OTH Regensburg
Fakultät Informatik und Mathematik
Prof. Dr. Rainer Löschel

Mathematik 1 für Informatik

2. Übungsblatt

Aussageformen, Beweismethoden

Die mit **T** markierten Aufgaben bzw. Aufgabenteile werden im Tutorium besprochen.
Für diese werden keine Lösungsvorschläge herausgegeben.

T Aufgabe 2.1

Betrachten Sie die folgende Aussage:

Alle Bayern besitzen eine Lederhose oder einen Trachtenanzug.

(a) Formulieren Sie diese Aussage unter Verwendung geeigneter logischer Zeichen, Mengen, Quantoren und elementarer Aussageformen.

(b) Bilden Sie die Negation der gemäß (a) formalisierten Aussage.

(c) Formulieren Sie die Negation der ursprünglich gegebenen Aussage verbal in gutem gesprochenen Deutsch.

Aufgabe 2.2

(a) Zeigen Sie für nichtleere Mengen A und B die Äquivalenz

$$A = B \Longleftrightarrow A \times B = B \times A.$$

Hinweis: Zwei Mengen M und N sind genau dann gleich, wenn $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$ gilt.

(b) Wie verhält es sich mit der Aussage aus Teil (a), wenn (mindestens) eine der beiden Mengen leer ist. Formulieren Sie einen Satz der Art:

Für zwei beliebige Mengen A und B gilt $A \times B = B \times A$ genau dann, wenn ....

T Aufgabe 2.3

(a) Zeigen Sie, dass das Quadrat einer ganzen Zahl bei Division durch 4 stets den Rest 0 oder 1 lässt.

(b) Besitzt die Gleichung $x^2 + y^2 = 998877665544332211$ ganzzahlige Lösungen?

Aufgabe 2.4

Beweisen Sie die folgende Aussage indirekt:

$$\forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R} : \sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}.$$

T Aufgabe 2.5

Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 .$$

Hinweis: Verwenden Sie die Formel für $s := \sum_{k=1}^{n} k$ aus der Vorlesung.

Aufgabe 2.6

(a) Zeigen Sie $2n + 1 < 2^n$ für alle $n \in N$, $n \geq 3$.

(b) Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt folgende Formel?

$$n^2 < 2^n$$

Beweisen Sie Ihre Behauptung durch Induktion, und stellen Sie die Situation graphisch mit Dominosteinen dar (kippender Stein, falls die Aussage gilt, Abstände der Steine gemäß Induktionsschritt).

T Aufgabe 2.7

Bestimmen Sie (mit Beweis) alle natürlichen Zahlen n, für die $4n^3 - n$ durch 3 teilbar ist.