Blatt 07 - Praktische Optimierung - Adrian Lentz, Robert

Lösungen und Erklärungen für Blatt 07.

\newline

Adrian Lentz - Matrikelnummer: 258882

\newline

Robert Schönewald - Matrikelnummer: 188252

Aufgabe 7.3

In [1]:
```
import numpy as np
import timeit
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy
import statsmodels.api as sm
import statsmodels.distributions.empirical_distribution as edf
from scipy.stats import multivariate_normal
```

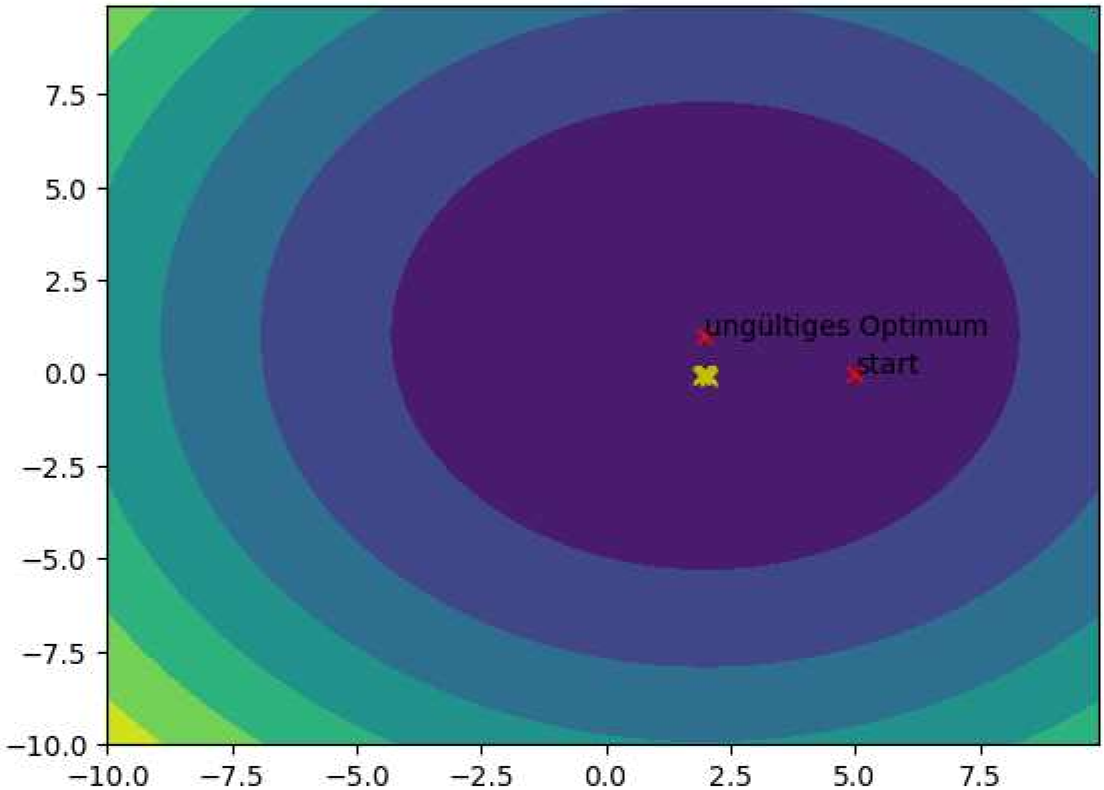
In [2]:
```
#Funktion definieren
def f(x):
    return (x[0]-2)**2 + (x[1]-1)**2
def g1(x):                              #Nebenbedingung 1
    return x[0]**2 - 2*x[0] + x[1]
def g2(x):                              #Nebenbedingung 2
    return -x[0]+x[1]+2
```

In [3]:
```
def seqstraf(f,g1,g2,x0,z1,gamma):
    def T(x):
        return f(x)+z1*(np.max([0,g1(x)]) + np.max([0,g2(x)]))
    #x0=scipy.optimize.minimize(f,x0).x
    while g1(x0)>0 or g2(x0)>0:
        x0=scipy.optimize.minimize(T,x0).x
        z1=gamma*z1
    return x0
```

In [18]:
```
ergebnisse=[]
zlist={0.1 , 0.2 , 0.3 , 0.4 , 0.5 , 0.6 , 0.7 , 0.8 , 0.9 , 1}
gammalist={1.1 , 1.2 , 1.3 , 1.4 , 1.5 , 1.6 , 1.7 , 1.8 , 1.9 , 2}
for gamma in gammalist:
    for z in zlist:
        x0=seqstraf(f,g1,g2,[0,5],z,gamma)
        ergebnisse.append([x0,f(x0),gamma,z])
```

