NUM1 - Przybliżenie numeryczne pochodnej

Jakub Dragosz

Październik 2024

Spis treści

1 Wstęp

Zadanie NUM02 polega na tym, że mamy podaną macierz A_1 oraz A_2 oraz wektor b:

$$\mathbf{A_1} = \begin{pmatrix} 5.8267103432 & 1.0419816676 & 0.4517861296 & -0.2246976350 & 0.7150286064 \\ 1.0419816676 & 5.8150823499 & -0.8642832971 & 0.6610711416 & -0.3874139415 \\ 0.4517861296 & -0.8642832971 & 1.5136472691 & -0.8512078774 & 0.6771688230 \\ -0.2246976350 & 0.6610711416 & -0.8512078774 & 5.3014166511 & 0.5228116055 \\ 0.7150286064 & -0.3874139415 & 0.6771688230 & 0.5228116055 & 3.5431433879 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A_2} = \begin{pmatrix} 5.4763986379 & 1.6846933459 & 0.3136661779 & -1.0597154562 & 0.0083249547 \\ 1.6846933459 & 4.6359087874 & -0.6108766748 & 2.1930659258 & 0.9091647433 \\ 0.3136661779 & -0.6108766748 & 1.4591897081 & -1.1804364456 & 0.3985316185 \\ -1.0597154562 & 2.1930659258 & -1.1804364456 & 3.3110327980 & -1.1617171573 \\ 0.0083249547 & 0.9091647433 & 0.3985316185 & -1.1617171573 & 2.1174700695 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} \equiv \begin{pmatrix} -2.8634904630 \\ -4.8216733374 \\ -4.2958468309 \\ -0.0877703331 \\ -2.0223464006 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$$

i chcemy rozwiązać równania macierzowe z owymi macierzami oraz wektorem wyrazów wolnych. Ja użyłem do tego języka C++ oraz biblioteki Eigen, która służy do obliczeń matematycznych oraz algebry liniowej.

2 Opis kodu

Do obliczenia biblioteka Eigen m.inn. ma możliwość wykorzystania fakotryzacji Cholesky'ego do policzenia macierzy, z której skorzystałem bo jest najoptymalniejsza dla takich macierzy - są one dodatnio określone oraz symetryczne.

2.1 Faktoryzacja Cholesky'ego

Faktoryzacja Cholesky'ego polega na rozłożeniu macierzy głównej na macierz trójkątną dolną oraz jego transpozycję:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A = L \cdot L^T$$

Daje ona nam możliwość około 2 razy szybciej sfaktoryzować macierz niż LU.

2.2 Kod

Mój kod najpierw rozwiązuje układ liniowy dla A_1 z wektorem b oraz A_2 z wektorem b. (A_1 * y = b oraz A_2 * y = b) Otrzymuję następujące wyniki:

$$y_1 = \begin{pmatrix} 0.0255619 \\ -1.35714 \\ -3.94076 \\ -0.488936 \\ 0.100978 \end{pmatrix}$$

$$y_2 = \begin{pmatrix} -0.408756 \\ -0.560307 \\ -4.112 \\ -1.52419 \\ -0.775195 \end{pmatrix}$$

Później dodaje wektor Δ, do wektora b i otrzymuje później nazywany wektor Δb, który ma normę $\|\Delta b\|_2 \approx 10^{-6}$. Tworzę układ równań ($A_1$ * y = Δb oraz

A_2 * y = Δb - z zaburzonym b) i otrzymuję następujące wyniki:

$$\Delta y_1 = \begin{pmatrix} 0.0255619 \\ -1.35714 \\ -3.94076 \\ -0.488936 \\ 0.100978 \end{pmatrix}$$

oraz

$$\Delta y_2 = \begin{pmatrix} -246.014 \\ 450.047 \\ -100.948 \\ -586.958 \\ -496.248 \end{pmatrix}$$

3 Wniosek

3.1 Różnica między wartością zaburzoną a niezaburzoną

Jak widać w przypadku macierzy A_1 różnica między układem równań z b oraz z zaburzonym b jest bardzo mała i wynosi około:

$$y_1 - \Delta y_1 = \begin{pmatrix} 1.49987e-08 \\ 7.166e-08 \\ -2.0073e-07 \\ 7.76354e-08 \\ 2.61266e-08 \end{pmatrix}$$

$$y_2 - \Delta y_2 = \begin{pmatrix} 245.605 \\ -450.607 \\ 96.8364 \\ 585.434 \\ 495.472 \end{pmatrix}$$

3.2 Współczynnik uwarunkowania macierzy

Jak widać w przypadku macierzy A_2 różnica jest kolosalna między tymi wynikami, dlatego postanowiłem sprawdzić wskaźnik uwarunkowania macierzy.

Sprawdza się go poprzez wyznaczenie wartości własnych tej macierzy oraz wzięcie moduł największej i moduł najmniejszej i podzielenie ich i oznaczamy to κ:

$$\kappa = \frac{\max_i |\lambda_i|}{\min_i |\lambda_i|}$$

Dla naszych macierzy A_1 oraz A_2 nasze współczynniki uwarunkowania to odpowiednio:

$$\kappa_1 = 49$$

oraz

$$\kappa_2 = 3.45829e + 16$$

Wysoka wartość współczynnika uwarunkowania κ dla A_2 świadczy o dużej wrażliwości tej macierzy na zaburzenia danych wejściowych:

3.3 Końcowy wniosek

Porównując wyniki, widać wyraźnie, że macierz A_1 jest dobrze uwarunkowana, a niewielkie zaburzenie wektora $\mathbf{b}$ nie wpływa istotnie na wynik. Natomiast macierz A_2 jest źle uwarunkowana, co powoduje duże różnice w rozwiązaniach przy zaburzeniu danych wejściowych. Wysoki współczynnik uwarunkowania dla A_2 oznacza, że ta macierz jest bardzo wrażliwa na zmiany, co czyni ją mniej przydatną w precyzyjnych obliczeniach.

Wnioskujemy, że w przypadku macierzy o wysokim współczynniku uwarunkowania konieczne może być zastosowanie bardziej stabilnych metod numerycznych lub lepiej uwarunkowanych macierzy, aby uniknąć znaczących błędów w wynikach.