# Theoretische Informatik

## Allgemeine Informatik
## Medizinische Informatik
## Technische Informatik

Prof. Dr. Wolfgang Mauerer
wolfgang.mauerer@oth-regensburg.de

OSTBAYERISCHE
TECHNISCHE HOCHSCHULE
REGENSBURG
LABOR FÜR
DIGITALISIERUNG

# Inhalt

# Dozent

## OTH Regensburg

- Professor für theoretische Informatik
- Leiter Labor für Digitalisierung
- Direktor Regensburg Centrer for Artificial Intelligence
- Aktuelle Forschungsprojekte (siehe `www.lfdr.de`)
  - TAQO-PAM
  - QLindA
  - QGate
  - JailV

## Previous: Industrie

- Linux (Kernel, Low-Level)
- Harte Echtzeit (MRT, Simatic, Àndroit, …)
- Statistik und maschinelles Lernen für SW-Architektur: `github.com/lfd`
- Früher: MPL (QIT, QED)

### Scheinkriterien: Das wichtigste am Anfang

- Klausur (90min) am Ende des Semesters
- Keine Hilfsmittel
- Material der gesamten Vorlesung relevant (orientiert sich an Übungsaufgaben).

### Post-Corona-Modus

- Videoaufzeichungen online
- Tutorien in Präsenz

# Übungen I

## Übungsaufgaben

- Neues Übungsblatt jede Woche am Freitag.
- Bearbeitung *vor*, in und *nach* den Übungen
- Abgabe in *fixen* Zweiergruppen erlaubt
  - Elektronisch im GRIPS-System
  - Deadline: Montag eine Woche später, 23:59 Uhr
- Mindestens 50% der Aufgaben müssen abgegeben und positiv votiert worden sein!
  - Positiv votieren = Sie gehen nachvollziehbar davon aus, dass Sie die Aufgabe korrekt bearbeitet haben
  - Lösung muss nicht perfekt sein
  - *Jeder* Student muss *einzeln* votieren (auch bei Bearbeitung in Zweiergruppe)

# Übungen II

## IN

| *Gruppe* | *Tag* | *Uhrzeit* | *Raum* | *Betreuer* |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Mo | 15:30–17:00 | K017 | H. Safi, M. Sc. |
| 2 | Mo | 15:30–17:00 | K016 | M. Hoppmann, M. Sc. |
| 3 | Di | 13:45–15:15 | K015 | L. Schmidbauer, B. Sc. |

## IT

| *Gruppe* | *Tag* | *Uhrzeit* | *Raum* | *Betreuer* |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Mo | 15:30–11:30 | K014 | H. Safi, M. Sc. |
| 2 | Di | 11:45–13:15 | K002 | L Schmidbauer, B. Sc. |
| 3 | Fr | 08:15–09:45 | K015 | M. Hoppmann |

## Start Übungsbetrieb

- Der Übungsbetrieb startet in KW41

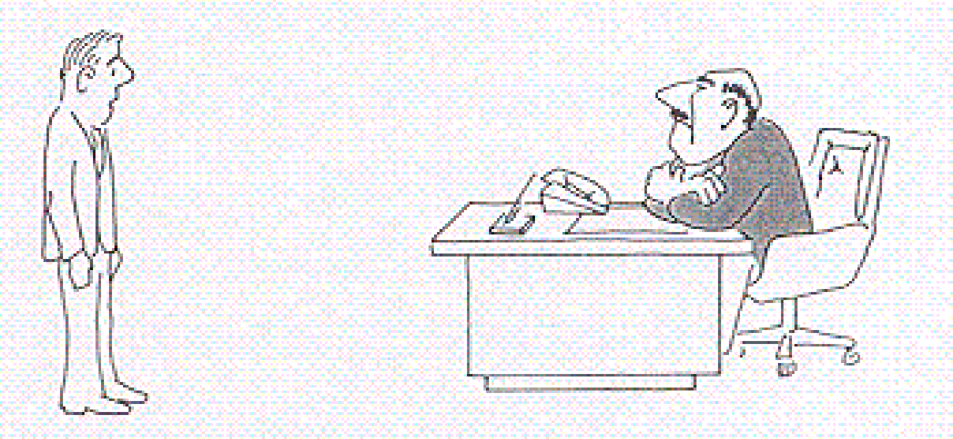
## Zeitaufwand

- Definiert im *Modulhandbuch*
- 6 SWS ☞ 240h Arbeitsaufwand
- Ca. 90h Vorlesung und Übungen, ca. 150h Eigenstudium
- Selbständige Beschäftigung erwünscht und *notwendig*!

## Modus Operandi

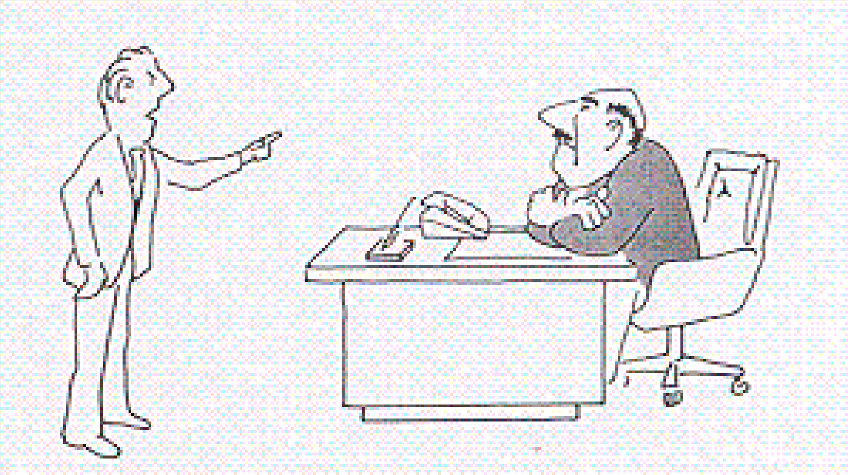
- Virtuelle Vorlesung (Videoaufzeichnung)
- Begleitendes Skript
- Sporadische Zentralübungen nach Notwendigkeit
- Präsenz- und virtuelle synchrone Übungen (*nicht* aufgezeichnet)

## Probleme (nicht)lösen



Bildquelle: Garey and Johnson, *Computers and Intractibility*

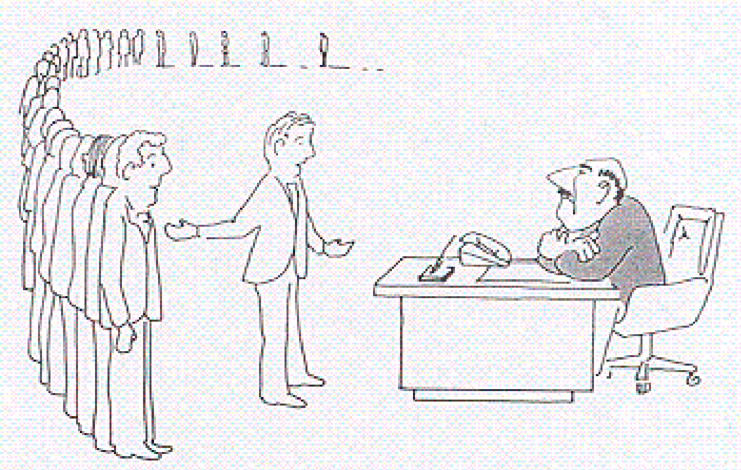
## Probleme (nicht)lösen



Bildquelle: Garey and Johnson, *Computers and Intractibility*

# Warum noch mehr Theorie?

## Probleme (nicht)lösen



Bildquelle: Garey and Johnson, *Computers and Intractibility*

# Was ist Informatik I

**E. W. Dijkstra**

»In der Informatik geht es genauso wenig um Computer, wie in der Astronomie um Teleskope.«

# Was ist Informatik II

## Taschenbuch der Informatik

»Wissenschaft, die sich mit den *theoretischen Grundlagen*, den Mitteln und Methoden sowie mit der Anwendung der elektronischen Datenverarbeitung (EDV) beschäftigt, d.h. mit allen Aspekten der Informationsverarbeitung unter Einsatz von Computern einschließlich ihres Einflusses auf die Gesellschaft.«

## Etymologie

- Informatik = *Infor*mation und Mathe*matik*
- Dipl. Ing. ≠ Dipl. Inf.
- Verstehen *und* anwenden!

# Was ist Theorie? I

## Was ist Theorie?

- (Vereinfachtes) Modell der Realität
- Erklärung einer möglichst großen Klasse von Phänomenen mit einer möglichst geringen Anzahl von Annahmen
- Quantitative, verifizierbare Prognosen

## Theorie-Missbrauch

- »Meiner Theorie nach wird Deutschland Weltmeister!«
- »Theorien zur Scheidung von ⟨Promi xyz⟩«
- »Das funktioniert in der Theorie«
- I. Kant (1793): *Über den Gemeinspruch: Das mag in der Theorie richtig sein, taugt aber nicht für die Praxis*

# Was ist Theorie? I

## Was ist Theorie?

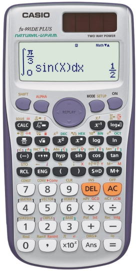
- (Vereinfachtes) Modell der Realität
- Erklärung einer möglichst großen Klasse von Phänomenen mit einer möglichst geringen Anzahl von Annahmen
- Quantitative, verifizierbare Prognosen

## Was ist Theorie *nicht*?

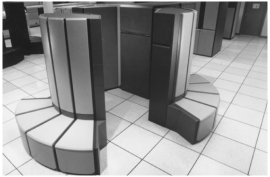
- Politisch
- Unfehlbar
- Frei von Kontroversen und Skeptizismus

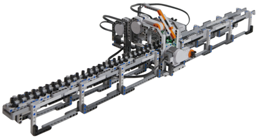
# Was ist Theorie? II

## Welcher Rechner kann mehr als andere?










# Themen der Vorlesung I

## Themengebiete

- Formale Sprachen und Automatentheorie
- Berechenbarkeitstheorie
- Komplexitätstheorie

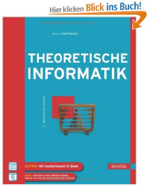
# Themen der Vorlesung II

## Fragestellungen

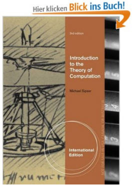
- Welche Aufgaben kann ein Computer lösen, welche nicht?
- Kann jeder Computer die gleichen Problem lösen?
- Wie kann man einen Computer mathematisch definieren?
- *Was ist ein Computer?*
- Welche Funktionen sind berechenbar, welche nicht?
- Was ist formal ein Algorithmus?
- Rechenzeit/Speicherplatz?
- Klassifikation von Problemen?
- Welche Teile der Informatik sind »zeitlos« gültig (und nicht nach zwei Handygenerationen veraltet)?

# Literatur I

- Dirk W. Hoffmann, *Theoretische Informatik*, 2. Auflage, Carl Hanser Verlag, 2011




- Michael Sipser, *Introduction to the Theory of Computation*, 3rd edition, Cengage Learning, 2012




- Uwe Schöning, *Theoretische Informatik – kurz gefasst*, 5. Auflage, Spektrum, 2008

# Literatur II


VORLESUNGSSKRIPT
THEORETISCHE INFORMATIK
PROF. DR. WOLFGANG MAUERER

Copyright © 2014–2015, Wolfgang Mauerer
Lizensiert unter CC BY-SA 3.0, siehe http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/legalcode.
Nullte Auflage

OTH OSTBAYERISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE REGENSBURG

Version vom 28. Januar 2015 – DRAFT

## Vorlesungsskript

- Unter Dauerkonstruktion
- Download (PDF) im GRIPS-System

### Taschenbuch der Informatik

»Ein Algorithmus ist eine Vorschrift zur Lösung eines Problems, die für eine Realisierung in Form eines Programms auf einem Computer geeignet ist.«

### Eigenschaften

- Algorithmus gibt eindeutig Abfolge der Verarbeitungsschritte vor
- Algorithmus ist *unabhängig* von einer spezifischen Notation
- *Eigenschaften* eines Algorithmus nicht notwendigerweise im Detail bekannt/kennbar

## Sprachen in der Ausbildung

- Cobol, Fortran; PL/1, APL; C, Pascal; Modula 2, Java, C#
- Konkrete Sprache: (Stilabhängiges) Hilfsmittel
- Ausweg: Pseudocode
  - Zielgruppe: Menschen, nicht Maschinen $\Rightarrow$ Irrelevante Details eliminieren
  - Siehe `http://en.wikipedia.org/wiki/Pseudocode`
  - Im Zweifelsfall: Gesunder Menschenverstand!

**procedure** COLLATZ($n$)
    **if** $n \equiv 0 \bmod 2$ **then**
        $n \leftarrow \frac{n}{2}$
    **else**
        $n \leftarrow 3n + 1$
    **end if**
    Gib $n$ aus
    **return** COLLATZ($n$)
**end procedure**

**procedure** COLLATZ($n$)
    **if** gerade($n$) **then**
        $n \leftarrow \frac{n}{2}$
    **else**
        $n \leftarrow 3n + 1$
    **end if**
    PRINT($n$)
    **return** COLLATZ($n$)
**end procedure**

**Solide? Hype?**

Block Chain! AI! Machine Learning!

ARTICLES
https://doi.org/10.1038/s42256-018-0002-3
nature machine intelligence
Corrected: Author Correction

# Learnability can be undecidable

Shai Ben-David[1], Pavel Hrubeš[2], Shay Moran[3], Amir Shpilka[4] and Amir Yehudayoff[5]*

**The mathematical foundations of machine learning play a key role in the development of the field. They improve our understanding and provide tools for designing new learning paradigms. The advantages of mathematics, however, sometimes come with a cost. Gödel and Cohen showed, in a nutshell, that not everything is provable. Here we show that machine learning shares this fate. We describe simple scenarios where learnability cannot be proved nor refuted using the standard axioms of mathematics. Our proof is based on the fact the continuum hypothesis cannot be proved nor refuted. We show that, in some cases, a solution to the 'estimating the maximum' problem is equivalent to the continuum hypothesis. The main idea is to prove an equivalence between learnability and compression.**

## Inhalt

# Formale Sprachen und Automaten

## Warum Sprachen?

Grundproblem: Gehört ein Wort/Satz zu einer bestimmten Klasse?

- Syntaktisch korrektes C++/Java/C#-Programm
- Netzwerkpaket
- Bankleitzahl
- ...

## Zutaten

- *Grammatik*: Beschreibt eine Sprache
- *Wortproblem*: Gegeben Sprache $L$ (durch Grammatik $G$ beschrieben), und Wort $p$: Gilt $p \in L$ oder $p \notin L$?

## Formale Sprachen II

Beispiel: Compiler (siehe Tafel)

# Formale Sprachen III

## Definition: Alphabet

Ein *Alphabet* $\Sigma$ ist eine endliche Menge von Symbolen

## Beispiele

- $\Sigma_1 = \{0, 1\}$ Ziffern des Binärsystems
- $\Sigma_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ Dezimalziffern
- $\Sigma_3 = \{0, \dots, 9, A, B, C, D, E, F\}$ Hexadezimalziffern
- $\Sigma_4 = \{a, b, \dots, z\}$ Kleinbuchstaben
- $\Sigma_5 = \{\vee, \wedge, \neg\}$ Aussagenlogische Symbole

# Formale Sprachen IV

## Definition: Zeichen, Wort, Sprache

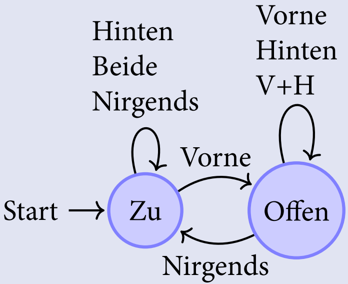
- Jedes Element $\sigma \in \Sigma$ ist *Zeichen* des Alphabets
- Jedes Element $\omega \in \Sigma^*$ ist *Wort* über $\Sigma$
- $\Sigma^n$: Menge aller Wörter der Länge $n \in \mathbb{N} \backslash 0$
- *Leeres Wort* $\epsilon$: $\epsilon \in \Sigma^*, \epsilon \notin \Sigma^n$
- Länge eines Wortes (Anzahl der Buchstaben): $|w|$. Achtung: $|\epsilon| = 0$
- Jede Teilmenge $L \subseteq \Sigma^*$ ist eine *formale Sprache*

### Sprachverarbeitung

- Definition formaler Sprachen?
- Erkennen von Wörtern (Lösung Wortproblem)?

# Endliche Automaten: Türsteuerung

## Automatische Tür




## Zustandsübergänge

| | Nirgends | Vorne | Hinten | V+H |
|---|---|---|---|---|
| Zu | Zu | Offen | Zu | Zu |
| Offen | Zu | Offen | Offen | Offen |

# Endliche Automaten II

## Anwendungen

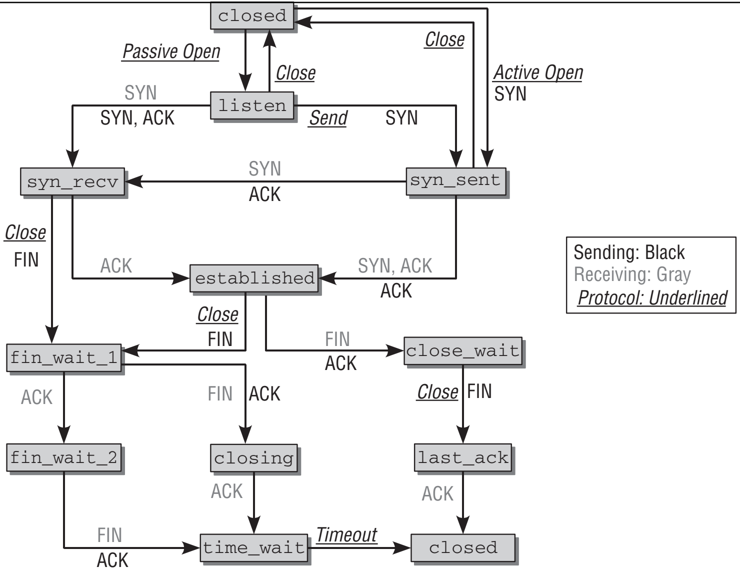
Gleiche oder ähnliche Konzepte in vielen Gebieten:

- Steuerungsaufgaben
- Netzwerkprotokolle (TCP, UDP)
- Schnelle Mustererkennung in Daten
- Verallgemeinerung: Markov-Ketten
  - Schriftklassifikation (OCR), Bilderkennung
  - Sprachverarbeitung
  - Hochfrequenz-Aktienhandel

## Problemklassen

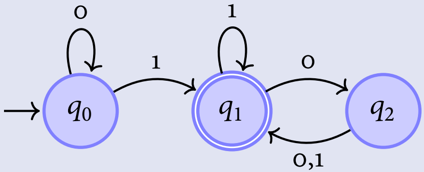
- Reine Zustandsübergänge
- »Übersetzen« von Eingaben in Ausgaben
- Erkennen von Sprachen (Fokus dieser Vorlesung)

# Endliche Automaten IIb



# Endliche Automaten III

## Endlicher Automat $M_1$




## Komponenten

- Zustände: $q_0, q_1, q_2$
- Startzustand $q_0$
- Endzustand $q_1$
- Kanten: Transitionen

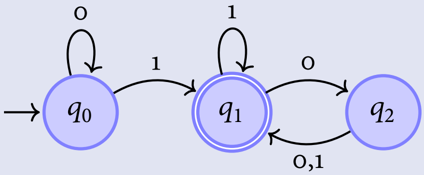
## Aufgabe

- Lies $w \in \{0, 1\}^*$ (Buchstabe für Buchstabe), durchlaufe Transitionen
- Ende Eingabe: Akzeptierender Zustand?

Beispiel Eingaben »1101«, »00« & Charakterisierung: Siehe Tafel

# Endliche Automaten IV

## Endlicher Automat $M_1$



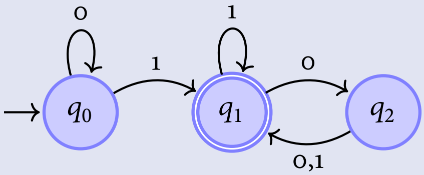

## Definition: Deterministischer endlicher Automat (DEA)

Ein endlicher Automat besteht aus folgenden Komponenten:

- Zuständen, in denen sich der Automat befinden kann
- Alphabet, aus dem die Eingabe generiert wird
- Eine Festlegung der Übergänge
- Einen ausgezeichneten Zustand, in dem der Automat startet
- Keinen, einen oder mehrere Endzustände

# Endliche Automaten IV

## Endlicher Automat $M_1$



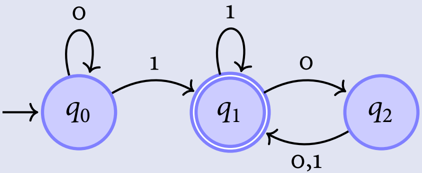

## Definition: Deterministischer endlicher Automat (DEA)

Ein endlicher Automat ist ein 5-Tupel $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, wobei:

- Zuständen, in denen sich der Automat befinden kann
- Alphabet, aus dem die Eingabe generiert wird
- Eine Festlegung der Übergänge
- Einen ausgezeichneten Zustand, in dem der Automat startet
- Keinen, einen oder mehrere Endzustände

# Endliche Automaten IV

## Endlicher Automat $M_1$



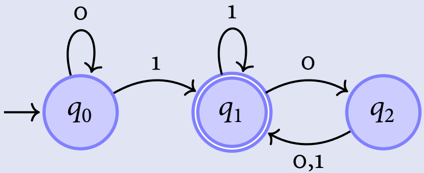

## Definition: Deterministischer endlicher Automat (DEA)

Ein endlicher Automat ist ein 5-Tupel $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, wobei:

- Q eine endliche Zustandsmenge
- Alphabet, aus dem die Eingabe generiert wird
- Eine Festlegung der Übergänge
- Einen ausgezeichneten Zustand, in dem der Automat startet
- Keinen, einen oder mehrere Endzustände

# Endliche Automaten IV

## Endlicher Automat $M_1$



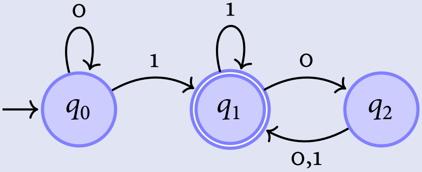

## Definition: Deterministischer endlicher Automat (DEA)

Ein endlicher Automat ist ein 5-Tupel $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, wobei:

- Q eine endliche Zustandsmenge
- $\Sigma$ ein endliches Alphabet,
- Eine Festlegung der Übergänge
- Einen ausgezeichneten Zustand, in dem der Automat startet
- Keinen, einen oder mehrere Endzustände

# Endliche Automaten IV

## Endlicher Automat $M_1$



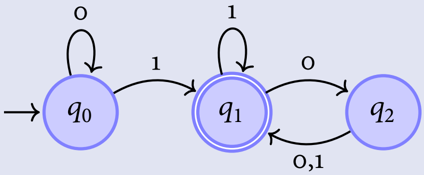

## Definition: Deterministischer endlicher Automat (DEA)

Ein endlicher Automat ist ein 5-Tupel $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, wobei:

- Q eine endliche Zustandsmenge
- $\Sigma$ ein endliches Alphabet,
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ die Übergangsfunktion,
- Einen ausgezeichneten Zustand, in dem der Automat startet
- Keinen, einen oder mehrere Endzustände

# Endliche Automaten IV

## Endlicher Automat $M_1$



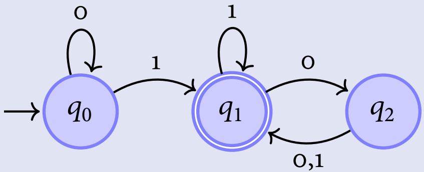

## Definition: Deterministischer endlicher Automat (DEA)

Ein endlicher Automat ist ein 5-Tupel $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, wobei:

- Q eine endliche Zustandsmenge
- $\Sigma$ ein endliches Alphabet,
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ die Übergangsfunktion,
- $q_0 \in Q$ der Startzustand und
- Keinen, einen oder mehrere Endzustände

# Endliche Automaten IV

## Endlicher Automat $M_1$



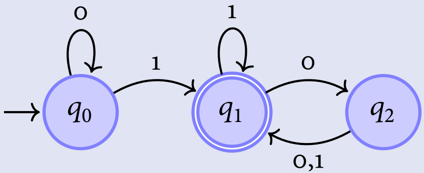

## Definition: Deterministischer endlicher Automat (DEA)

Ein endlicher Automat ist ein 5-Tupel $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, wobei:

- $Q$ eine endliche Zustandsmenge
- $\Sigma$ ein endliches Alphabet,
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ die Übergangsfunktion,
- $q_0 \in Q$ der Startzustand und
- $F \subseteq Q$ die Menge der akzeptierenden Zustände ist.