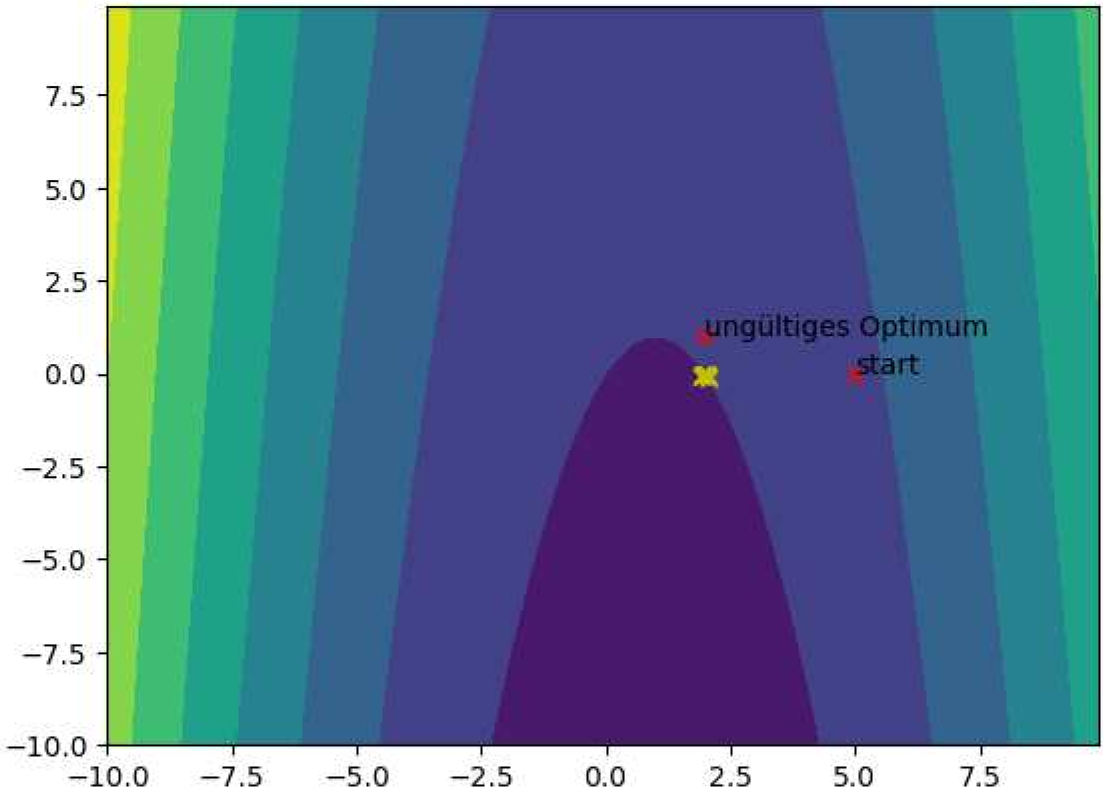
In [19]:
```
x, y = np.mgrid[-10:10:.1, -10:10:.1]
x0=scipy.optimize.minimize(f,[0,5]).x
pos = [x, y]
fig2 = plt.figure()
ax2 = fig2.add_subplot(111)
ax2.contourf(x, y, f(pos))
ax2.text(5,0,"start")
ax2.plot(5,0,"rx")
ax2.text(x0[0],x0[1],"ungültiges Optimum")
ax2.plot(x0[0],x0[1],"rx")
for x in ergebnisse:
```

```
    ax2.plot(x[0][0],x[0][1],"yx")
```

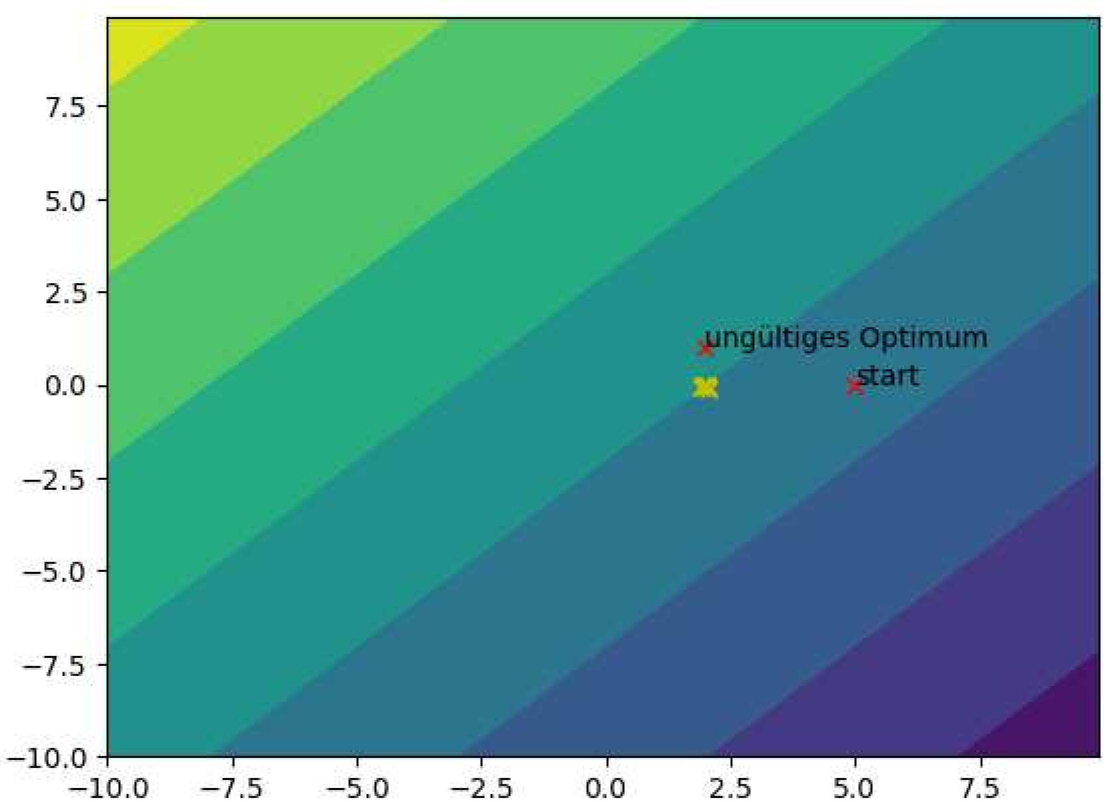


In [20]:

```
x, y = np.mgrid[-10:10:.1, -10:10:.1]
pos = [x, y]
fig2 = plt.figure()
ax2 = fig2.add_subplot(111)
ax2.contourf(x, y, g1(pos))
ax2.text(5,0,"start")
ax2.plot(5,0,"rx")
ax2.text(x0[0],x0[1],"ungültiges Optimum")
ax2.plot(x0[0],x0[1],"rx")
for x in ergebnisse:
    ax2.plot(x[0][0],x[0][1],"yx")
```



