

**UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE**  
**ESCOLA DE ENGENHARIA**  
**PROGRAMA DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**AUTOR, INICIAIS MAIÚSCULAS E RESTANTE MINÚSCULO**

**105Quantificação do efeito de tumores superficiais e  
profundos sobre a temperatura da pele**

**Niterói, RJ**

**DATA**

**AUTOR, INICIAIS MAIÚSCULAS E RESTANTE MINÚSCULO**

**105Quantificação do efeito de tumores superficiais e profundos  
sobre a temperatura da pele**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao  
Curso de Engenharia Mecânica da Universidade  
Federal Fluminense, como requisito parcial para  
obtenção do grau de Engenheiro Mecânico.

Orientador:  
**ORIENTADOR**

Niterói, RJ

DATA

Ficha catalográfica automática - SDC/BEE  
Gerada com informações fornecidas pelo autor

P654i Pinheiro, Isabela Florindo  
Integral transform solutions in heat and fluid flow: novel applications & advancement of the technique / Isabela Florindo Pinheiro ; Leandro Alcoforado Sphaier, orientador. Niterói, 2019.  
236 f. : il.

Tese (doutorado)-Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2019.

DOI: <http://dx.doi.org/10.22409/PGMEC.2019.d.13502386781>

1. Transformada Integral. 2. Métodos numéricos. 3. Termociências. 4. Mecânica dos fluidos (Engenharia). 5. Produção intelectual. I. Sphaier, Leandro Alcoforado, orientador. II. Universidade Federal Fluminense. Escola de Engenharia. III. Título.

CDD -

**AUTOR, INICIAIS MAIÚSCULAS E RESTANTE MINÚSCULO**

**105Quantificação do efeito de tumores superficiais e profundos  
sobre a temperatura da pele**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao  
Curso de Engenharia Mecânica da Universidade  
Federal Fluminense, como requisito parcial para  
obtenção do grau de Engenheiro Mecânico.

Grau:

Aprovado em DATA

BANCA EXAMINADORA

---

**ORIENTADOR**

Orientador

---

**Prof. DSc César Cunha Pacheco**

---

**Eng. Matheus Coutinho Constantino**

Niterói, RJ

DATA

*Dedicatória.*

*Colocar em página ímpar.*

*Esta seção é opcional.*

# Agradecimentos

Agradecimentos

Colocar em página ímpar.

Esta seção é opcional.

Citar agência de fomento, se houver.



# Resumo

Sumarização do trabalho realizado, sem apresentar motivação, revisão da literatura e revisão teórica. Focar no trabalho desenvolvido, métodos, resultados, etc., e sumarizar conclusões.

**Palavras-chave:** Palavra-chave 1, palavra-chave 2, palavra-chave 3.



# Abstract

Colocar em página ímpar

**Keywords**

# Lista de ilustrações

1	.....	3
2	.....	5

# Lista de tabelas

# Lista de abreviaturas e siglas

COP	<i>Coefficient of performance</i>
EOS	<i>Equation of state</i>
GWP	<i>Global Warming Potential</i>
IEA	<i>International Energy Agency</i>
IIAR	<i>International Institute of Ammonia Refrigeration</i>
ODP	<i>Ozone depletion potential</i>
PR-EOS	<i>Peng-Robinson Equation of state</i>



# Lista de símbolos

$\Gamma$	Letra grega Gama
$\Lambda$	Lambda
$\zeta$	Letra grega minúscula zeta
$\in$	Pertence

# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>i</b>
<b>Resumo</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iv</b>
<b>Lista de Ilustrações</b>	<b>v</b>
<b>Lista de tabelas</b>	<b>vi</b>
<b>Lista de abreviaturas e siglas</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de símbolos</b>	<b>ix</b>
<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1. Contextualização.	1
1.2. Objetivos.	1
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>2</b>
2.1. BIOTRANSFERÊNCIA DE CALOR.	2
2.2. Termografia.	2
<b>3 MODELAGEM MATEMÁTICA</b>	<b>3</b>
3.1. Modelagem	3
3.1.1. Condições de Contorno	4
3.1.2. Volumes Finitos.	4
3.1.2.1 Discretização do Domínio	4
3.1.2.2 Integralização dos Termos	5
3.1.2.3 Volumes de Fronteira	7
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>13</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

