l\delta)\omega^2|W(i\omega)|^2+$$

$$+\xi\omega^2[1-(k-l)\operatorname{Re}W(i\omega)+kl|W(i\omega)|^2]\geqslant 0.$$

Поступила в редакцию
25 января 1967 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем. Изд-во АН СССР, 1963.
2. Загиров П. О периодических решениях нелинейных дифференциальных уравнений и о некотором соотношении между амплитудой и частотой. Механика, № 5, 1962.
3. Гарбер Е. Д., Шафрин М. Ш. Нелинейные задачи автоматического регулирования судовых энергетических установок. Изд-во «Судостроение», 1967.
4. Якубович В. А. Частотные условия абсолютной устойчивости регулируемых систем с гистерезисными нелинейностями. Докл. АН СССР, т. 149, № 2, 1963.
5. Гелиг А. Х. Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем с распределенными параметрами. Автоматика и телемеханика, т. XXVI, № 3, 1965.

ON FREQUENCY CRITERIA OF ABSENCE OF PERIODIC CONDITIONS

E. D. GARBER

The criteria of the absence of certain type of periodic conditions in nonlinear automatic systems are considered.