In [21]:
```
x, y = np.mgrid[-10:10:.1, -10:10:.1]
pos = [x, y]
fig2 = plt.figure()
ax2 = fig2.add_subplot(111)
ax2.contourf(x, y, g2(pos))
ax2.text(5,0,"start")
ax2.plot(5,0,"rx")
ax2.text(x0[0],x0[1],"ungültiges Optimum")
ax2.plot(x0[0],x0[1],"rx")
for x in ergebnisse:
    ax2.plot(x[0][0],x[0][1],"yx")
```



3.1

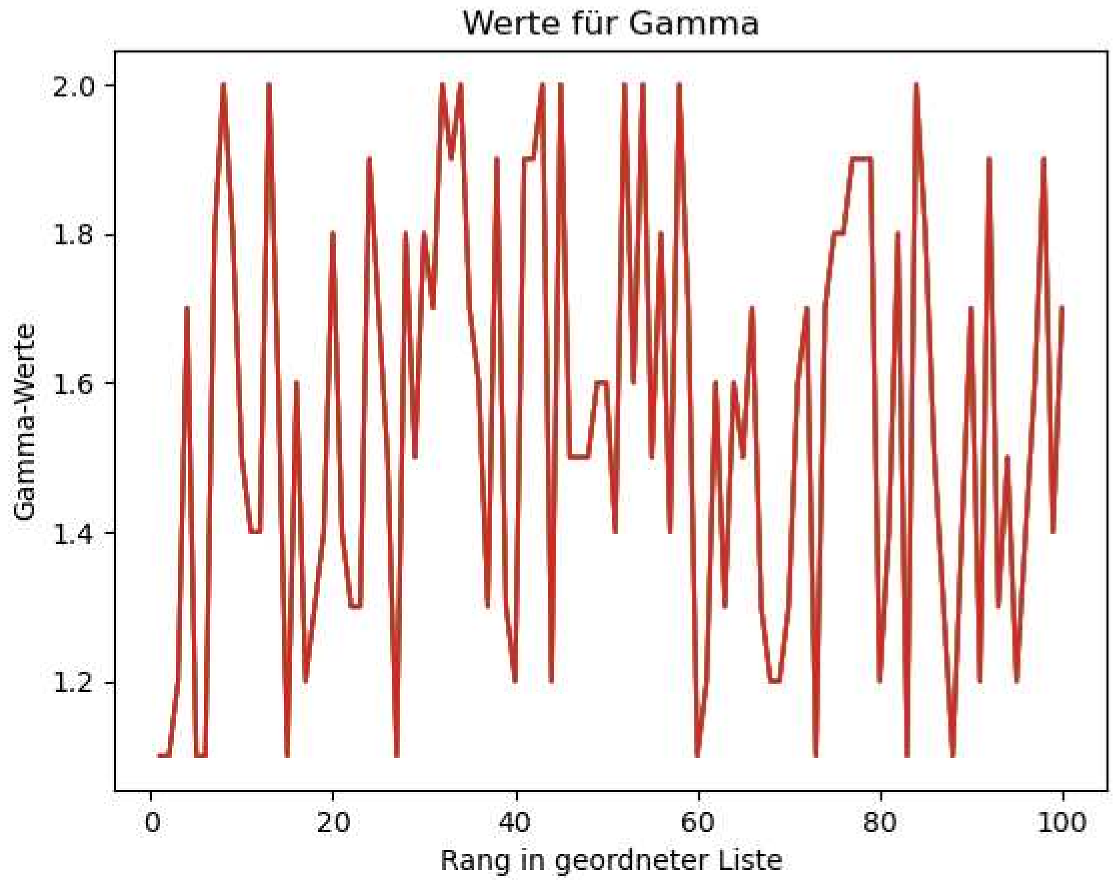
In [24]:
```python
ergebnisse.sort(key=lambda x: x[1])
ergebnisse
```

