Zadanie 1

Naszym celem w tym zadaniu jest zaimplementowanie funkcji, która będzie liczyć ilorazy różnicowe. Jako parametry nasza funkcja bierze dwa wektory, konceptualnie przedstawiają one pary punktów $(x_i, f(x_i))$. Dzięki nim możemy wyznaczyć ilorazy różnicowe. Robimy to w następujący sposób:

$$
\begin{array}{llll}
f[x_0] & & & \\
 & f[x_0, x_1] & & \\
f[x_1] & & f[x_0, x_1, x_2] & \\
 & f[x_1, x_2] & & f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\
f[x_2] & & f[x_1, x_2, x_3] & \\
 & f[x_2, x_3] & & \\
f[x_3] & & &
\end{array}
$$

konceptualnie nasz wynikowy wektor będzie się "zmniejszał". To znaczy, pamięciowo będzie zajmował tyle samo miejsca, ale wartości używanych w obliczeniach będzie coraz mniej. Do wektora wynikowego będziemy pushować $f[1]$ co iterację algorytmu.

Result: Ilorazy różnicowe $f[x_0, x_1, \ldots, x_i]$
Input: x, wektor punktów x_i
Input: f, wektor wartości $f(x_i)$ w punktach x_i

```
1  Function ilorazyRoznicowe(x, f):
2      n ← len(x);
3      ret ← [f[1]];
4      for i ← 1 to n − 1 do
5          for j ← 1 to n − i do
6              f[j] ← (f[j+1]−f[j]) / (x[i+j]−x[j]);
7          end
8          Append f[1] to ret;
9      end
10     return ret;
```

Złożoność

Złożoność czasowa naszego algorytmu jest rzędu $O(n^2)$, gdzie n to rozmiar wektora x. Natomiast pamięciowa jest rzędu $O(n)$.

Zadanie 2

W tym zadaniu mamy zaimplementować funkcję, która będzie liczyć wartość wielomianu interpolacyjnego w punkcie t. Na wykładzie mieliśmy podany wzór:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k q_k(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j).$$

Łatwo jednak zauważyć, że jego złożoność jest rzędu $O(n^2)$, ponieważ w każdej iteracji pętli musimy wykonać k mnożeń. Przy pomocy uogólnionego algorytmu Hornera możemy zredukować złożoność do $O(n)$.

Result: Wartość wielomianu interpolacyjnego w punkcie t
Input: x, wektor punktów x_i
Input: fx, wetkor ilorazów różnicowych $f[x_0, x_1, \ldots, x_i]$
Input: t, punkt w którym chcemy policzyć wartość wielomianu

```
1 Function warNewton(x, fx, t):
2 |   nt ← 0;
3 |   for i ← length of x to 1 do
4 |   |   nt ← fx[i] + nt * (t − x[i]);
5 |   end
6 |   return nt;
```

Zadanie 3

W tym zadaniu mamy zaimplementować funkcję, która będzie liczyć współczynniki wielomianu w postaci naturalnej korzystając z tego, że znamy wartości współczynników w postaci Newtona. Konkretnie chcemy obliczyć wektor współczynników a_i takich że:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

Widzimy, że nasz wielomian jest dany wzorem:

$$p_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + c_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}).$$

Przyjrzyjmy się więc temu jak możemy wyciągnąć poszczególne współczynniki. Przy x^n mamy tylko jeden czynnik, więc $a_n = c_n$. Ale przy x^{n-1} mamy c_{n-1} ze składnika zawierającego x^{n-1} oraz $\binom{n}{1}$ składników ze składnika zawierającego x^n, $-c_n x_i$ dla $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Z tego względu złożoność byłaby bardzo wysoka, gdybyśmy chcieli obliczyć współczynniki tym sposobem. Zauważmy jednak, że możemy to zrobić w czasie kwadratowym, odejmując $a_{j+1} \cdot x_i$ gdzie i to stopień x^i, który obecnie rozwijamy, a j to indeks w naszym wektorze a o wartościach $j \in \{i, i+1, \dots, n-1\}$, od którego odejmujemy nasz odjemnik.

```
   Result: Współczynniki wielomianu w postaci naturalnej
   Input: x, wektor punktów x_i
   Input: fx, wektor ilorazów różnicowych f[x_0, x_1, ..., x_i]
 1 Function naturalna(x, fx):
 2 |   n ← len(x);
 3 |   a ← zeros(n);
 4 |   a[n] ← fx[n];
 5 |   for i ← n down to 1 do
 6 |   |   for j ← i to n − 1 do
 7 |   |   |   a[j] ← a[j] − a[j + 1] × x[i];
 8 |   |   end
 9 |   |   a[i] ← a[i] + fx[i];
10 |   end
11 |   return a;
```

