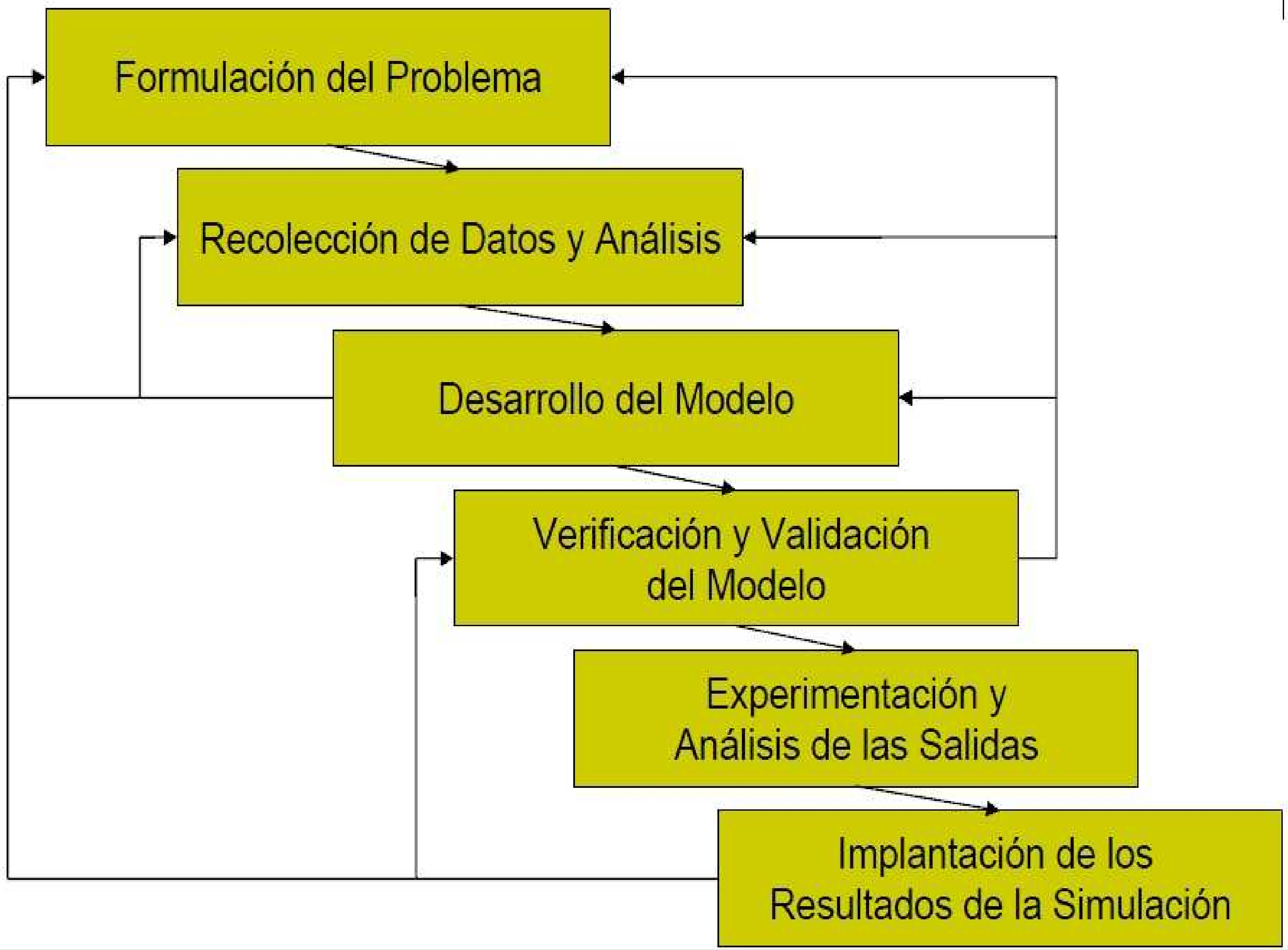
TEMA II : TÉCNICAS DE MODELADO

1. Introducción a las técnicas de modelado
2. Objetivos
3. Definir modelo matemático.
4. Distinguir los diversos tipos de sistemas y modelos, desde el
   punto de vista del modelado y la simulación.

