

Mathematik 1 für Informatik

1. Übungsblatt

Mengenlehre, Aussagenlogik

Die mit **T** markierten Aufgaben bzw. Aufgabenteile werden im Tutorium besprochen.
Für diese werden keine Lösungsvorschläge herausgegeben.

T Aufgabe 1.1

Es soll untersucht werden, ob es folgende Formel gibt: $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

- (a) Prüfen Sie die Gleichheit für die Mengen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $B = \{4, 5, 6, 7\}$.
- (b) Überprüfen Sie diese Aussage allgemein durch Venn-Diagramme.

Aufgabe 1.2

Berechnen Sie für die Teilmengen $D := \{1, 2, 3, \dots, 10\}$, $S := \{n \text{ ist Summe zweier Quadrate}\}$, $\mathbb{P} := \{p \text{ ist Primzahl}\}$ und $U := \{n \text{ ist ungerade}\}$ der Grundmenge $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ der ganzen Zahlen die Mengen

- (a) $\mathbb{P} \cap \overline{U}$,
- (b) $S \cup \overline{S}$,
- (c) $D \cap \overline{S}$,
- (d) $(\mathbb{P} \cap \overline{U}) \times (D \cap \overline{S})$.

T Aufgabe 1.3

Welche der folgenden Aussagen sind für die Mengen $A := \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B := \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ und $M := \{1, A\}$ mit Potenzmenge $\mathfrak{P}M$ wahr?

$$1 \notin A, \quad 1 \in B, \quad \{1\} \in A, \quad A \subset B, \quad B \subseteq A, \quad A \subseteq B, \quad A \in B, \quad B \subset B, \quad B \subseteq B$$

$$A \subset M, \quad \emptyset \in M, \quad \emptyset \subseteq M, \quad \{1\} \in \mathfrak{P}M, \quad A \in \mathfrak{P}M, \quad M \in \mathfrak{P}M, \quad M \subseteq \mathfrak{P}M.$$

T Aufgabe 1.4

In einem Gefängnis saßen drei Häftlinge. Der erste hatte zwei Augen, der zweite nur noch eines, der dritte war ganz blind. Der Gefängnisdirektor kündigte den dreien an, dass er von einer Sammlung von drei weißen und zwei blauen Hüten drei Hüte auswählen werde, um sie den Häftlingen aufzusetzen. Sie wurden dabei aber gehindert, die Farbe des Hutes zu sehen, der ihnen selbst aufgesetzt wurde. Dann wurden die Häftlinge zusammengebracht und der Gefängnisdirektor versprach dem normal sehenden die Freiheit, wenn er die Farbe seines eigenen Hutes angeben könne. Der Häftling gestand ein, dass er dies nicht könne. Nun kam die Reihe an den Einäugigen. Auch er musste dasselbe eingestehen. Der Direktor gab sich nicht damit ab, den Blinden zu fragen, aber als dieser ihn anflehte, willigte er ein, die gleichen Bedingungen auch für ihn gelten zu lassen. Der Blinde grinste breit und sprach:

*Was ich von meinen Freunden weiß,
das lässt mich sehen ganz genau
auch ohne Augen: mein Hut ist ...*

Ergänzen Sie den Spruch und geben Sie eine detaillierte und nachvollziehbare Begründung.

T Aufgabe 1.5

- (a) Zeigen Sie die Gleichheit $\mathcal{A} \vee (\neg \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) = \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ für Aussagen \mathcal{A} und \mathcal{B} durch Verwendung der Rechengesetze für die Aussagenlogik.
- (b) Zeigen Sie die Gleichheit aus Teil (a) durch Venn-Diagramm, nachdem Sie die obigen Aussagen in die Sprache der Mengenlehre übersetzt haben.
- (c) Liefern die beiden folgenden Methoden (der Programmiersprache Java) stets die selben Ergebnisse?

```
int getX(boolean a, boolean b) {
    int result = 0;
    int r = 1;
    int s = 1;
    if(a) {
        result = r;
    } else if(b) {
        result = s;
    }
    return result;
}
```

```
int getY(boolean a, boolean b) {
    int result = 0;
    int r = 1;
    int s = 1;
    if(a) {
        result = r;
    }
    if(b) {
        result = s;
    }
    return result;
}
```

Hinweis: Der Datentyp `boolean` wird für Variablen verwendet, die die beiden logische Werte `true` und `false` annehmen können, der Datentyp `int` steht für ganze Zahlen (mit 32 Bit).

- (d) Wie verhält es sich, wenn in beiden Methoden `s = 1` durch `s = 2` ersetzt wird?

Aufgabe 1.6

- (a) Formulieren Sie den folgenden Programm-Code (der Programmiersprache Java) einfacher, so dass jeder der Methodenaufrufe `printX`, `printY` bzw. `printZ` nur maximal einmal auftritt. Verwenden Sie hierzu Venn-Diagramme für zugehörige Mengen A, B, C .

```
void printXYZ(boolean a, boolean b, boolean c) {
    if(c) {
        if(a) {
            if(b) {
                printY();
            } else {
```

```

        printX();
    }
} else {
    printZ();
}
} else if(a) {
    if(b) {
        printY();
    } else {
        printX();
    }
} else {
    if(c) {
        printX();
    } else if(a) {
        printY();
    } else {
        printZ();
    }
}
}

```

- (b) Formulieren Sie den folgenden Programm-Code (ebenfalls Java) einfacher, so dass möglichst wenige der Operatoren ! (nicht), | (oder) bzw. & (und) auftreten. Formen Sie hierzu die auftretenden Terme unter Verwendung der Rechengesetze für die Aussagenlogik geeignet um.

```

void print(boolean a, boolean b, boolean c) {
    if(a & (b | c) & !(a | !b)) {
        printW();
    }
    if(((a | b) & c) | (!a & c)) {
        printX();
    }
    if(((a & !b) | (b & !a) | (a & b)) & !c) {
        printY();
    }
    if(!(a & !b & !c) | !(a | b | c)) {
        printZ();
    }
}

```

Aufgabe 1.7

Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck weitestmöglich, indem Sie (möglichst wenige) Rechengesetze der Logik anwenden (und diese benennen):

$$\mathcal{A} \vee ((\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\neg \mathcal{A} \wedge \neg \mathcal{B})).$$