Złożoność

Złożoność czasowa naszego algorytmu jest rzędu $O(n^2)$, gdzie n to rozmiar wektora x. Natomiast pamięciowa jest rzędu $O(n)$.

Zadanie 4

W tym zadaniu mamy zaimplementować funkcję, która wizualizuje funkcję f oraz jej interpolację w na przedziale $[a, b]$.

Przedział dzielimy na $n+1$ równoodległych punktów, $\text{points\_f}_i = a + i(\frac{b-a}{n})$ gdzie n to stopień wielomianu interpolacyjnego. Następnie liczymy wartości funkcji f w tych punktach. Na podstawie tych wartości liczymy ilorazy różnicowe.

Ustalamy, że między dwoma kolejnymi punktami będziemy rysować 100 punktów. Dzięki temu nasz wykres będzie wyglądał na gładki. Następnie liczymy wartości f oraz w (przy użyciu wcześniej zaimplementowanej funkcji warNewton) w tych punktach i rysujemy je na przedziale $[a, b]$ przy pomocy Julia Plots.

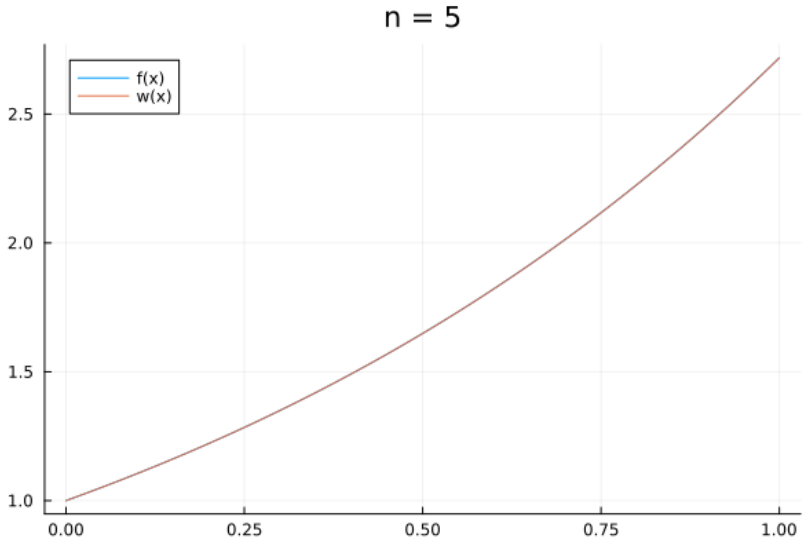
Input: f, funkcja, której interpolację chcemy narysować
Input: a, lewy koniec przedziału
Input: b, prawy koniec przedziału
Input: n, stopień wielomianu interpolacyjnego
Output: Wykres funkcji f oraz jej interpolacji w

1 **Function** `rysujNnfx(`f, a, b, n`):`
2 $h \leftarrow \frac{b-a}{n}$;
3 $points\_f \leftarrow$ wektor $[a + i * h$ for i in 0 to $n]$;
4 $values\_f \leftarrow$ wektor $[f(x)$ for x in $points\_f]$;
5 $fx \leftarrow$ call $ilorazyRoznicowe(points\_f, values\_f)$;
6 $points\_num \leftarrow 100 * n + 1$;
7 $delta \leftarrow \frac{b-a}{points\_num-1}$;
8 $x\_values \leftarrow$ wektor $[a + i * delta$ for i in 0 to $points\_num - 1]$;
9 $y\_values \leftarrow$ wektor $[f(x)$ for x in $x\_values]$;
10 $w\_values \leftarrow$ wektor $[warNewton(points\_f, fx, x)$ for x in $x\_values]$;
11 $plot(f(x))$;
12 $plot(warNewton(points\_f, fx, x))$;