Pasos en la Simulación



SISTEMA

"Conjunto de elementos que interactúan entre sí, con un fin común, que se aísla del universo para su estudio."

“Conjunto de elementos que interactúan entre ellos” Pierre Delattre 1971.“

La ***simulación ofrece*** *la posibilidad de conocer el futuro comportamiento del sistema*

Para ello se construyen los ***modelos, normalmente una simplificación de la realidad.***

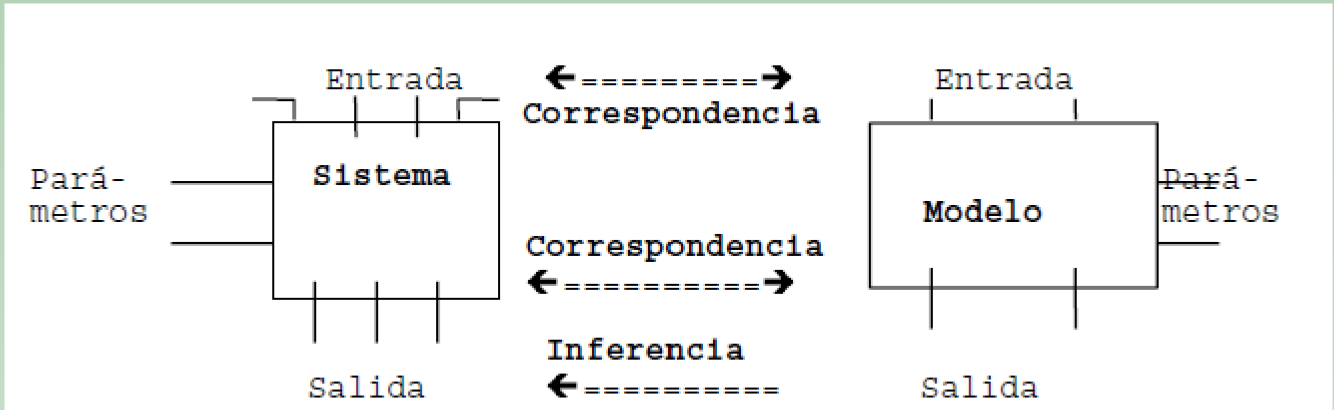
Se determina a partir de un análisis de todas las variables que intervienen en el ***sistema y de las relaciones*** *que se descubren que existen entre ellas.*

REPRESENTACIÓN DE SISTEMAS: MODELOS

Modelo puede definirse como:

- Una representación simplificada de un sistema que nos facilitará explicar, comprender, cambiar, preservar, prever y controlar el comportamiento de un sistema.
- Un substituto de un sistema físico concreto.

MODELOS DE SIMULACION



El modelo que se construye debe tener en cuenta todos los detalles que interesan en el estudio para que realmente represente al sistema real (Modelo válido). Por razones de simplicidad deben eliminarse aquellos detalles que no interesan y que lo complicarían innecesariamente.

Se requiere pues, que el modelo sea una fiel representación del sistema real.

Consiste en una descripción del sistema, junto con un conjunto de reglas que lo gobiernan.

CARACTERÍSTICAS DE LOS MODELOS PARA LA SIMULACIÓN DIGITAL

- Concisos
- Sin ambigüedades (interpretación única)
- Procesables por un ordenador

⬇

MODELOS MATEMÁTICOS SIMBÓLICOS

⬇

Son una **representación matemática de los mecanismos** que gobiernan el comportamiento de un sistema (atributos) y de su interacción con el entorno, permitiendo el estudio mediante un ordenador de la conducta de dicho sistema

CONSIDERACIONES SOBRE LOS MODELOS MATEMÁTICOS

El tipo de formalización matemática depende de las características intrínsecas de las dinámicas de interés a representar.