Out[24]:
```
[[array([ 1.99999999e+00, -1.00736977e-08]), 1.0000000201473953, 1.1, 0.4],
 [array([ 1.99999996e+00, -3.53383355e-08]), 1.000000070676738, 1.1, 0.1],
 [array([ 1.99999976e+00, -2.41409214e-07]), 1.0000004828185438, 1.2, 0.5],
 [array([ 1.99999962e+00, -3.84122652e-07]), 1.0000007682455936, 1.7, 0.2],
 [array([ 1.99999907e+00, -9.28535402e-07]), 1.0000018570725273, 1.1, 0.8],
 [array([ 1.99999872e+00, -1.28502855e-06]), 1.0000025700604092, 1.1, 0.2],
 [array([ 1.99999698e+00, -3.02871753e-06]), 1.0000060574533594, 1.8, 0.8],
 [array([ 1.99999636e+00, -3.64221030e-06]), 1.0000072844471204, 2, 0.9],
 [array([ 1.99999526e+00, -4.74391587e-06]), 1.000009487876683, 1.8, 0.6],
 [array([ 1.99999497e+00, -5.02847625e-06]), 1.0000100570030543, 1.5, 0.2],
 [array([ 1.99999350e+00, -6.50951331e-06]), 1.0000130191113117, 1.4, 0.4],
 [array([ 1.99999146e+00, -8.54345130e-06]), 1.000017087048573, 1.4, 0.2],
 [array([ 1.99998436e+00, -1.56463261e-05]), 1.0000312931415014, 2, 0.8],
 [array([ 1.99997684e+00, -2.31650045e-05]), 1.0000463310819652, 1.6, 0.6],
 [array([ 1.99996570e+00, -3.42989659e-05]), 1.0000686002844985, 1.1, 0.5],
 [array([ 1.99995991e+00, -4.00970440e-05]), 1.0000801973030669, 1.6, 0.5],
 [array([ 1.99994354e+00, -5.64593722e-05]), 1.0001129251196044, 1.2, 0.3],
 [array([ 1.99984823e+00, -1.51770105e-04]), 1.0003035862772136, 1.3, 0.4],
 [array([ 1.99984003e+00, -1.59969083e-04]), 1.0003199893461445, 1.4, 0.5],
 [array([ 2.00007483e+00, -1.84862761e-04]), 1.0003697652974, 1.8, 0.2],
 [array([ 1.99981432e+00, -1.85688803e-04]), 1.000371446563529, 1.4, 0.9],
 [array([ 2.00011633e+00, -2.32681704e-04]), 1.0004654310810377, 1.3, 0.8],
 [array([ 1.99974436e+00, -2.55640072e-04]), 1.0005114108472868, 1.3, 0.9],
 [array([ 2.00012730e+00, -2.73494689e-04]), 1.0005470803814422, 1.9, 0.8],
 [array([ 1.99970795e+00, -2.92055423e-04]), 1.0005842814338575, 1.7, 1],
 [array([ 1.99965271e+00, -3.47299973e-04]), 1.0006948411754277, 1.5, 0.3],
 [array([ 1.99957519e+00, -4.24813979e-04]), 1.0008499888909717, 1.1, 0.6],
 [array([ 1.99952677e+00, -4.73233292e-04]), 1.0009469144813523, 1.8, 0.5],
 [array([ 1.99952323e+00, -4.76771306e-04]), 1.0009539972339734, 1.5, 0.9],
 [array([ 1.9994403e+00, -5.5970469e-04]), 1.0011200359113197, 1.8, 1],
 [array([ 1.99933163e+00, -6.68380950e-04]), 1.0013376553573374, 1.7, 0.3],
 [array([ 1.99934786e+00, -6.98348817e-04]), 1.0013976106174336, 2, 0.1],
 [array([ 1.99927241e+00, -7.27593415e-04]), 1.0014562456052665, 1.9, 0.1],
 [array([ 2.00032508e+00, -7.57551324e-04]), 1.0015157822113425, 2, 0.6],
 [array([ 2.00034246e+00, -7.90918506e-04]), 1.0015825798456612, 1.7, 0.8],
 [array([ 1.99911368e+00, -8.86325043e-04]), 1.0017742212288157, 1.6, 0.7],
 [array([ 1.99905472e+00, -9.45286693e-04]), 1.0018923605171632, 1.3, 0.3],
 [array([ 1.99902642e+00, -9.73578911e-04]), 1.0019490535291435, 1.9, 0.9],
 [array([ 1.99900201e+00, -9.97988825e-04]), 1.00199796960921, 1.3, 0.7],
 [array([ 1.99891558e+00, -1.10573058e-03]), 1.0022138597765546, 1.2, 0.7],
 [array([ 1.99869902e+00, -1.30098399e-03]), 1.0026053530824994, 1.9, 0.3],
 [array([ 1.99835250e+00, -1.64750437e-03]), 1.0033004372722496, 1.9, 0.2],
 [array([ 1.99829988e+00, -1.70012203e-03]), 1.0034060248943397, 2, 0.3],
 [array([ 1.99818217e+00, -1.81782886e-03]), 1.0036422667167528, 1.2, 0.4],
 [array([ 2.00075457, -0.00200946]), 1.0040235254253203, 2, 0.4],
 [array([ 1.99790913, -0.00209088]), 1.0041904961189503, 1.5, 0.1],
 [array([ 1.99759995, -0.00240005]), 1.0048116172967079, 1.5, 0.4],
 [array([ 1.99733753, -0.00266248]), 1.0053391284328148, 1.5, 1],
 [array([ 1.99728065, -0.00271935]), 1.0054534953833016, 1.6, 0.2],
 [array([ 2.00162745, -0.00355957]), 1.0071344687414054, 1.6, 0.3],
 [array([ 1.99632781, -0.00367219]), 1.0073713585500466, 1.4, 0.1],
 [array([ 2.00190564, -0.00397859]), 1.0079766371520735, 2, 1],
 [array([ 1.99578649, -0.00421352]), 1.008462543178847, 1.6, 0.8],
 [array([ 1.99570777, -0.00429223]), 1.0086213019868981, 2, 0.7],
 [array([ 1.99541377, -0.00458623]), 1.0092145353697735, 1.5, 0.5],
 [array([ 1.99528485, -0.00471516]), 1.0094747762401322, 1.8, 0.4],
 [array([ 1.99446015, -0.00553985]), 1.011141087490789, 1.4, 0.7],
 [array([ 1.99427586, -0.00572414]), 1.0115138093157443, 2, 0.2],
 [array([ 1.99353949, -0.00646051]), 1.0130044944011949, 1.7, 0.5],
 [array([ 1.99328011, -0.0067199 ]), 1.0135301043148242, 1.1, 0.7],
 [array([ 1.99272193, -0.00727807]), 1.0146620818171828, 1.2, 0.6],
 [array([ 1.99255945, -0.00744056]), 1.014991837852075, 1.6, 1],
```

