Rozwiazanie zadania NUM4 - Równanie $Ay = b$

Jakub Dragosz

November 19, 2024

1 Wstep

Zadanie NUM4 polegało na rozwiazaniu równania $Ay = b$, gdzie A jest duża, kwadratowa macierza o szczególnej strukturze, a b jest wektorem o stałych wartościach. Celem zadania było:

- Implementowanie algorytmu rozwiazujacego to równanie w sposób efektywny numerycznie,
- Porównanie wyników z metodami dostepnymi w gotowych bibliotekach numerycznych,
- Analiza czasu wykonania w zależności od rozmiaru macierzy N.

Macierz A została zdefiniowana jako macierz o wymiarze $N \times N$, z:

- wartościa 5 na przekatnej głównej,
- wartościa 3 na pierwszej nadprzekatnej,
- wartościa 1 we wszystkich pozostałych miejscach.

Wektor b to wektor kolumnowy, którego wszystkie elementy sa równe 2. Wymiar N został ustalony na 120 dla analizy numerycznej.

2 Opis metody Sherman-Morrison

Metoda Sherman-Morrison to narzedzie numeryczne wykorzystywane do obliczania przybliżonego rozwiazania układów równań o postaci:

$$A^{-1}b,$$

gdzie A jest macierza rzadka lub modyfikacja innej macierzy. W naszym przypadku zastosowano te metode ze wzgledu na szczególna strukture macierzy A, która pozwala uprościć obliczenia i znaczaco zredukować koszt obliczeniowy.

Podstawowe założenia: Metoda Sherman-Morrison korzysta z faktu, że modyfikacje macierzy A można opisać w postaci:

$$A' = A + uv^T,$$

gdzie u i v to wektory kolumnowe. Jeśli macierz A i A' sa odwracalne, rozwiazanie dla A' można przedstawić jako:

$$A'^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1 + v^TA^{-1}u}.$$

3 Opis rozwiazania

Do rozwiazania równania wykorzystano jezyk C++ oraz biblioteke Eigen. Rozwiazanie podzielono na kilka etapów:

3.1 Generowanie macierzy A

Macierz A została wygenerowana zgodnie z podanym wzorem. W celu zachowania efektywności numerycznej i oszczedności pamieci, uwzgledniono jej strukture, przechowujac tylko wartości istotne (przekatna główna, nadprzekatna, pozostałe elementy).

3.2 Rozwiazanie równania $Ay = b$

Równanie rozwiazano na dwa sposoby:

1. Za pomoca własnego algorytmu opartego na backsubstitution z uwzglednieniem macierzy A, gdzie wyonujemy to w czasie około O(N) A.
2. Za pomoca gotowych funkcji z biblioteki Eigen, takich jak dekompozycja LU, Cholesky i QR.

3.3 Analiza czasowa

Dla każdej z metod zmierzono czas wykonania w zależności od rozmiaru macierzy N. Wyniki porównano na wykresie.

4 Wyniki i analiza

4.1 Porównanie czasów wykonania

Na Rysunku 1 przedstawiono porównanie czasów wykonania algorytmu Sherman-Morrison, dekompozycji LU, Cholesky oraz QR w zależności od N. Jak widać, dla dużych macierzy metoda Sherman-Morrison charakteryzuje sie mniejszym czasem wykonania dzieki wykorzystaniu rzadkiej struktury macierzy.