Representación parcial de la realidad y válidos para el objetivo de diseño. El modelo está siempre relacionado con el par sistema-experimento.

Ningún modelo de un sistema es válido para todos los posibles experimentos salvo el propio sistema o una copia idéntica del mismo.

Así cuando se escucha a alguien decir "el modelo de ese sistema no es válido" no podemos saber de que están hablando, ya que un modelo del sistema puede ser válido para un experimento y no serlo para otro.

CONSIDERACIONES SOBRE LOS MODELOS MATEMÁTICOS

Deben cumplir el principio de *parsimonia:*

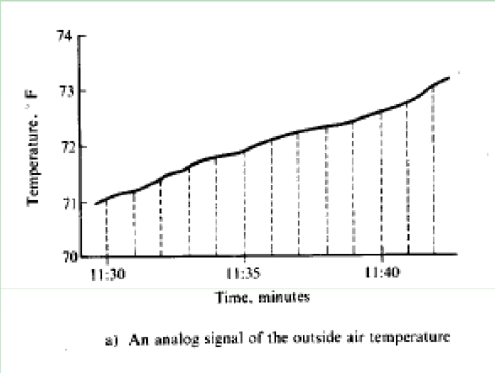
– Los modelos simples son preferibles a los complicados.

– El modelo que se utilice debe requerir el menor número posible de parámetros que representen adecuadamente el patrón de los datos.

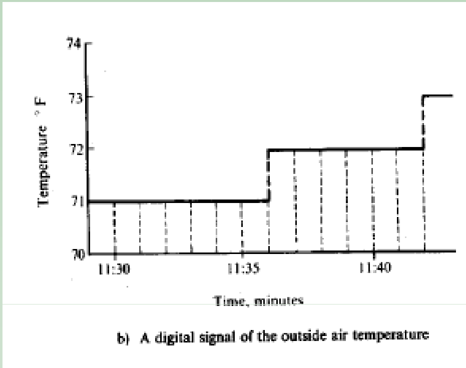
CLASIFICACIÓN DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS

Según tipos de variables dependientes o independiente (tiempo)

- Rango de valores de las variables independientes: continuas o discretas

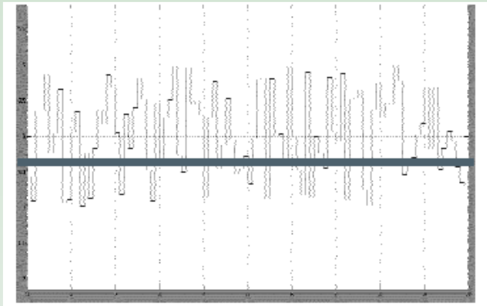


a) An analog signal of the outside air temperature



b) A digital signal of the outside air temperature

- Actualización de la variable dependiente en el tiempo
  - De un modo continuo
  - De un modo discreto
- En instantes predefinidos
- Cuando sucede un evento



CLASIFICACIÓN DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS

– Deterministas o estocásticos:

Se denomina **estocástico** a aquel sistema que funciona, sobre todo, por el azar.. Las leyes conocidas de causa-efecto no explican cómo actúa el sistema (y de modo reducido, el fenómeno) en función de probabilidades.

Un **algoritmo probabilista** (o probabilístico) es un algoritmo que basa su resultado en la toma de algunas decisiones al azar, de tal forma que, en promedio, obtiene una buena solución al problema planteado para cualquier distribución de los datos de entrada.

MODELOS ESTOCASTICOS FRENTE A DETERMINISTAS

Se puede optar por la elección aleatoria si se tiene un problema cuya elección óptima es demasiado costosa frente a la decisión aleatoria. Un algoritmo probabilista puede comportarse de distinta forma aplicando la misma entrada.