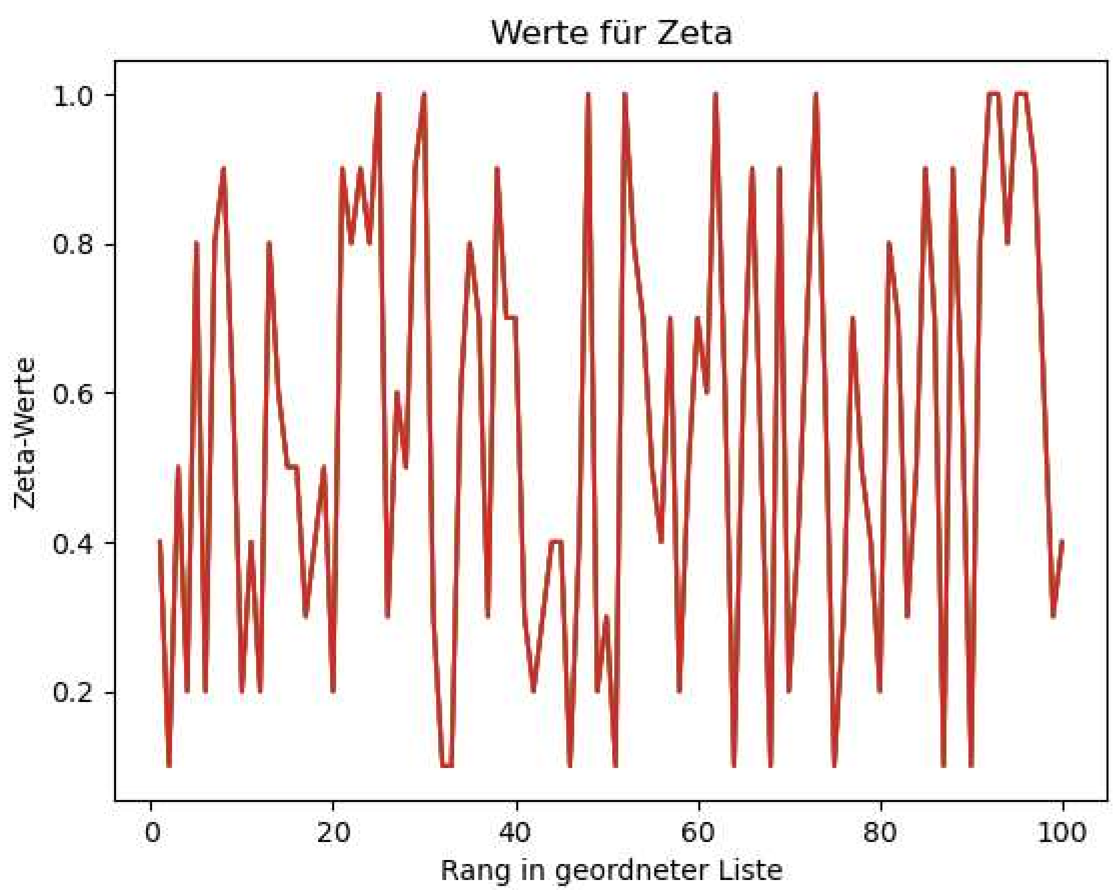
```
 [array([ 2.00343391, -0.00774604]), 1.0155638675249807, 1.3, 0.6],
 [array([ 1.99157162, -0.00842838]), 1.0169988407667816, 1.6, 0.1],
 [array([ 1.99146205, -0.00853795]), 1.01722170324762, 1.5, 0.6],
 [array([ 2.00430242, -0.00876925]), 1.0176339081877754, 1.7, 0.9],
 [array([ 2.00473863, -0.00969202]), 1.0195004295196177, 1.3, 0.5],
 [array([ 1.98879994, -0.01120007]), 1.0226510141474243, 1.2, 0.1],
 [array([ 1.98829247, -0.01170753]), 1.0236891921291182, 1.2, 0.9],
 [array([ 1.98815581, -0.01184419]), 1.0239689597481512, 1.3, 0.2],
 [array([ 1.98777061, -0.01222939]), 1.0247578954119887, 1.6, 0.4],
 [array([ 1.9900245 , -0.01298536]), 1.0262388540671448, 1.7, 0.7],
 [array([ 2.00631548, -0.01337918]), 1.026977246491478, 1.1, 1],
 [array([ 1.9866098, -0.0133902]), 1.0271389943835936, 1.7, 0.6],
 [array([ 1.98533711, -0.01466289]), 1.0297557788018885, 1.8, 0.1],
 [array([ 1.98292512, -0.01707488]), 1.034732872338242, 1.8, 0.3],
 [array([ 1.98113675, -0.01886325]), 1.038438153406618, 1.9, 0.7],
 [array([ 1.97601109, -0.02398891]), 1.0491287616575402, 1.9, 0.5],
 [array([ 1.97515733, -0.02484267]), 1.0509196501458056, 1.9, 0.4],
 [array([ 1.974469, -0.025531]), 1.0523656591631645, 1.2, 0.2],
 [array([ 1.97305721, -0.02694279]), 1.05533740390435, 1.4, 0.8],
 [array([ 1.9722964, -0.0277036]), 1.05694218731795, 1.8, 0.7],
 [array([ 1.97090109, -0.02909892]), 1.059891326622797, 1.1, 0.3],
 [array([ 2.01444692, -0.02990208]), 1.0609069988372954, 2, 0.5],
 [array([ 1.96872655, -0.03127345]), 1.0645029660418543, 1.8, 0.9],
 [array([ 1.96566845, -0.03433155]), 1.0710204129472536, 1.5, 0.7],
 [array([ 1.96281771, -0.03718229]), 1.0771296233201737, 1.3, 0.1],
 [array([ 1.96275763, -0.03724237]), 1.0772587387062518, 1.1, 0.9],
 [array([ 2.01865091, -0.03873169]), 1.0793113816244284, 1.4, 0.6],
 [array([ 1.96152569, -0.03847432]), 1.0799091779804593, 1.7, 0.1],
 [array([ 2.0182824 , -0.03923416]), 1.0803418801201785, 1.2, 0.8],
 [array([ 2.01943519, -0.03946535]), 1.0808659407556234, 1.9, 1],
 [array([ 1.95463728, -0.04536273]), 1.0948410153689667, 1.3, 1],
 [array([ 2.02295921, -0.04741065]), 1.0975961963733938, 1.5, 0.8],
 [array([ 1.95239933, -0.04760068]), 1.0997330028613428, 1.2, 1],
 [array([ 1.95203546, -0.04796455]), 1.1005302860297437, 1.4, 1],
 [array([ 1.92327504, -0.07672496]), 1.1652233702298158, 1.6, 0.9],
 [array([ 2.04821798, -0.10051533]), 1.2134589724499516, 1.9, 0.6],
 [array([ 1.90162566, -0.09837434]), 1.2161036988397553, 1.4, 0.3],
 [array([ 2.06838372, -0.14404263]), 1.3135098785734094, 1.7, 0.4]]
```