Na atualidade, o câncer é uma das enfermidades que mais tem atingido as pessoas, tendo mais de 18.1 milhões de casos diagnosticados e 9.6 milhões de mortes, somente em 2018. A estimativa é que em 2040, o número de casos anuais aumente em 50%, ultrapassando os 27 milhões de casos. Essa estimativa tem uma alta variação, dependendo dos nível de desenvolvimento econômico e social do país. Apesar de a maior parte dos casos diagnosticados serem em países com Índice de Desenvolvimento Humano(IDH) alto, conforme a Figura ??, o aumento do número de casos de cancer em nações com baixo IDH é de 100%, enquanto nas com IDH alto/muito alto é de aproximadamente 11

O câncer é a denominação dada ao conjunto de doenças que tem como característica comum a multiplicação descontrolada de células em um determinado tecido. Esse falta de controle advém de uma mutação no DNA da célula, que pode ocorrer devido a uma predisposição genética e/ou exposição a agentes carcinogênicos.

Na atualidade, existem mais de 100 tipos de câncer descobertos. Para cada um deles existem diferentes tratamentos e técnicas de diagnosticos mais efetivas

## 1.2 OBJETIVOS



## 2 Revisão Bibliográfica

O trabalho de ?? propôs uma solução analítica para o modelo de Pennes em um tecido com múltiplas camadas e com a presença de um tumor. Utilizando uma técnica de transformação integral, obteve-se distribuições de temperatura que estavam em acordo com simulações computacionais previamente validadas.

### 2.1 BIOTRANSFERÊNCIA DE CALOR

### 2.2 TERMOGRAFIA

O Trabalho de (AGNELLI; BARREA; TURNER, 2011) é utilizou-se do métodos de diferenças finitas de segunda ordem para resolver o modelo de Pennes em duas dimensões. Através do uso de Algoritmo de Pattern Search foi possível obter informações cruciais sobre o tumor, como seu tamanho e localização como a taxa de geração de calor devido ao metabolismo do tumor.

## 3 Modelagem Matemática

### 3.1 MODELAGEM

Este trabalho visa verificar a influência de diferentes configurações de tumores na superfície da pele. Considerou-se que o formato do antebraço de humano médio pode ser simplificado por um cilindro maciço, dividido em três seções de diferentes diâmetros, representado pele, músculo e osso. As dimensões do cilindro e de cada seção podem ser vistas na Figura 2 .

**Figura**

Figura 1 –

Para a simplificação do problema, propôs-se as seguinte hipóteses:

- Regime Permanente
- Problema Bidimensional, com axissimetria em torno do eixo Z.
- Propriedades Físicas constantes e uniformes em cada tecido.
- Tecidos Isotrópicos

O modelo de bio transferência de calor utilizado foi o Modelo de Pennes ??, que apesar de sua simplicidade reproduz de maneira satisfatória dados experimentais ??. Esse modelo possui as seguintes variáveis: densidade do tecido  $\rho$ ; condutividade térmica do tecido  $k$ ; densidade do sangue  $\rho_b$ ; calor específico do sangue a pressão constante  $c_b$ ; taxa de perfusão sanguínea do tecido  $w$ ; temperatura do sangue arterial  $T_a$ ; temperatura do tecido analisado  $T$ ; taxa de geração de calor metabólico por unidade de volume do tecido  $Q_m$ .

$$\rho c_p \frac{\partial T(r, z)}{\partial t} = \nabla \cdot [k(r) \nabla T(r, z)] + w_b \rho_b c_b [T_a - T(r, z)] + Q_m \quad (3.1)$$

Utilizando as hipótese 1 e realizando a transformação para coordenadas cilíndricas, através da relação ??, obtem-se a equação ??.

$$\nabla \cdot [k(r)\nabla T(r, z)] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} k(r)r \frac{\partial T(r, z)}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} k(r) \frac{\partial T(r, z)}{\partial z} \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} k(r)r \frac{\partial T(r, z)}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} k(r) \frac{\partial T(r, z)}{\partial z} + \rho_b c_b w [T_a - T(r, z)] + Q_m = 0 \quad (3.3)$$

### 3.1.1 CONDIÇÕES DE CONTORNO

A condição de contorno para a fronteira superior do problema ( $r=R$ ) foi de troca de calor por convecção com o ambiente. Considerou-se que a perda de calor da pele por radiação com o ambiente é desprezível para a situação modelada ??.