# Endliche Automaten V

## Endlicher Automat $M_1$

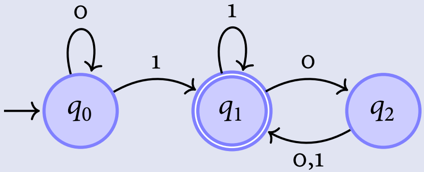



## Terminologie

- $M_1$ *akzeptiert* bestimmte Wörter (beispielsweise 1101, 110000, 1100, 0101010101, 1)
- $M_1$ *erkennt* eine Sprache (welche?)
- Eine Maschine akzeptiert (im nicht-pathologischen Fall) mehrere Wörter, aber nur eine Sprache

# Endliche Automaten V

## Endlicher Automat $M_1$




## Anmerkungen

- $\mathcal{L}(M_1) = A$ mit

$$A = \{w \mid w \text{ enthält mindestens eine Eins, und das Wort endet auf eine gerade Anzahl von Nullen oder mit 1.}\}$$

- Kurzform: $M_1$ erkennt $A$

Formale Definition Beispielautomat: Siehe Tafel

# Endliche Automaten VI

Weitere Beispiele: Siehe Tafel

# Endliche Automaten VII

## Konstruktion endlicher Automaten

Gegeben sei die Sprache

$$L = \{w | w \text{ beginnt mit 1 und endet mit 0 }\}$$

Gesucht: DEA $M$, der $L$ akzeptiert.

Konstruktion: Siehe Tafel

# Endliche Automaten VIII

## Konstruktion endlicher Automaten II

Gegeben sei die Sprache

$$L = \{(ab)^n | n \in \mathbb{N}(n > 0)\}$$

Gesucht: DEA $M$, der $L$ akzeptiert.

Konstruktion: Siehe Tafel

# Endliche Automaten IX

## Formalisierung Rechenvorgang

Sei $M$ ein DEA, und sei $w = w_1 w_2 \cdots w_n$ die Eingabe mit $w_i \in \Sigma$ und $|w| = n$. $M$ akzeptiert die Eingabe $w$, wenn eine Sequenz aus Zuständen $r_0, r_1, \ldots, r_n$ aus Q existiert, die folgende Bedingungen erfüllt:

- Der Automat beginnt im Startzustand
- Der Automat verhält sich in jedem Schritt gemäß der Übergangsfunktion
- Die Erkennung endet in einem Endzustand

# Endliche Automaten IX

## Formalisierung Rechenvorgang

Sei $M$ ein DEA, und sei $w = w_1 w_2 \cdots w_n$ die Eingabe mit $w_i \in \Sigma$ und $|w| = n$. $M$ akzeptiert die Eingabe $w$, wenn eine Sequenz aus Zuständen $r_0, r_1, \ldots, r_n$ aus Q existiert, die folgende Bedingungen erfüllt:

- $r_0 = q_0$
- Der Automat verhält sich in jedem Schritt gemäß der Übergangsfunktion
- Die Erkennung endet in einem Endzustand

# Endliche Automaten IX

## Formalisierung Rechenvorgang

Sei $M$ ein DEA, und sei $w = w_1 w_2 \cdots w_n$ die Eingabe mit $w_i \in \Sigma$ und $|w| = n$. $M$ akzeptiert die Eingabe $w$, wenn eine Sequenz aus Zuständen $r_0, r_1, \dots, r_n$ aus Q existiert, die folgende Bedingungen erfüllt:

- $r_0 = q_0$
- $\delta(r_i, w_{i+1}) = r_{i+1}$ für $i = 0, \cdots, n-1$
- Die Erkennung endet in einem Endzustand

# Endliche Automaten IX

## Formalisierung Rechenvorgang

Sei $M$ ein DEA, und sei $w = w_1 w_2 \cdots w_n$ die Eingabe mit $w_i \in \Sigma$ und $|w| = n$. $M$ akzeptiert die Eingabe $w$, wenn eine Sequenz aus Zuständen $r_0, r_1, \ldots, r_n$ aus Q existiert, die folgende Bedingungen erfüllt:

- $r_0 = q_0$
- $\delta(r_i, w_{i+1}) = r_{i+1}$ für $i = 0, \cdots, n-1$
- $r_n \in F$

# Endliche Automaten X

## Formalisierung Rechenvorgang II

*Konfiguration* eines DEA $M$ ist durch aktuellen Zustand $r$ und verbleibende Eingabe $w$ eindeutig festgelegt.

- Startkonfiguration: $q_0 w_1 w_2 \cdots w_n$
- Übergang: $q_0 w_1 w_2 \cdots w_n \to q_1 w_2 \cdots w_n \Leftrightarrow \delta(q_0, w_1) = q_1$

## Alternative Definition Akzeptanz

- Induktive Fortsetzung von $\delta$ auf $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$:
  - $\hat{\delta}(q, \epsilon) = q$
  - Für $n > 0$: $\hat{\delta}(q, w_1 w_2 \ldots w_n) = \delta(\hat{\delta}(q, w_1 \ldots w_{n-1}), w_n)$
- DEA akzeptiert $w = w_1 w_2 \cdots w_n \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, w) \in F$

Beispiel: Siehe Tafel.

# Endliche Automaten XI

## Alternative Definition Akzeptanz

- Induktive Fortsetzung von $\delta$ auf $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$:
  - $\hat{\delta}(q, \epsilon) = q$
  - Für $n > 0$: $\hat{\delta}(q, w_1 w_2 \ldots w_n) = \delta(\hat{\delta}(q, w_1 \ldots w_{n-1}), w_n)$
- DEA akzeptiert $w = w_1 w_2 \cdots w_n \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, w) \in F$

## Akzeptierte Sprache eines DEA

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(M) &= \{w_1 w_2 \cdots w_n \mid \hat{\delta}(q_0, w_1 w_2 \ldots w_n) \in F\} \\ &= \{w \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F\}\end{aligned}$$

## Definition: Reguläre Sprache

Eine Sprache, die von einem deterministischen endlichen Automaten erkannt wird, bezeichnet man als *reguläre Sprache*

## Definition: Reguläre Operationen

Zusammensetzen von Wörtern:

- *Konkatenation*: Für $u, w \in \Sigma^*$ gibt $u \cdot w = uw$ das durch Hintereinanderschreiben zusammengesetzte Wort an.
- *Vereinigung*: Für $u, w \in \Sigma^*$ gibt $u + w = u|w$ ($u$ oder $w$) die Vereinigung der Wörter an.
- *Sternoperation*: $A^* \equiv \{x_1 x_2 x_3 \cdots x_k \mid k \geq 0 \wedge x_i \in A \forall i\}$

Reguläre Operationen führen reguläre Sprachen in reguläre Sprachen über (noch zu beweisen).

# Formale Sprachen VI

## Probleme/Fragestellungen

- DEAs: Mehr auf analytischen als generativen Aspekt fokussiert.
- Einfachere Methoden als DEAs, um reguläre Sprache zu generieren?
- Charakterisierung regulärer Sprachen (Möglichkeiten und Grenzen)
- Zunächst: Alternativen zur Worterzeugung

# Formale Sprachen VII: Worterzeugung

## Beispielsprache I: Gerade Zahlen $\in \mathbb{N}$

- Symbole (Ziffern): $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- Sprache $L \subseteq \Sigma^*$:

$$L = \{u | u \in \Sigma^* \land \exists n \in \mathbb{N} : u = 2n\}$$

## Beispielsprache II: Primzahlen

- Symbole wie bei Beispiel I
- Sprache $L \subseteq \Sigma^*$:

$$L = \{n | n \in \Sigma^* \land n \text{ prim } \}$$

# Formale Sprachen VIII: Worterzeugung II

## Fortschritt?

- Sprachcharakterisierung erleichtert
- Aber: Sprache von regulärem Automaten erkennbar?
- Ausweg: Explizite Grammatiken

# Grammatiken I

## Sprachererzeugung

- *Grammatik*: Explizite Erzeugungsmöglichkeit für formale Sprache
- Struktur: Explizite Ableitung von Wörtern aus Regeln

## Beispiel-Grammatik

$$\begin{aligned}
\langle \mathit{Satz} \rangle &\to \langle \mathit{Subjekt} \rangle \langle \mathit{Prädikat} \rangle \langle \mathit{Objekt} \rangle \\
\langle \mathit{Subjekt} \rangle &\to \langle \mathit{Artikel} \rangle \langle \mathit{Adjektiv} \rangle \langle \mathit{Substantiv} \rangle \\
\langle \mathit{Artikel} \rangle &\to \text{Der} \mid \text{Die} \mid \text{Das} \\
\langle \mathit{Adjektiv} \rangle &\to \text{kleine} \mid \text{eloxierte} \mid \text{flinke} \\
\langle \mathit{Substantiv} \rangle &\to \text{Eisbär} \mid \text{Mond} \mid \text{Hypertricher} \\
\langle \mathit{Prädikat} \rangle &\to \text{mag} \mid \text{isst} \mid \text{induziert} \\
\langle \mathit{Objekt} \rangle &\to \text{Kekse} \mid \text{Schokolade} \mid \text{Raum-Zeit-Verschiebungen}
\end{aligned}$$

Beispiel: Siehe Tafel.

# Grammatiken II

## Grammatik: Komponenten

- Nicht-Terminal-Symbole: $\langle \mathit{Satz} \rangle$, $\langle \mathit{Subjekt} \rangle$, …
- Terminal-Symbole: Das, Schokolade, Raum-Zeit-Verschiebung, …
- Produktionen: lhs $\rightarrow$ rhs
- Startsymbol: $\langle \mathit{Satz} \rangle$

## Algorithmus: Worterzeugung

1. Beginne mit Startsymbol
2. Ersetze alle Nicht-Terminal-Symbole gemäß den Produktionen
3. Wenn weiterhin Nicht-Terminal-Symbole vorhanden: Weiter bei 2
4. Gib Satz/Wort zurück

## Grammatiken IV: Beispiele

Beispiele: Siehe Tafel (arithmetische Ausdrücke, $a^n b^n c^n$)

# Grammatiken III

## Definition: Grammatik

Eine Grammatik $G$ ist ein 4-Tupel $(V, \Sigma, P, S)$ bestehend aus

- der endlichen Variablenmenge $V$ (Nicht-Terminal-Symbole)
- dem endlichen Terminalalphabet $\Sigma$ mit $V \cap \Sigma = \varnothing$
- der endlichen Menge $P \subseteq (V \cup \Sigma)^+ \setminus \Sigma^+ \times (V \cup \Sigma)^*$ von Produktionen (Regeln)
- dem Startsymbol $S \in V$

## Spezifikation Produktion

- Hier: Allgemeinste Form von Produktionen
- Einschränkung bei Produktionen bestimmt maßgeblich Sprachklasse!

# Grammatiken V: Chomsky-Hierarchie I

## Chomsky-Hierarchie

Einteilung der Menge aller Sprachen in verschiedene (absteigend) mächtige Klassen.
Beschränkungen für alle Regeln $l \to r$:

- *Phrasenstrukturgrammatiken (Typ 0)*: Keine Regeleinschränkungen.
- *Kontextsensitive Grammatiken (Typ 1)*: Es gilt $|l| \leq |r|$.
- *Kontextfreie Grammatiken (Typ 2)*: $l \in V$ .
- *Reguläre Grammatik (Typ 3)*: $r \in \Sigma \cup \Sigma V$.

Für Typ $n$-Grammatiken gelten jeweils die Beschränkungen von Typ $n-1$-Grammatiken.

Wenn $G$ eine Typ $n$-Grammatik ist, bezeichnet man $\mathcal{L}(G)$ als Typ $n$-Sprache (dito: kontextfreie Sprache etc.)

# Grammatiken VI: Chomsky-Hierarchie II

## Anmerkungen Chomsky-Hierarchie

- *Phrasenstrukturgrammatiken (Typ 0)*: Jede Grammatik per Definitionem enthalten (*aber*: Sprachen, die nicht durch Grammatik zu beschreiben sind!) *Achtung*: Nomenklaturverwirrung in der Literatur.
- *Kontextsensitive Grammatiken (Typ 1)*: Anwendung einer Produktion führt niemals zu Verkürzung
- *Reguläre Grammatik (Typ 3)*: Rechtslineare Ableitung, da Produktionen nur nach rechts hin aufgebaut werden können

# Grammatiken VI: Chomsky-Hierarchie II

## Problem: $\epsilon$-Regeln

- Wegen $|l| \leq |r|$ kann in kontextsensitiven (und damit kontextfreien und regulären) Sprachen keine Regel der Form $N \to \epsilon$ auftreten.
- Was tun, wenn $\epsilon \in \mathcal{L}(G)$ erwünscht?

## $\epsilon$-Sonderregel

$S \to \epsilon$ explizit zugelassen, wenn $\epsilon \in \mathcal{L}(G)$ erwünscht

Algorithmus zum Umschreiben von Grammatiken: Siehe Tafel

# Grammatiken VII: Grundprobleme formaler Sprachen

## (Entscheidungs-)Probleme

- *Wortproblem*: Gegeben Wort $w \in \Sigma^*$ und Sprache $L \in \Sigma^*$: Gilt $w \in L$ oder $w \notin L$?
- *Leerheitsproblem*: Enthält eine Sprache $L$ kein Wort, d.h. gilt $L = \emptyset$?
- *Endlichkeitsproblem*: Besitzt $L$ nur endlich viele Elemente, d.h. $|L| \neq \infty$?
- *Schnittproblem*: Gilt für zwei Sprachen $L_1, L_2$, dass $L_1 \cap L_2 = \emptyset$?
- *Äquivalenzproblem*: Sind zwei Sprachen $L_1, L_2$ gleich, d.h. gilt $L_1 = L_2$?

## Grammatiken VIII: Ableitbarkeit

### Ableitbarkeit

Sei $l \in (V \cup \Sigma)^+ \backslash \Sigma^+$ und $r \in (V \cup \Sigma)^*$. Dann ist $r$ aus $l$

- *direkt ableitbar*, wenn es eine Regel $(u, v) \in P$ und $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$ gibt, so dass

$$l = \alpha u \beta, r = \alpha v \beta.$$

  Formal: $l \Rightarrow r$.
- *indirekt ableitbar*, wenn es durch endlich viele Ableitungsschritte aus $l$ erzeugbar ist.

  Formal: $l \overset{*}{\Rightarrow} r$ (reflexive-transitive Hülle der Ableitungsrelation $\Rightarrow$, siehe Tafel)

### Erzeugte Sprache $\mathcal{L}(G)$

$$\mathcal{L}(G) \equiv \{w \in \Sigma^* \mid S \overset{*}{\Rightarrow} w\}$$

# Grammatiken IX: Erweiterte Backus-Naur-Form

## EBNF: Vereinfachungen

- $A \to \beta_1, A \to \beta_2, \ldots, A \to \beta_n$ wird ersetzt durch $A \to \beta_1 \mid \beta_2 \mid \cdots \mid \beta_n$
- $A \to \alpha[\beta]\gamma$ steht für die beiden Regeln

$$
\begin{aligned}
A &\to \alpha\gamma \\
A &\to \alpha\beta\gamma
\end{aligned}
$$

- $A \to \alpha\{\beta\}\gamma$ steht für die Regeln

$$
\begin{aligned}
A &\to \alpha\gamma \\
A &\to \alpha B\gamma \\
B &\to \beta \\
B &\to \beta B
\end{aligned}
$$

Häufig bei der Definition von Programmiersprachen anzutreffen!

# Grammatiken X

## Scheme

```
...
<conditional> --> (if <test> <consequent> <alternate>)
<test> --> <expression>
<consequent> --> <expression>
<alternate> --> <expression> | <empty>

<assignment> --> (set! <variable> <expression>)

<derived expression> -->
        (cond <cond clause>+)
      | (cond <cond clause>* (else <sequence>))
      | (case <expression>
          <case clause>+)
      | (case <expression>
          <case clause>*
          (else <sequence>))
      | (and <test>*)
      | (or <test>*)
      | (let (<binding spec>*) <body>)
      | (let <variable> (<binding spec>*) <body>)
      | (let* (<binding spec>*) <body>)
      | (letrec (<binding spec>*) <body>)
      | (begin <sequence>)
      | (do (<iteration spec>*)
            (<test> <do result>)
          <command>*)
      | (delay <expression>)
      | <quasiquotation>
...
```

## Java

```
...
Block:
    { BlockStatements }

BlockStatements:
    { BlockStatement }

BlockStatement:
    LocalVariableDeclarationStatement
    ClassOrInterfaceDeclaration
    [Identifier :] Statement

LocalVariableDeclarationStatement:
    { VariableModifier }  Type VariableDeclarators ;

Statement:
    Block
    ;
    Identifier : Statement
    StatementExpression ;
    if ParExpression Statement [else Statement]
...
    while ParExpression Statement
    do Statement while ParExpression ;
    for ( ForControl ) Statement
    try Block (Catches | [Catches] Finally)
    try ResourceSpecification Block [Catches] [Finally]

StatementExpression:
```

## Grammatiken XI: Ableitungsbäume

Siehe Tafel

# Grammatiken XII: Ein- und Mehrdeutigkeit

**Definition: Eindeutige Grammatik**

Eine Grammatik $G$ heißt eindeutig, wenn alle Ableitungen eines Wortes $w \in \mathcal{L}(G)$ immer zu genau einem Syntaxbaum führen. Eine nicht eindeutige Grammatik heißt mehrdeutig.

- Mehrdeutigkeit: Eigenschaft Grammatik, nicht notwendigerweise Sprache
- Mehrdeutige Grammatik: häufig in eine eindeutige Grammatik $G'$ mit $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G')$ überführbar
- Es existieren Sprachen, die ausschließlich durch mehrdeutige Grammatiken erzeugt werden können (*inhärent mehrdeutige* Sprachen)

Beispiel: Siehe Tafel

# Reguläre Sprachen I

## Reguläre Sprachen

Grammatik $G(V, \Sigma, P, S)$ ist regulär, wenn für alle Regeln $l \rightarrow r$ gilt:

- $|l| \leq |r|$
- $l \in V$ und $r \in (\Sigma \cup \Sigma V)$

## Anwendungen: Omnipräsent

- In praktisch allen Programmiersprachen »verbaut«: Perl, Grep, Java (`java.util.regex`), Go (`regexp`), D (`std.regex`), C# (`System.Text.RegularExpressions`), PHP (`preg_*`), …
- Systemadministration, Konfigurationsdateien, Eingabechecker, Datenmanipulation, …
- Achtung: »Reguläre Ausdrücke« häufig über obige Definition hinaus erweitert!

Beispiel: Siehe Tafel

## DEAs und reguläre Sprachen I

### Behauptung

- Reguläre Sprachen und endliche Automaten erkennen äquivalente Sprachklassen
- Konstruktion: Zustände des DEA als Nicht-Terminale auffassen, Grammatik entsprechend Übergängen gestalten

Beispiel: Muster »abc« in String finden (siehe Tafel)

## DEAs und reguläre Sprachen II

**Theorem: Endliche Automaten und reguläre Grammatiken**

Zu jedem deterministischen endlichen Automaten $M$ gibt es eine reguläre Grammatik $G$ mit $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(M)$.

**Einschränkung**

Obiges Theorem gilt nur für *eine* Richtung!

Beweis: Siehe Tafel

# Reguläre Sprachen und endliche Automaten

## Status Quo: Reguläre Sprachen

- Reguläre Sprachen auf unterschiedliche Arten erzeugbar
- Erkannte Sprachen jedes endlichen Automaten durch reguläre Grammatik beschreibbar
- Noch zu zeigen: Vollständige Äquivalenz der Ansätze
- Mehr Verständnis über endliche Automaten erforderlich!

# Nichtdeterministische Endliche Automaten I

### Theorem: Endliche Automaten und reguläre Grammatiken

Zu jedem deterministischen endlichen Automaten $M$ gibt es eine reguläre Grammatik $G$ mit $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(M)$.

### Umkehrung: $G$ regulär $\Rightarrow \exists$ DEA für $\mathcal{L}(G)$

- DEA: Transitionsfunktion gibt Übergang eindeutig vor
- Grammatik: Mehrere Ableitungen aus einer Regel möglich
- *Nichtdeterministische Auswahl* aus einer Menge von Regeln
- ☞ DEAs auf Nichtdeterminismus erweitern!

# Nichtdeterministische Endliche Automaten II

## DEA auf nicht-deterministische Übergänge erweitern

### Determinismus

- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ *eindeutige* Abbildung von Tupel $(Q, \Sigma)$ auf Folgezustand
- Eindeutige Rechenschritte!

### Nichtdeterminismus

- Neue Übergangsfunktion:

$$\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$$

- Tupel $Q, \Sigma$ wird auf *mehrere* potentielle Folgezustände abgebildet ($\mathcal{P}(Q)$: Potenzmenge der Zustände)
- Mehrdeutige Rechenschritte
- Unphysikalisches (aber nützliches) Modell!