A un algoritmo determinista nunca se le permite que no termine: hacer una división por 0, entrar en un bucle infinito, etc.

Si existe más de una solución para unos datos dados, un algoritmo determinista siempre encuentra la misma solución (a no ser que se programe para encontrar varias o todas).

Un algoritmo probabilista puede encontrar soluciones diferentes ejecutándose varias veces con los mismos datos.

A un algoritmo determinista no se le permite que calcule una solución incorrecta para ningún dato.

Un algoritmo probabilista puede equivocarse siempre que esto ocurra con una probabilidad pequeña para cada dato de entrada.

Repitiendo la ejecución un número suficiente de veces para el mismo dato, puede aumentarse tanto como se quiera el grado de confianza en obtener la solución correcta.

El análisis de la eficiencia de un algoritmo determinista es, en determinadas ocasiones, difícil.

El análisis de los algoritmos probabilistas es, a menudo, muy difícil.

CLASIFICACIÓN DE ALGORITMOS PROBABILISTAS

- **Numéricos**: Solución aproximada a problemas numéricos para los que es imposible dar una respuesta exacta. Su precisión es mayor cuanto más tiempo se le dedique al algoritmo.
- **Monte Carlo**: Dan una respuesta concreta pero ésta no tiene por qué ser correcta.
- **Las Vegas**: Su respuesta es siempre correcta pero puede no encontrarla.
- **Sherwood**: Dan siempre respuesta y ésta es correcta

Algoritmos numéricos

La solución obtenida es siempre aproximada pero su precisión esperada mejora aumentando el tiempo de ejecución. Normalmente, el error es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del esfuerzo invertido en el cálculo.