Man erkennt an der oben sortierten Liste, dass der beste Wert von f der erreicht wird 1.0000000201473953 ist mit gamma=1.1 und zeta=0.4, während die schlechteste Konfiguration gamma=1.7 und zeta=0.4 ist mit einem Wert von 1.3135098785734094. Insbesondere fällt auf, dass beide einen zeta-Wert von 0.4 haben. Zusätzlich sind beinahe alle Werte nah aneinander, wie im Diagramm sichtbar.

In [35]:
```
plt.xlabel("Rang in geordneter Liste")
plt.ylabel("Gamma-Werte")
plt.title("Werte für Gamma")
for i in range(len(ergebnisse[0])):
    plt.plot(list(range(1,101)),[pt[2] for pt in ergebnisse])
plt.show()
```



In [34]:
```
plt.xlabel("Rang in geordneter Liste")
plt.ylabel("Zeta-Werte")
plt.title("Werte für Zeta")
for i in range(len(ergebnisse[0])):
    plt.plot(list(range(1,101)),[pt[3] for pt in ergebnisse])
plt.show()
```



Hier sieht man noch einmal deutlicher, dass die Parameter kaum eine Auswirkung auf die Qualität der Berechnung haben.

In [ ]:
```

```

Blatt 07 - Praktische Optimierung - Adrian Lentz, Robert

Lösungen und Erklärungen für Blatt 07.

\newline

Adrian Lentz - Matrikelnummer: 258882

\newline

Robert Schönewald - Matrikelnummer: 188252

Aufgabe 7.1

Es soll die Funktion: $f(x,y) = x \cdot y$ unter der Nebenbedingung: $x - y = 3$ optimiert werden. \newline

Dabei kann durch das Verfahren der Elimination der Variable, die Funktion geschrieben werden als: \newline

$x = y + 3$ \newline $f(y+3,y) = (y+3) \cdot y$ \newline $f(y+3,y) = y^2 + 3 \cdot y$ \newline

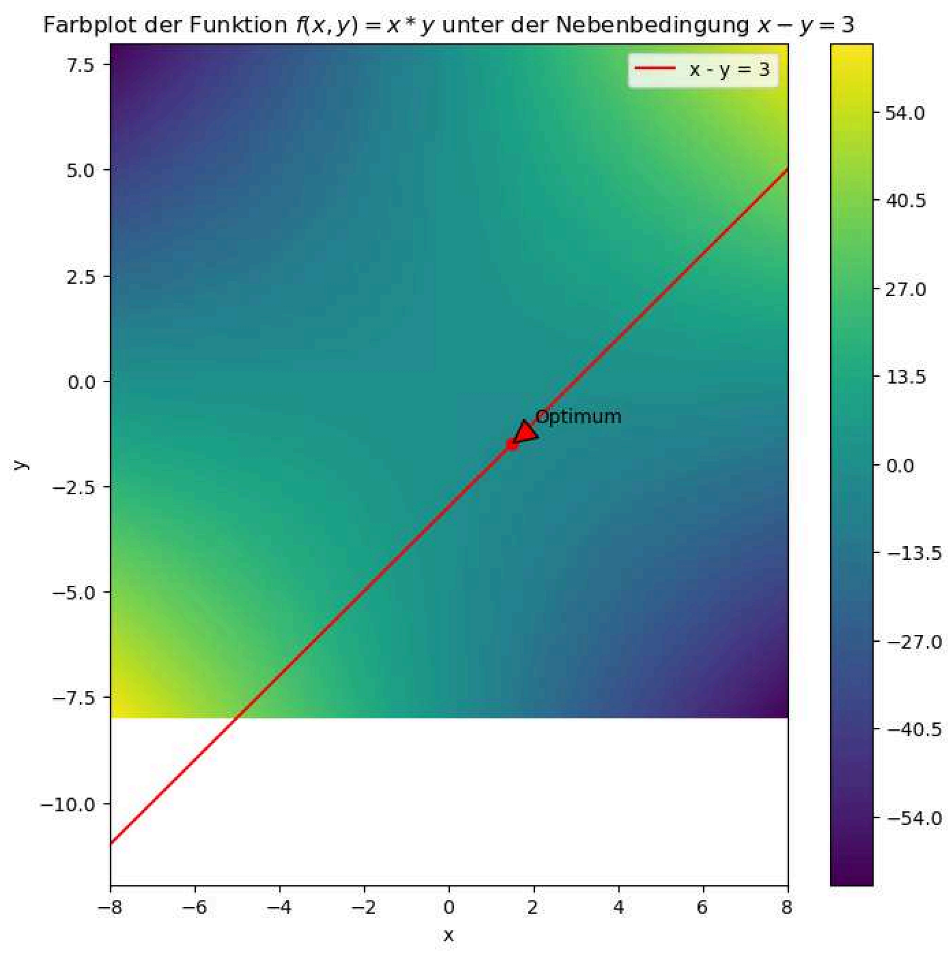
Es zeigt sich hierdurch, dass die Optimierung analytisch lösbar ist, weswegen im nächsten Schritt die Ableitung berechnet wird: \newline