## Nichtdeterministische Endliche Automaten III

Beispiele: Siehe Tafel

- Wörter $x \in \{0, 1\}^*$, die mit 00 enden oder gleich 0 sind
- Wörter $x \in \{0, 1\}^*$, deren $k$-letzte Ziffer 0 ist

# Nichtdeterministische Endliche Automaten IV

## Definition: Nicht-Deterministischer endlicher Automat (NEA)

Ein nicht-deterministischer endlicher Automat besteht aus folgenden Komponenten:

- Zuständen, in denen sich der Automat befinden kann
- Alphabet, aus dem die Eingabe generiert wird
- Eine Festlegung der *verschiedenen möglichen* Übergänge
- Einen *oder mehrere* Startzustände
- Einen oder mehrere Endzustände

## Unterschied DEA/NEA

- Mehrere alternative Übergänge mit gleichem Symbol möglich
- Mehrere Startzustände möglich

# Nichtdeterministische Endliche Automaten IV

## Definition: Nicht-Deterministischer endlicher Automat (NEA)

Ein nicht-deterministischer endlicher Automat ist ein 5-Tupel $M = (Q, \Sigma, \delta, E, F)$, wobei:

- Zuständen, in denen sich der Automat befinden kann
- Alphabet, aus dem die Eingabe generiert wird
- Eine Festlegung der *verschiedenen möglichen* Übergänge
- Einen *oder mehrere* Startzustände
- Einen oder mehrere Endzustände

## Unterschied DEA/NEA

- Mehrere alternative Übergänge mit gleichem Symbol möglich
- Mehrere Startzustände möglich

# Nichtdeterministische Endliche Automaten IV

## Definition: Nicht-Deterministischer endlicher Automat (NEA)

Ein nicht-deterministischer endlicher Automat ist ein 5-Tupel $M = (Q, \Sigma, \delta, E, F)$, wobei:

- Q eine endliche Zustandsmenge
- Alphabet, aus dem die Eingabe generiert wird
- Eine Festlegung der *verschiedenen möglichen* Übergänge
- Einen *oder mehrere* Startzustände
- Einen oder mehrere Endzustände

## Unterschied DEA/NEA

- Mehrere alternative Übergänge mit gleichem Symbol möglich
- Mehrere Startzustände möglich

# Nichtdeterministische Endliche Automaten IV

## Definition: Nicht-Deterministischer endlicher Automat (NEA)

Ein nicht-deterministischer endlicher Automat ist ein 5-Tupel $M = (Q, \Sigma, \delta, E, F)$, wobei:

- Q eine endliche Zustandsmenge
- $\Sigma$ ein endliches Alphabet,
- Eine Festlegung der *verschiedenen möglichen* Übergänge
- Einen *oder mehrere* Startzustände
- Einen oder mehrere Endzustände

## Unterschied DEA/NEA

- Mehrere alternative Übergänge mit gleichem Symbol möglich
- Mehrere Startzustände möglich

# Nichtdeterministische Endliche Automaten IV

## Definition: Nicht-Deterministischer endlicher Automat (NEA)

Ein nicht-deterministischer endlicher Automat ist ein 5-Tupel $M = (Q, \Sigma, \delta, E, F)$, wobei:

- Q eine endliche Zustandsmenge
- $\Sigma$ ein endliches Alphabet,
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ die Übergangsfunktion,
- Einen *oder mehrere* Startzustände
- Einen oder mehrere Endzustände

## Unterschied DEA/NEA

- Mehrere alternative Übergänge mit gleichem Symbol möglich
- Mehrere Startzustände möglich

# Nichtdeterministische Endliche Automaten IV

## Definition: Nicht-Deterministischer endlicher Automat (NEA)

Ein nicht-deterministischer endlicher Automat ist ein 5-Tupel $M = (Q, \Sigma, \delta, E, F)$, wobei:

- $Q$ eine endliche Zustandsmenge
- $\Sigma$ ein endliches Alphabet,
- $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$ die Übergangsfunktion,
- $E \subseteq Q$ die Menge der Startzustände
- Einen oder mehrere Endzustände

## Unterschied DEA/NEA

- Mehrere alternative Übergänge mit gleichem Symbol möglich
- Mehrere Startzustände möglich

# Nichtdeterministische Endliche Automaten IV

## Definition: Nicht-Deterministischer endlicher Automat (NEA)

Ein nicht-deterministischer endlicher Automat ist ein 5-Tupel $M = (Q, \Sigma, \delta, E, F)$, wobei:

- Q eine endliche Zustandsmenge
- $\Sigma$ ein endliches Alphabet,
- $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$ die Übergangsfunktion,
- $E \subseteq Q$ die Menge der Startzustände
- $F \subseteq Q$ die Menge der akzeptierenden Zustände ist.

## Unterschied DEA/NEA

- Mehrere alternative Übergänge mit gleichem Symbol möglich
- Mehrere Startzustände möglich

# Nichtdeterministische Endliche Automaten V

## Interpretation

- Massiv paralleler Computer (`fork/exec`)
- Rechnung unter Auflistung aller Möglichkeiten (*Achtung*: Keine Wahrscheinlichkeiten!)
- »Orakel«, das automatisch den (bzw. einen) korrekten Pfad wählt

## Erweiterung: $\epsilon$-NEA

- Modifikation: $\delta : Q \times \Sigma_* \to \mathcal{P}(Q)$
- $\Sigma_* \equiv \Sigma \cup \epsilon$
- »Leere« Übergänge möglich

# Nichtdeterministische Endliche Automaten V

## Interpretation

- Massiv paralleler Computer (`fork/exec`)
- Rechnung unter Auflistung aller Möglichkeiten (*Achtung*: Keine Wahrscheinlichkeiten!)
- »Orakel«, das automatisch den (bzw. einen) korrekten Pfad wählt

## Erweiterung: $\epsilon$-NEA

- Modifikation: $\delta : Q \times \Sigma_* \to \mathcal{P}(Q)$
- $\Sigma_* \equiv \Sigma \cup \epsilon$
- »Leere« Übergänge möglich

# Nichtdeterministische Endliche Automaten VI

## Transitionsfunktion

- Übergang: $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$
- Zustand auf *Menge* von Zuständen abgebildet
- Verallgemeinerung auf $\hat{\delta} : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$ mittels

$$\hat{\delta}(Q', \epsilon) = Q' \text{ für alle } Q' \subseteq Q$$
$$\hat{\delta}(Q', w_1 w_2 \cdots w_n) = \bigcup_{q \in Q'} \hat{\delta}(\delta(q, w_1), w_2 \cdots w_n)$$

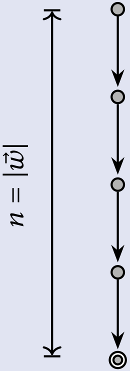
- Illustration: Siehe Tafel

## Akzeptierte Sprache eines NEA

$$\mathcal{L}(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(E, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

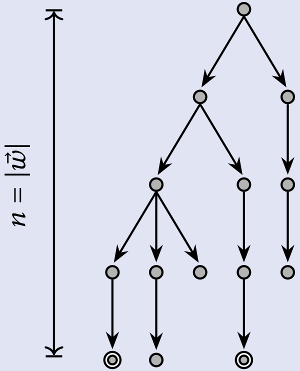
# Nichtdeterministische Endliche Automaten VII

## Illustration: Unterschied DEA/NEA



# Nichtdeterministische Endliche Automaten VII

## Illustration: Unterschied DEA/NEA



## Nichtdeterministische Endliche Automaten VIII

Beispiel Berechnungsbaum NEA: Siehe Tafel

# Nichtdeterministische Endliche Automaten IX

## Unterschiede DEA/NEA

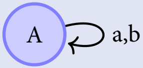
- NEA muss nicht vollständig sein
  - Zustände erlaubt, die für ein oder mehrere $\sigma \in \Sigma$ keine ausgehende Kante besitzen
  - $\delta(q, \sigma) = \perp$ erlaubt
  - Übergangsfunktion *partiell* definiert
- Verarbeitung in Zweig kann stoppen ($\emptyset \in \mathcal{P}(Q)$)

# Grammatiken und NEAs I

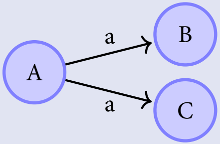
## Umwandlung reguläre Grammatik $G \to$ NEA M

### Regeln I

- Nicht-Terminalsymbole werden zu Zuständen
- $\langle A \rangle \to \mathtt{a}\langle A \rangle \mid \mathtt{b}\langle A \rangle$ wird zu




- $\langle A \rangle \to \mathtt{a}\langle B \rangle \mid \mathtt{a}\langle C \rangle$ wird zu




### Regeln II

- Existiert Regel $\langle A \rangle \to \epsilon$, wird A zu Endzustand
- Regeln der Form $\langle A \rangle \to \mathtt{a}$ werden zu

$$\langle A \rangle \to \mathtt{a}\langle A \rangle'$$
$$\langle A \rangle' \to \epsilon$$

- Startsymbol $S$ wird zu Anfangszustand

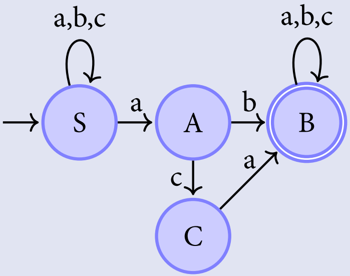
Formaler Beweis: Siehe Literatur

# Grammatiken und NEAs II

## Grammatik

$$\langle S\rangle \rightarrow \texttt{a}\langle S\rangle \mid \texttt{b}\langle S\rangle \mid \texttt{c}\langle S\rangle \mid \texttt{a}\langle A\rangle$$
$$\langle A\rangle \rightarrow \texttt{b}\langle B\rangle \mid \texttt{c}\langle C\rangle$$
$$\langle B\rangle \rightarrow \texttt{a}\langle B\rangle \mid \texttt{b}\langle B\rangle \mid \texttt{c}\langle B\rangle \mid \epsilon$$
$$\langle C\rangle \rightarrow \texttt{a}\langle B\rangle$$

## Äquivalenter NEA




## Erkannte/Erzeugte Sprache

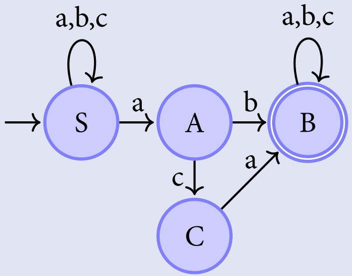
Alle Wörter $w \in \{a, b, c\}^*$, die »ab« oder »aca« enthalten

# Grammatiken und NEAs II

## Grammatik

$$\langle S\rangle \rightarrow \mathtt{a}\langle S\rangle \mid \mathtt{b}\langle S\rangle \mid \mathtt{c}\langle S\rangle \mid \mathtt{a}\langle A\rangle$$
$$\langle A\rangle \rightarrow \mathtt{b}\langle B\rangle \mid \mathtt{c}\langle C\rangle$$
$$\langle B\rangle \rightarrow \mathtt{a}\langle B\rangle \mid \mathtt{b}\langle B\rangle \mid \mathtt{c}\langle B\rangle \mid \epsilon$$
$$\langle C\rangle \rightarrow \mathtt{a}\langle B\rangle$$

## Äquivalenter NEA




## Erkannte/Erzeugte Sprache

Alle Wörter $w \in \{a, b, c\}^*$, die »ab« oder »aca« enthalten

### Status Quo

- DEA $\rightarrow$ reguläre Grammatik
- DEA $\rightarrow$ NEA (trivial)
- Reguläre Grammatik $\rightarrow$ NEA
- Noch zu zeigen: NEA $\rightarrow$ DEA

Illustration: Siehe Tafel

# Äquivalenz zwischen NEAs und DEAs I

## NEAs und DEAs

- Intuition: Nichtdeterminismus ist mächtiger als Determinismus
- *Aber*: Satz von Rabin und Scott garantiert Äquivalenz von DEAs und NEAs

## Satz von Rabin und Scott

Jede von einem NEA akzeptierbare Sprache $L$ ist auch von einem DEA akzeptierbar.

# Äquivalenz zwischen NEAs und DEAs I

## NEAs und DEAs

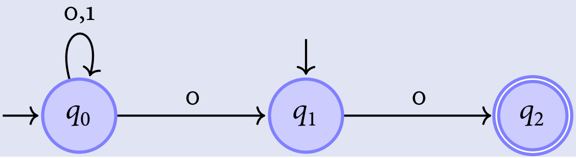
- Intuition: Nichtdeterminismus ist mächtiger als Determinismus
- *Aber*: Satz von Rabin und Scott garantiert Äquivalenz von DEAs und NEAs

## Satz von Rabin und Scott

Jede von einem NEA akzeptierbare Sprache $L$ ist auch von einem DEA akzeptierbar.

# Äquivalenz zwischen NEAs und DEAs II

## NEA: $x \in \{0, 1\}^*, x = 0$ oder $x$ endet auf $00$

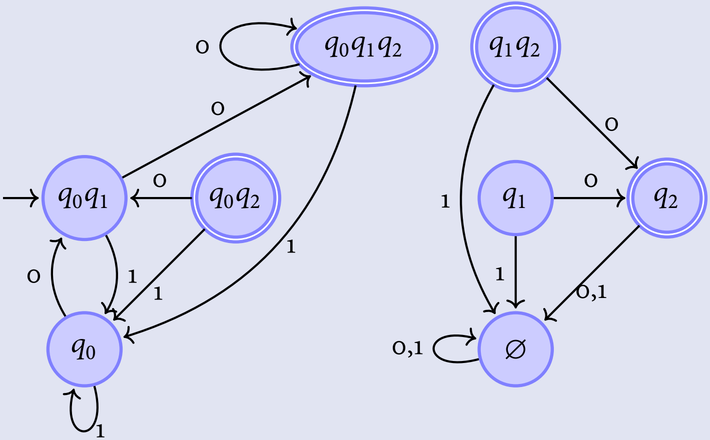



## Rabin/Scott: Grundidee

- Alle möglichen Zustandsmengen als *einen* Zustand auffassen
- Transitionen zwischen Zustandsmengen angeben.
- Neue Endzustände: Menge enthält mindestens einen alten Endzustand

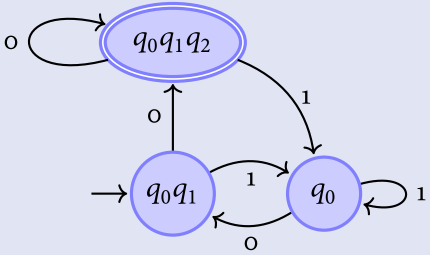
# Äquivalenz zwischen NEAs und DEAs III

## Äquivalenter DEA



# Äquivalenz zwischen NEAs und DEAs III

## Äquivalenter DEA ohne nicht-erreichbare Zustände



# Äquivalenz zwischen NEAs und DEAs IV

## Bisheriger Stand

- Konvertierungsalgorithmus NEA$\rightarrow$ DEA vorhanden
- Rückrichtung trivial!
- Keine Effizienzverschlechterung ($|w| = n \Leftrightarrow n$ Bearbeitungsschritte)
- Potentiell exponentieller Zuwachs an Zuständen

# Äquivalenz zwischen NEAs und DEAs IV

## Äquivalenz DEA/NEA: Formale Darstellung

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, E, F)$ ein NEA. Dann existiert ein DEA $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ mit

- $Q' \equiv \mathcal{P}(Q)$ Potenzmenge von $Q$
- $\delta'(Z, a) \equiv \bigcup_{q \in Z} \delta(q, a)$ mit $Z \in Q' = \mathcal{P}(Q)$
- $q_0' = E$ (Interpretation als kombinierter Einzelzustand!)
- $F' = \{Z \subseteq Q' \mid Z \cap F \neq \varnothing\}$

der die gleiche Sprache wie $M$ akzeptiert, also

$$\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M').$$

Beweis der Äquivalenz: Siehe Tafel

## Status Quo II

### Status Quo II: Ringschluss vollendet!

- DEA → reguläre Grammatik
- DEA → NEA (trivial)
- Reguläre Grammatik → NEA
- NEA → DEA

# Äquivalenz zwischen NEAs und DEAs V

## Exponentieller Zustandszuwachs

- $\exists$ NEAs, deren Konvertierung in DEAs exponentiell viele Zustände ($2^{|Q|}$) benötigt
- Beispiel: $L = \{w \in \{0,1\}^n \mid k\text{-letztes Zeichen ist } 0\}$ (Beweis: Siehe Tafel)

## Schlussfolgerungen

- Potenzmengenkonstruktion NEA$\rightarrow$ DEA kann optimal sein
- NEAs können Sprachen im Allgemeinen *exponentiell kompakter* als DEAs darstellen
- Worst Case tritt so gut wie nie auf

# Äquivalenz zwischen NEAs und DEAs V

## Exponentieller Zustandszuwachs

- $\exists$ NEAs, deren Konvertierung in DEAs exponentiell viele Zustände ($2^{|Q|}$) benötigt
- Beispiel: $L = \{w \in \{0,1\}^n \mid k$-letztes Zeichen ist 0$\}$ (Beweis: Siehe Tafel)

## Schlussfolgerungen

- Potenzmengenkonstruktion NEA$\rightarrow$ DEA kann optimal sein
- NEAs können Sprachen im Allgemeinen *exponentiell kompakter* als DEAs darstellen
- Worst Case tritt so gut wie nie auf

# Reguläre Ausdrücke I

## Beispiele für reguläre Ausdrücke

- Postleitzahl & Ort: (0-9)+␣(A-Z|a-z)+
  - (): Gruppierung
  - A-Z: Zeichengruppe (entspricht A | B | C | …| X)
  - $\xi\{m, n\}$: Zwischen $m$ und $n$ Wiederholungen des regulären Ausdrucks $\xi$
- Beispielsprache aller Wörter $x \in \{0, 1\}^*$ , die mit 00 enden oder gleich 0 sind: 0|((0|1)*00)
- eMail-Adressen matchen (*vereinfachter* Ansatz): (A-Z|a-z|0-9|.|_|-)+@(A-Z|a-z|0-9|.|-)+.(A-Z|a-z){2,6}

## Software-Bibliotheken

http://en.wikipedia.org/wiki/Comparison_of_regular_expression_engines

# Reguläre Ausdrücke I

## Beispiele für reguläre Ausdrücke

- Postleitzahl & Ort: (0-9)+␣(A-Z|a-z)+
  - (): Gruppierung
  - A-Z: Zeichengruppe (entspricht A | B | C | …| X)
  - $\xi\{m, n\}$: Zwischen $m$ und $n$ Wiederholungen des regulären Ausdrucks $\xi$
- Beispielsprache aller Wörter $x \in \{0, 1\}^*$ , die mit 00 enden oder gleich 0 sind: 0|((0|1)*00)
- eMail-Adressen matchen (*vereinfachter* Ansatz): (A-Z|a-z|0-9|.|_|-)+@(A-Z|a-z|0-9|.|-)+.(A-Z|a-z){2,6}

## Software-Bibliotheken

http://en.wikipedia.org/wiki/Comparison_of_regular_expression_engines

# Reguläre Ausdrücke II

## Reguläre Ausdrücke: Syntax

Sei $\Sigma$ ein beliebiges Alphabet. Dann wird die Menge aller *regulären Ausdrücke* $R_\Sigma$ gegeben durch:

- Die leere Menge und das leere Wort
- Ein beliebiges Symbol aus $\Sigma$
- Die Konkatenation zweier regulärer Ausdrücke
- Die Auswahl zwischen zwei regulären Ausdrücken
- Die Sternoperation angewendet auf einen regulären Ausdruck
- Gruppierung regulärer Ausdrücke

# Reguläre Ausdrücke II

## Reguläre Ausdrücke: Syntax

Sei $\Sigma$ ein beliebiges Alphabet. Dann wird die Menge aller *regulären Ausdrücke* $R_\Sigma$ induktiv gebildet durch:

- $\emptyset, \epsilon \in R_\Sigma$
- Ein beliebiges Symbol aus $\Sigma$
- Die Konkatenation zweier regulärer Ausdrücke
- Die Auswahl zwischen zwei regulären Ausdrücken
- Die Sternoperation angewendet auf einen regulären Ausdruck
- Gruppierung regulärer Ausdrücke

# Reguläre Ausdrücke II

## Reguläre Ausdrücke: Syntax

Sei $\Sigma$ ein beliebiges Alphabet. Dann wird die Menge aller *regulären Ausdrücke* $R_\Sigma$ induktiv gebildet durch:

- $\emptyset, \epsilon \in R_\Sigma$
- $\Sigma \in R_\Sigma$
- Die Konkatenation zweier regulärer Ausdrücke
- Die Auswahl zwischen zwei regulären Ausdrücken
- Die Sternoperation angewendet auf einen regulären Ausdruck
- Gruppierung regulärer Ausdrücke

# Reguläre Ausdrücke II

## Reguläre Ausdrücke: Syntax

Sei $\Sigma$ ein beliebiges Alphabet. Dann wird die Menge aller *regulären Ausdrücke* $R_\Sigma$ induktiv gebildet durch:

- $\emptyset, \epsilon \in R_\Sigma$
- $\Sigma \in R_\Sigma$
- $r_1, r_2 \in R_\Sigma \Rightarrow r_1 r_2 \in R_\Sigma$
- Die Auswahl zwischen zwei regulären Ausdrücken
- Die Sternoperation angewendet auf einen regulären Ausdruck
- Gruppierung regulärer Ausdrücke

# Reguläre Ausdrücke II

## Reguläre Ausdrücke: Syntax

Sei $\Sigma$ ein beliebiges Alphabet. Dann wird die Menge aller *regulären Ausdrücke* $R_\Sigma$ induktiv gebildet durch:

- $\emptyset, \epsilon \in R_\Sigma$
- $\Sigma \in R_\Sigma$
- $r_1, r_2 \in R_\Sigma \Rightarrow r_1 r_2 \in R_\Sigma$
- $r_1, r_2 \in R_\Sigma \Rightarrow (r_1 \mid r_2) \in R_\Sigma$
- Die Sternoperation angewendet auf einen regulären Ausdruck
- Gruppierung regulärer Ausdrücke

# Reguläre Ausdrücke II

## Reguläre Ausdrücke: Syntax

Sei $\Sigma$ ein beliebiges Alphabet. Dann wird die Menge aller *regulären Ausdrücke* $R_\Sigma$ induktiv gebildet durch:

- $\emptyset, \epsilon \in R_\Sigma$
- $\Sigma \in R_\Sigma$
- $r_1, r_2 \in R_\Sigma \Rightarrow r_1 r_2 \in R_\Sigma$
- $r_1, r_2 \in R_\Sigma \Rightarrow (r_1 \mid r_2) \in R_\Sigma$
- $r \in R_\Sigma \Rightarrow r^* \in R_\Sigma$
- Gruppierung regulärer Ausdrücke

# Reguläre Ausdrücke II

## Reguläre Ausdrücke: Syntax

Sei $\Sigma$ ein beliebiges Alphabet. Dann wird die Menge aller *regulären Ausdrücke* $R_\Sigma$ induktiv gebildet durch:

- $\emptyset, \epsilon \in R_\Sigma$
- $\Sigma \in R_\Sigma$
- $r_1, r_2 \in R_\Sigma \Rightarrow r_1 r_2 \in R_\Sigma$
- $r_1, r_2 \in R_\Sigma \Rightarrow (r_1 \mid r_2) \in R_\Sigma$
- $r \in R_\Sigma \Rightarrow r^* \in R_\Sigma$
- $r \in R_\Sigma \Rightarrow (r) \in R_\Sigma$

# Reguläre Ausdrücke II

## Reguläre Ausdrücke: Syntax

Sei $\Sigma$ ein beliebiges Alphabet. Dann wird die Menge aller *regulären Ausdrücke* $R_\Sigma$ induktiv gebildet durch:

- $\emptyset, \epsilon \in R_\Sigma$
- $\Sigma \in R_\Sigma$
- $r_1, r_2 \in R_\Sigma \Rightarrow r_1 r_2 \in R_\Sigma$
- $r_1, r_2 \in R_\Sigma \Rightarrow (r_1 \mid r_2) \in R_\Sigma$
- $r \in R_\Sigma \Rightarrow r^* \in R_\Sigma$
- $r \in R_\Sigma \Rightarrow (r) \in R_\Sigma$

## Semantik

- $\mathcal{L}(\emptyset) = \emptyset, \mathcal{L}(\epsilon) = \{\epsilon\}$
- $\mathcal{L}(a \in \Sigma) = \{a\}$
- $\mathcal{L}(rs) = \mathcal{L}(r)\mathcal{L}(s)$
- $\mathcal{L}(r|s) = \mathcal{L}(r) \cup \mathcal{L}(s)$
- $\mathcal{L}(r^*) = \mathcal{L}(r)^*$
- $\mathcal{L}((r)) = \mathcal{L}(r)$

# Reguläre Ausdrücke III

## Endliche Sprachen

Alle endlichen Sprachen sind durch reguläre Ausdrücke beschreibbar:

- Sei $A = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n\}$ *endliche* Menge der *endlichen* Wörter
- $(\vec{w}_1|\vec{w}_2|\vec{w}_3|\cdots|\vec{w}_n)$ regulärer Ausdruck für $A$

## Satz von Kleene

Die Menge der durch reguläre Ausdrücke beschreibbaren Sprachen ist genau die Menge der regulären Sprachen.