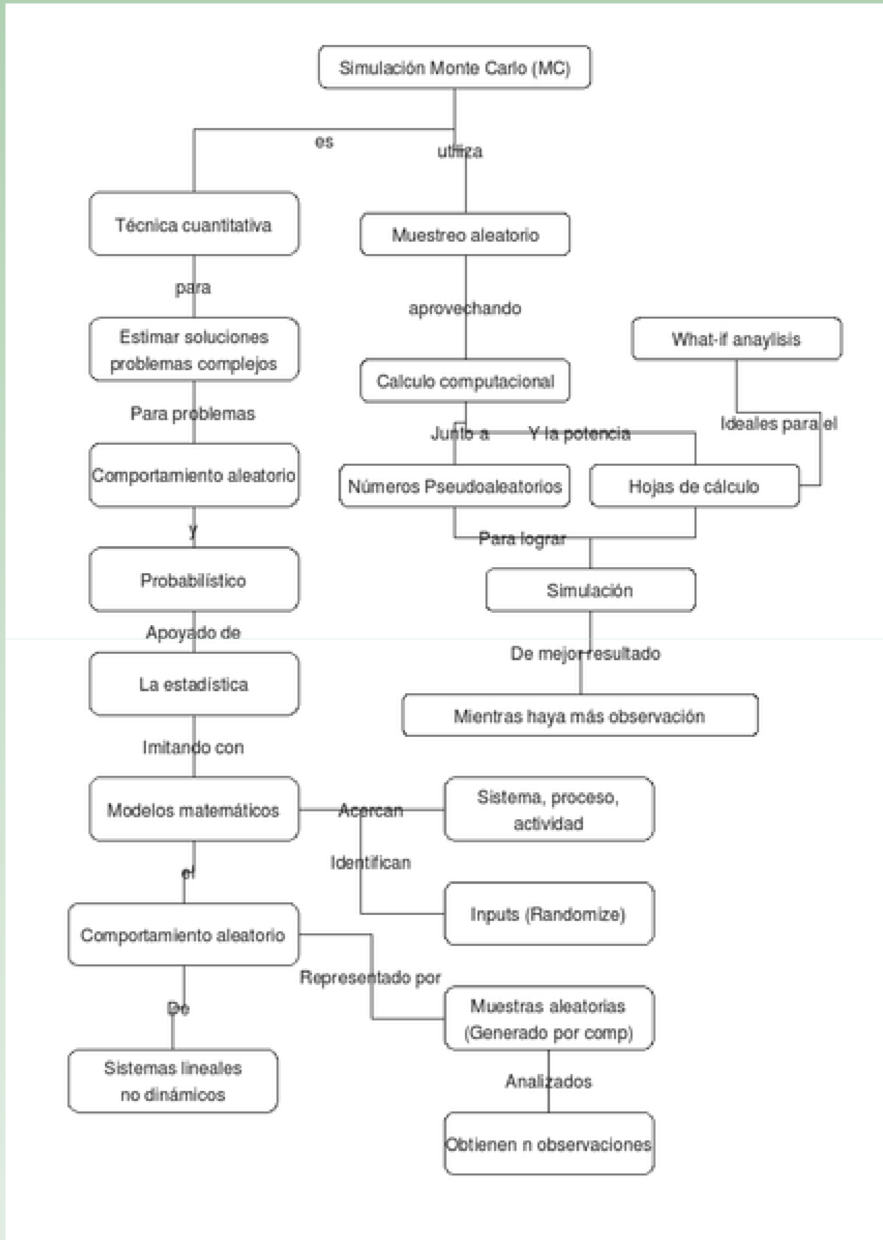
Algoritmos de Las Vegas

- A veces no dan la respuesta
- Se emplean para resolver problemas para los que no se conoce ningún algoritmo determinista eficiente.
- Se corre el riesgo de tomar decisiones que impidan llegar a la solución.
- Permiten, a veces una eficiencia mayor para todos los ejemplares. La esperanza matemática del tiempo debe ser buena para todo ejemplar y la probabilidad de un tiempo excesivo despreciable.
- Se puede repetir el algoritmo hasta obtener una solución. La probabilidad de éxito es mayor cuanto de más tiempo se dispone

El método de Montecarlo es un método no determinístico o estadístico numérico usado para aproximar expresiones matemáticas complejas y costosas de evaluar con exactitud. El método se llamó así en referencia al Casino de Montecarlo (Principado de Mónaco) por ser "la capital del juego de azar", al ser la ruleta un generador simple de números aleatorios. El nombre y el desarrollo sistemático de los métodos de Montecarlo datan aproximadamente de 1944

El uso de los métodos de Montecarlo como herramienta de investigación, proviene del trabajo realizado en el desarrollo de la bomba atómica durante la segunda guerra mundial en el Laboratorio Nacional de Los Álamos en EE.UU. Este trabajo conllevaba la simulación de problemas probabilísticos de hidrodinámica concernientes a la difusión de neutrones en el material de fisión.