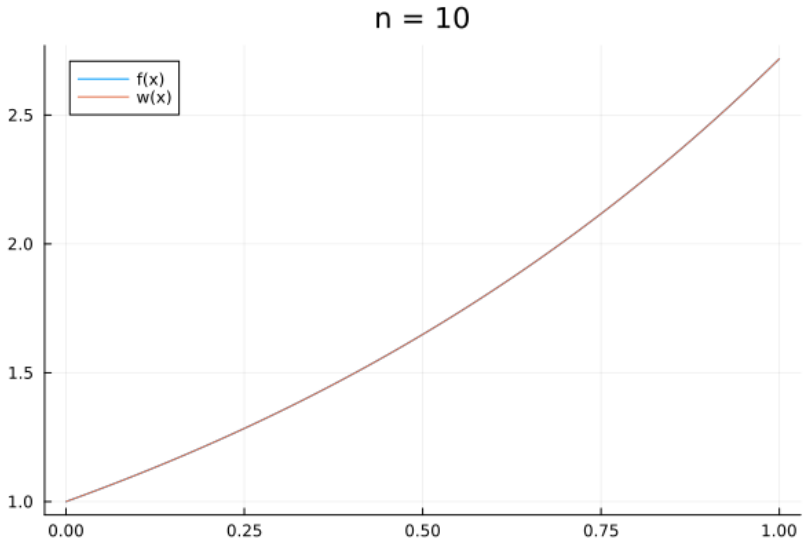
Zadanie 5

W tym zadaniu mamy zwizualizować przy pomocy funkcji z zadania 4 następujące funkcje:

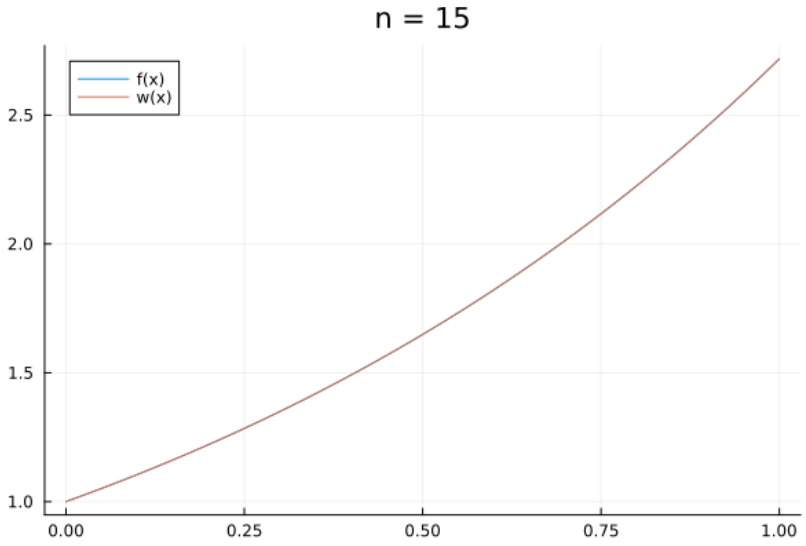
$$n \in \{5, 10, 15\},$$
$$f(x) = e^x \text{ dla } [a, b] = [0, 1],$$
$$f(x) = x^2 \sin(x) \text{ dla } [a, b] = [-1, 1]$$



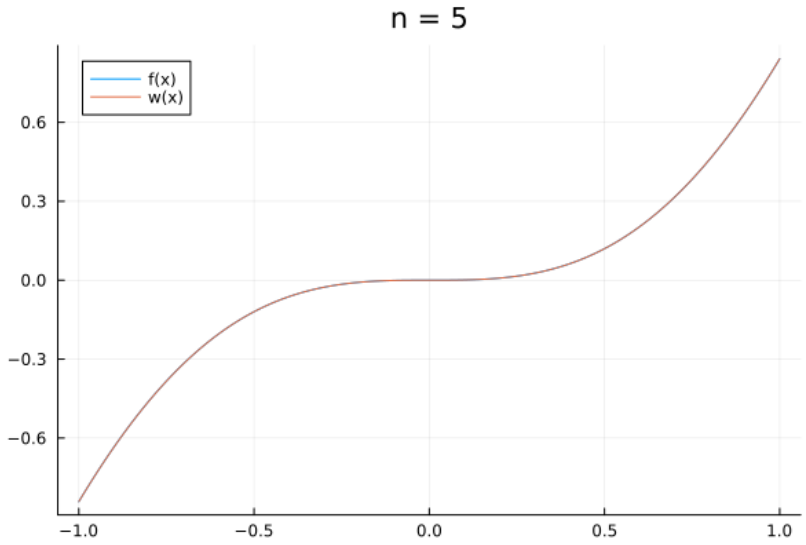
Rysunek 1: Wykresy porównujące funkcję $f(x) = e^x$ oraz jej interpolację $w(x)$ na przedziale $[-1, 1]$ i $n = 5$.