Beweis: Hinrichtung (über regulärer Ausdruck $\rightarrow$ NEA): siehe Tafel; Rückrichtung: Siehe Literatur (außer Hoffmann)

# Reguläre Ausdrücke III

## Endliche Sprachen

Alle endlichen Sprachen sind durch reguläre Ausdrücke beschreibbar:

- Sei $A = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n\}$ *endliche* Menge der *endlichen* Wörter
- $(\vec{w}_1|\vec{w}_2|\vec{w}_3|\cdots|\vec{w}_n)$ regulärer Ausdruck für $A$

## Satz von Kleene

Die Menge der durch reguläre Ausdrücke beschreibbaren Sprachen ist genau die Menge der regulären Sprachen.

Beweis: Hinrichtung (über regulärer Ausdruck $\rightarrow$ NEA): siehe Tafel; Rückrichtung: Siehe Literatur (außer Hoffmann)

# Status Quo III

## Status Quo III

- DEA $\longrightarrow$ reguläre Grammatik
- DEA $\longrightarrow$ NEA (trivial)
- Reguläre Grammatik $\longrightarrow$ NEA
- Reguläre Ausdrücke $\leftrightarrow$ Reguläre Grammatik
- NEA $\longrightarrow$ DEA

# Pumping-Lemma I

## Alt: Vorlage

```
\section{Einleitung}
In dieser \textbf{Einleitung},
die \textit{sehr \textbf{schnell} neu} ...
```

## Neu: Konvertiert

```
<abschnitt>Einleitung</abschnitt>
In dieser <fett>Einleitung</fett>,
die <kursiv>sehr <fett>schnell</fett> neu</kursiv> ...
```

## RegExp-Versuche

```
\{(.*)\}
\{([^\{\}]*)\}
\{([^{}]*\{[^{}]*\}[^{}]*)\}
```

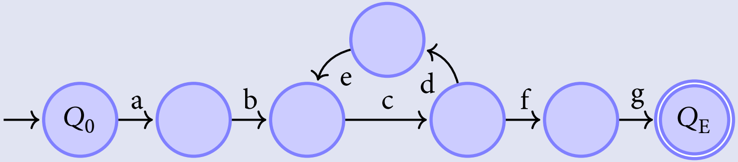
# Pumping-Lemma II

## Generelles Problem

- Ist eine Grammatik $G$ regulär?
- Kann eine Sprache $L$ mit regulären Ausdrücken beschrieben werden?

# Pumping-Lemma III

## DEA mit 7 Zuständen




## Beispiele

- abcfg ⇒ Kein Zyklus ($|w| = 5$)
- abccdecfg ⇒ Einfacher Zyklus ($|w| = 8$)
- abcdecdccfg ⇒ Zweifacher Zyklus ($|w| = 11$)

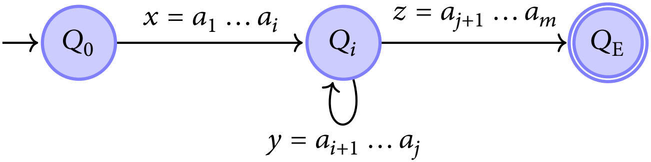
## Zyklen

Zustandsanzahl: $|Q| = n \Rightarrow$ Zyklus für Wörter $w$ mit $|w| \geq n$

# Pumping-Lemma IV

## Komponenten

1. $L$ regulär, DEA $M$ mit $L = \mathcal{L}(M)$.
2. $M$ habe $|Q| = n$ Zustände.
3. $w \in L$ mit $|w| \geq n$, $w = a_1 a_2 \dots a_m$
4. $Q_i$ Zustand von $A$ nach Lesen der ersten $i$ Symbole von $w$.
5. $|w| = m \geq n = |Q|$
6. Es gibt Zahlen $i, j : 0 \leq i < j \leq n : Q_i = Q_j$



# Pumping-Lemma V

### Pumping-Lemma (Schleifenlemma, Bar-Hillel)

Sei $L$ eine reguläre Sprache. Dann gibt es eine Zahl $n$, so dass sich alle Wörter $w \in L, |w| \geq n$ zerlegen lassen in $w = xyz$, so dass

1. $|y| \geq 1$
2. $|xy| \leq n$
3. Für alle $i \in \mathbb{N}_0 : xy^iz \in L$

Beweis: Siehe Tafel

# Pumping-Lemma VI: Anwendungsbeispiel I

**Dyck-Sprache $D_1$**

Ist $L \equiv \{\mathrm{a}^n\mathrm{b}^n \mid n \in \mathbb{N}^+\}$ eine reguläre Sprache?

Beispiele: ab, aabb, aaabbb, aaaabbbb, …

Beweis: Siehe Tafel (Widerspruchsbeweis)

# Pumping-Lemma VII: Anwendungsbeispiel II

## Quadratzahlen

$L \equiv \{a^n \mid \exists m \in \mathbb{N} : n = m^2\}$. Beispiele: a, aaaa, aaaaaaaaa, …

## Beweis

- Annahme: $L$ ist regulär
- Sei $n$ die Konstante des Pumping-Lemmas
- Wähle $z = a^{n^2} \in L \Rightarrow |z| > n$
- Pumping-Lemma:
  - $z = uvw$, $1 \leq |v| \leq |uv| \leq n$
  - $uv^2w \in L$
- $n^2 = |z| = |uvw| < |uv^2w| \leq n^2 + n < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$
- Daraus folgt: $|uv^2w|$ ist eine Quadratzahl zwischen $n^2$ und $(n+1)^2$
- Widerspruch!

# Satz von Myhill und Nerode I

## Äquivalenzrelation für Sprache $L$

Es gilt $xR_L y$ genau dann, wenn für alle Wörter $z \in \Sigma^*$ gilt

$$xz \in L \Leftrightarrow yz \in L.$$

- Anfügen beliebiger Teilstrings: Keine Änderung Mitgliedschaft in Äquivalenzklasse
- $z = \epsilon : x \in L \Leftrightarrow y \in L$
- Anzahl erzeugter Äquivalenzklassen: *Index* von $R_L$

# Satz von Myhill und Nerode II

**Satz von Myhill und Nerode**

Eine Sprache $L$ ist genau dann regulär, wenn der Index von $R_L$ endlich ist.

Beweis: Siehe Tafel.

# Satz von Myhill und Nerode III

### Beispiel

$L \equiv \{x \in \{0,1\}^* \mid x \text{ endet mit } 00\}$

### Äquivalenzklassen

- $[\epsilon] = \{x \mid x \text{ endet nicht mit } 0\}$
- $[0] = \{x \mid x \text{ endet mit } 0\text{, aber nicht mit } 00\}$
- $[00] = \{x \mid x \text{ endet mit } 00\}$

Beispiel Automat: Siehe Tafel

# Automatenminimierung I

**Satz: Minimalautomat**

Äquivalenzklassenautomat $M_0$ ist minimal, d.h. besitzt die kleinstmögliche Anzahl von Zuständen

Folgerungen aus vorhergehendem Beweis:

- Sei $M$ ein Automat mit $\mathcal{L}(M) = L$.
- $R_M$: Verfeinerung von $R_L$ sein, da ansonsten Klassen fehlen: $R_M \subseteq R_L = R_{M_0}$
- Anzahl Zustände von $M$ größer oder gleich Anzahl Zustände von $M_0$
- Zustandszahl von $M$ und $L$ gleich: Identisch bis auf *Isomorphie*, d.h. Umbenennung der Zustände

## Automatenminimierung II: Konstruktion

Automat ist *nicht* minimal, wenn es zwei Zustände $q, q'$ gibt:

$$\hat{\delta}(q, x) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q', x) \in F$$

$\Rightarrow (q, q')$ können verschmolzen werden. Algorithmus:

1. Tabelle aller Zustandspaare $(q, q')$ mit $q \neq q'$ aufstellen
2. Alle Paare $(q, q')$ markieren mit $q \in F$ und $q' \notin F$ oder umgekehrt
3. Für alle unmarkierten Paare $(q, q')$ und alle $a \in \Sigma$: Testen, ob

   $$(\delta(q, a), \delta(q', a))$$

   bereits markiert ist. Wenn ja, *Ausgangspaar* $(q, q')$ markieren
4. Schritt 3 solange wiederholen, bis Tabelle invariant
5. Alle nicht-markierten Paare zu je einem Zustand verschmelzen

Beispiel: Siehe Tafel

### Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen unter

- Vereinigung
- Schnitt
- Komplement
- Produkt
- Stern

Beweis: Siehe Tafel

### Neuen Beweistechnik: Nicht-Regularität einer Sprache

- Zwei Sprachen $L_1$ (regulär), $L_2$ (unbekannt)
- $L_3 = L_1 \circ L_2$ (für geeignete Operation $\circ$) berechnen
- $L_3$ nicht regulär $\rightarrow$ $L_2$ nicht regulär

## Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen unter

- Vereinigung
- Schnitt
- Komplement
- Produkt
- Stern

Beweis: Siehe Tafel

## Neuen Beweistechnik: Nicht-Regularität einer Sprache

- Zwei Sprachen $L_1$ (regulär), $L_2$ (unbekannt)
- $L_3 = L_1 \circ L_2$ (für geeignete Operation $\circ$) berechnen
- $L_3$ nicht regulär $\rightarrow$ $L_2$ nicht regulär

## Entscheidbare Eigenschaften regulärer Sprachen

- *Wortproblem*: Gegeben Wort $w \in \Sigma^*$ und Sprache $L \in \Sigma^*$: Gilt $w \in L$ oder $w \notin L$?
- *Leerheitsproblem*: Enthält eine Sprache $L$ kein Wort, d.h. gilt $L = \emptyset$?
- *Endlichkeitsproblem*: Besitzt $L$ nur endlich viele Elemente, d.h. $|L| \neq \infty$? )
- *Schnittproblem*: Gilt für zwei Sprachen $L_1, L_2$, dass $L_1 \cap L_2 = \emptyset$?
- *Äquivalenzproblem*: Sind zwei Sprachen $L_1, L_2$ gleich, d.h. gilt $L_1 = L_2$?

## Entscheidbarkeit

### Entscheidbare Eigenschaften regulärer Sprachen

- *Wortproblem*: ✓(DEA verwenden)
- *Leerheitsproblem*: ✓(DEA: Kein Pfad von Start- zu (einem) Endzustand)
- *Endlichkeitsproblem*: ✓($|\mathcal{L}(M)| = \infty \Leftrightarrow \exists$ Zyklus, der von $q_0$ erreichbar ist und in $F$ endet.)
- *Schnittproblem*: ✓(Konstruktion Automat, siehe Tafel)
- *Äquivalenzproblem*: ✓(Minimalautomaten (bis auf Isomorphie) identisch)

# Kontextfreie Sprachen

# Kontextfreie Sprachen I

## Erinnerung I: Kontextfreie Sprache (Typ 2)

- Gegeben durch Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$
- Beschränkungen für alle Regeln $l \to r \in P$:
  - $|l| \le |r|$
  - $l \in V$

## Erinnerung II

Eine kontextfreie Grammatik $G$ kann $\epsilon$-frei gemacht werden

# Kontextfreie Sprachen II

## Beispiel 1: Palindrome

- Alle Wörter, die von vorne und hinten gelesen identisch sind, also

$$L_P \equiv \{w \in \Sigma^* | w = v0v^R \cup w = v1v^R\}$$

- Kontextfreie Grammatik fur Palindrome über $\Sigma = \{0, 1\}$:

$$\langle S \rangle \rightarrow 0 \mid 1 \mid 0\langle S \rangle 0 \mid 1\langle S \rangle 1$$

## Korollar

$\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2$, d.h. reguläre Sprachen sind eine *echte* Teilmenge der kontextfreien Sprachen.
Beweis:

- Nach Konstruktion: $\forall L \in \mathcal{L}_3 : L \in \mathcal{L}_2$
- Binäre Palindrome sind *nicht regulär*, d.h. $L_P \notin \mathcal{L}_3$
- Binäre Palindrome sind *kontextfrei*, d.h. $L_P \in \mathcal{L}_2$
- Ergo $\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2$

# Kontextfreie Sprachen II

## Beispiel 1: Palindrome

- Alle Wörter, die von vorne und hinten gelesen identisch sind, also

$$L_P \equiv \{w \in \Sigma^* | w = v0v^R \cup w = v1v^R\}$$

- Kontextfreie Grammatik fur Palindrome über $\Sigma = \{0, 1\}$:

$$\langle S \rangle \rightarrow \mathtt{0} \mid \mathtt{1} \mid \mathtt{0}\langle S \rangle\mathtt{0} \mid \mathtt{1}\langle S \rangle\mathtt{1}$$

## Korollar

$\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2$, d.h. reguläre Sprachen sind eine *echte* Teilmenge der kontextfreien Sprachen.
Beweis:

- Nach Konstruktion: $\forall L \in \mathcal{L}_3 : L \in \mathcal{L}_2$
- Binäre Palindrome sind *nicht regulär*, d.h. $L_P \notin \mathcal{L}_3$
- Binäre Palindrome sind *kontextfrei*, d.h. $L_P \in \mathcal{L}_2$
- Ergo $\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2$

# Kontextfreie Sprachen II

## Beispiel 2: Dyck-Sprache $D_1$

- Korrekt geklammerte Ausdrücke: (), (()), ((())), …
- Grammatik:

$$\langle S \rangle \rightarrow \ ( \langle S \rangle ) \ | \epsilon$$

# Chomsky-Normalform I

## Definition: Chomsky-Normalform

Eine Grammatik $G$ mit $\epsilon \notin \mathcal{L}(G)$ ist in *Chomsky-Normalform* gegeben, wenn alle Regeln eine der beiden Formen

$$A \longrightarrow BC$$
$$A \longrightarrow \mathsf{a}$$

haben, wobei $A, B, C \in V$ und $\mathsf{a} \in \Sigma$.

## Satz

Zu jeder kontextfreien Grammatik $G$ mit $\epsilon \notin \mathcal{L}(G)$ gibt es eine Grammatik $G'$ in Chomsky-Normalform mit $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G')$.

# Chomsky-Normalform II

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine $\epsilon$-freie kfG

## Konstruktion, Schritt 1

Umformung in $G' = (V', \Sigma, P', S)$ mit zwei Regelformen

1. $A \to a$ mit $A \in V', a \in \Sigma$
2. $A \to x$ mit $A \in V', x \in (V' \cup \Sigma)^+, |x| \geq 2$

Konvertierungsalgorithmus:

- *Zyklen eliminieren*: Gibt es $B_1, B_2, \ldots, B_k$ mit $B_1 \to B_2 \to B_3 \to \cdots \to B_k \to B_1$, dann ersetze alle $B_i$ durch $B$
- *Variablen sortieren & transformieren*: $V' = \{A_1, \ldots, A_n\}$ wird so numeriert, dass $A_i \to A_j \Rightarrow i < j$ gilt. Dann Elimination dieser Regeln:
  - Iteriere von $k = n - 1$ bis $k = 1$
  - Für alle $A_k \to A_{k'}$ mit $k' > k$ und $A_{k'} \to x_1|x_2|x_3|\cdots|x_m$: Neue Regel einführen: $A_k \to x_1|x_2|\cdots|x_m$

# Chomsky-Normalform III

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine kfG aus Schritt 1

## Konstruktion, Schritt 2

1. Neue Regel $B \to a$ für jedes Terminalzeichen a hinzufügen: $\forall a \in \Sigma$: $V_{\text{neu}} = V \cup \{B\}$, $P_{\text{neu}} = P \cup \{(B \to a)\}$
2. Alle $a$ auf der rechten Regelseite durch $B$ ersetzen (außer Regel bereits in Form $A \to a$). Ergibt Regeln der Form:
$$A \to a \text{ oder } A \to B_1 B_2 \dots B_k, k \geq 2$$
3. Für alle Regeln $A \to B_1 B_2 \dots B_k$ mit $k \geq 3$: Neue Variablen $C_1, C_2, \dots C_{k-2}$ einführen mit
$$A \to B_1 C_1,\ C_1 \to B_2 C_2,$$
$$C_2 \to B_3 C_3,\ \dots,\ C_{k-2} \to B_{k-1} B_k$$

# Chomsky-Normalform IV

## Beispiel

$$S \longrightarrow AB$$
$$S \longrightarrow ABA$$
$$A \longrightarrow aA$$
$$A \longrightarrow a$$
$$B \longrightarrow Bb$$
$$B \longrightarrow b \mid \epsilon$$

Umwandlung: Siehe Tafel

# Chomsky-Normalform V

## Beispiel 2

$$S \rightarrow ab \mid aSb$$

## Greibach-Normalform

Eine $\epsilon$-freie kontextfreie Grammatik $G$ ist in Greibach-Normalform, wenn alle Regeln die Form

$$\langle A\rangle \to \mathsf{a}\langle B\rangle_1\langle B\rangle_2\langle B\rangle_3 \dots \langle B\rangle_k, k \geq 0$$

haben ($\langle B\rangle_i \in V, a \in \Sigma$)

- Zu jeder $\epsilon$-freien kontextfreien Grammatik $G$ gibt es eine Grammatik $G'$ in Greibach-Normalform mit $\mathcal{L}(G') = \mathcal{L}(G)$ (Beweis: Siehe Literatur)
- Reguläre Sprachen sind in Greibach-Normalform mit $k = 0$ oder $k = 1$.

# Pumping Lemma für kfS I

## Probleme/Fragestellungen

- Ist eine gegebene Sprache kontextfrei?
- $\Rightarrow$ Aussage über Struktur von kfS notwendig.

# Pumping-Lemma für kfS II

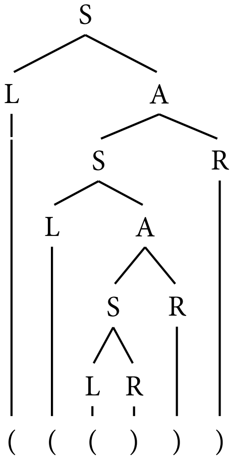
## Klammerpaare

$$S \quad \rightarrow \quad SS \mid (S) \mid ()$$

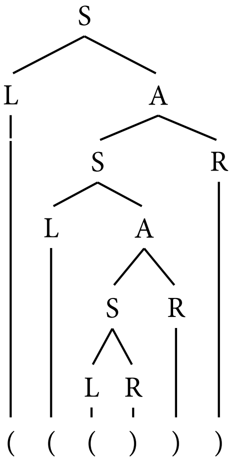
Beispiele: (), (()), (()()), ((())), …

## CNF-Darstellung

$$\begin{aligned} S &\rightarrow SS \mid LA \mid LR \\ L &\rightarrow ( \\ R &\rightarrow ) \\ A &\rightarrow SR \end{aligned}$$



# Pumping-Lemma für kfS III

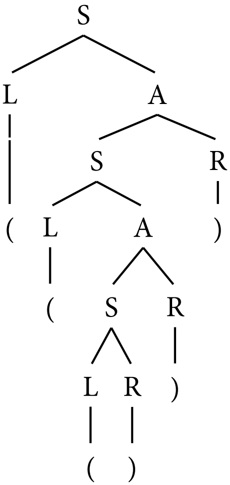



### Wort

( ( ( ) ) )

### Teilbaum

# Pumping-Lemma für kfS III

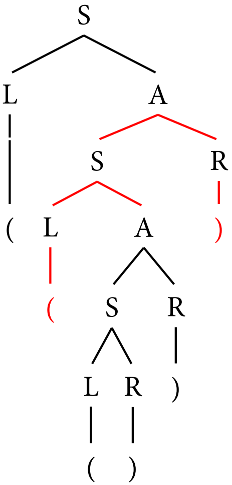



### Wort

( ( ( ) ) )

### Teilbaum

# Pumping-Lemma für kfS III

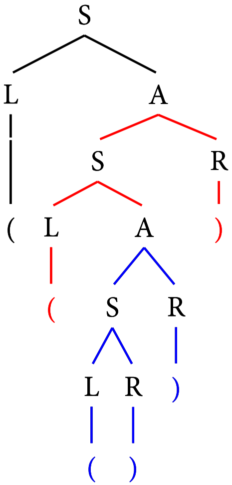



## Wort

( ( ( ) ) )

## Teilbaum

# Pumping-Lemma für kfS III

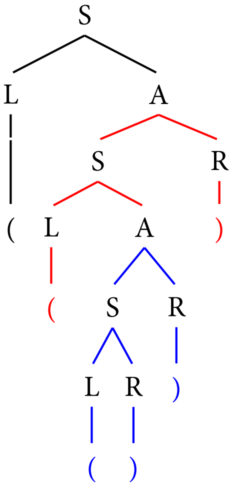


## Wort

( ( ( ) ) )

## Teilbaum

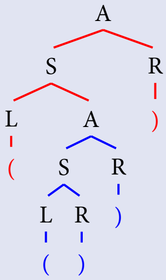
# Pumping-Lemma für kfS III



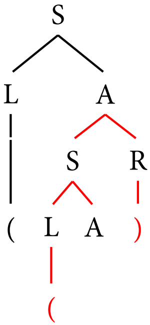

## Wort

( ( ( ) ) )

## Teilbaum



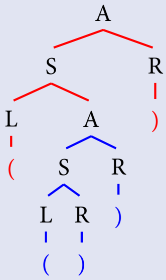
# Pumping-Lemma für kfS III



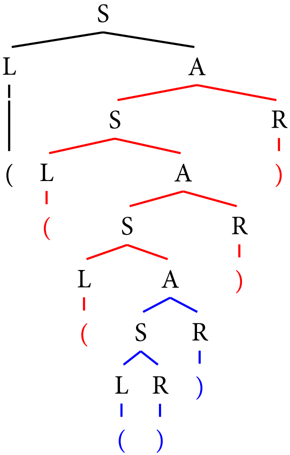

## Wort

( ( ( ) ) )

## Teilbaum



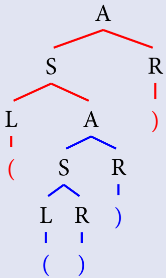
# Pumping-Lemma für kfS III



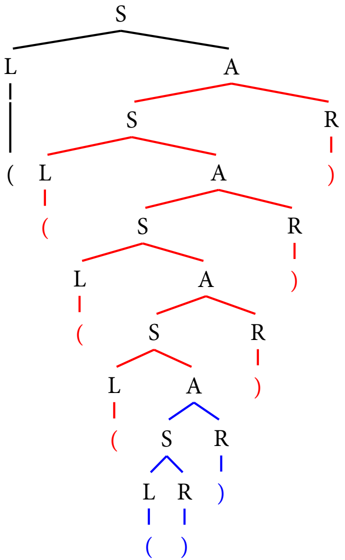

## Wort

( ( ( ( ) ) ) )

## Teilbaum



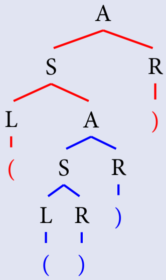
# Pumping-Lemma für kfS III



## Wort

( ( ( ( ( ) ) ) ) )

## Teilbaum



# Pumping-Lemma IV für kfS: Struktur

**Fragen**

- Wann tritt Nicht-Terminalzeichen sicher mehrfach in Pfad auf?
- Struktur aufgepumpter und fixer Anteile?