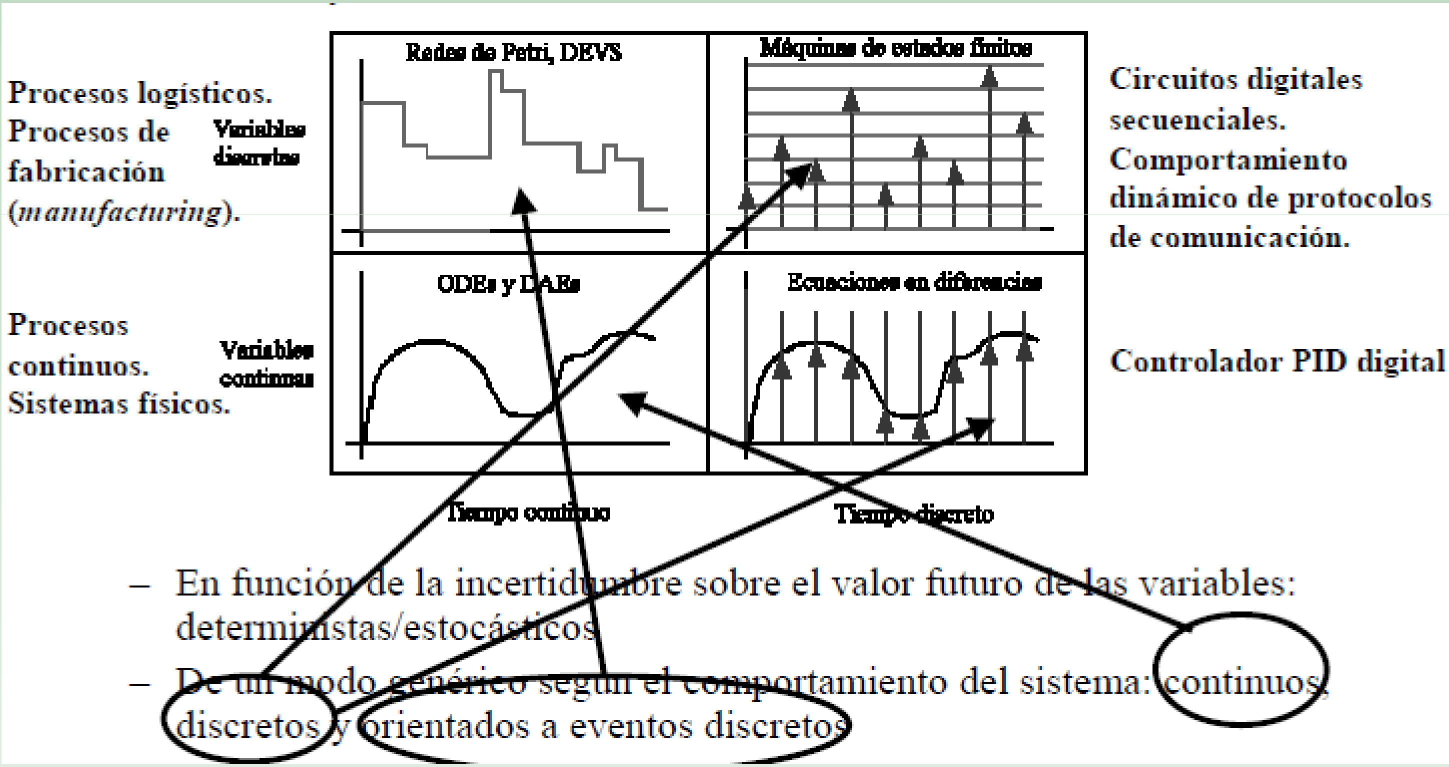
El método de Montecarlo proporciona soluciones aproximadas a una gran variedad de problemas matemáticos posibilitando la realización de experimentos con muestreos de números pseudoaleatorios en una computadora. El método es aplicable a cualquier tipo de problema, ya sea estocástico o determinista. A diferencia de los métodos numéricos que se basan en evaluaciones en N puntos en un espacio M-dimensional para producir una solución aproximada, el método de Montecarlo tiene un error absoluto de la estimación que decrece con el número de iteraciones.


Simulación Monte Carlo (MC)
es
utiliza
Técnica cuantitativa
Muestreo aleatorio
para
aprovechando
Estimar soluciones problemas complejos
What-if anaylisis
Calculo computacional
Para problemas
Junto a
Y la potencia
Ideales para el
Comportamiento aleatorio
Números Pseudoaleatorios
Hojas de cálculo
y
Para lograr
Probabilístico
Simulación
Apoyado de
De mejor resultado
La estadística
Mientras haya más observación
Imitando con
Modelos matemáticos
Acercan
Sistema, proceso, actividad
el
Identifican
Inputs (Randomize)
Comportamiento aleatorio
Representado por
Muestras aleatorias (Generado por comp)
De
Sistemas lineales no dinámicos
Analizados
Obtienen n observaciones

