

Analisi 1

Nicoló Montalti

1 Limiti di successioni

Teorema 1.1 (Unicitá del limite). *Sia $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$.*

$$\text{Se } a_n \rightarrow \alpha, a_n \rightarrow \beta \implies \alpha = \beta$$

Teorema 1.2 (TLS Limiti delle sottosuccessioni). *Sia $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.*

$$\text{Se } a_n \rightarrow \alpha \implies \forall (a_k)_n \text{ s.s di } a_n \text{ si ha } (a_k)_n \rightarrow \alpha$$

Teorema 1.3 (TPS Permanenza del segno). *Siano $(a_n), (b_n)$ s. in \mathbb{R} , $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.*

$$\text{Se } a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b, a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N} \implies a \leq b$$

Teorema 1.4 (T2C Due carabinieri). *Siano $(a_n), (b_n), (c_n)$ s. in \mathbb{R} , $\lambda \in \mathbb{R}$.*

$$\text{Se } a_n \rightarrow \lambda, b_n \rightarrow \lambda, a_n \leq b_n \leq c_n \forall n \in \mathbb{N} \implies b_n \rightarrow \lambda$$

Teorema 1.5 (TSM Successioni monotone).

$$\text{Se } (a_n) \nearrow \implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} (a_n)$$

$$\text{Se } (a_n) \searrow \implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} (a_n)$$

Teorema 1.6 (Criterio del rapporto). *Sia $a_n > 0$ s. in \mathbb{R} , $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$.*

$$\text{Se } \lambda > 1 \implies a_n \rightarrow +\infty$$

$$\text{Se } \lambda < 1 \implies a_n \rightarrow 0$$

Teorema 1.7 (CSE Continuitá sequenziale dell'esponenziale). *Sia x_n s. in \mathbb{R} .*

$$\text{Se } x_n \rightarrow x_0 \in \mathbb{R} \implies e^{x_n} \rightarrow e^{x_0}$$

Teorema 1.8 (CSL Continuitá sequenziale del logaritmo). *Sia x_n s. in \mathbb{R} .*

$$\text{Se } x_n \rightarrow x_0 \in \mathbb{R} \implies \log_a(x_n) \rightarrow \log_a(x_0)$$

Teorema 1.9 (Criterio di Cesaro). *Siano a_n, b_n s. in \mathbb{R} , $b_n \nearrow$ s., $b_n \rightarrow +\infty$.*

$$\text{Se } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lambda \in \overline{\mathbb{R}} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda$$

2 Limiti di funzioni

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^M$, $\alpha \in D(A)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^M$ ($\bar{\mathbb{R}}$ se $M = 1$)

Teorema 2.1 (Unicitá del limite).

$$\text{Se } f(x) \xrightarrow[x \rightarrow \alpha]{} \lambda, f(x) \xrightarrow[x \rightarrow \alpha]{} \mu \implies \lambda = \mu$$

Teorema 2.2 (TLR Limite delle restrizioni). *Sia $B \subseteq A$, $\alpha \in D(B)$.*

$$\text{Se } f(x) \xrightarrow[x \rightarrow \alpha]{} \lambda \implies f|_B(x) \xrightarrow[x \rightarrow \alpha]{} \lambda$$

dove $f|_B : B \rightarrow \mathbb{R}^M$, $f|_B(x) := f(x)$

Teorema 2.3 (CSL Caratterizzazione sequenziale del limite).

$$f(x) \xrightarrow[x \rightarrow \alpha]{} \lambda \iff f(x_n) \rightarrow \lambda \quad \forall (x_n) \text{ s. in } A \setminus \alpha, x_n \rightarrow \alpha$$

Teorema 2.4 (TLM Limite delle funzioni monotone). *Sia $x_0 \in \mathbb{R}^M$, $f \nearrow$*

$$\text{Se } x_0 \in D(A_{x_0}^-) \implies f(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_0^-]{} \sup_{A_{x_0}^-} f$$

$$\text{Se } x_0 \in D(A_{x_0}^+) \implies f(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_0^+]{} \inf_{A_{x_0}^+} f$$

$$\text{Se } +\infty \in D(A) \implies f(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} \sup_A f$$

$$\text{Se } -\infty \in D(A) \implies f(x) \xrightarrow[x \rightarrow -\infty]{} \inf_A f$$

dove $A_{x_0}^- := A \cap]-\infty, x_0[$, $A_{x_0}^+ := A \cap]x_0, +\infty[$. Un risultato analogo vale per $f \searrow$