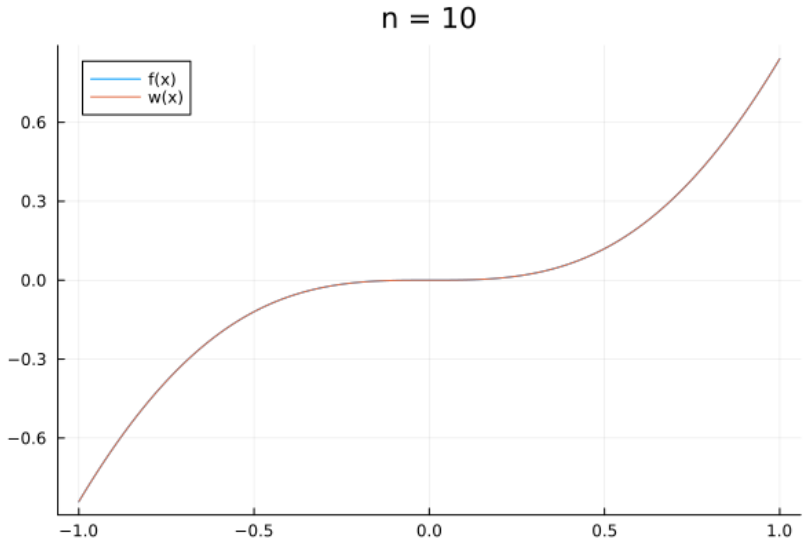
Rysunek 2: Wykresy porównujące funkcję $f(x) = e^x$ oraz jej interpolację $w(x)$ na przedziale $[-1, 1]$ i $n = 10$.



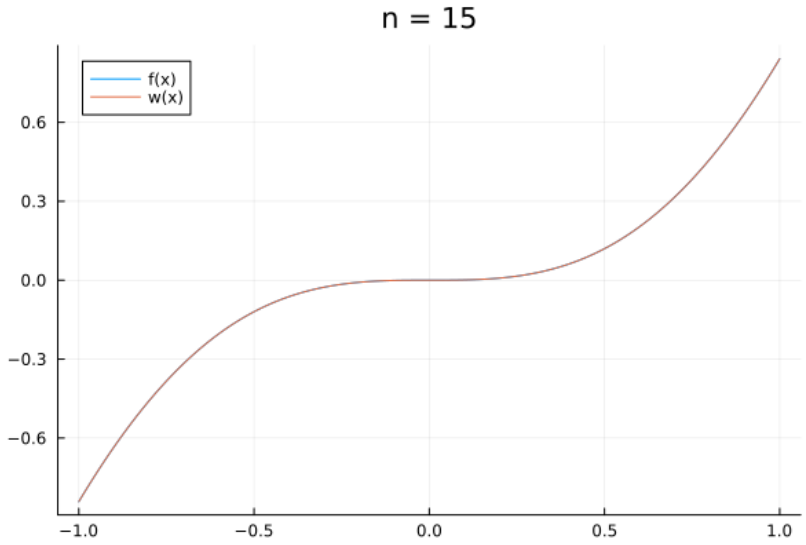
Rysunek 3: Wykresy porównujące funkcję $f(x) = e^x$ oraz jej interpolację $w(x)$ na przedziale $[-1, 1]$ i $n = 15$.



Rysunek 4: Wykresy porównujące funkcję $f(x) = x^2 \sin(x)$ oraz jej interpolację $w(x)$ na przedziale $[-1, 1]$ i $n = 5$.



Rysunek 5: Wykresy porównujące funkcję $f(x) = x^2 \sin(x)$ oraz jej interpolację $w(x)$ na przedziale $[-1, 1]$ i $n = 10$.