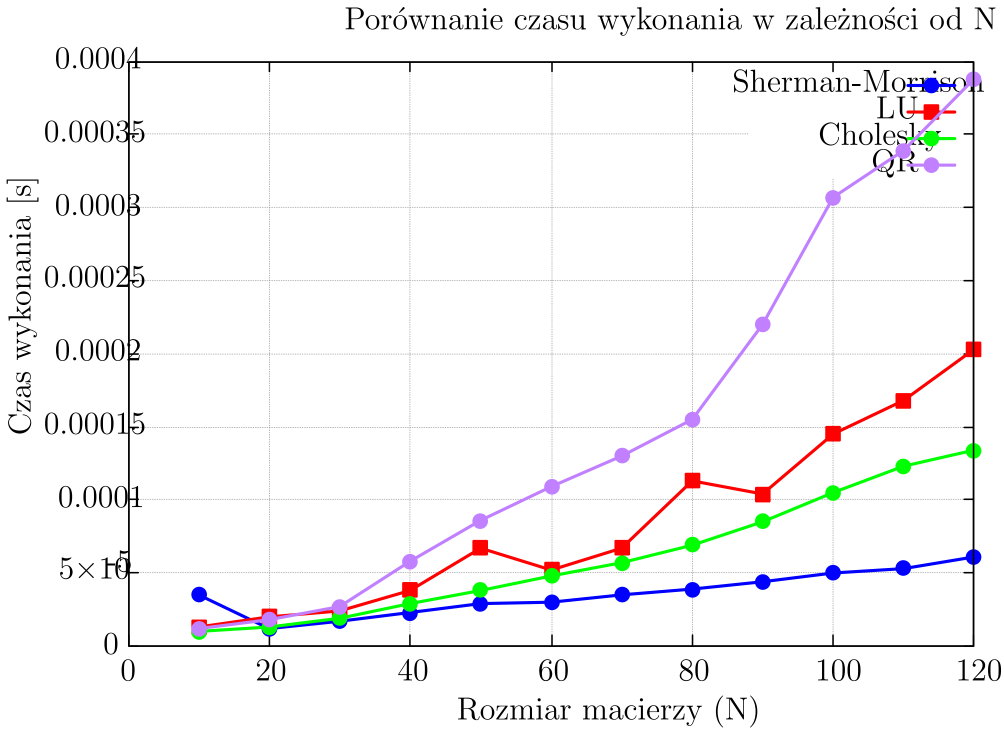

Figure 1: Porównanie czasów wykonania w zależności od rozmiaru N.

4.2 Poprawność wyników

Wyniki uzyskane metoda własna zostały porównane z wynikami z bibliotek Eigen. Dla wszystkich testowanych wartości N różnice były znikome, co świadczy o poprawności implementacji. Otrzymany wynik to jest ten wektor y:

$$y = \begin{bmatrix} 0.0236998 \\ 0.0118499 \\ 0.0177749 \\ 0.0148124 \\ 0.0162936 \\ 0.0155530 \\ 0.0159233 \\ 0.0157382 \\ 0.0158307 \\ 0.0157844 \\ 0.0158076 \\ 0.0157960 \\ 0.0158018 \\ 0.0157989 \\ 0.0158004 \\ 0.0157996 \\ 0.0158000 \\ 0.0157998 \\ 0.0157999 \\ 0.0157999 \\ \vdots \\ 0.0157999 \\ 0.0197498 \end{bmatrix}.$$

5 Wnioski

- Macierz A dzieki swojej strukturze pozwala na optymalizacje algorytmu. Wykorzystanie rzadkiej reprezentacji macierzy znacznie zmniejsza czas wykonania operacji.
- Metoda Sherman-Morrison jest efektywniejsza od klasycznych metod dekompozycji (LU, Cholesky, QR) przy dużych rozmiarach macierzy, jednak wymaga bardziej skomplikowanej implementacji.
- Dla dużych wartości N czas wykonania metod numerycznych rośnie liniowo dla Sherman-Morrison, podczas gdy metody LU i QR rosna wykładniczo.

6 Podsumowanie

W zadaniu NUM4 przedstawiono implementacje oraz analize numerycznego rozwiazania równania $Ay = b$. Wyniki wykazały, że metoda Sherman-Morrison jest szczególnie efektywna w przypadku macierzy o rzadkiej strukturze. Analiza czasowa potwierdziła, że właściwy dobór metody numerycznej ma kluczowe znaczenie dla dużych układów równań.