# Intermezzo: Pfadlänge in Binärbäumen

**Satz: Pfadlänge in Binärbäumen**

Sei $k \in \mathbb{N}$ und $B$ ein Binärbaum. Mindestens ein Pfad der Länge $\geq k$ existiert in $B$, wenn die Blattanzahl $|B| \geq 2^k$ ist.

## Intermezzo: Pfadlänge in Binärbäumen

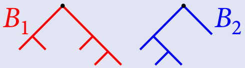
### Satz: Pfadlänge in Binärbäumen

Sei $k \in \mathbb{N}$ und $B$ ein Binärbaum. Mindestens ein Pfad der Länge $\geq k$ existiert in $B$, wenn die Blattanzahl $|B| \geq 2^k$ ist.

### k=0

S

### Induktionsschritt: $k \to k + 1$




Sei $|B_1| \geq 2^{k_1}, |B_2| \geq 2^{k_2}$.
Sei oBdA. $|B_1| \geq |B_2|$.
$|B| \leq 2 \cdot 2^{k_1} = 2^{k_1+1}$.
Pfad der Länge $k_1$ in $B_1$ existiert nach IV,
Pfad der Länge $k_1 + 1$ nach Konstruktion.

# Intermezzo: Pfadlänge in Binärbäumen

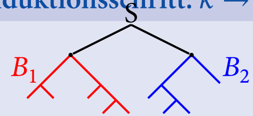
## Satz: Pfadlänge in Binärbäumen

Sei $k \in \mathbb{N}$ und $B$ ein Binärbaum. Mindestens ein Pfad der Länge $\geq k$ existiert in $B$, wenn die Blattanzahl $|B| \geq 2^k$ ist.

## k=0

S

## Induktionsschritt: $k \to k+1$




Sei $|B_1| \geq 2^{k_1}$, $|B_2| \geq 2^{k_2}$.
Sei oBdA. $|B_1| \geq |B_2|$.
$|B| \leq 2 \cdot 2^{k_1} = 2^{k_1+1}$.
Pfad der Länge $k_1$ in $B_1$ existiert nach IV,
Pfad der Länge $k_1 + 1$ nach Konstruktion.

# Intermezzo: Pfadlänge in Binärbäumen

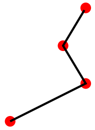
## Satz: Pfadlänge in Binärbäumen

Sei $k \in \mathbb{N}$ und $B$ ein Binärbaum. Mindestens ein Pfad der Länge $\geq k$ existiert in $B$, wenn die Blattanzahl $|B| \geq 2^k$ ist.

## Mehrfache Nicht-Terminalsymbole

$G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $|V|$ Nicht-Terminalsymbolen.

- Pfad mit Länge $|V|$ macht Wiederholung erforderlich ($|V| + 1$ Knoten).
- Garantiert für Wörter mit Länge $\geq 2^{|V|}$.



# Pumping-Lemma für kfS V

## Fragen

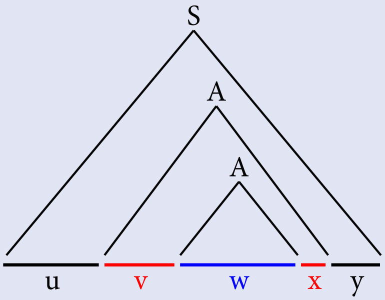
- ✓ Wann tritt Nicht-Terminalzeichen sicher mehrfach in Pfad auf?
- Struktur aufgepumpter und fixer Anteile?

# Pumping-Lemma für kfS VI

## Ableitung

1. $G = (V, \Sigma, P, S)$, in CNF. Wähle Wort $z$ mit $|z| \geq 2^{|V|}$, d.h. binärer Syntaxbaum mit $\geq 2^{|V|}$ Blättern.
2. Pfad der Länge $\geq |V|$ vorhanden $\Rightarrow$ enthält $|V| + 1$ Nonterminale $\Rightarrow$ Mehrfaches Auftreten von A (Suche von unten nach oben: A max. $|V|$ Schritte von Blättern entfernt)

## Syntaxbaum

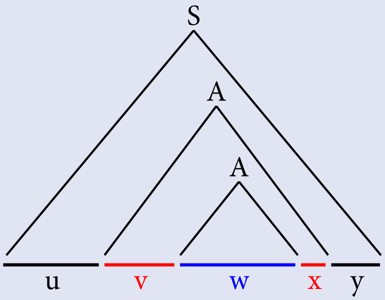


# Pumping-Lemma für kfS VI

## Ableitung

3. A muss in Regel A $\rightarrow$ BC existieren, da ansonsten kein weiteres A erzeugt werden kann (CNF!) $\Rightarrow |vx| \geq 1$.
4. Oberes A max. $|V|$ Schritte von Blättern entfernt $\Rightarrow |vwx| \leq 2^{|V|}$.

## Syntaxbaum



# Pumping-Lemma für kfS VII

**Fragen**

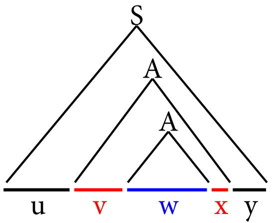
- ✓ Wann tritt Nicht-Terminalzeichen sicher mehrfach in Pfad auf?
- ✓ Struktur aufgepumpter und fixer Anteile?

# Pumping-Lemma für kfS VIII: Formale Definition

## Pumping-Lemma für kfS

Sei $L$ eine kontextfreie Sprache. Dann gibt es eine Konstante $n$, so dass sich alle Wörter $z \in L, |z| \geq n$ zerlegen lassen in $z = uvwxy$, so dass

1. $|vwx| \leq n$ (*Mittelteil begrenzt*)
2. $|vx| \geq 1$ (*Mindestens eine aufgepumpte Zeichenreihe nicht leer*)
3. Für alle $i \geq 0$ : $uv^iwx^iy \in L$



# Pumping Lemma für kfS IX: Beispiel

## Grammatik

Ist $L \equiv \{\mathrm{a}^i\mathrm{b}^i\mathrm{c}^i \mid i \in \mathbb{N}^+\}$ eine kontextfreie Sprache?

## Beispiele

abc, aabbcc, aaabbbccc, …

## Behauptung: Nein! ✗

- Annahme: Sprache ist kontextfrei, Pumping-Lemma gilt.
- Pumping-Lemma anwenden.
- Aufgepumptes Wort nicht in Sprache $\Rightarrow$ Pumping-Lemma gilt nicht $\Rightarrow$ *Widerspruch!* $\Rightarrow$ Sprache kann nicht kontextfrei sein.

# Pumping Lemma für kfS IX: Beispiel

## Grammatik

Ist $L \equiv \{\mathrm{a}^i\mathrm{b}^i\mathrm{c}^i \mid i \in \mathbb{N}^+\}$ eine kontextfreie Sprache?

## Beispiele

abc, aabbcc, aaabbbccc, …

## Beweis

- Pumping-Lemma: $\exists n \in \mathbb{N}$, so dass $z = \mathrm{a}^i\mathrm{b}^i\mathrm{c}^i, |z| \geq n$ als $uvwxy$ darstellbar mit $|vx| \geq 1, |vwx| \leq n$. Wähle $i = n$.
  - $uv^0wx^0y = uwy \in L$, ebenso $uvwxy \in L$.
  - $vx$ muss gleiche Anzahl a,b,c enthalten (wegen $|vx| \geq 1$ mindestens einen).
  - $|vwx| \leq n$: $vwx$ kann nicht gleichzeitig a und c enthalten:
    aaa, aab, abb, bbb, bbc, bcc, ccc
  - $vx$ *kann* also nicht gleiche Anzahl a,b,c enthalten.
- Widerspruch!

# Pumping Lemma für kfS X

## Regulär

- RegExps vs. kontextfreie Sprache
- Ad-hoc-Lösung vs. Parser (Yacc, ANTLR, XText, …)

## Kontextfrei

- Wortproblem kfS: $\mathcal{O}(n^3)$, kontextsensitiv: $\mathcal{O}(2^n)$
- $\Rightarrow$ Für IT-Anwendungen kontraproduktiv!
- Anwendung: Linguistik (Baumadjunktionsgrammatiken)

## Praktische Anwendung

- Manche Programmiersprachen-Aspekte nicht-kontextfrei
- Zweistufiges Verfahren:
  - Kontextfreie Grammatik zur Syntaxanalyse, bsp. Wort $a^n b^j c^k$
  - Semantische Analyse, bsp. $n == j == k \Rightarrow$ effektiv $a^n b^n c^n$ sichergestellt

# Pumping Lemma für kfS X

## Regulär

- RegExps vs. kontextfreie Sprache
- Ad-hoc-Lösung vs. Parser (Yacc, ANTLR, XText, …)

## Kontextfrei

- Wortproblem kfS: $\mathcal{O}(n^3)$, kontextsensitiv: $\mathcal{O}(2^n)$
- $\Rightarrow$ Für IT-Anwendungen kontraproduktiv!
- Anwendung: Linguistik (Baumadjunktionsgrammatiken)

## Praktische Anwendung

- Manche Programmiersprachen-Aspekte nicht-kontextfrei
- Zweistufiges Verfahren:
  - Kontextfreie Grammatik zur Syntaxanalyse, bsp. Wort $a^n b^j c^k$
  - Semantische Analyse, bsp. $n == j == k \Rightarrow$ effektiv $a^n b^n c^n$ sichergestellt

### Abschlusseigenschaften kontextfreier Sprachen

Die kontextfreien Sprachen sind abgeschlossen unter

- Vereinigung
- Produkt
- Stern

Sie sind *nicht* abgeschlossen unter

- Schnitt
- Komplement

Beweis: Siehe Tafel

# Kellerautomaten I

## Probleme bei DEAs und NEAs

- Sprachen der Form $a^n b^n$ oder $ww^R$ nicht-regulär
  - Kein DEA/NEA zur Entscheidung konstruierbar
  - Alternatives Maschinenmodell?
- Intuitiver Grund: Kein »Gedächtnis« für bislang gelesene Eingabe
- Idee: NEA um (mehr als 1 implizites Bit) Speicher erweitern

# Kellerautomaten II

## Kellerautomat

Ein *Kellerautomat* (*Pushdown Automaton, PDA*) besteht aus

- Zuständen, in denen sich der Automat befinden kann
- einer Menge von Zeichen, die der Automat verarbeitet
- einer Menge von Zeichen, die im Kellerspeicher stehen können
- einer Regel für Zustandsübergänge
- einem Anfangszustand
- einem anfänglichen Zeichen im Keller

Illustration: Siehe Tafel

# Kellerautomaten II

## Kellerautomat

Ein *Kellerautomat* (*Pushdown Automaton, PDA*) ist gegeben durch ein 6-Tupel $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#)$:

- Zuständen, in denen sich der Automat befinden kann
- einer Menge von Zeichen, die der Automat verarbeitet
- einer Menge von Zeichen, die im Kellerspeicher stehen können
- einer Regel für Zustandsübergänge
- einem Anfangszustand
- einem anfänglichen Zeichen im Keller

Illustration: Siehe Tafel

# Kellerautomaten II

## Kellerautomat

Ein *Kellerautomat* (*Pushdown Automaton, PDA*) ist gegeben durch ein 6-Tupel $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#)$:

- Q: endliche Zustandsmenge
- einer Menge von Zeichen, die der Automat verarbeitet
- einer Menge von Zeichen, die im Kellerspeicher stehen können
- einer Regel für Zustandsübergänge
- einem Anfangszustand
- einem anfänglichen Zeichen im Keller

Illustration: Siehe Tafel

# Kellerautomaten II

## Kellerautomat

Ein *Kellerautomat* (*Pushdown Automaton, PDA*) ist gegeben durch ein 6-Tupel $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#)$:

- Q: endliche Zustandsmenge
- Σ: endliches Bandalphabet
- einer Menge von Zeichen, die im Kellerspeicher stehen können
- einer Regel für Zustandsübergänge
- einem Anfangszustand
- einem anfänglichen Zeichen im Keller

Illustration: Siehe Tafel

# Kellerautomaten II

## Kellerautomat

Ein *Kellerautomat* (*Pushdown Automaton, PDA*) ist gegeben durch ein 6-Tupel $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#)$:

- Q: endliche Zustandsmenge
- Σ: endliches Bandalphabet
- Γ: endliches Kelleralphabet
- einer Regel für Zustandsübergänge
- einem Anfangszustand
- einem anfänglichen Zeichen im Keller

Illustration: Siehe Tafel

# Kellerautomaten II

## Kellerautomat

Ein *Kellerautomat* (*Pushdown Automaton, PDA*) ist gegeben durch ein 6-Tupel $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#)$:

- $Q$: endliche Zustandsmenge
- $\Sigma$: endliches Bandalphabet
- $\Gamma$: endliches Kelleralphabet
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \epsilon) \times \Gamma \to \mathcal{P}_f(Q \times \Gamma^*)$, wobei $\mathcal{P}_f(X)$ die Menge aller *endlichen* Teilmengen der Menge $X$ angibt
- einem Anfangszustand
- einem anfänglichen Zeichen im Keller

Illustration: Siehe Tafel

# Kellerautomaten II

## Kellerautomat

Ein *Kellerautomat* (*Pushdown Automaton, PDA*) ist gegeben durch ein 6-Tupel $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#)$:

- Q: endliche Zustandsmenge
- Σ: endliches Bandalphabet
- Γ: endliches Kelleralphabet
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \epsilon) \times \Gamma \to \mathcal{P}_f(Q \times \Gamma^*)$, wobei $\mathcal{P}_f(X)$ die Menge aller *endlichen* Teilmengen der Menge $X$ angibt
- $q_0 \in Q$: Anfangszustand
- einem anfänglichen Zeichen im Keller

Illustration: Siehe Tafel

# Kellerautomaten II

## Kellerautomat

Ein *Kellerautomat* (*Pushdown Automaton, PDA*) ist gegeben durch ein 6-Tupel $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#)$:

- $Q$: endliche Zustandsmenge
- $\Sigma$: endliches Bandalphabet
- $\Gamma$: endliches Kelleralphabet
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \epsilon) \times \Gamma \to \mathcal{P}_f(Q \times \Gamma^*)$, wobei $\mathcal{P}_f(X)$ die Menge aller *endlichen* Teilmengen der Menge $X$ angibt
- $q_0 \in Q$: Anfangszustand
- $\# \in \Gamma$: Ursprüngliches Kellersymbol

Illustration: Siehe Tafel

# Kellerautomaten III

## Interpretation Transitionsfunktion

$$\delta(q, a, A) \ni (q', B_1 \dots B_k)$$

1. $M$ ist in Zustand $q$ und liest Zeichen $a$. Oberstes Zeichen im Keller: $A$
2. Übergang:
   - $M$ *kann* in den Zustand $q'$ übergehen
   - Kellerzeichen $A$ dann durch $B_1 \dots B_k$ ersetzt ($B_1$ steht oben).
   - Möglich: $B_1 B_2 \dots B_k = AB_2 \dots B_k$, d.h. *push-Operation*
   - Möglich: $k = 0$, d.h. *pop-Operation*

## Nicht-Determinismus

- Mehrere simultane Übergänge möglich
- Spontane Übergänge (mit $a = \epsilon$) möglich

# Kellerautomaten IV

## Akzeptanz

- *Kein* akzeptierender Endzustand!
- Akzeptanzkriterien für Wörter $x \in \Sigma^*$:
  1. Wort komplett gelesen
  2. Keller leer
- Äquivalent zu expliziten Endzuständen (ohne Beweis)

# Kellerautomaten V

## Konfiguration

Konfiguration eines PDA gegeben durch Drei-Tupel $(Q, \Sigma^*, \Gamma^*)$

- $q \in Q$: Momentaner Zustand
- $w' \in \Sigma^*$: Noch zu lesender Anteil der Eingabe
- $\gamma \in \Gamma^*$: Aktueller Kellerinhalt

## Rechenschritt: Konfigurationsübergang

Die Relation $\vdash$: $Q \times \Sigma^* \times \Gamma^* \rightarrow Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$ gilt, wenn Konfiguration $k' \in (Q, \Sigma^*, \Gamma^*)$ aus Konfiguration $k \in (Q, \Sigma^*, \Gamma^*)$ durch einfache Anwendung der $\delta$-Funktion hervorgeht:
$k \vdash k'$

# Kellerautomaten V

## Konfiguration

Konfiguration eines PDA gegeben durch Drei-Tupel $(Q, \Sigma^*, \Gamma^*)$

- $q \in Q$: Momentaner Zustand
- $w' \in \Sigma^*$: Noch zu lesender Anteil der Eingabe
- $\gamma \in \Gamma^*$: Aktueller Kellerinhalt

## Rechenschritt: Konfigurationsübergang

Die Relation $\vdash$: $Q \times \Sigma^* \times \Gamma^* \to Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$ ist definiert durch:

$$(q, w_1 w_2 \dots w_n, A_1 \dots A_m) \vdash (q', w_2 \dots w_n, B_1 \dots B_k A_2 \dots A_m)$$

wenn $\delta(q, w_1, A_1) \ni (q', B_1 \dots B_k)$

# Kellerautomaten V

## Konfiguration

Konfiguration eines PDA gegeben durch Drei-Tupel $(Q, \Sigma^*, \Gamma^*)$

- $q \in Q$: Momentaner Zustand
- $w' \in \Sigma^*$: Noch zu lesender Anteil der Eingabe
- $\gamma \in \Gamma^*$: Aktueller Kellerinhalt

## Rechenschritt: Konfigurationsübergang

Die Relation $\vdash: Q \times \Sigma^* \times \Gamma^* \to Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$ ist definiert durch:

$$(q, w_1 w_2 \dots w_n, A_1 \dots A_m) \vdash (q', w_1 w_2 \dots w_n, B_1 \dots B_k A_2 \dots A_m)$$

wenn $\delta(q, \epsilon, A_1) \ni (q', B_1 \dots B_k)$

# Kellerautomaten VI

## Beispiele

1. $L_1 \equiv \{a_1 a_2 \ldots a_n \$ a_n a_{n-1} \ldots a_1 \mid a_i \in \Sigma \backslash \{\$\}\}$
2. $L_2 \equiv \{a_1 a_2 \ldots a_n a_n a_{n-1} \ldots a_1 \mid a_i \in \Sigma\}$

Maschinen & Ableitungen: Siehe Tafel

# Kellerautomaten VII

## Erkannte Sprache eines PDA

Sei $\overset{*}{\vdash}$ die reflexiv-transitive Hülle von $\vdash$. Die durch einen PDA $M$ akzeptierte Sprache $\mathcal{L}(M)$ ist gegeben durch

$$\mathcal{L}(M) = \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, \#) \overset{*}{\vdash} (q, \epsilon, \epsilon) \text{ für ein } q \in Q\}$$

# Kellerautomaten VIII

## Deterministischer Kellerautomat (DPDA)

- PDA *ohne* nicht-deterministische Übergänge:

$$|\delta(q, a, A)| + |\delta(q, \epsilon, A)| \leq 1 \; \forall q \in Q, a \in \Sigma, A \in \Gamma$$

- Erkannte Sprache: *Deterministisch kontextfrei*
  - Sehr eng verwandt: LR($k$)-Familie
  - Details: Siehe Vorlesung »Compilerbau«
- Ohne Beweis: $\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_{\text{def. kF}} \subset \mathcal{L}_2$
- Achtung: DPDA benötigt iA Endzustand $q_f$

# Kellerautomaten und kfS I

**Satz: Kellerautomaten und kfS**

Eine Sprache $L$ ist genau dann kontextfrei, wenn $L$ von einem nichtdeterministischen Kellerautomaten erkannt wird.