Rysunek 6: Wykresy porównujące funkcję $f(x) = x^2 \sin(x)$ oraz jej interpolację $w(x)$ na przedziale $[-1, 1]$ i $n = 15$.

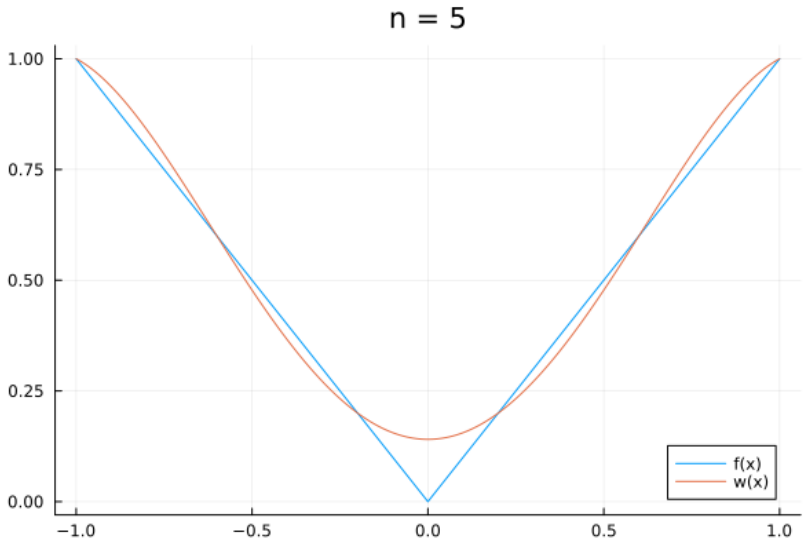
Interpretacja wyników

Na wykresach widać, że już dla wielomianu stopnia 5 wykresy funkcji f oraz w się pokrywają. Jest to zgodne z intuicją, ponieważ obie te funkcje są gładkie i na danym przedziale mają mniej punktów przegięcia niż 5.

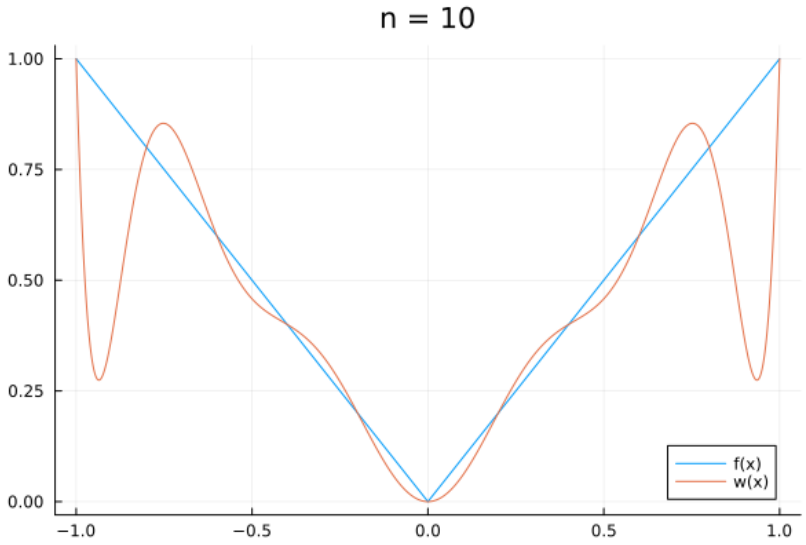
Zadanie 6

W tym zadaniu mamy zwizualizować przy pomocy funkcji z zadania 4 następujące funkcje:

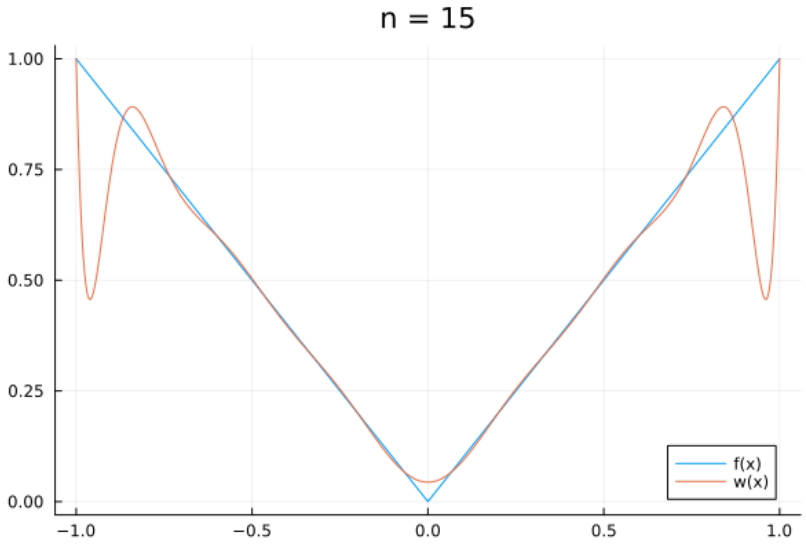
$$n \in \{5, 10, 15\},$$
$$f(x) = |x| \text{ dla } [a, b] = [-1, 1],$$
$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2} \text{ dla } [a, b] = [-5, 5]$$



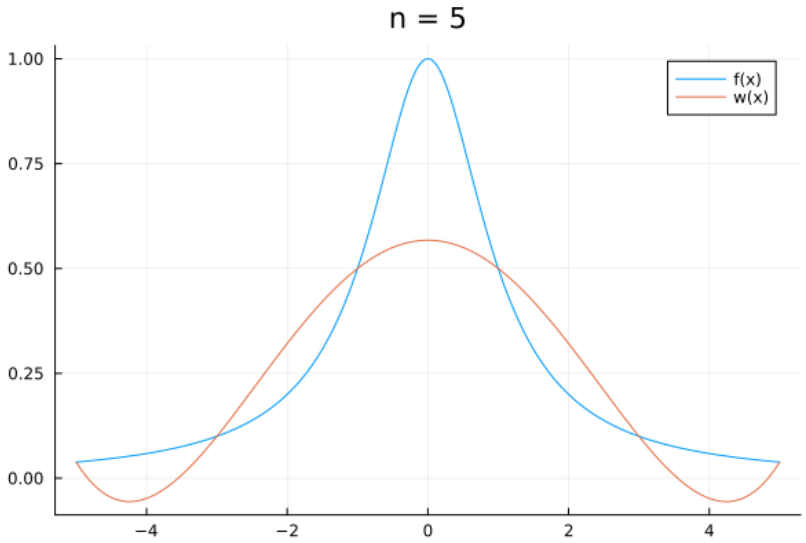
Rysunek 7: Wykresy porównujące funkcję $f(x) = |x|$ oraz jej interpolację $w(x)$ na przedziale $[-1, 1]$ i $n = 5$.



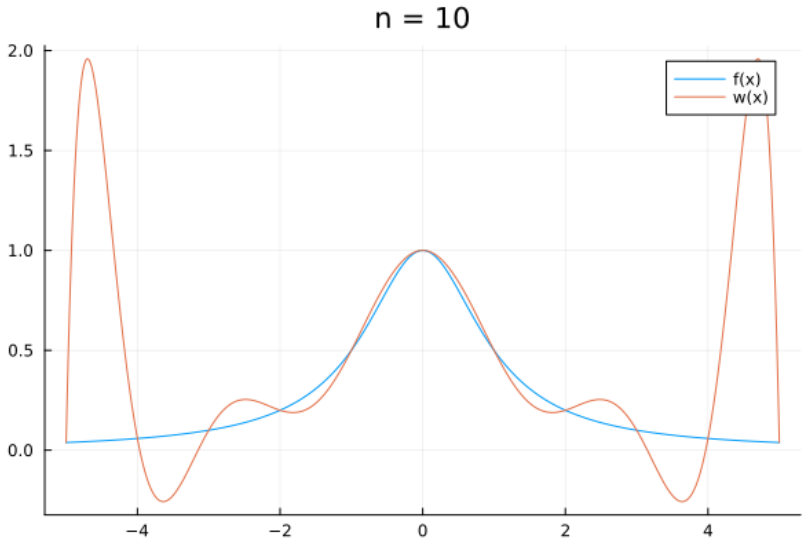
Rysunek 8: Wykresy porównujące funkcję $f(x) = |x|$ oraz jej interpolację $w(x)$ na przedziale $[-1, 1]$ i $n = 10$.