$\frac{d}{dy}(y^2 + 3y) = 2y + 3$ \newline $2y + 3 = 0$ \newline $y = -\frac{3}{2}$ \newline

Einsetzen in die Nebenbedingung: \newline $x = -\frac{3}{2} + 3 = \frac{3}{2}$ \newline

Somit liegt das Optimum bei : $(x,y) = (\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$ und der Funktionswert $f(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}) = -\frac{9}{4}$ \newline

In [1]:
```python
'Grafische Darstellung der Funktion unter der Nebenbedingung'
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x, y):
    return x * y

x = np.linspace(-8, 8, 400)
y = np.linspace(-8, 8, 400)
X, Y = np.meshgrid(x, y)
Z = f(X, Y)

optimum_x = 3/2
optimum_y = -3/2
optimum_z = f(optimum_x, optimum_y)

# Plot erstellen
plt.figure(figsize=(8, 8))
cp = plt.contourf(X, Y, Z, levels=100, cmap='viridis')
plt.colorbar(cp)

# Nebenbedingung
x_constraint = np.linspace(-8, 8, 400)
y_constraint = x_constraint - 3
plt.plot(x_constraint, y_constraint, 'r-', label='x - y = 3')

# Optimum
plt.plot(optimum_x, optimum_y, 'ro')
plt.annotate('Optimum', xy=(optimum_x, optimum_y), xytext=(optimum_x + 0.5, optimum_y + 0.5),
             arrowprops=dict(facecolor='red', shrink=0.05))

plt.title('Farbplot der Funktion $f(x, y) = x*y$ unter der Nebenbedingung $x - y = 3$')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.legend()

plt.show()
```



Die Abbildung zeigt eine Farbcodierte Karte der Funktion, sodass hohe Werte in dunkel blauen Bereichen zu erkennen sind und niedrige Funktionswerte in hell grünen Bereichen. Zudem ist die Nebenbedingung als rote Linie eingezeichnet und das berechnete Optimum. \newline Der untere Bereich in der Abbildung ist leider nicht eingefärbt, jedoch liegt dieser bereits relativ weit entfernt vom Optimum.

Aufgabe 7.2

In [2]:
```python
import numpy as np

LOWER = -10
UPPER = 10

# Zielfunktion f:
def f(x):
    return x[0]**3 * np.sin(x[0]-1) - x[1]**3 * np.cos(x[1])
```

In [3]:
```python
'Reparatur-Methoden'
def repair_to_bounds(x, LOWER, UPPER): #Falls Wert kleiner/größer als Grenze ist , wird auf Grenzwert gesetzt
    return np.maximum(np.minimum(x, UPPER), LOWER)

def repair_modulo(x, LOWER, UPPER):  #Differenz zwischen den Wert und der Grenze wird durch Modulo-Operator berechnet und auf die untere Grenze addiert
    return LOWER + np.mod(x - LOWER, UPPER - LOWER)

def repair_reflect(x, LOWER, UPPER):
    while np.any(x < LOWER) or np.any(x > UPPER):  #Wenn Wert kleiner/größer als untere/obere Grenze ist, wird Wert gespiegelt an die jeweilige Grenze
        x = np.where(x < LOWER, LOWER + (LOWER - x), x)
        x = np.where(x > UPPER, UPPER - (x - UPPER), x)
    return x
```

In [4]:
```python
# (1 + lambda)-EA:
def one_lambda_ea(f, lambda_val, parent,
                  lower, upper, method="plus",
                  sigma0=5, tau=0.1, evals=100,repair_method='bounds'):  #Anpassung der Parameter

    # initialize values:
    fitness_p = f(parent)
    evals -= 1

    repair_functions={"bounds":repair_to_bounds, "modulo":repair_modulo, "reflect":repair_reflect}   #Auswahl der verschiedenen Reparatur-Methoden

    repair=repair_functions[repair_method]

    while evals > 0:
        # schwefel method:
        sigma0 *= np.exp(np.random.normal(loc=0, scale=tau))
        lambda_val = min(lambda_val, evals)
        children = parent + sigma0 * np.random.normal(size=(lambda_val, len(parent)))

        for i in range(len(children)):
            children[i]=repair(children[i],lower,upper)

        # evaluate children:
        fitness_c = np.apply_along_axis(f, 1, children)
        evals -= lambda_val

        # selection for next generation:
        if method == "plus":   #Es wird immer plus-Methode gewählt
            population = np.concatenate(
                (np.expand_dims(parent, axis=0), children))
            fitness_all = np.concatenate(
                (np.array([fitness_p]), fitness_c))
            min_ind = np.argmin(fitness_all)
            parent = population[min_ind]
            fitness_p = fitness_all[min_ind]
        else:
            min_ind = np.argmin(fitness_c)
            parent = children[min_ind]
            fitness_p = fitness_c[min_ind]

    # return best values found:
    return {'x': parent, 'fx': fitness_p}
```

In [5]:
```python
# Test the EA-Algorithm (alt)
one_lambda_ea(f, 2, [0,0], LOWER, UPPER, 'plus', 0.1, 1.0)
```

Out[5]:
```
{'x': array([6.36390341, 6.16994149]), 'fx': -438.31493003675416}
```