3 Continuitá

Teorema 3.1 (CSC Caratterizzazione sequenziale della continuitá). *Sia $x_0 \in A$. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^M$, $x_0 \in A$.*

$$f \text{ \'e continua in } x_0 \iff f(x_n) \rightarrow f(x_0) \quad \forall x_n \rightarrow x_0$$

Teorema 3.2 (Bolzano). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $f \in C([a, b], \mathbb{R})$.*

$$\text{Se } f(a)f(b) \leq 0 \implies \exists x_0 \in [a, b] : f(x_0) = 0$$

Sia I un intervallo di \mathbb{R} .

Teorema 3.3 (TVI Valore intermedio). *Sia $f \in C(I, \mathbb{R})$.*

$$\begin{aligned} \text{Dato } y \in \mathbb{R} : f(a) < f(y) < f(b) \implies \exists x_0 \in I : f(x_0) = y \\ f(I) \text{ \'e un intervallo} \end{aligned}$$

Teorema 3.4. *Sia $f \in C(I, \mathbb{R})$, f 1-1, posto $J = f(I)$. Allora*

$$\begin{aligned} J \text{ \'e un intervallo, } f &\xrightarrow[su]{1-1} J \\ f^{-1} &\in C(J) \end{aligned}$$

Teorema 3.5 (Weierstrass). *Sia $A \in \mathbb{R}$ chiuso e limitato, $f \in C(A, \mathbb{R}) \implies \exists \max_A f, \exists \min_A f$*

4 Derivate

Teorema 4.1 (Fermat). *Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \overset{\circ}{A}$, $f'(x_0) \in \mathbb{R}$.*

$$\text{Se } x_0 \text{ \'e un p.to estremante locale} \implies f'(x_0) = 0$$

Teorema 4.2 (Rolle). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f \in C([a, b], \mathbb{R})$, f derivabile in $]a, b[$.*

$$\text{Se } f(a) = f(b) \implies \exists x_0 \in]a, b[: f'(x_0) = 0$$

Teorema 4.3 (TVML Valor medio di Lagrange). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f \in C([a, b], \mathbb{R})$, f derivabile in $]a, b[$.*

$$\text{Allora } \exists x_0 \in]a, b[: f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Teorema 4.4 (TM Test monotonia). *Sia I un intervallo su \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in I .*

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in I \iff f \text{ \'e costante in } I \quad (1)$$

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \iff f \nearrow \quad (2)$$

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in I \implies f \nearrow s. \quad (3)$$

$$f \nearrow s. \iff \begin{cases} f'(x) \geq 0 & \forall x \in I \\ \text{int}(\{x \in \mathbb{R} / f'(x) = 0\}) = \emptyset \end{cases} \quad (4)$$

Teorema 4.5 (Taylor con resto di Peano). *Siano I intervallo di \mathbb{R} , $x_0 \in I$, f derivabile n volte in x_0 . Allora*

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x-x_0)^k}{k!} + o((x-x_0)^n)_{x \rightarrow x_0}$$

Teorema 4.6 (Taylor con resto di Lagrange). *Siano I intervallo aperto di \mathbb{R} , $x_0 \in I$, f derivabile n volte in x_0 . Allora $\forall x \in I \quad \exists y_x \in (x_0, x)$ tale che*

$$f(x) = T_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(y_x)}{n!} (x-x_0)^n$$

Teorema 4.7 (TH De l'Hôpital). *Siano I intervallo di \mathbb{R} , $x_0 \in D(I)$, $f, g : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili in $I \setminus \{x_0\}$ con $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\}$. $f(x), g(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} 0$ o $|g(x)| \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} +\infty$. Allora*

$$\text{se } \frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} \lambda \in \mathbb{R} \implies \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} \lambda$$

Teorema 4.8. *Sia I intervallo non banale di \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in I . Allora f \'e convessa $\iff f' \nearrow$*

Teorema 4.9. *Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile due volte in I . Allora f \'e convessa $\iff f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$*