Para as fronteiras laterais, a condição de isolamento térmico foi utilizada. Essa condição de contorno é passível de ser utilizada caso a fronteira esteja distante o suficiente do elemento gerador de calor, neste caso o tumor.

Já para a fronteira inferior, a condição de isolamento térmico é a escolha natural, devido simetria térmica no centro do cilindro (??).

### 3.1.2 VOLUMES FINITOS

O método escolhido para a resolução numérica do modelo de biotransferência de calor apresentado anteriormente foi o Método dos Volumes Finitos ??.

Esse método consiste na divisão do domínio em  $n$  volumes de controle discretos, onde é suposto que as variáveis de controle são constantes, e a resolução da equação de interesse dentro de cada volume.

Sendo  $P$  o volume de controle a ser estudado, os volumes  $W$ ,  $E$ ,  $N$  e  $S$  são os volumes vizinhos do mesmo. As fronteiras do volume  $P$  com os volumes adjacentes são nomeadas  $w$ ,  $e$ ,  $n$  e  $s$ , respectivamente.

#### 3.1.2.1 DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO

A tipo de malha escolhida para o problema foi uniforme e retangular. Para manter os volumes quadrados, a relação entre o número de volumes na direção  $r$  e na direção  $z$  obedece a fórmula 3.3.

Utilizou-se 3 diferentes malhas para verificar que a discretização não interferiu significativamente no resultado da simulação. De acordo com Celik o fator refinamento da malha deve ser maior que 1.3.

## Figura

Figura 2 –

### 3.1.2.2 INTEGRALIZAÇÃO DOS TERMOS

Integrando a equação ?? ao longo do volume de controle de interesse:

$$\int_{\Delta V} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} k r \frac{\partial T(r, z)}{\partial r} dV + \int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial T(r, z)}{\partial z} dV + \int_{\Delta V} \rho_b c_b w [T_a - T(r, z)] dV + \int_{\Delta V} Q_m dV = 0 \quad (3.4)$$

Dividiu-se a equação ??, em 4 termos para facilitar a manipulação.

$$\underbrace{\int_s^n \int_e^w \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} k r \frac{\partial T(r, z)}{\partial r} r dr dz}_{C1} + \underbrace{\int_s^n \int_e^w \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial T(r, z)}{\partial z} r dr dz}_{C2} + \underbrace{\int_s^n \int_e^w \rho_b c_b w [T_a - T(r, z)] r dr dz}_{C3} + \underbrace{Q_m}_{C4} = 0 \quad (3.5)$$

A integralização do termo P1 é direta, Integrando-se, respectivamente, em r e em z e utilizando as relações ?? e ?? para obter-se o resultado abaixo:

$$P1: \int_s^n \int_e^w \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} k r \frac{\partial T(r, z)}{\partial r} r dr dz = \int_e^w k r \frac{\partial T(r, z)}{\partial r} \Big|_s^n dz = \quad (3.6)$$

$$k r \frac{\partial T(r, z)}{\partial r} \Big|_s^n \Delta z = k_n r_n \frac{\partial T(r, z)}{\partial r} \Big|_n \Delta z - k_s r_s \frac{\partial T_s(r, z)}{\partial r} \Big|_s \Delta z \quad (3.7)$$

$$k_n r_n \frac{T_N - T_P}{\Delta r} \Delta z - k_s r_s \frac{T_P - T_S}{\Delta r} \Delta z \quad (3.8)$$

Para integral do termo P2, além do processo feito anteriormente, é necessário notar a relação ?? que é válida para malhas retangulares e uniformes.