Beweis:

- Vorwärtsrichtung siehe Tafel
- Rückrichtung siehe Literatur (formal relativ aufwendig)

## Kellerautomaten und kfS II

- $(\mathrm{aabb}, \langle S \rangle)$
  - $(\mathrm{aabb}, \mathrm{a}\langle S \rangle\mathtt{b})$
    - $\vdash (\mathrm{abb}, \langle S \rangle\mathrm{b})$
      - $(\mathrm{abb}, \mathrm{abb})$
        - $\vdash (\mathrm{bb}, \mathrm{bb})$
        - $\vdash (\mathrm{b}, \mathrm{b})$
        - $\vdash \underline{(\epsilon, \epsilon)}$
      - $(\mathrm{abb}, \mathrm{a}\langle S \rangle\mathrm{bb})$
        - $\vdash (\mathrm{bb}, \langle S \rangle\mathrm{bb})$
          - $(\mathrm{bb}, \mathrm{a}\langle S \rangle\mathrm{bbb})$
          - $(\mathrm{bb}, \mathrm{abbb})$
  - $(\mathtt{aabb}, \mathtt{ab})$
    - $\vdash (\mathtt{abb}, \mathtt{b})$

# Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus I

## Parser für kfS

- Annahme: Grammatik in CNF
- Ableitung von Wörtern:
  - Einzelner Buchstabe ($x = a$): Regel der Form $A \to a$
  - Mehrere Buchstaben ($x = a_1 a_2 \dots a_n$): Regel $A \to BC$.
    $A$: Anfangsstück $a_1 a_2 \dots a_k$
    $B$: Endstück $a_{k+1} \dots a_n$

Illustration: Siehe Tafel

# Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus II

## Problemreduktion

$x \in \mathcal{L}(G)$ auf »kleinere« Teilprobleme reduziert:

- $a_1 a_2 \ldots a_k \in \mathcal{L}(B)$
- $a_{k+1} \ldots a_n \in \mathcal{L}(C)$
- *Achtung:* $k$ und benötigte Regel sind unbekannt!
- Lösung: Alle Möglichkeiten »durchprobieren«

## Nomenklatur

$x_{i,j}$ ist Teilwort von $x$,

- das an Position $i$ (Eins-basierte Indizierung) beginnt
- das Länge $j$ besitzt, d.h. $|x_{i,j}| = j$

Beispiele: $x = \text{abcdef} \rightarrow x_{2,2} = \text{bc}$, $x_{1,4} = \text{abcd}$, $x_{1,6} = x$

# Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus II

## CYK: Grundidee

- Ableitungen für alle Teilwörter mit Länge 1 finden
- Ableitungen für Teilwörter der Länge $j \leq n = |x|$ finden
  - $j$ zerlegbar: $(1, j-1); (2, j-2); \ldots; (j-1, 1)$
  - Bisherige Ergebnisse für Teilwörter $w'$ mit $w' \leq j-1$ verwendbar!
- Mögliche Startpositionen von Teilwort mit Länge $j$: $1, 2, \ldots, n-j+1$

## Beispiel

- $w = \text{abcdef}$, $|w| = 6$. Betrachte Teilwörter Länge $j = 4$:
  - $i = 1$: abcd ☞ (a, bcd); (ab, cd); (abc, d)
  - $i = 2$: bcde ☞ (b, cde); (bc, de); (bcd, e)
  - $i = 3 = 6 - 4 + 1$: cdef ☞ (c, def); (cd, ef); (cde, f)

# Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus III

**procedure** CYK($\vec{w}, G$)
    $n = |\vec{w}|$

    **for** $i \leftarrow 1, n$ **do**
        **for** $(A \rightarrow w_i) \in P$ **do**
            Erweitere $T_{i,1}$ um den Eintrag $A$
        **end for**
    **end for**

    **for** $j \leftarrow 2, n$ **do** ▷ $j$: Länge Teilwort
        **for** $i \leftarrow 1, n - j + 1$ **do** ▷ $i$: Startposition
            **for** $k \leftarrow 1, j - 1$ **do** ▷ $k$: Aufteilung
                Erweitere $T_{i,j}$ um den Eintrag $A$, wenn es
                eine Regel $(A \rightarrow BC) \in P$ gibt, für die gilt:
                1.) $B \in T_{i,k}$
                2.) $C \in T_{i+k,j-k}$
            **end for**
        **end for**
    **end for**

# Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus IV

## CYK: Allgemeines

- Drei verschachtelte Schleifen
- Jede Schleife durchläuft etwa $n$ Iterationen
- Gesamtaufwand: In etwa $n^3$ Iterationen (präzisere Notation später)
- Prinzip: *Dynamisches Programmieren*
  - Gesamtlösung aus Teillösungen ermitteln
  - Teillösungen in Tabelle vorrätig halten
- Mehr zum Entwurfsprinzip: Vorlesung *Algorithmen und Datenstrukturen*

## Entscheidbare Eigenschaften kontextfreier Sprachen

- *Wortproblem*: ✓
  - CYK-Algorithmus verwenden
- *Leerheitsproblem*: ✓
  - Gegeben CNF-Grammatik
  - Regeln markieren, die Terminale erzeugen (beispielsweise $\langle A\rangle \to \mathtt{a}$).
  - Dann alle Regeln markieren, die markierte Regel enthalten (beispielsweise $\langle B\rangle \to \langle A\rangle\langle C\rangle$).
  - Wenn $\langle S\rangle$ markiert wird: Sprache nicht leer
- *Endlichkeitsproblem*: ✓
  - Pumping-Lemma zu Hilfe nehmen
- *Schnittproblem*: ✗
- *Äquivalenzproblem*: ✗

Argumentation für nicht-Entscheidbarkeit: Siehe nächster Teil

# Inhalt

# Berechenbarkeitstheorie

## Nachteile Kellerautomat

- Kein wahlfreier Zugriff auf Stapelspeicher
- Kein wahlfreier Zugriff auf Eingabewort
- Keine »Markierungen« in Eingabe

## Erweitertes Maschinenmodell

- Eingabe- und Speicherband vereinigen
- Wahlfreie Zugriffe erlauben

## (Nicht-)Deterministische Turing-Maschine

Eine *Turing-Maschine* ist gegeben durch ein 7-Tupel $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \square, F)$. Dabei ist

- $Q$ eine endliche Zustandsmenge
- $\Sigma$ ein endliches Eingabealphabet
- $\Gamma \supset \Sigma$ ein endliches Arbeitsalphabet
- $\delta$ die Transitionsfunktion mit Signatur
  - Deterministisch: $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$
  - Nicht-Deterministisch: $\delta : Q \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{L, R, N\})$
- $q_0 \in Q$ der Startzustand
- $\square \in \Gamma - \Sigma$ das »Blank«-Symbol
- $F \subseteq Q$ die Menge der Endzustände

Illustration: Siehe Tafel

## Konfiguration

Interpretation Übergangsfunktion:

- Deterministisch: $\delta(q, a) = (q', b, x)$
- Nicht-Deterministisch: $\delta(q, a) \ni (q', b, x)$

Vorgehen:

1. $M$ befindet sich im Zustand $q$ und liest Zeichen $a$
2. $M$ geht in Zustand $q'$ über, schreibt das Zeichen $b$ *auf den Platz von* $a$, und führt die Kopfbewegung $x \in \{L, R, N\}$ aus

Beispiel: Siehe Tafel

# Berechenbarkeitstheorie IV

## Konfiguration TM

Eine Konfiguration einer TM ist gegeben durch ein Wort $k \in \Gamma^* Q \Gamma^*$. Sei $k = \alpha q \beta$:

- $q$: Aktueller Zustand
- $\alpha$: Wort links des Schreib/Lese-Kopfes
- $\beta = \beta_0 \beta_1 \cdots \beta_n$: Wort rechts des S/L-Kopfes. Kopf steht auf Feld mit Beschriftung $\beta_0$

## Startkonfiguration $q_0 \vec{w}$

- $w \in \Sigma^*$ steht auf Band, $M$ in Zustand $q_0$
- S/L-Kopf steht auf erstem Buchstaben von $w$
- Restliches Band mit Blanks $\square$ befüllt

## Konfigurationsübergänge I

Die zweistellige Relation $\vdash$ gibt *Konfigurationsübergänge* bei einer Turing-Maschine an:

$$a_1 \ldots a_m q b_1 \ldots b_n = \begin{cases} a_1 \ldots a_m q' c b_2 \ldots b_n & \delta(q, b_1) = (q', c, N), \\ & m \geq 0, n \geq 1 \\ a_1 \ldots a_m c q' b_2 \ldots b_n & \delta(q, b_1) = (q', c, R), \\ & m \geq 0, n \geq 2 \\ a_1 \ldots a_{m-1} q' a_m c b_2 \ldots b_n & \delta(q, b_1) = (q', c, L), \\ & m \geq 1, n \geq 1 \end{cases}$$

## Konfigurationsübergänge II

- Sonderfall 1: $n = 1$, $M$ läuft nach rechts:

$$a_1 \dots a_m q b_1 \vdash a_1 \dots a_m c q' \Box \text{ für } \delta(q, b_1) = (q', c, R)$$

- Sonderfall 2: $m = 0$, $M$ läuft nach links

$$q b_1 \dots b_n \vdash q' \Box c b_2 \dots b_n \text{ für } \delta(q, b_1) = (q', c, L)$$

## Turing-Maschine für $L \equiv \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Grundidee: Alternierend 0 in X und 1 in Y ändern (jeweils in Gruppen)

- 0 in X ändern
- Nach rechts fahren, erste 1 in Y ändern
- Nach links fahren bis zum ersten X
- Schleife mit davon rechts stehender 0 neu starten
- Wenn keine Null rechts steht: Prüfen, ob noch Einsen vorhanden sind
  - Nein: Akzeptieren
  - Ja: Nicht akzeptieren

## Übergangsfunktion $\delta$

| | 0 | 1 | X | Y | $\square$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $q_0$ | $(q_1, X, R)$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $(q_3, Y, R)$ | $\varnothing$ |
| $q_1$ | $(q_1, 0, R)$ | $(q_2, Y, L)$ | $\varnothing$ | $(q_1, Y, R)$ | $\varnothing$ |
| $q_2$ | $(q_2, 0, L)$ | $\varnothing$ | $(q_0, X, R)$ | $(q_2, Y, L)$ | $\varnothing$ |
| $q_3$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $(q_3, Y, R)$ | $(q_f, \square, R)$ |
| $q_f$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |

## Maschinendefinition

$$M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_f\}, \{0, 1\}, \{0, 1, X, Y, \square\}, \delta, q_0, \{q_f\})$$

## Übergangsfunktion $\delta$

| | 0 | 1 | X | Y | $\square$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $q_0$ | $(q_1, X, R)$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $(q_3, Y, R)$ | $\varnothing$ |
| $q_1$ | $(q_1, 0, R)$ | $(q_2, Y, L)$ | $\varnothing$ | $(q_1, Y, R)$ | $\varnothing$ |
| $q_2$ | $(q_2, 0, L)$ | $\varnothing$ | $(q_0, X, R)$ | $(q_2, Y, L)$ | $\varnothing$ |
| $q_3$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $(q_3, Y, R)$ | $(q_f, \square, R)$ |
| $q_f$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |

## Beispiel: 0011 ✓

$$
\begin{aligned}
q_0 0011 &\vdash Xq_1 011 \vdash X0q_1 11 \vdash Xq_2 0Y1 \vdash q_2 X0Y1 \vdash Xq_0 0Y1 \\
&\vdash XXq_1 Y1 \vdash XXYq_1 1 \vdash XXq_2 YY \vdash Xq_2 XYY \vdash XXq_0 YY \\
&\vdash XXYq_3 Y \vdash XXYYq_3 \square \vdash XXYY\square q_f \square
\end{aligned}
$$

# Berechenbarkeitstheorie VIII

## Übergangsfunktion $\delta$

| | 0 | 1 | X | Y | $\square$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $q_0$ | $(q_1, X, R)$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $(q_3, Y, R)$ | $\varnothing$ |
| $q_1$ | $(q_1, 0, R)$ | $(q_2, Y, L)$ | $\varnothing$ | $(q_1, Y, R)$ | $\varnothing$ |
| $q_2$ | $(q_2, 0, L)$ | $\varnothing$ | $(q_0, X, R)$ | $(q_2, Y, L)$ | $\varnothing$ |
| $q_3$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $(q_3, Y, R)$ | $(q_f, \square, R)$ |
| $q_f$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |

## Beispiel: 0010 ✗

$$q_0 0010 \vdash Xq_1 010 \vdash X0q_1 10 \vdash Xq_2 0Y0 \vdash q_2 X0Y0 \vdash Xq_0 0Y0$$
$$\vdash XXq_1 Y0 \vdash XXYq_1 0 \vdash XXY0q_1 \square$$

# Berechenbarkeitstheorie IX

## Modell und reale Welt

- Unendliches Band & Nicht-Determinismus: Unrealistisch (endliche Festplatten, endlicher RAM-Speicher, …)
- Eingeschränktes Modell: Endliches Band

## Linear beschränkte Turing-Maschine (LBA)

Eine nicht-deterministische TM $M$ heißt linear beschränkt (*linear bounded automaton*), wenn für alle $a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n \in \Sigma^+$ und für alle Konfigurationen $\alpha q \beta$ mit $q_0 \hat{a}_1 a_2 \dots a_{n-1} \hat{a}_n \overset{*}{\vdash} \alpha q \beta$ gilt, dass $|\alpha\beta| = n$.

- Bandteil mit Eingabe wird nicht verlassen (Beschränkung auf $n$!)
- Endemarkierung für rechte Grenze (links trivial): $\Sigma \to \Sigma' \equiv \Sigma \cup \{\hat{a} \mid a \in \Sigma\}$

## Satz von Kuroda

Die von linear beschränkten, nicht-deterministischen Turing-Maschinen akzeptierbaren Sprachen sind genau die kontextsensitiven Sprachen $\mathcal{L}_1$

Beweis Vorwärtsrichtung (Rückwärtsrichtung: Siehe Literatur) :

- Bei Eingabe $\vec{w} = x_1 x_2 \cdots x_n$: Nicht-deterministisch Regel $(u \to v) \in P$ wählen
- Vorkommen von $v$ auf Band suchen
- Gefunden ☞ Teilwort durch $u$ ersetzen (wenn $|u| < |v|$: Restwort nach links verschieben)
- Lediglich $S$ auf Band: Anhalten, ansonsten zurück zu Schritt 1
- Gegeben $G$ mit $\mathcal{L}(G) \in \mathcal{L}_1$:

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{L}(G) &\Leftrightarrow \exists \text{ Ableitung } S \Rightarrow \cdots \Rightarrow x \\ &\Leftrightarrow \exists \text{ Rechnung von } M, \text{ die Ableitung umgekehrt simuliert} \\ &\Leftrightarrow x \in \mathcal{L}(M) \end{aligned}$$

## Berechenbarkeitstheorie XI

**Satz (Erweiterung Satz von Kuroda)**

Die durch allgemeine Turing-Maschinen akzeptierbaren Sprachen sind genau die Phrasenstruktursprachen $\mathcal{L}_0$

Beweis: Vorwärtsrichtung analog Satz von Kuroda (TM *ohne* Beschränkung), Rückwärtsrichtung: Siehe Literatur

# Berechenbarkeitstheorie XII

## Status Quo

- Reguläre Sprachen $\mathcal{L}_3 \Leftrightarrow$ DEA, NEA
- Kontextfreie Sprachen $\mathcal{L}_2 \Leftrightarrow$ PDA
- Kontextsensitive Sprachen $\mathcal{L}_1 \Leftrightarrow$ LBA
- Phrasenstruktur-Sprachen $\mathcal{L}_0 \Leftrightarrow$ Turing-Maschine

# Berechenbarkeitstheorie XIII

## Turing-Berechenbarkeit

Ein Problem, das (in Form der Berechnung einer Funktion) auf einer Turing-Maschine gelöst werden kann, bezeichnet man als *Turing-berechenbar*.

## Church-Turing-These

Die durch *formale Definition der Turing-Berechenbarkeit* erfasste Klasse von Funktionen stimmt genau mit der Klasse der im *intuitiven Sinne berechenbaren* Funktionen überein.

## Alternative Maschinenmodelle

- While- und Goto-Programme (einfache Programmiersprachen)
- $\mu$-rekursive Funktionen (nicht behandelt)
- Registermaschinen (moderner »Computer«)
- Genaue Definitionen später!

## Berechenbarkeitstheorie XIII

### Turing-Berechenbarkeit

Ein Problem, das (in Form der Berechnung einer Funktion) auf einer Turing-Maschine gelöst werden kann, bezeichnet man als *Turing-berechenbar*.

### Church-Turing-These

Die durch *formale Definition der Turing-Berechenbarkeit* erfasste Klasse von Funktionen stimmt genau mit der Klasse der im *intuitiven Sinne berechenbaren* Funktionen überein.

### Alternative Maschinenmodelle

- While- und Goto-Programme (einfache Programmiersprachen)
- $\mu$-rekursive Funktionen (nicht behandelt)
- Registermaschinen (moderner »Computer«)
- Genaue Definitionen später!

# Akzeptanz und Entscheidbarkeit I

## Endlosschleifen

- Turing-Maschinen können in Endlosschleife geraten!
- Bei DEA, NEA nicht möglich

## Definition: Akzeptanz

- Eine Turing-Maschine $M$ *akzeptiert* eine Sprache $L$, wenn $M$ alle $x \in L$ akzeptiert, d.h. in einem Zustand $q \in F$ hält.
- Achtung: $x \notin L$ mit $M$ hält *nicht* für $x$ ist möglich!

## Definition: Entscheidbarkeit

Eine Turing-Maschine $M$ *entscheidet* eine Sprache $L$, wenn $M$ die Sprache $L$ akzeptiert und für alle $x \notin L$ nach endlich vielen Schritten in einem Zustand $q \notin F$ hält.

# Akzeptanz und Entscheidbarkeit II

## Nomenklatur

- $L$ ist *semi-entscheidbar* (*recognisable*, »rekursiv aufzählbar«, »recursively enumerable«) $\Leftrightarrow \exists M$, die $L$ akzeptiert
- $L$ ist *entscheidbar* (*decidable*, »rekursiv«), $\Leftrightarrow \exists M$, die $L$ entscheidet

# Berechenbarkeitstheorie XIV

## Turing-Berechenbarkeit II

- Eine partielle Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ ist *Turing-berechenbar*, wenn es eine Turing-Maschine $M$ gibt, die bei Eingabe von $x_1, x_2, \ldots, x_k$ die Ausgabe $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ liefert und hält:

$$q_0 x_1 x_2 \cdots x_k \overset{*}{\vdash} qy \text{ mit } q \in F \wedge y \in \Gamma^* \wedge y = f(x_1, \ldots, x_k)$$

- Falls $M$ nicht hält, gilt $f(x_1, \ldots, x_k) = \perp$

## Offene Fragen

- Systematische Informationkodierung
- Ressourcenverbrauch (Zeit und Bandplatz)
- »Orthodoxere« Berechnungsmodelle

# Berechenbarkeitstheorie XV

## Binäres Alphabet

- Standardalphabete: $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \{0, 1, \square\}$
- Andere endliche Alphabete: Kodierung durch Abzählen
  - $i$-ten Buchstaben durch Binärzahl $\mathrm{bin}(i)$ darstellen
  - Maximale Anzahl Binärziffern bekannt ☞ von Links mit Nullen auffüllen
  - Alternativ: Trennzeichen verwenden
- Hinweis: Unäre Kodierung ungeeignet
  - Exponentiell lange Zahlen im Vergleich zu Binärkodierung
  - Dito für jede andere »vernünftige« Kodierung

## Turing-Berechenbarkeit III

- Eine partielle Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ ist *Turing-berechenbar*, wenn es eine Turing-Maschine $M$ gibt, die bei Eingabe von $x_1, x_2, \dots, x_k$ die Ausgabe $y = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ liefert und hält:

$$q_0 \operatorname{bin}(x_1)\Box \operatorname{bin}(x_2)\Box \cdots \Box \operatorname{bin}(x_k) \overset{*}{\vdash} \Box \cdots \Box q \operatorname{bin}(y)\Box \cdots \Box$$

  mit $q \in F \land y \in \Gamma^* \land y = f(x_1, \dots, x_k)$
- Falls $M$ nicht hält, gilt $f(x_1, \dots, x_k) = \perp$

# Varianten von Turing-Maschinen

## Robuste Definition

- Turing-Maschinen sind robust gegenüber (sinnvollen) Modifikationen der genauen Arbeitsdefinition
- Erweiterungen: Gleiche Berechnungsmächtigkeit, einfachere Handhabbarkeit

## Varianten (Illustration: Tafel)

- $k$ Spuren, *ein* Schreib/Lesekopf
- $k$ Bänder, $k$ Schreib/Leseköpe

# Varianten von Turing-Maschinen

## Robuste Definition

- Turing-Maschinen sind robust gegenüber (sinnvollen) Modifikationen der genauen Arbeitsdefinition
- Erweiterungen: Gleiche Berechnungsmächtigkeit, einfachere Handhabbarkeit

## Varianten (Illustration: Tafel)

- $k$ Spuren, *ein* Schreib/Lesekopf
  - Folge von $k$ Zeichen: Neues Symbol
  - Eingabe- und Bandalphabet ersetzen
  - Äquivalenz: Trivial
- $k$ Bänder, $k$ Schreib/Leseköpe

# Varianten von Turing-Maschinen

## Robuste Definition

- Turing-Maschinen sind robust gegenüber (sinnvollen) Modifikationen der genauen Arbeitsdefinition
- Erweiterungen: Gleiche Berechnungsmächtigkeit, einfachere Handhabbarkeit

## Varianten (Illustration: Tafel)

- $k$ Spuren, *ein* Schreib/Lesekopf
  - Folge von $k$ Zeichen: Neues Symbol
  - Eingabe- und Bandalphabet ersetzen
  - Äquivalenz: Trivial
- $k$ Bänder, $k$ Schreib/Leseköpe
  - *Unabhängige* Kopfoperationen, Eingabe auf Band 1
  - Transitionsfunktion: $\delta : Q\backslash F \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{L, N, R\}^k$
  - Äquivalenz zu zeigen

# Berechnungskomplexität I

### Ressourcenfragen

- Wieviel Bandplatz verbraucht?
- Wie viele Rechenschritte notwendig?

### Zeitkomplexität $T_M(\vec{x})$

$T_M(\vec{x}) \equiv$ Anzahl der Schritte von $M$ mit Eingabe $\vec{x} \in \Sigma^*$

### Platzkomplexität $S_M(\vec{x})$

$S_M(\vec{x}) \equiv$ Anzahl *verschiedener* Zellen, die $M$ bei Eingabe $\vec{x} \in \Sigma^*$ besucht

# Berechnungskomplexität I

### Zeitkomplexität $T_M(\vec{x})$

$T_M(\vec{x}) \equiv$ Anzahl der Schritte von $M$ mit Eingabe $\vec{x} \in \Sigma^*$

### Platzkomplexität $S_M(\vec{x})$

$S_M(\vec{x}) \equiv$ Anzahl *verschiedener* Zellen, die $M$ bei Eingabe $\vec{x} \in \Sigma^*$ besucht

### Worst-Case-Betrachtung

- Worst-Case-Laufzeit (*time complexity*):

$$T_M(n) \equiv \max_{x \in \Sigma^*, |\vec{x}| \leq n} T_M(\vec{x})$$

- Worst-Case-Platzverbrauch (*space complexity*):

$$S_M(n) \equiv \max_{x \in \Sigma^*, |\vec{x}| \leq n} S_M(\vec{x})$$

# Berechnungskomplexität I

## Platz- und Zeitbeschränkung

Gegeben $t, s : \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Eine Turing-Maschine $M$ heißt $t(n)$-zeitbeschränkt und $s(n)$-platzbeschränkt, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$T_M(n) \leq t(n) \wedge S_M(n) \leq s(n)$$

### Äquivalenz TM und Mehrband-TM

Seien $c_1, c_2 \in \mathbb{N}$. Jede $t(n)$-zeit- und $s(n)$-platzbeschränkte $k$-Band-Turingmaschine $M_k$ kann durch eine $c_1 \cdot t(n) \cdot s(n)$-zeitbeschränkte und $c_2 \cdot s(n)$-platzbeschränkte Turingmaschine $M$ simuliert werden.

Beweis: Siehe Tafel

### Folgerungen

- Maximal ein Feld pro Zeitschritt besucht ☞ $s(n) \leq t(n)$
- ☞ $c_1 \cdot t(n) \cdot s(n) \leq c_1 \cdot t(n)^2$
- 1-TM versus $k$-TM: Höchstens quadratische Verlangsamung ☞ Irrelevant

## Äquivalenz TM und Mehrband-TM

Seien $c_1, c_2 \in \mathbb{N}$. Jede $t(n)$-zeit- und $s(n)$-platzbeschränkte $k$-Band-Turingmaschine $M_k$ kann durch eine $c_1 \cdot t(n) \cdot s(n)$-zeitbeschränkte und $c_2 \cdot s(n)$-platzbeschränkte Turingmaschine $M$ simuliert werden.

