

# Definizioni e teoremi di Analisi 2

Nicoló Montalti

## 1 Spazi metrici

- Definizione di spazi metrici
- Metriche  $\delta, d_1, d_2, d_\infty$  in  $\mathbb{R}^n$
- Metriche  $d_1, d_2, d_\infty$  in  $C([0, 1])$
- Disuguaglianza di Minkowski
- Def intorno circolare aperto
- Def insieme aperto, chiuso, compatto e connesso
- Def topologia
- Unione e intersezione di aperti e chiusi
- Funzione distanza, diametro di un insieme
- Def intorno di un punto
- Chiusura, punti aderenti, interno, punti interni e frontiera
- Teorema di Bolzano-Weierstrass
- Def insieme denso

## 2 Spazi metrici completi

- Def successione e convergenza
- Unicitá del limite
- Def successione si Cauchy
- Def spazio metrico completo
- Completezza dei sottospazi  $(B([a, b], \mathbb{R}), D_\infty)$  e  $(C([a, b], \mathbb{R}), d_\infty)$  completi
- Densitá di  $C([a, b], \mathbb{R}), d_1$  in  $L^1$  e  $C([a, b], \mathbb{R}), d_2$  in  $L^2$
- Principio di Cantor ("scolapasta")
- Def isometria e completamento
- Def funzione continua (def equivalenti) e uniformemente continua
- Def funzione lipschitziana
- Def contrazione e teorema delle contrazioni

## 3 Spazi di Banach e di Hilbert

### 3.1 Spazi di Banach

- Def spazio vettoriale e spazio normato
- Metrica indotta da una norma
- Def insieme limitato
- Def spazio di Banach

### 3.2 Spazi di Hilbert

- Def prodotto interno reale e complesso
- Spazi  $l_2(\mathbb{R}), C([a, b], \mathbb{R}), L^2$
- Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz
- Regola del parallelogramma
- Def spazio di Hilbert
- Def ortogonalitá e teorema di Pitagora
- Spazio ortogonale e teorema delle proiezioni

## 4 Differenziabilitá

- Def funzione differenziabile
- Continuitá e derivabilitá di una funzione differenziabile
- Derivata direzionale
- Def differenziabilitá due volte
- Teorema di Schwarz
- Def differenziabilitá per una funzione a valori vettoriali
- Jacobiana della composta e dell'inversa
- ... massimi e minimi ...

## 5 Varietà

- Def varietà regolare
- Def spazio tangente e spazio normale
- Teorema di Dini
- Def estremanti condizionati e punti critici
- Teorema di Fermat
- Moltiplicatori di Lagrange, condizione necessaria e sufficiente

## 6 Misura e integrazione

### 6.1 Misura di Peano-Jordan

- Def intervallo semiaperto superiormente
- Def plurintervallo e sua Misura
- Proprietà di  $\mu_n$
- ...

### 6.2 Integrale secondo Riemann

- Def integrale di una funzione non negativa
- Def integrale di una funzione di segno variabile
- Proprietà dell'integrale su insiemi di misura nulla
- Approssimazione con valore assoluto
- Misura del grafico e integrabilità
- Teorema della media integrale
- Linearità, monotonia e addittività
- Sommabilità per funzioni continue e limitate
- Sommabilità di funzioni  $f : A \setminus x_0 \rightarrow \mathbb{R}$
- Def dominio misurabile
- Teoremi di riduzione: integrali doppi su intervalli e domini normali
- Teorema di Cavalieri
- Teorema del cambiamento di variabile

## 7 Curve e integrali curvilinei

- Def curva in forma parametrica
- Def curve e parametrizzazioni regolari, semplici, aperte e chiuse
- Def omemomorfismo e diffeomorfismo
- Teorema del cambiamento di parametrizzazione
- Def curva regolare a tratti
- Def punto di arresto
- Def orientamento di una curva
- Regolarità, semplicità e orientabilità
- Orientamento per cambi di parametrizzazione
- Def parametrizzazione r.a.t orientabile
- Def lunghezza di una curva e curva rettificabile
- Teorema rettificabilità di curve regolari
- Lunghezza di una curva per cambi di parametrizzazione
- Ascissa curvilinea
- Def lavoro e di campo conservativo
- Proprietà del campo potenziale
- Def campo irrotazionale e legame con conservatività
- Campi conservativi e lavoro
- Condizioni sufficienti perché un campo sia conservativo
- Forme esatte e chiuse
- Def insieme convesso, stelato e semplicemente connesso
- Lemma di Poincaré
- Teorema "della circonferenza"

## 8 Superfici e integrali di superficie

- Def aperto regolare in  $\mathbb{R}^2$
- Def superficie, supericie regolare, semplice e regolare con bordo
- Def orientamento di una superficie e cambi di parametrizzazione

- Area di una superficie
- Area di una superficie di rivoluzione
- Def flusso di un campo vettoriale e cambio di parametrizzazione
- Def orientamento canonico di un aperto regolare
- Orientamento canonico indotto da una parametrizzazione
- Def superficie regolare a tratti
- Teorema di Stokes
- Formula di Gauss-Green
- Teorema di Stokes per le forme differenziabilità
- Def aperto regolare in  $\mathbb{R}^3$
- Teorema della divergenza
- Generalizzazione dei teoremi di Stokes e della divergenza alle k-forme in  $\mathbb{R}^n$