$$\frac{r^2}{2} \Big|_s^n = \frac{r_n^2}{2} - \frac{r_s^2}{2} = \frac{1}{2} \left( r_P + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( r_P - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 = \quad (3.9)$$

$$\frac{1}{2} \left( r_P^2 + r_P \Delta r + \frac{\Delta r^2}{4} \right) - \frac{1}{2} \left( r_P^2 - r_P \Delta r + \frac{\Delta r^2}{4} \right) = r_P \Delta r \quad (3.10)$$

$$P2: \int_s^n \int_e^w \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial T(r, z)}{\partial z} r dr dz = \int_s^n r k \frac{\partial T(r, z)}{\partial z} \Big|_e^w dr = \quad (3.11)$$

$$\frac{r^2}{2} \Big|_s^n k \frac{\partial T(r, z)}{\partial r} \Big|_e^w = r_P \Delta r k_w \frac{\partial T(r, z)}{\partial r} \Big|_w - r_P \Delta r k_e \frac{\partial T(r, z)}{\partial r} \Big|_e \quad (3.12)$$

$$r_P \Delta r k_w \frac{T_W - T_P}{\Delta z} - r_P \Delta r k_e \frac{T_P - T_E}{\Delta z} \quad (3.13)$$

O termo P3, relacionado a transferência de calor devido a perfusão do sangue, pode ser integrado diretamente utilizando a equação ?? :

$$P3: \int_s^n \int_e^w \rho_b c_b w [T_a - T(r, z)] r dr dz = \rho_b c_b w [T_a - T_P] \frac{r^2}{2} \Big|_s^n \Big|_e^w \quad (3.14)$$

$$= \rho_b c_b w [T_a - T_P] r_P \Delta r \Delta z \quad (3.15)$$

Juntando os termos desenvolvidos, obtem-se a equação ?. Como ela depende das derivada da temperatura no contorno do volume P, foi necessário aproximar os gradientes de temperatura por diferenças finitas de primeira ordem, como pode ser visto nas equações ??-??.

$$k_n r_n \frac{\partial T(r, z)}{\partial r} \Big|_n \Delta z - k_s r_s \frac{\partial T(r, z)}{\partial r} \Big|_s \Delta z + r_P \Delta r k_w \frac{\partial T(r, z)}{\partial z} \Big|_w - r_P \Delta r k_e \frac{\partial T(r, z)}{\partial z} \Big|_e \quad (3.16)$$

$$= \rho_b c_b w [T_a - T_P] r_P \Delta r \Delta z \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial T(r, z)}{\partial r} \Big|_n = \frac{T_N - T_P}{\Delta r} \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial T(r, z)}{\partial r} \Big|_s = \frac{T_P - T_S}{\Delta r} \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial T(r, z)}{\partial z} \Big|_e = \frac{T_E - T_P}{\Delta z} \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial T(r, z)}{\partial z} \Big|_w = \frac{T_P - T_W}{\Delta z} \quad (3.21)$$

Dessa forma é obtida a equação discretizada ??:

$$k_n r_n \frac{T_N - T_P}{\Delta r} \Delta z - k_s r_s \frac{T_P - T_S}{\Delta r} \Delta z + r_P \Delta r k_w \frac{T_W - T_P}{\Delta z} - r_P \Delta r k_e \frac{T_P - T_E}{\Delta z} + \rho_b c_b w [T_a - T_P] r_P \Delta r \Delta z = 0 \quad (3.22)$$

$$k_n r_n \frac{\Delta z}{\Delta r} T_N + k_s r_s \frac{\Delta z}{\Delta r} T_S + r_p k_w \frac{\Delta r}{\Delta z} T_W + r_p k_e \frac{\Delta r}{\Delta z} T_E - \quad (3.23)$$

$$\left( k_n r_n \frac{\Delta z}{\Delta r} + k_s r_s \frac{\Delta z}{\Delta r} + r_p k_w \frac{\Delta r}{\Delta z} + r_p k_e \frac{\Delta r}{\Delta z} + \rho_b c_b w r_p \Delta r \Delta z \right) T_p + \rho_b c_b w r_p \Delta r \Delta z T_a = 0 \quad (3.24)$$

Como os termos que multiplicam as temperaturas dos volumes e a temperatura sanguínea são constantes dentro de cada volume é natural agrupa-los de forma a simplificar a equação.

