Mathematik 1 für Informatik

3. Übungsblatt

Relationen

Die mit **T** markierten Aufgaben bzw. Aufgabenteile werden im Tutorium besprochen.
Für diese werden keine Lösungsvorschläge herausgegeben.

Aufgabe 3.1

Relationale Datenbanken gehen auf E. F. Codd zurück. Studieren Sie Literatur im Internet, insbesondere

- die Originalarbeit aus dem Jahr 1970:

  `http://www.seas.upenn.edu/~zives/03f/cis550/codd.pdf`

- den Wikipedia-Eintrag *Relationale Datenbank*:

  `http://de.wikipedia.org/wiki/Relationale_Datenbank`

- den Wikipedia-Eintrag *Relationale Algebra*:

  `http://de.wikipedia.org/wiki/Relationale_Algebra`

T Aufgabe 3.2

Eine binäre Relation $\mathcal{R}$ auf einer Menge M heißt *Ordnungsrelation*, wenn für alle $x, y, z \in M$ gilt:

- Reflexivität: $x \mathrel{\mathcal{R}} x$,
- Antisymmetrie: $x \mathrel{\mathcal{R}} y \wedge y \mathrel{\mathcal{R}} x \Longrightarrow x = y$,
- Transitivität: $x \mathrel{\mathcal{R}} y \wedge y \mathrel{\mathcal{R}} z \Longrightarrow x \mathrel{\mathcal{R}} z$.

Welche der folgenden binären Relationen ist eine Ordnungsrelation:

(a) $x \mathrel{\mathcal{R}} y :\Longleftrightarrow x \leq y$ auf $\mathbb{R}$.

(b) $x \mathrel{\mathcal{R}} y :\Longleftrightarrow x < y$ auf $\mathbb{R}$.

(c) $x \mathrel{\mathcal{R}} y :\Longleftrightarrow x \mid y$ auf $\mathbb{N}$.

Hierbei bedeutet für zwei natürliche Zahlen x *teilt* y, notiert als $x \mid y$, dass ein $n \in \mathbb{N}$ mit $y = xn$ existiert.

(d) $A \mathrel{\mathcal{R}} B :\Longleftrightarrow A \subseteq B$ auf der Potenzmenge $\mathfrak{P}M$ einer beliebigen Menge M.

Aufgabe 3.3

Studieren Sie die Dokumentation der Methode `compareTo` der Programmiersprache Java, siehe https://docs.oracle.com/en/java/javase/17/docs/api/java.base/java/lang/Comparable.html#compareTo(T).

Betrachten Sie die daraus resultierenden Relationen:

$$\begin{aligned} x \approx y &:\Longleftrightarrow x.\texttt{compareTo}(y) = 0 \\ x \succ y &:\Longleftrightarrow x.\texttt{compareTo}(y) > 0 \end{aligned}$$

und die sich daraus ergebende Relation

$$x \succcurlyeq y :\Longleftrightarrow (x \succ y \vee x \approx y) \Longleftrightarrow x.\texttt{compareTo}(y) \geq 0.$$

(a) Untersuchen Sie die Relation $\approx$ hinsichtlich der Eigenschaften einer Äquivalenzrelation (siehe Vorlesung) und einer Ordnungsrelation (siehe Aufgabe 3.2).

Interpretieren Sie Ihr Ergebnis bezugnehmend zur Tatsache, dass ein Gleichheitsoperator $x = y$ stets sowohl eine Ordnungs- wie auch eine Äquivalenzrelation darstellt.

(b) Untersuchen Sie die Relation $\succcurlyeq$ hinsichtlich der Eigenschaften einer Ordnungsrelation. Trifft das Ergebnis Ihre Erwartungen?

(Hinweis: $x \succcurlyeq y \wedge y \succcurlyeq x \Longrightarrow x \approx y \not\Longrightarrow x = y$.)

Aufgabe 3.4

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sollen in einer beliebigen Programmiersprache als Paare aus $Q := \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ implementiert werden: (a, b) steht hierbei für den Bruch $\frac{a}{b}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Relation

$$(a, b) \sim (c, d) :\Longleftrightarrow ad = cb$$

eine Äquivalenzrelation auf Q definiert.

(b) Bestimmen Sie die Klasse in Q zur rationalen Zahl 0 bzw. zur rationalen Zahl 1.

(c) Wie sieht allgemein eine Klasse zur rationalen Zahl $\frac{x}{y}$ aus? Gibt es einen besonders schönen Repräsentanten? (Tip: Kürzen, so dass Zähler und Nenner teilerfremd sind.)

Aufgabe 3.5

Unter einer Funktion f versteht man eine Vorschrift, die jedem Element x einer Definitionsmenge D genau ein Element einer Zielmenge Z, den sog. Funktionswert $f(x)$, zuordnet:

$$\begin{aligned} f\colon D &\longrightarrow Z \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Funktionen und Relationen stehen in einem engen Zusammenhang.

(a) Zeigen Sie, dass durch

$$\mathcal{F} := \{(x, y) \mid x \in D, y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

eine Relation auf $D \times Z$ definiert wird. Man nennt $\mathcal{F}$ den Graphen der Funktion f.

(b) Skizzieren Sie die Graphen $\mathcal{F}$ der nachfolgenden Funktionen f jeweils in ein Koordinatensystem, indem Sie auf der waagrechten Achse x und auf der senkrechten Achse den zugehörigen Funktionswert $f(x)$ auftragen:

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^3\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^3 - x\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \mathrm{e}^x\end{aligned}$$

(c) Eine Funktion $f\colon D \longrightarrow Z$ heißt

- injektiv, wenn für alle $x, x' \in D$ aus $x \neq x$ stets $f(x) \neq f(x')$ folgt,
- surjektiv, wenn für alle $y \in Z$ ein $x \in D$ mit $f(x) = y$ existiert,
- bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Zeigen Sie, dass eine Funktion genau dann bijektiv ist, wenn es zu jedem $y \in Z$ genau ein $x \in D$ mit $f(x) = y$ gibt.

Welche der vier Funktionen aus Teil (b) besitzt welche dieser Eigenschaften? (Es genügen plausible Begründungen.)

(d) Jeder Funktion f lässt sich nach Teil (a) eine Relation $\mathcal{F}$, den Graphen, zuordnen. Jedoch stammt nicht jede Relation von einer Funktion. Geben Sie ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür an, dass eine Relation $\mathcal{R} \subseteq D \times Z$ tatsächlich der Graph einer Funktion $D \longrightarrow Z$ ist.

Skizzieren Sie die Menge $\mathcal{R} := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^2 = x^4\}$, und zeigen Sie, dass es sich hierbei nicht um den Graphen einer Funktion handelt.

Aufgabe 3.6

Eine Relation $\mathcal{R}$ auf einer Menge M heißt *vollständig*, wenn für alle $x, y \in M$ gilt: $x \mathrel{\mathcal{R}} y \vee y \mathrel{\mathcal{R}} x$.

Welche der Relationen aus Aufgabe 3.2 ist vollständig (Beweis), welche nicht (Gegenbeispiel)?

Hinweis: Sie dürfen bei Teil (a) voraussetzen, dass sich die reellen Zahlen (auf einer Zahlengeraden) anordnen lassen. (Ein tieferer Beweis, warum dies so ist, muss hier nicht erbracht werden.)