In [6]:
```python
from itertools import product

# 20 gleichverteilte Startwerte (Ur-Eltern) ziehen
np.random.seed(123)
start_values = np.random.uniform(LOWER, UPPER, size=(20,2))

# Parameterkombinationen:
lambda_vals = [5]
sigma0_vals = [5]
tau_vals = [0.1]
methods = ["plus"]
repair_method=["bounds","modulo","reflect"]

params = list(product(lambda_vals, sigma0_vals, tau_vals, methods,repair_method))
```

In [7]:
```python
# Ergebnisliste:
results = []

# Optimierung für jede Parameterkombination:
for lambda_val, sigma0, tau, method, repair_method in params:
    fxs = []
    # Optimierung für 20 zufällige Startwerte, 20 Wdhl.
    for start in start_values:
        for _ in range(20):
            result = one_lambda_ea(f, lambda_val, start,
                                   LOWER, UPPER, method,
                                   sigma0, tau,repair_method=repair_method)
            fxs.append(result['fx'])
    # Median der erreichten Zielfunktionswerte berechnen:
    median_fx = np.median(fxs)
    min_fx = np.min(fxs)
    max_fx = np.max(fxs)
    results.append({'lambda': lambda_val, 'sigma0': sigma0,
                    'tau': tau, 'method': method, 'repair_method':repair_method,
                    'median_fx': median_fx,
                    'min_fx': min_fx, 'max_fx': max_fx})
```

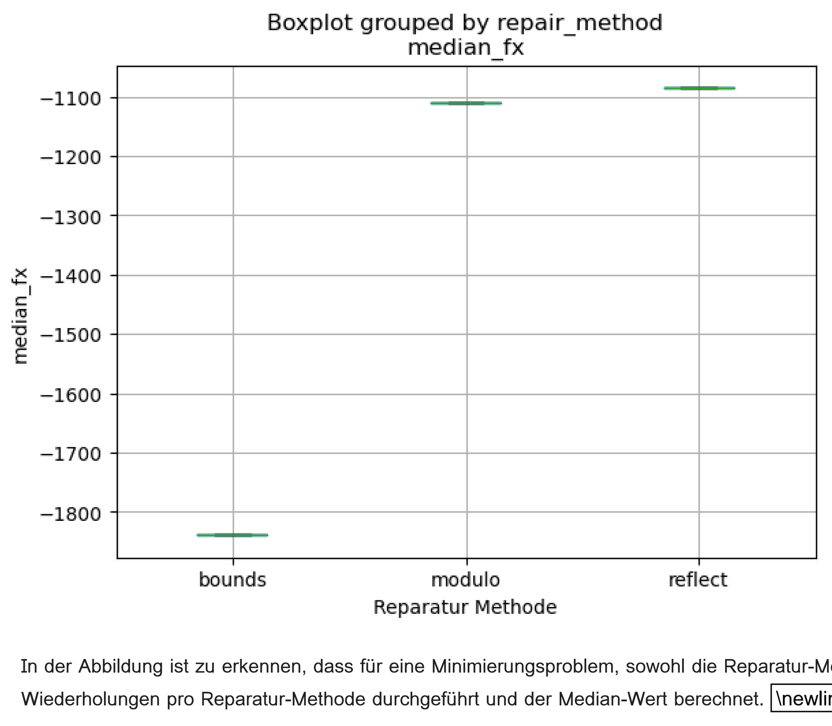
In [8]:
```python
import pandas as pd

df_results = pd.DataFrame(results)\
    .sort_values(by=['median_fx'])\
    .applymap(lambda x: x if type(x) is str else np.round(x, 2))
df_results
```

```
/tmp/ipykernel_7033/3668739317.py:5: FutureWarning: DataFrame.applymap has been deprecated. Use DataFrame.map instead.
  .applymap(lambda x: x if type(x) is str else np.round(x, 2))
```

Out[8]:

	lambda	sigma0	tau	method	repair_method	median_fx	min_fx	max_fx
0	5	5	0.1	plus	bounds	-1839.06	-1878.60	-316.09
1	5	5	0.1	plus	modulo	-1110.95	-1869.40	-719.33
2	5	5	0.1	plus	reflect	-1085.16	-1877.79	-285.32

In [9]:
```python
import matplotlib.pyplot as plt

# Erstellung des Boxplots
df_results.boxplot(column='median_fx', by='repair_method')
plt.xlabel('Reparatur Methode')
plt.ylabel('median_fx')

# Anzeige des Boxplots
plt.show()
```



In der Abbildung ist zu erkennen, dass für eine Minimierungsproblem, sowohl die Reparatur-Methode des Modulo-Operator, als auch die Achsenspiegelung bessere median-Werte erzielen, als die Reparatur-Methode des Randes. \newline Hierbei würden jeweils 20 zufällige Startwerte und 20 Wiederholungen pro Reparatur-Methode durchgeführt und der Median-Wert berechnet. \newline Für diese eine festgelegte Parameter Kombination, scheint die Reparatur-Methode des Randes nicht optimal zu sein. \newline Ein mögliches Problem der Achsenspiegelung wäre eine Endlosschleife, wenn die reflektierten Werte immer außerhalb des Grenzbereichs liegen würden.

In [ ]:

```

```

Index der Kommentare

3.1 Insgesamt sieht die Implementierung richtig aus. Ich ziehe einen Punkt ab, weil ich die Plots nicht nachvollziehen kann. Besser wären Höhenlinien und das Einzeichnen der Nebenbedingung.

8.1 Die Abbildung ist nicht optimal.
Höhenlinien wären besser geeignet zum Auswerten.

0,5 Punkt Abzug

8.2 gut erkannt!

8.3 geht auch ohne Schleife

8.4 am besten alle Ergebnisse zu den Startpunkten aufnehmen

dann hat der Boxplot auch mehr als einen Wert zum Arbeiten