$$A_N = k_n r_n \frac{\Delta z}{\Delta r} \quad (3.25)$$

$$A_S = k_s r_s \frac{\Delta z}{\Delta r} \quad (3.26)$$

$$A_E = r_p k_e \frac{\Delta r}{\Delta z} \quad (3.27)$$

$$A_W = r_p r k_w \frac{\Delta r}{\Delta z} \quad (3.28)$$

$$A_a = \rho_b c_b w r_p \Delta r \Delta z \quad (3.29)$$

$$A_P = k_n r_n \frac{\Delta z}{\Delta r} + k_s r_s \frac{\Delta z}{\Delta r} + r_p r k_w \frac{\Delta r}{\Delta z} + r_p k_e \frac{\Delta r}{\Delta z} + \rho_b c_b w r_p \Delta r \Delta z \quad (3.30)$$

$$A_P = (A_N + A_S + A_E + A_W + A_a) \quad (3.31)$$

### 3.1.2.3 VOLUMES DE FRONTEIRA

Devido as condições de contorno, a integralização nos volumes de fronteira requer alguns cuidados especiais.

ENTRA FIGURA AQUI

Devido a condição de isolamento térmico na fronteira esquerda, o gradiente de temperatura na face esquerda do volume é nulo. Para os outros gradientes de temperatura, a aproximação escolhida foi a mesma da discretização da equação geral (3.18,3.19,3.21).

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_w = 0 \quad (3.32)$$

Substituindo os gradientes de temperatura na equação 3.16 e agrupando os termos que multiplicam as temperaturas dos volumes, obteve-se a equação a abaixo:

$$k_n r_n \frac{\Delta z}{\Delta r} T_N + k_s r_s \frac{\Delta z}{\Delta r} T_S + r_p k_e \frac{\Delta r}{\Delta z} T_E - \quad (3.33)$$

$$\left( k_n r_n \frac{\Delta z}{\Delta r} + k_s r_s \frac{\Delta z}{\Delta r} + r_p k_e \frac{\Delta r}{\Delta z} + \rho_b c_b w r_p \Delta r \Delta z \right) T_p + \rho_b c_b w r_p \Delta r \Delta z T_a = 0 \quad (3.34)$$

$$A_W = 0 \quad (3.35)$$

$$A_N T_N + A_S T_S + A_E T_E - (A_N + A_S + A_E + A_a) T_P = -A_a T_a \quad (3.36)$$

A outra fronteira lateral segue o mesmo procedimento, porém o gradiente de temperatura nulo é o da face direita.

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=Lz} = \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_e = 0 \quad (3.37)$$

$$k_n r_n \frac{T_N - T_P}{\Delta r} \Delta z - k_s r_s \frac{T_P - T_S}{\Delta r} \Delta z + r_P \Delta r k_w \frac{T_W - T_P}{\Delta z} - \rho_b c_b w [T_a - T_P] r_P \Delta r \Delta z = 0 \quad (3.38)$$

$$A_E = 0 \quad (3.39)$$

$$A_N T_N + A_S T_S + A_W T_W - (A_N + A_S + A_W + A_a) T_P = -A_a T_a \quad (3.40)$$

Para a fronteira inferior o raciocínio é análogo, porém o fluxo de calor vindo da direção sul que é nulo. Dessa forma, a derivada modificada é em relação a variável  $r$ , ao contrário dos casos anteriores.

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_s = 0 \quad (3.41)$$

Logo, a equação discretizada assume a forma a seguir:

$$k_n r_n \frac{T_N - T_P}{\Delta r} \Delta z - r_P \Delta r k_w \frac{T_W - T_P}{\Delta z} - r_P \Delta r k_e \frac{T_P - T_E}{\Delta z} + \rho_b c_b w [T_a - T_P] r_P \Delta r \Delta z = 0 \quad (3.42)$$

$$A_S = 0 \quad (3.43)$$

$$A_N T_N + A_W T_W + A_E T_E - (A_N + A_W + A_E + A_a) T_P = -A_a T_a \quad (3.44)$$

O procedimento para o limite superior é um pouco mais complexo, por ser uma condição de contorno de terceiro tipo, onde o fluxo de calor depende da temperatura do contorno. Por isso, aproximou-se o fluxo de calor na fronteira por uma diferença finita de primeira ordem (3.46). Com essa relação e a condição de contorno, obteve-se a fórmula para a temperatura da fronteira a partir de fatores já conhecidos.