Teorema 4.10. *Sia $f \in C^{n+1}(I, \mathbb{R})$, $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ con $f^{(k)}(x_0) = 0$ per $k \leq n$ e $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$. Allora*

x_0 \'e un punto di massimo locale forte di f se $(n+1)$ \'e pari e $f^{(n+1)}(x_0) < 0$

x_0 \'e un punto di minimo locale forte di f se $(n+1)$ \'e pari e $f^{(n+1)}(x_0) > 0$

x_0 non \'e un punto estremante se $(n+1)$ \'e dispari

5 Integrali

Teorema 5.1. *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e $c \in]a, b[$.*

$$\text{Se } f \in C([a, b], \mathbb{R}) \implies f \in R_{[a, b]}$$

$$\text{Se } f \text{ \'e monotona} \implies f \in R_{[a, b]}$$

$$\{x \in [a, b] / f \text{ non \'e continua in } x\} \text{ \'e finito} \implies f \in R_{[a, b]}$$

$$f \in R_{[a, c]}, f \in R_{[c, b]} \iff f \in R_{[a, b]}$$

Teorema 5.2. *Siano $f, g \in R_{[a, b]}$. Allora*

$$\text{Se } f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b] \implies \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \left| \int_a^b |f(x)| dx \right|$$

Teorema 5.3 (1TFC Primo teorema fondamentale del calcolo). *Siano $f \in R_{[a,b]}$, $F(X) = \int_a^x f(t)dt : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Allora*

$$F \in C([a, b], \mathbb{R}) \\ \text{Se } f \text{ è continua in } x_0 \implies f(x_0) = F'(x_0)$$

Teorema 5.4 (2TFC Secondo teorema fondamentale del calcolo). *SIano $f \in R_{[a,b]}$ e Φ una primitiva di f . Allora*

$$\int_a^b f(t)dt = [\Phi(t)]_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Teorema 5.5 (Taylor con resto integrale). *Sia $f \in C^{n+1}([a, b], \mathbb{R})$, $x_0 \in [a, b]$. Allora*

$$f(x) = T_n(x) + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

6 Integrali generalizzati

Siano $a \in \mathbb{R}$, $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < \beta$, $f \in C([a, \beta[, \mathbb{R})$.

Teorema 6.1 (C \exists Criterio di esistenza).

$$\text{Se } f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, \beta[\implies \exists \int_a^\beta f(x)dx \in [0, +\infty]$$

Teorema 6.2 (CC Criterio del confronto). *Sia $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, \beta[$.*

$$\text{Se } f(x) = \mathcal{O}_{x \rightarrow \beta^-}(g(x)), \int_a^\beta g \in \mathbb{R} \implies \int_a^\beta f \in \mathbb{R}$$

Teorema 6.3 (CCA Criterio di convergenza assoluta).

$$\text{Se } \int_a^\beta |f| \in \mathbb{R} \implies \exists \int_a^\beta f \in \mathbb{R}$$

Teorema 6.4 (CFO Criterio delle funzioni oscillanti). *Sia $f \in C([a, \beta[, \mathbb{R})$: f abbia una primitiva limitata in $[a, \beta[$, $g \in C^1([a, \beta[, \mathbb{R})$: $g \searrow_{x \rightarrow \beta^-} 0$. Allora*

$$\exists \int_a^\beta fg \in \mathbb{R}$$

7 Serie

Teorema 7.1 (CZ Criterio zero). *Sia a_n successione in \mathbb{R} .*

$$\text{Se } \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \text{ conv.} \implies a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Teorema 7.2 (C \exists Criterio di esistenza). *Sia a_n successione in \mathbb{R} , $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Allora*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \text{ conv.}$$

Teorema 7.3 (CI Criterio integrale). *Sia $f \in C([1, +\infty])$, $f \searrow$, $f \geq 0$. Allora*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f(k) \text{ conv.} \iff \int_1^{+\infty} f(x)dx \text{ conv.}$$

Teorema 7.4 (CAD Criterio di Abel-Dirichlet). *Siano a_n successione in \mathbb{R} , b_n successione in \mathbb{C} . Allora*

$$\text{se } a_n \searrow 0, \sum_{k=1}^N b_k \text{ \'e limitata} \implies \sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k \text{ conv.}$$

Teorema 7.5 (CL Criterio di Leibnitz). *Siano a_n successione in \mathbb{R} , $a_n \searrow 0$. Allora*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k a_k \text{ conv.}$$