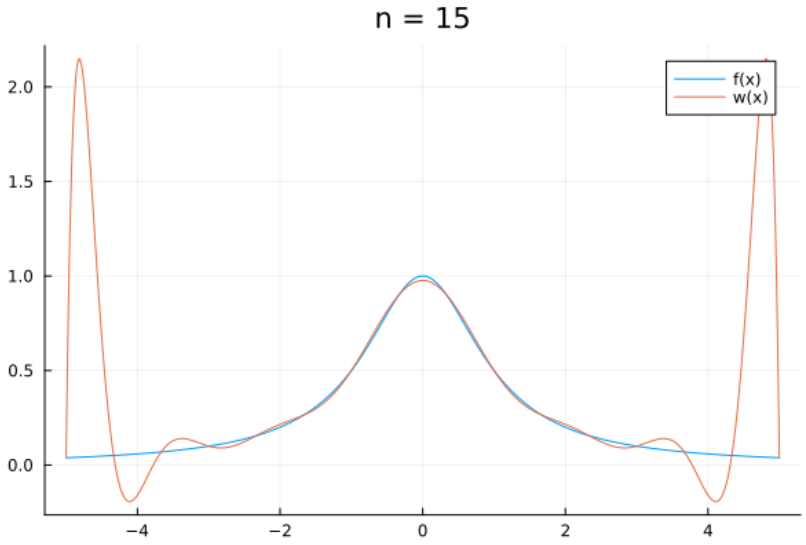
Rysunek 9: Wykresy porównujące funkcję $f(x) = |x|$ oraz jej interpolację $w(x)$ na przedziale $[-1, 1]$ i $n = 15$.



Rysunek 10: Wykresy porównujące funkcję $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ oraz jej interpolację $w(x)$ na przedziale $[-5, 5]$ i $n = 5$.



Rysunek 11: Wykresy porównujące funkcję $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ oraz jej interpolację $w(x)$ na przedziale $[-5, 5]$ i $n = 10$.



Rysunek 12: Wykresy porównujące funkcję $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ oraz jej interpolację $w(x)$ na przedziale $[-5, 5]$ i $n = 15$.

Interpretacja wyników

Tym razem funkcje f oraz w nie pokrywają się na naszych wykresach.

W przypadku $f(x) = |x|$ jednym z problemów jest to, że nie jest ona różniczkowalna w punkcie $x = 0$. Intuicyjcnie, wielomiany są gładkie, a tymczasem funkcja f ma w $x = 0$ punkt przegięcia o kącie prostym. Możemy pomyśleć, że odpowiednio wysokie zwiększenie stopnia wielomianu zredukuje ten problem. Widzimy jednak, że powiększanie n zniekształca wykres na krańcach przedziału.

Funcja $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ jest gładka, ale tym razem podobnie jak przy poprzedniej funkcji, zwiększanie n zniekształca wykres na krańcach przedziału. Jest to przykład efektu Rungego.

Efekt Rungego

Zniekształcanie funkcji na krańcach przedziału przy zwiększaniu stopnia wielomianu nazywamy efektem Rungego. Jest to zjawisko, które występuje przy interpolacji funkcji za pomocą wielomianów wysokiego stopnia na równoodległych węzłach, czyli to co robimy u nas.

Na wykładzie mieliśmy podane twierdzenie o błędzie interpolacji:

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

Z tego równania widać, że im więcej punktów interpolacji, tym mniejszy jest iloczyn $\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$. Oznacza to więc, że gdy nta pochodna funkcji f w danym

punkcie jest znacznie większa od $(n+1)!$ to wahania błędu w jego sąsiedztwie będą również duże.

Jak zapobiec efektowi Rungego?

Jednym ze sposobów jest skorzystanie z innego rozkładu punktów. Konkretnie chcemy mieć więcej punktów na krańcach przedziału. Przykładem takiego rozkładu jest rozkład Czebyszewa. Gdy tak jak tutaj korzystamy z równoodległych węzłów, to możemy na nich zastosować algorytm S-Runge, który mapuje nasze węzły na takie z rozkładem Czebyszewa.

Kolejnym sposobem jest użycie funkcji sklejanych z kawałkami wielomianowymi.