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=Lr} = h(T_\infty - T_f) \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=Lr} = \frac{T_f - T_P}{\Delta r_f} \quad (3.46)$$

$$T_f = \left( h T_\infty - T_P \frac{k}{\Delta r_f} \right) \frac{1}{\frac{k}{\Delta r_f} + h} \quad (3.47)$$

Substituindo a na equação (3.45), obtem-se a expressão da derivada da temperatura na fronteira superior em função dos parâmetros do volume de controle e do ambiente externo.

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=Lr} = \frac{h}{k + h \Delta r_f} (T_\infty - T_P) \quad (3.48)$$

Dessa forma a equação discretizada assume a forma a seguir:

$$k_n r_n \frac{h}{k + h \Delta r_f} (T_\infty - T_P) \Delta z - k_s r_s \frac{T_P - T_S}{\Delta r} \Delta z + r_P \Delta r k_w \frac{T_W - T_P}{\Delta z} - r_P \Delta r k_e \frac{T_P - T_E}{\Delta z} + \rho_b c_b w [T_a - T_P] r_P \Delta r \quad (3.49)$$

Realizando o agrupamento do das constantes que multiplicam as temperaturas, é notável que embora o termo  $A_N$  não apareça na equação, surge um novo termo  $A_c$  relacionado a troca de calor com o ambiente

$$A_N = 0 \quad (3.50)$$

$$A_c = \frac{h}{1 + h \frac{\Delta r}{k_P}} r_n \Delta z \quad (3.51)$$

$$A_S T_S + A_W T_W + A_E T_E - (A_S + A_W + A_E + A_a + A_c) T_P = -A_a T_a - A_c T_\infty \quad (3.52)$$

Devido a geometria do problema e a discretização utilizada, é preciso tomar cuidado com as regiões de encontro das condições de contorno. Os volume de controle posicionados nesses locais necessitam de uma discretização diferente das demais, pois estão em contato com duas condições de contorno ao mesmo tempo, conforme pode ser visto na figura ??.



Para a quina SE, o isolamento térmico na faces sul e leste implica que o gradiente de temperatura nessas faces será nulo.

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_s = 0 \quad (3.53)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=Lz} = \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_e = 0 \quad (3.54)$$

Seguindo o mesmo raciocínio utilizado para as condições de contorno com isolamento termico anteriores, obtem-se a equação discretizada a seguir:

$$A_S = 0 \quad A_E = 0 \quad (3.55)$$

$$A_N T_N + A_W T_W - (A_N + A_W + A_a) T_P = -A_a T_a \quad (3.56)$$

Para a quina SW, o procedimento é análogo, porém as derivadas de temperatura nulas serão as da faces inferior e esquerda.

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_s = 0 \quad (3.57)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_w = 0 \quad (3.58)$$

$$A_S = 0 \quad A_E = 0 \quad (3.59)$$

$$A_N T_N + A_E T_E - (A_N + A_E + A_a) T_P = -A_a T_a \quad (3.60)$$

Norte

$$k \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=Lr} = h(T_\infty - T_f) \quad (3.61)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=Lz} = \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_e = 0 \quad (3.62)$$

$$A_W = 0 \quad A_C = \quad (3.63)$$

$$A_N T_N + A_S T_S + A_W T_W - (A_N + A_S + A_W + A_a) T_P = -A_a T_a \quad (3.64)$$

Sudeste

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=Lz} = \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_e = 0 \quad (3.65)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=Lz} = \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_e = 0 \quad (3.66)$$

$$A_W = 0 \quad A_C = \quad (3.67)$$

$$A_N T_N + A_S T_S + A_W T_W - (A_N + A_S + A_W + A_a) T_P = -A_a T_a \quad (3.68)$$

---

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	
21	
22	
23	
24	
25	
26	
27	
28	
29	
30	
31	
32	
33	
34	
35	
36	
37	
38	
39	

---

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

---

11

12

13

14

15

16

17

18

19

20

---

21

22

23

24

25

26

27

28

29

30

---

31

32

33

34

35

36

37

38

39

## Referências