Beweis: Siehe Tafel

## Folgerungen

- Maximal ein Feld pro Zeitschritt besucht ☞ $s(n) \leq t(n)$
- ☞ $c_1 \cdot t(n) \cdot s(n) \leq c_1 \cdot t(n)^2$
- 1-TM versus $k$-TM: Höchstens quadratische Verlangsamung ☞ Irrelevant

## Äquivenz DTM und NTM

Zu jeder nicht-deterministischen Turing-Maschine $M$ gibt es eine äquivalente deterministische Turing-Maschine $M'$

Illustration: Siehe Tafel

## Konsequenzen

- NTM und DTM: Gleiche Berechnungsmacht, drastisch unterschiedliche Ressourcenaufwände (exponentielle Verlangsamung)
- DTM und $k$-Band-DTM: Gleiche Berechnungsmacht, unsubstantielle Laufzeitunterschiede
- ☞ Unterschiedliche Einsatzwecke:
  - Praktische Effizienz: An *Laufzeit* DTM gemessen
  - Prinzipielle Lösbarkeit: An *Entscheidbarkeit* durch NTM gemessen

## Äquivenz DTM und NTM

Zu jeder nicht-deterministischen Turing-Maschine $M$ gibt es eine äquivalente deterministische Turing-Maschine $M'$

Illustration: Siehe Tafel

## Konsequenzen

- NTM und DTM: Gleiche Berechnungsmacht, drastisch unterschiedliche Ressourcenaufwände (exponentielle Verlangsamung)
- DTM und $k$-Band-DTM: Gleiche Berechnungsmacht, unsubstantielle Laufzeitunterschiede
- ☞ Unterschiedliche Einsatzwecke:
  - Praktische Effizienz: An *Laufzeit* DTM gemessen
  - Prinzipielle Lösbarkeit: An *Entscheidbarkeit* durch NTM gemessen

## Alternative Modelle I: While

### `while`: Syntax

$$
\begin{aligned}
\langle const\rangle &\rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid \ \ldots\\
\langle var\rangle &\rightarrow x_0 \mid x_1 \mid x_2 \mid \ \ldots\\
\langle stmts\rangle &\rightarrow \langle stmt\rangle | \langle stmt\rangle ; \langle stmts\rangle\\
\langle stmt\rangle &\rightarrow \langle assignment\rangle \mid \langle loop\rangle \mid \langle while\rangle\\
\langle assignment\rangle &\rightarrow \langle var\rangle := \langle expr\rangle\\
\langle loop\rangle &\rightarrow \texttt{loop}\ \langle var\rangle\ \texttt{do}\ \langle stmts\rangle\ \texttt{end}\\
\langle while\rangle &\rightarrow \texttt{while}\ x_i \neq 0\ \texttt{do}\ \langle stmts\rangle\ \texttt{end}\\
\langle expr\rangle &\rightarrow \langle var\rangle \mid \langle const\rangle \mid \langle expr\rangle + \langle expr\rangle \mid \langle expr\rangle - \langle expr\rangle
\end{aligned}
$$

# Alternative Modelle II: While

## Anmerkungen

- `loop`: Anzahl Schleifendurchläufe *fest* bestimmt
- `while`: Kontrollvariable darf in ⟨*stmts*⟩ geändert werden
- `if` durch `loop` simulierbar. Beispiel: `if` $x_0$`=0 then P end` äquivalent zu

$x_1$ `:= 1;`
`loop` $x_0$ `do` $x_1$ `:= 0 end;`
`loop` $x_1$ `do P end;`

# Alternative Modelle III: While

## `while`: Semantik I

- Speichervektor $\vec{v} = (x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m)$
  - Eingabe in $x_0, \dots, x_n$
  - Ausgabe in $x_{n+1}, \dots, x_m$
- Semantik gegeben durch $\delta : \mathbb{N}^{n+1} \times x \to \mathbb{N}^{m-n}$ mit $x \in L_{\text{while}}$
- Induktive Definition über Programmstruktur

## `while`: Semantik II

- Wertzuweisung

$$\delta(\vec{v}, x_i := \langle expr \rangle) \equiv \vec{v}[x_i \leftarrow \langle expr \rangle]$$

- Konkatenation

$$\delta(\vec{v}, P_1; P_2) \equiv \delta(\delta(\vec{v}, P_1), P_2)$$

- `loop`-Schleife

$$\delta(\vec{v}, \texttt{loop}\ x_i\ \texttt{do}\ P\ \texttt{end}) \equiv \delta(\vec{v}, \underbrace{P; P; P; \ldots; P}_{x_i\text{-fach}}) \equiv \delta(\vec{v}, P^{x_i})$$

## `while`: Semantik III

- Terminierungsmenge

$$T_i \equiv \{k \in \mathbb{N} \mid \delta(\vec{v}, P^k) = (x_0, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots) \text{ mit } x_l \in \mathbb{N}_0\}$$

- Aussage: Wie oft muss $P$ wiederholt werden, damit $x_i$ Null wird?
- Kleinste Wiederholungsanzahl: $\min(T_i)$
- Semantik `while`-Schleife

$$\delta(\vec{v}, \texttt{while } x_i \texttt{ do } P \texttt{ end}) \equiv \begin{cases} \perp & \text{falls } T_i = \emptyset \\ \delta(\vec{v}, P^{\min(T_i)}) & \text{falls } T_i \neq \emptyset \end{cases}$$

- $\delta(\perp, P) = \perp$
  - Eine nicht-terminierende Schleife ☞ Gesamtes Programm terminiert nicht

# Alternative Modelle V: While

## While-Berechenbarkeit

- Eine partielle Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ ist *While-berechenbar*, wenn es ein While-Programm $P$ gibt, das bei Eingabe von $x_1, x_2, \ldots, x_k$ die Ausgabe $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ liefert und terminiert:

$$\delta((x_1, x_2, \ldots, x_k, 0), P) = (x_1, \ldots, x_k, y)$$

- Falls $P$ nicht terminiert, gilt $f(x_1, \ldots, x_k) = \perp$

## Satz: While-Programme und Turing-Maschinen

Jedes While-Programm kann auf einer Turing-Maschine simuliert werden.

Beweis: While-Sprachelemente auf Mehrband-Turingmaschine abbilden.

# Alternative Modelle VI: Goto I

## Goto-Sprachelemente

- Wertzuweisungen: $x_i := x_j \pm c$
- Unkonditionale Sprünge: `goto` $M_i$
  - $i$-te Zeile implizit mit Label $M_i$ versehen
- Bedingte Sprünge: `if` $x_i = c$ `then goto` $M_i$
- Stop-Anweisung: `halt`
  - Letzte Programmanweisung implizit `halt`

# Alternative Modelle VII: Goto II

**Satz**

Funktion While-berechenbar $\Leftrightarrow$ Funktion Goto-berechenbar

Beweis »$\Rightarrow$«: Jede While-Schleife `while` $x_i \neq 0$ `do` $P$ `end` äquivalent zu

$M_1$`: if` $x_i$ `= 0 then goto` $M_k$`;`
$P$`;`
$M_{k-1}$`: goto` $M_1$`;`
$M_k$`:` …

## Alternative Modelle VIII: Goto III

**Satz**

Funktion While-berechenbar ⇔ Funktion Goto-berechenbar

Beweis »⇐«: Goto-Programm

$M_1: \quad A_1;$
$M_2: \quad A_2;$
...
$M_n: \quad A_n;$

simulieren durch

```
y := 1;
while y ≠ 0 do
   if y = 1 then A_1 end;
   if y = 2 then A_2 end;
   ...
   if y = n then A_n end;
end
```

# Alternative Modelle IX: Goto IV

## Zuordnung Sprachelemente

| | | |
|---|---|---|
| `goto` $M_j$ | ☞ | $y := j$ |
| `if` $x_i$ `goto` $M_j$ | ☞ | $y := y + 1;$ `if` $x_i$ `then` $y := j$ `end;` |
| `halt` | ☞ | $y := 0$ |
| $A$ (sonstige Anweisungen) | ☞ | $A; y := y + 1$ |

## Satz: Turing-Maschinen und Goto-Programme

Jede deterministische Turing-Maschine kann durch ein Goto-Programm simuliert werden.

Beweis:

- $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ und $\Gamma = \{a_1, \ldots, a_N\}$
  - Mengen eindeutig numeriert
  - $\mathrm{idx}(a_i) = i, i \geq 1$
- Wähle $b > |\Gamma| = N$

## Konfiguration der TM

$$\underbrace{a_{i_m} \ldots a_{i_1}}_{\text{Linker Bandteil } \vec{x}} \quad q_l \quad \underbrace{a_{j_1} \ldots a_{j_n}}_{\text{Rechter Bandteil } \vec{y}}$$

# Alternative Modelle XI

## Konfiguration der TM

$$\underbrace{a_{i_m} \dots a_{i_1}}_{\text{Linker Bandteil } \vec{x}} \quad q_l \quad \underbrace{a_{j_1} \dots a_{j_n}}_{\text{Rechter Bandteil } \vec{y}}$$

☞ $\vec{x}$, $\vec{y}$ bijektiv repräsentierbar durch $b$-adische Zahlen *ohne* Null:

$$x \equiv \underbrace{\langle i_m i_{m-1} \dots i_2 i_1 \rangle}_{\text{Big Endian}} = \sum_{k=1}^{m} i_k b^{k-1}$$

$$y \equiv \underbrace{\langle j_1 j_2 \dots j_{n-1} j_n \rangle}_{\text{Little Endian}} = \sum_{k=1}^{n} j_k b^{k-1}$$

# Alternative Modelle XII

**$\delta(q_i, \sigma) = (q_j, \sigma', \mathrm{L})$**

- Erstes Zeichen in $y$ ersetzen

$$\begin{aligned} y &\leftarrow y \div b \\ y &\leftarrow \mathrm{idx}(\sigma') + b \times y \end{aligned}$$

- Linksbewegung ausführen

$$\begin{aligned} y &\leftarrow (x \mod b) + b \times y \\ x &\leftarrow x \div b \end{aligned}$$

- Zustand ändern: $q \leftarrow j$

**$\delta(q_i, \sigma) = (q_j, \sigma', \mathrm{R})$**

- Erstes Zeichen in $y$ ersetzen

$$\begin{aligned} y &\leftarrow y \div b \\ y &\leftarrow \mathrm{idx}(\sigma') + b \times y \end{aligned}$$

- Rechtsbewegung ausführen

$$\begin{aligned} x &\leftarrow b \times x + (y \mod b) \\ y &\leftarrow y \div b \end{aligned}$$

- Zustand ändern: $q \leftarrow j$

Beispiel: Siehe Tafel

## Alternative Modelle XIII

1. Variablen $x, y, q$ initialisieren
2. Transitionsfunktion simulieren:

$M_2$: `a := ` $y \mod b$`;` // *Aktuelles Zeichen in* $a$
    `if q=1 and a=1 then goto` $M_{1.1}$`;`
    `if q=1 and a=2 then goto` $M_{1.2}$`;`
`...`
    `if q=n and a=N then goto` $M_{n.N}$`;`

$M_{1.1}$: $\delta(q\_1, a\_1)$ simulieren
    `goto` $M_2$`;`
$M_{1.2}$: $\delta(q\_1, a\_2)$ simulieren
    `goto` $M_2$`;`
`...`
$M_{n.N}$: $\delta(q\_n, a\_N)$ simulieren
    `goto` $M_2$`;`

3. Ergebnis nach $x_0$ schreiben

# Universelle Turing-Maschinen I

## Nachteil TM

- Feste Programmierung: $\delta$ und $Q$ fest gegeben
- Eingabe bestimmt Ablauf, *nicht* Algorithmus
- Unpraktisch (aber: kein fundamentaler Unterschied zu Computer)
- Lösung: *Universelle Turingmaschine*

## Universelle Turing-Maschine

- Zwei Eingaben
  - Eingabedaten $\omega$
  - Abgearbeitetes Programm $f$
- Maschine berechnet $f(\omega)$
- Problem: Codierung einer TM auf Band?

# Universelle Turing-Maschinen II

## Kodierung einer Turing-Maschine

- Maschine $M$ oBdA gegeben durch

$$M = (\{q_0, \ldots, q_n, q_f\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \Box\}, \delta, q_0, \Box, \{q_f\})$$

- Transitionsfunktion $\delta(q, a) = (q', b, \{\mathrm{L}, \mathrm{R}, \mathrm{N}\})$ interpretiert als 5-Tupel

$$(q, a, q', b, \{\mathrm{L}, \mathrm{R}, \mathrm{N}\})$$

  mit $a, b \in \{0, 1\}$ und $q, q' \in Q$
- Kodierung obiger Komponenten als Zahlen
  - Für alle Übergänge durchführen
  - Zahlen konkatenieren ☞ Größere Zahl
  - Maschine $M$ durch Zahl charakterisiert

# Universelle Turing-Maschinen II

## Gödelisierung: Unäre Kodierung

- $Q, \Sigma, \Gamma$ und $\{L, R, N\}$ eindeutig (dezimal) numerieren
  - Abbildungen $Q \to \mathbb{N}, \Sigma \to \mathbb{N}, \Gamma \to \mathbb{N}$ und $\{L, R, N\} \to \mathbb{N}$
  - Unär kodieren ☞ 0 trennt Elemente, 00 trennt Übergänge
  - $1 \to 1, 2 \to 11, 3 \to 111, \ldots$
- Effizienz irrelevant!

Beispiel: Siehe Tafel

## Gödelisierung

*Gödelisierung*: Funktion $c : M \to \mathbb{N}$ mit folgenden Eigenschaften:

- $c$ ist injektiv
- Bildmenge $c(M)$ ist entscheidbar
- $c : M \to \mathbb{N}$ und $c^{-1} : c(M) \to M$ sind berechenbar

# Universelle Turing-Maschinen II

## Gödelisierung: Unäre Kodierung

- $Q, \Sigma, \Gamma$ und $\{L, R, N\}$ eindeutig (dezimal) numerieren
  - Abbildungen $Q \to \mathbb{N}$, $\Sigma \to \mathbb{N}$, $\Gamma \to \mathbb{N}$ und $\{L, R, N\} \to \mathbb{N}$
  - Unär kodieren ☞ 0 trennt Elemente, 00 trennt Übergänge
  - $1 \to 1, 2 \to 11, 3 \to 111, \ldots$
- Effizienz irrelevant!

Beispiel: Siehe Tafel

## Gödelisierung

*Gödelisierung*: Funktion $c : M \to \mathbb{N}$ mit folgenden Eigenschaften:

- $c$ ist injektiv
- Bildmenge $c(M)$ ist entscheidbar
- $c : M \to \mathbb{N}$ und $c^{-1} : c(M) \to M$ sind berechenbar

## Funktionen vs. Mengen

- Berechenbarkeit auf Funktionen zugeschnitten
- Analogon für Sprachen? ☞ Mengen mit Funktionen verbinden

## Charakteristische Funktion

Die charakteristische Funktion $\chi_A : \Sigma^* \to \{0, 1\}$ ist definiert durch

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } \omega \in A \\ 0 & \text{für } \omega \notin A. \end{cases}$$

Eine Menge $A \subseteq \Sigma^*$ heißt *entscheidbar*, falls die charakteristische Funktion $\chi_A$ berechenbar ist.

*Hinweis:* Analoge Definition für Semi-Entscheidbarkeit.

## Halteproblem I

Sei $\hat{M}$ eine beliebige TM. Dann ist $M_\omega$ definiert durch

$$M_\omega \equiv \begin{cases} M & \text{wenn } \omega \text{ Codewort von } M \\ \hat{M} & \text{sonst.} \end{cases}$$

### Satz: Spezielles Halteproblem

Gegeben sei die Selbstanwendbarkeitsmenge

$$K \equiv \{\omega \in \{0,1\}^* \mid M_\omega \text{ angesetzt auf } \omega \text{ hält}\}$$

Die Menge $K$ ist nicht entscheidbar.

Beweis: Siehe Tafel

# Reduzierbarkeit I

## Definition: Reduzierbarkeit

Seien $A \subseteq \Sigma^*$ und $B \subseteq \Gamma^*$ Sprachen. Dann heißt $A$ auf $B$ reduzierbar ($A \leq B$), wenn es eine totale berechenbare Abbildung $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ gibt, so dass $\forall x \in \Sigma^*$:

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

## Satz: Reduzierbarkeit und Entscheidbarkeit

Wenn $A \leq B$ und $B$ entscheidbar ist $\Rightarrow$ $A$ entscheidbar.

# Reduzierbarkeit II

**Satz: Reduzierbarkeit und Entscheidbarkeit**

Wenn $A \leq B$ und $B$ entscheidbar ist $\Rightarrow$ $A$ entscheidbar.

Beweis:

- Es gelte $A \leq B$ ☞ Abbildung $f$ existiert
- Charakteristische Funktion $\chi_B$ berechenbar, da $B$ entscheidbar
- Komposition $\chi_B \circ f$ berechenbar:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A \\ 0 & \text{für } x \notin A \end{cases} = \left.\begin{matrix} 1 \text{ für } f(x) \in B \\ 0 \text{ für } f(x) \notin B \end{matrix}\right\} = \chi_B(f(x))$$

- $\chi_A$ ist berechenbar ☞ $A$ entscheidbar. □

# Halteproblem III

## Satz: Allgemeines Halteproblem

Gegeben sei die Sprache

$$H \equiv \{w\#x \mid M_\omega \text{ angewandt auf } x \text{ hält }\}$$

$H$ ist nicht entscheidbar.

Beweis:

- Anwendung Kontraposition Reduzierbarkeitslemma
- Wenn $K \leq H$: $K$ unentscheidbar $\Rightarrow$ $H$ unentscheidbar
- Wähle $f(\omega) = \omega\#\omega : \omega \in K \Leftrightarrow f(\omega) \in H$ $\square$

# Satz von Rice

## Satz von Rice

Sei $\mathcal{R}$ die Klasse aller Turing-berechenbaren Funktionen. Sei $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$, $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Dann ist die Sprache

$$C(\mathcal{S}) = \{\omega \mid \text{Die von } M_\omega \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S}\}$$

nicht berechenbar.

Beweis: Siehe Tafel

# Satz von Rice

## Satz von Rice

Sei $E$ eine nicht-triviale funktionale Eigenschaft von Turing-Maschinen, und sei $M$ eine Turing-Maschine. Dann ist das Problem »Besitzt $M$ die Eigenschaft $E$?« nicht entscheidbar.

## Eigenschaften $E$

- Nicht-trivial: Mindestens eine Maschine besitzt Eigenschaft *nicht*
- Funktional: Relevante Eigenschaft der Maschine
  - *Nicht gültig*: Gelbe TM, freundliche TM, Überschall-TM, …
  - *Gültig*: TM berechnet durch 2 teilbare Zahl, TM gibt mindestens zweimal gleiches Zeichen aus, …

Beweis: Siehe Tafel

## Satz von Rice II

### Implikationen

- Halteproblem/Satz von Rice gelten für alle Turing-vollständigen Berechnungsmechanismen!
- Praxisrelevante nicht-entscheidbare Probleme
  - Statische Verifikation
  - Optimierende Compiler
  - Korrektheitsbeweise

# Post'sches Korrespondenzproblem I

## PCP (Post's Correspondence Problem)

Gegeben sei eine endliche Menge von Wortpaaren

$$(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$$

mit $x_i, y_i \in \Sigma^+$. Gibt es eine Indexfolge $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, so dass gilt

$$x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k} = y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_k}?$$

Beispiel: Siehe Tafel

# Post'sches Korrespondenzproblem I

## PCP (Post's Correspondence Problem)

Gegeben sei eine endliche Menge von Wortpaaren

$$(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$$

mit $x_i, y_i \in \Sigma^+$. Gibt es eine Indexfolge $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, so dass gilt

$$x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k} = y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_k} ?$$

## Beweis (Struktur)

- Für jede Turing-Maschine eine PCP-Instanz konstruieren
- Verbindung zu haltenden Maschinen herstellen
- Halteproblem durch PCP lösen
- Widerspruch ☞ PCP nicht entscheidbar

# Post'sches Korrespondenzproblem II

## Folgerungen (Reduktionen) aus dem PCP

Folgende Probleme sind unentscheidbar:

- Schnittproblem für kontextfreie Sprachen
- Mehrdeutigkeitsproblem für kontextfreie Grammatiken
- Leerheitsproblem für kontextsensitive Sprachen

Beweis: Siehe Tafel

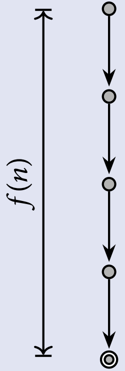
# Inhalt

# Komplexitätstheorie

## Definition: Laufzeitmessung für DTM

- Gegeben: DTM $M$, darauf entscheidbare Sprache $L$.
  Länge der Eingabe: $n \equiv |w|, w \in L$.
- Laufzeit bzw. Zeitkomplexität: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f$ gibt maximale Anzahl Schritte von $M$ an.
- Äquivalente Aussagen
  - »$M$ läuft in in Zeit $f(n)$.«
  - »$M$ ist eine $f(n)$-Turing-Maschine.«

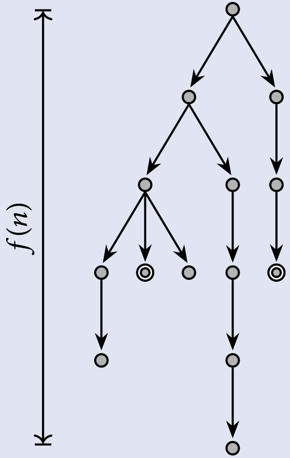
## Illustration



## Definition: Laufzeitmessung für NTM

- Gegeben: NTM $M$, darauf entscheidbare Sprache $L$.
  Länge der Eingabe: $n \equiv |w|, w \in L$.
- Laufzeit bzw. Zeitkomplexität: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f$ gibt maximale Anzahl Schritte von $M$ an.
- Äquivalente Aussagen
  - »$M$ läuft in in Zeit $f(n)$.«
  - »$M$ ist eine $f(n)$-Turing-Maschine.«

## Illustration



## Probleme

- Exakte Laufzeitbestimmung: Komplexe Ausdrücke.
- »Einmaleffekte«: Initialisierung, Buchhaltung, …
- Konstanten können (je nach Ressourcenmodell) von HW abhängen.
- Statische Beiträge irrelevant für große Eingaben.

## Asymptotik

- $f(n) = 6n^3 + 2n^2 + 20n + 45$
- $f(1000) = 6 \times 10^9 + 2 \times 10^6 + 20 \times 1000 + 45$
- Quadratischer Term $\approx$ 0.001 kubischer Term
- Wesentlich: $f(n) = \mathcal{O}(n^3)$
- Vorsicht bei »=«! Keine Gleichheit im üblichen Sinn.

## Definition: Landau-Symbol

Gegeben $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$. Man sagt $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$, wenn $\exists c, n_0 \in \mathbb{N}^+$, so dass $\forall n \geq n_0$

$$f(n) \leq c \cdot g(n).$$

## Asymptotische Notation (zur Referenz)

| Bezeichnung | $C = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ | Grob gesprochen |
|---|---|---|
| $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ | $C < \infty$ | $f \leq g$ |
| $f(n) = \Omega(g(n))$ | $C > 0$ | $f \geq g$ |
| $f(n) = \Theta(g(n))$ | $0 < C < \infty$ | $f = g$ |
| $f(n) = o((g(n))$ | $C = 0$ | $f < g$ |
| $f(n) = \omega(g(n))$ | $C = \infty$ | $f > g$ |

Beispiel: Siehe Tafel

# Skalierungsverhalten und Komplexitätsklassen I

## Komplexitätsklassen

- Gruppierung vergleichbar schwieriger Algorithmen.
- Üblicherweise: Zeit- und Platzbedarf, andere Ressourcen als Maß möglich.

## Zeitkomplexitätsklasse TIME

Sei $t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$. Die Zeitkomplexitätsklasse $\mathrm{TIME}(t(n))$ enthält alle Sprachen, die von einer $\mathcal{O}(t(n))$-DTM entschieden werden.

## Polynome als Klassifikationsfunktion

- Detailunterschiede bei Berechnungsmodellen: Irrelevant
- Für $t(n)$ mit $t(n) \geq n$ gibt es für jede $\mathcal{O}(t(n))$-Mehrband-TM eine gleichwertige $\mathcal{O}(t^2(n))$-Einband-TM.

# Skalierungsverhalten und Komplexitätsklassen I

## Komplexitätsklassen

- Gruppierung vergleichbar schwieriger Algorithmen.
- Üblicherweise: Zeit- und Platzbedarf, andere Ressourcen als Maß möglich.

## Zeitkomplexitätsklasse TIME

Sei $t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$. Die Zeitkomplexitätsklasse $\mathbf{TIME}(t(n))$ enthält alle Sprachen, die von einer $\mathcal{O}(t(n))$-DTM entschieden werden.

## Polynome als Klassifikationsfunktion

- Detailunterschiede bei Berechnungsmodellen: Irrelevant
- Für $t(n)$ mit $t(n) \geq n$ gibt es für jede $\mathcal{O}(t(n))$-Mehrband-TM eine gleichwertige $\mathcal{O}(t^2(n))$-Einband-TM).

# Skalierungsverhalten und Komplexitätsklassen I

## Komplexitätsklassen

- Gruppierung vergleichbar schwieriger Algorithmen.
- Üblicherweise: Zeit- und Platzbedarf, andere Ressourcen als Maß möglich.

## Zeitkomplexitätsklasse TIME

Sei $t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$. Die Zeitkomplexitätsklasse $\mathbf{TIME}(t(n))$ enthält alle Sprachen, die von einer $\mathcal{O}(t(n))$-DTM entschieden werden.

## Polynome als Klassifikationsfunktion

- Detailunterschiede bei Berechnungsmodellen: Irrelevant
- Für $t(n)$ mit $t(n) \geq n$ gibt es für jede $\mathcal{O}(t(n))$-Mehrband-TM eine gleichwertige $\mathcal{O}(t^2(n))$-Einband-TM).

# Skalierungsverhalten und Komplexitätsklassen II

## Definition: Komplexitätsklasse P

$$\mathbf{P} \equiv \bigcup_k \mathbf{TIME}(n^k)$$

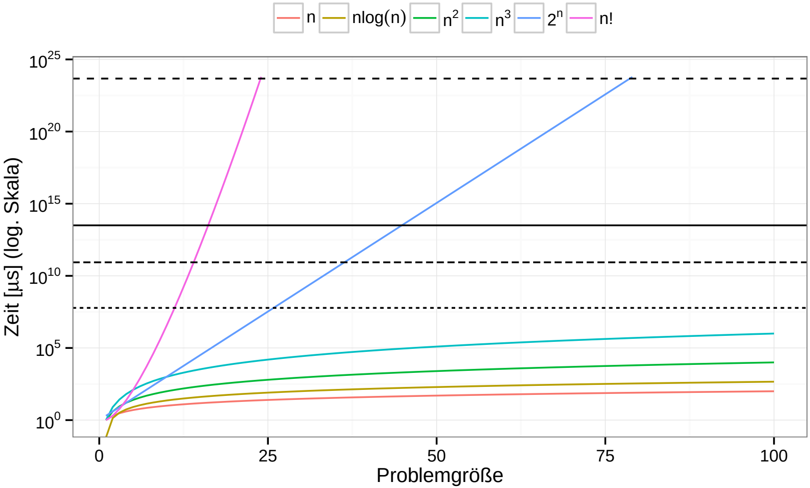
## Eigenschaften

- Invariant gegenüber polynomialen Beschleunigungen/Verlangsamungen.
- Klasse der praktisch lösbaren Probleme (keine strikte Trennschärfe!).
- Enthält $\mathbf{TIME}(1)$, $\mathbf{TIME}(\log n)$, $\mathbf{TIME}(n \log n)$, …

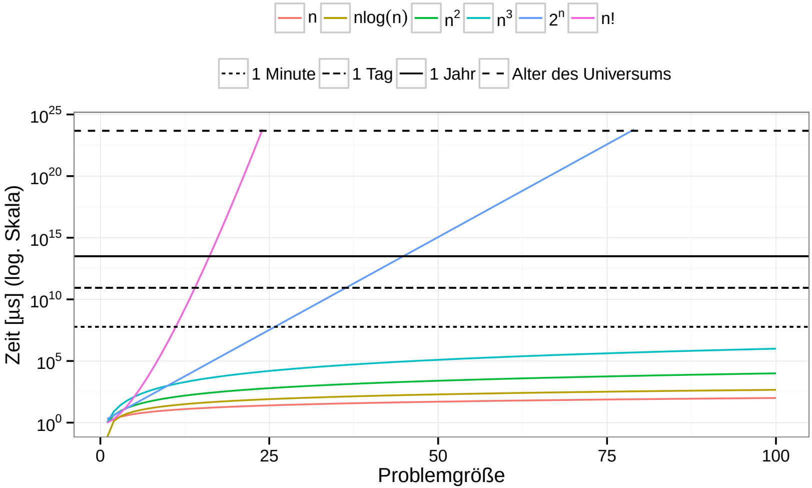
## Eigenschaften

- Fast Fourier-Transformation
- Sortieralgorithmen (Merge Sort, Quicksort, Bubblesort, …)
- Binäre Suche
- Primzahl-Test
- Kontextfreie Sprachen
- …

# Warum polynomiale Skalierung?



## Warum polynomiale Skalierung?



# P und NP: Determinismus und Nichtdeterminismus

## P und NP

$$\mathrm{P} \equiv \bigcup_k \mathrm{TIME}(n^k) \quad (1)$$

$$\mathrm{NP} \equiv \bigcup_k \mathrm{NTIME}(n^k) \quad (2)$$

## Interpretation von NP

- NP bedeutet *nicht* nicht-polynomial!
- NTIME: Äquivalent von TIME für nicht-deterministische Turingmaschine
- Achtung: Enthaltensein in NP bedeutet nicht notwendigerweise, dass kein effizienter Algorithmus *existiert*.

# P und NP: Determinismus und Nichtdeterminismus

## P und NP

$$\mathbf{P} \equiv \bigcup_k \mathrm{TIME}(n^k) \tag{1}$$

$$\mathbf{NP} \equiv \bigcup_k \mathrm{NTIME}(n^k) \tag{2}$$

## Interpretation von NP

- **NP** bedeutet *nicht* nicht-polynomial!
- **NTIME**: Äquivalent von **TIME** für nicht-deterministische Turingmaschine
- Achtung: Enthaltensein in **NP** bedeutet nicht notwendigerweise, dass kein effizienter Algorithmus *existiert*.

# Struktur von NP I

## Alternative Definition von NP (leicht vereinfacht)

Eine Problem ist in **NP**, wenn die Korrektheit der Lösung in polynomialer Zeit auf einer DTM überprüft werden kann.

1. Lösung effizient auf NTM raten
2. Korrektheit effizient auf DTM überprüfen

Beweis: Siehe Vorlesung »Moderne theoretische Informatik«

## Beispiel: Composites

$$A \equiv \{x \mid x = p \cdot q;\ q, p \in \mathbb{N} \land p, q > 1\}$$

- *Schwierig*: Zwei Faktoren $p, q$ finden
- *Einfach*: $p \cdot q$ berechnen und Resultat mit $x$ vergleichen

# Struktur von NP II

## Struktur von NP

- Es gibt besonders schwere Probleme in **NP**
- Alle anderen Probleme in **NP** sind auf besonders schwere Varianten effizient zurückführbar

# Polynomiale Zeit-Reduzierbarkeit I

## Grundproblem Reduzierbarkeit

- Gegeben: Problem $B$ mit Lösung, Problem $A$.
- Gesucht: Methode, die mit Lösung von $B$ Lösung von $A$ ermittelt.
- Vorgehensweise:
  - Eingabe von $A$ auf Eingabe von $B$ abbilden.
  - Sicherstellen, dass »Ja« (»Nein«)-Instanzen auf »Ja« (»Nein«)-Instanzen abgebildet werden
- Abbildung muss *effizient* zu berechnen sein!

## Definition: Polynomial Zeit-berechenbare Funktion

$f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ ist polynomial Zeit-berechenbar, wenn eine polynomial-Zeit DTM $M$ existiert, die für jede Eingabe $\omega$ mit $f(\omega)$ als Bandinhalt hält.

# Polynomiale Zeit-Reduzierbarkeit I

## Grundproblem Reduzierbarkeit

- Gegeben: Problem $B$ mit Lösung, Problem $A$.
- Gesucht: Methode, die mit Lösung von $B$ Lösung von $A$ ermittelt.
- Vorgehensweise:
  - Eingabe von $A$ auf Eingabe von $B$ abbilden.
  - Sicherstellen, dass »Ja« (»Nein«)-Instanzen auf »Ja« (»Nein«)-Instanzen abgebildet werden
- Abbildung muss *effizient* zu berechnen sein!

## Definition: Polynomial Zeit-berechenbare Funktion

$f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ ist polynomial Zeit-berechenbar, wenn eine polynomial-Zeit DTM $M$ existiert, die für jede Eingabe $\omega$ mit $f(\omega)$ als Bandinhalt hält.

# Polynomiale Zeit-Reduzierbarkeit I

## Definition: Polynomial Zeit-berechenbare Funktion

$f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ ist polynomial Zeit-berechenbar, wenn eine polynomial-Zeit DTM $M$ existiert, die für jede Eingabe $\omega$ mit $f(\omega)$ als Bandinhalt hält.

## Definition: Polynomial-Zeit Abbildungs-Reduzierbarkeit

Sprache $A$ ist *polynomial Zeit-Abbildungs-Reduzierbar (polynomial time mapping reducible, many-to-one-reducible)* auf Sprache $B$,

$$A \leq_{\mathrm{P}} B,$$

wenn $\exists f : \Sigma^* \to \Sigma^*$, $f$ polynomial Zeit-berechenbar, so dass $\forall w$:

$$w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B.$$

# Polynomiale Zeit-Reduzierbarkeit II

## Satz

Wenn $A \leq_{\mathrm{P}} B$ und $B \in \mathbf{P}$, dann ist $A \in \mathbf{P}$.

## Algorithmus

- Gegeben: Eingabe $\omega \in A$, TM $M$ für $B$.
- Berechne $f(\omega)$
- Führe $M$ auf $f(\omega)$ aus; gibt Resultat zurück.

## Anmerkungen

- Komposition zweier Polynome ist weiterhin Polynom
- Funktioniert auch für NTMs

# NP-Vollständigkeit I

### Definition: NP-Vollständigkeit

Eine Sprache $B$ ist NP-vollständig, wenn gilt:

- $B \in \mathbf{NP}$
- $\forall A \in \mathbf{NP} : A \leq_P B$

**NPC** ist die Klasse aller **NP**-vollständigen Probleme.

### Satz I

$$B \in \mathbf{NPC} \wedge B \in \mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{NP}$$

### Satz II

Wenn $B \in \mathbf{NPC}$ und $B \leq_P C$, dann gilt

$$C \in \mathbf{NPC}$$

### Satz III (Cook-Levin)

$$\textsc{Sat} \in \mathbf{NPC}$$

# NP-Vollständigkeit II

## NP-Vollständigkeit: Konsequenzen

- Alle **NPC**-Probleme sind gleich schwierig
- **NPC**-Probleme sind *nicht* in **P**, wenn **P** ≠ **NP**
- ∃ Algorithmus in **P** für **NP**-vollständiges Problem ☞ **P** = **NP**
- Starke aktuelle Vermutung:

$$\mathbf{NP} \neq \mathbf{P}$$

- Preisgeld für Beweis: 1 Million US-Dollar
  - Siehe *Millenium Prize*
  - Theoretische Informatik *ist* kommerziell interessant :)

# NP-Vollständigkeit III

## Graphen

*Soziale Netzwerke, Internet, Compiler, …*

- Graphhomomorphismus (Netzwerke strukturell identisch?)
- Längster Pfad
- Graphfärbbarkeit (Registerallokation)

## Optimierung

*Produktionsplanung, Scheduling, …*

- Bin Packing (Verteilung in Container)
- Travelling Salesman
- Quadratic Assignment (elektronische Komponenten plazieren)

# NP-Vollständigkeit IV

## Formale Sprachen

*Compiler, Big Data, Maschinelles Lernen, …*

- Längste gemeinsame Teilsequenz
- String-String-Korrektur

## Spiele und Puzzles

*Daddeln*

- Super Mario Bros (schnellstmöglicher Lauf)
- Mastermind (Lösung finden)
- Lemmings (Level lösen)

Siehe beispielsweise `dimacs.rutgers.edu/~graham/pubs/papers/cormodelemmings.pdf` oder `arxiv.org/pdf/1203.1895v1.pdf`

# NP-Vollständigkeit V

## Konsequenzen

- Viele praktische Probleme können (sehr wahrscheinlich) nicht effizient gelöst werden
- Approximationsverfahren wichtig
  - Manche Probleme können beweisbar nicht approximiert werden
  - Tritt sehr selten auf
- Details: Siehe Vorlesung »Algorithmen und Datenstrukturen«

# Entscheidungs- und Optimierungsprobleme

## Problem des Handlungsreisenden

*Travelling Salesman Problem (TSP)*

- Gegeben: $n$ Städte und die Entfernungen dazwischen
- Gesucht: Rundreise durch alle Städte mit minimaler Gesamtlänge
- Optimierungsproblem!

## Formulierung als Entscheidungsproblem

- Gegeben: $n$ Städte, Entfernungen dazwischen und ein Wert $k$
- Gesucht: Gibt es eine Rundreise durch alle Städte mit Länge $\leq k$

## Zusammenhang

Entscheidungsproblem nicht in **P** ☞ Optimierungsproblem nicht in **P**

# NP-Vollständigkeit VI: SAT I

## Erfüllbarkeit logischer Ausdrücke: SAT

- Boole'sche Variablen: $x_0, x_1, \ldots, x_n$
- Verknüpfungen: *Oder* ($\vee$), *Und* ($\wedge$), *Negation* ($\neg$), Kurzschreibweise: $\bar{x}_i \equiv \neg x_i$
- Klauseln: *Disjunktion* (Oder-Verknüpfung) von Variablen und negierten Variablen. Bespiel:

$$K_1 = (x_3 \vee x_7 \vee \bar{x}_2)$$

- Boolescher Ausdruck: *Konjunktion* (Und-Verknüpfung) von Klauseln. Beispiel:

$$B = K_1 \wedge K_2 \wedge K_3 = (x_3 \vee x_7 \vee \bar{x}_2) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_4 \vee x_6)$$

# NP-Vollständigkeit VII: SAT II

## Konjunktive Normalform

- Konjunktion von Disjunktionen: *Konjunktive Normalform* (KNF, CNF)
- Jede Klausel enthält maximal $i$ Literale ☞ i-CNF

## Erfüllbarkeit

- Ausdruck $B$ erfüllt, wenn Belegung der Variablen $x_1, \dots, x_n$ existiert, die $B$ wahr macht
- Beispiele:
  - $B = (x_0 \vee x_1 \vee x_2)$: ✓
  - $B = (x_0 \vee x_1) \wedge (\bar{x}_0 \vee x_2)$: ✓
  - $B = (x_0 \vee x_1) \wedge \bar{x}_0 \wedge \bar{x}_1$: ✗

# NP-Vollständigkeit VIII: SAT III

## Sprache SAT

$$\text{SAT} \equiv \{K \mid K \text{ ist erfüllbarer Boole'scher Ausdruck in KNF}\}$$

## Praktische Anwendungen

- Konstringierte Planungsprobleme (Stunden-, Ablaufplanung, …)
- Produktlinien in der Softwarentwicklung
- Konfigurationsoptionen-Konsistenz (bsp. Linux-Kernel)

SAT-Solver: Siehe `www.satcompetition.org`

# NP-Vollständigkeit IX: SAT IV

## Satz von Cook und Levin

Für jedes Problem A ∈ **NP** gilt

$$A \leq_P \textsc{Sat}$$

## Beweis (Struktur)

- Für jede Sprache A ∈ **NP**: Reduktion für Maschine $M(A)$ konstruieren
- Für jedes Wort $\omega \in A$:
  - Boole'sche Formel $\phi$ konstruieren
  - $\phi$ simuliert $M$ mit Eingabe $\omega$
  - Maschine akzeptiert ☞ Formel erfüllbar
  - Maschine akzeptiert nicht ☞ Keine erfüllende Belegung existiert
- Hinweis: Zahllose technische Details (siehe bsp. Sipser Theorem 7.37)

# NP-Vollständigkeit IX: SAT IV

## Satz von Cook und Levin

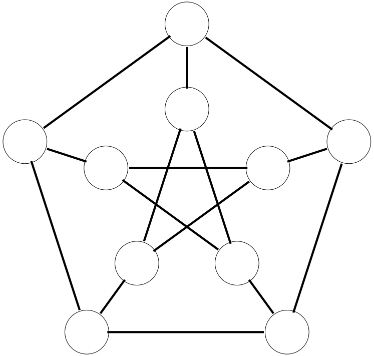
Für jedes Problem $A \in \mathbf{NP}$ gilt

$$A \leq_p \textsc{Sat}$$

## Henne und Ei

- **NP**-Vollständigkeit von SAT *ohne* Reduktion auf andere Probleme in **NP** beweisbar.
- Startpunkt für **NP**-Vollständigkeits-Beweise

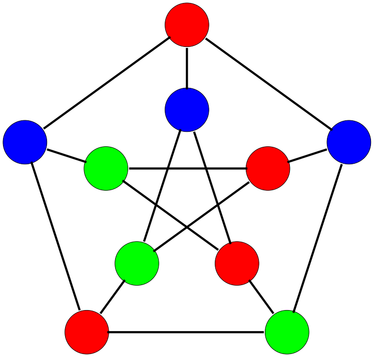
# NP-Vollständigkeit X: Drei-Färbbarkeit I



## Problemstellung

- Jeder Knoten: Eine Farbe (rot, grün, blau)
- Zwei durch Kante verbundene Knoten: Unterschiedliche Farbe
- Existiert gültige Farbzuweisung?

# NP-Vollständigkeit X: Drei-Färbbarkeit I



## Problemstellung

- Jeder Knoten: Eine Farbe (rot, grün, blau)
- Zwei durch Kante verbundene Knoten: Unterschiedliche Farbe
- Existiert gültige Farbzuweisung?

# NP-Vollständigkeit XI: Drei-Färbbarkeit II

## Definition Drei-Färbbarkeit

$$\begin{aligned}\text{3-COLOUR} = \{G = (V, E) \mid\ & G \text{ ist ungerichteter Graph} \\ & \wedge c : V \to \{r, g, b\}, \\ & \forall (u, v) \in E : c(u) \neq c(v)\}\end{aligned}$$

## Komplexität von 3-COLOUR

- SAT ist mindestens so schwierig wie 3-COLOUR: 3-COLOUR $\leq_p$ SAT
- 3-COLOUR ist **NP**-vollständig: SAT $\leq_p$ 3-COLOUR

Bildquelle: A. Borodin, Universität Toronto

# NP-Vollständigkeit XII

Beweis: 3-Colour $\leq_p$ Sat

## Knotenfarbe über Variablen festlegen

$$r_i = 1 : \text{Rot}, g_i = 1 : \text{Grün}, b_i = 1 : \text{Blau}.$$

## 1.) (Mindestens) eine Farbe pro Knoten

$$\alpha_1 = \bigwedge_{i=1}^{n} (r_i \vee g_i \vee b_i)$$

# NP-Vollständigkeit XII

Beweis: 3-COLOUR $\leq_p$ SAT

## Knotenfarbe über Variablen festlegen

$$r_i = 1 : \text{Rot}, g_i = 1 : \text{Grün}, b_i = 1 : \text{Blau}.$$

## 2.) Kein Knoten hat zwei Farben

$$\alpha_2 = \bigwedge_{i=1}^{n} \left[ (\overline{r_i \wedge g_i}) \wedge (\overline{g_i \wedge b_i}) \wedge (\overline{r_i \wedge b_i}) \right]$$

$$= \bigwedge_{i=1}^{n} \left[ (\bar{r}_i \vee \bar{g}_i) \wedge (\bar{g}_i \vee \bar{b}_i) \wedge (\bar{r}_i \vee \bar{b}_i) \right]$$

# NP-Vollständigkeit XII

Beweis: 3-Colour $\leq_p$ Sat

## Knotenfarbe über Variablen festlegen

$$r_i = 1 : \text{Rot}, g_i = 1 : \text{Grün}, b_i = 1 : \text{Blau}.$$

## 3.) Knoten an gemeinsamer Kante: Verschiedene Farben

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= \bigwedge_{(v_i, v_j \in E)} \left[ (\overline{r_i \wedge r_j}) \wedge (\overline{g_i \wedge g_j}) \wedge (\overline{b_i \wedge b_j}) \right] \\ &= \bigwedge_{(v_i, v_j \in E)} \left[ (\bar{r}_i \vee \bar{r}_j) \wedge (\bar{g}_i \vee \bar{g}_j) \wedge (\bar{b}_i \vee \bar{b}_j) \right]\end{aligned}$$

# NP-Vollständigkeit XII

Beweis: 3-Colour $\leq_p$ Sat

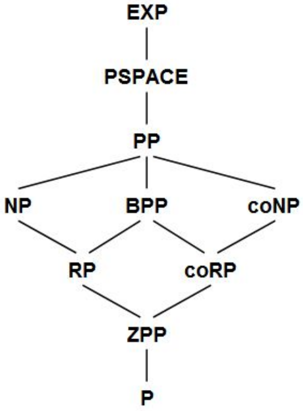
## Knotenfarbe über Variablen festlegen

$$r_i = 1 : \text{Rot}, g_i = 1 : \text{Grün}, b_i = 1 : \text{Blau}.$$

## Überprüfung durch Sat

- Zu überprüfender Ausdruck: $K = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3$
  - Erfüllbar: Färbung existiert
  - Nicht erfüllbar: Färbung existiert nicht
- ☞ 3-Colour ist Spezialfall von Sat!

## Komplexitätstheorie: Ausblick




### Aktuelle Forschungsfragen

- Wie schlimm ist **NP** wirklich?
- Können probabilistische Maschinen mehr als deterministische Maschinen?
- Sind nicht-klassische Maschinen schneller als klassische?

# Komplexitätstheorie: Ausblick