Taxonomía de sistemas determinista

– Según el rango de la base de tiempos: tiempo continuo/discreto

– Según los valores de las variables dependientes: variables continuas, discretas y mixtos



Taxonomía de modelos según el tipo de Sistema

Sistemas de tiempo continuo y variables continuas

- Ecuaciones diferenciales y algebraicas

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{m}(F(t) - k \cdot x(t) - a \cdot v(t))$$
$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t)$$

- Eventos en el tiempo y el estado

Sistemas de tiempo discreto (periódico) y variables continuas

- Ecuaciones en diferencias

$$v(t+\Delta t) = F(t) - k \cdot x(t-\Delta t) + b \cdot (v(t) - 2 \cdot v(t-\Delta t))$$

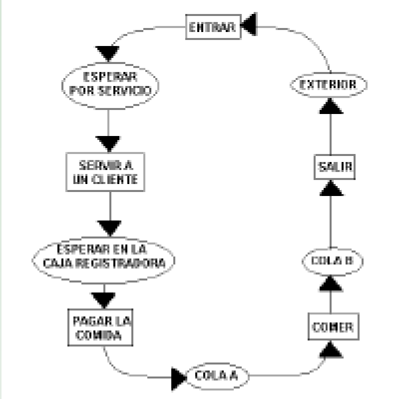
- **Sistemas de tiempo discreto (periódico) y variables discretas**

- Máquinas de estados finitos

Sistemas de tiempo discreto (aperiódico) y variables discretas

Sistemas orientados a eventos discretos

- Redes de Petri, ACD, DEVS, modelos de colas .



MODELOS MATEMATICOS

Un modelo matemático se define como una descripción desde el punto de vista de las matemáticas de un hecho o fenómeno del mundo real.

El objetivo del modelo matemático es entender ampliamente el fenómeno y tal vez predecir su comportamiento en el futuro.

Hay una gran cantidad de funciones que representan relaciones observadas en el mundo real

1.- Polinomios

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

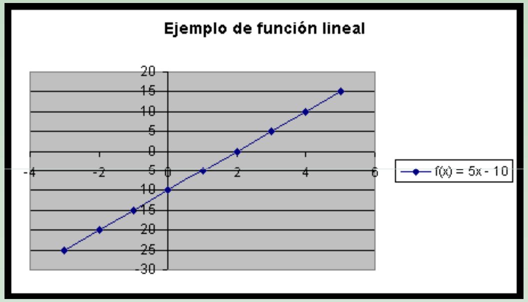
n representa un entero negativo y los números a_0, a_1, a_2,….. a_n, son constantes llamadas coeficientes del polinomio.

El dominio de todos los polinomios son todos los números reales $(-\infty, \infty)$.

MODELOS MATEMATICOS

Modelos Lineales

Se dice que una función es lineal cuando su gráfica es una línea recta; y por consecuencia tiene la forma:

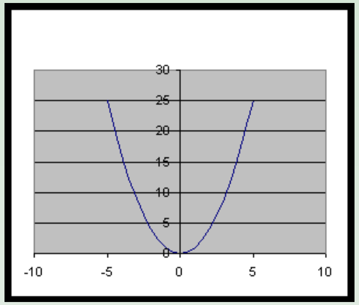


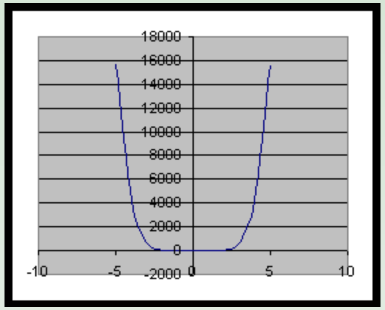
2. Funciones potencia

Una función es llamada potencia, cuando tiene la forma: $f(x) = x^a$, donde a es constante.

Funciones de exponente par

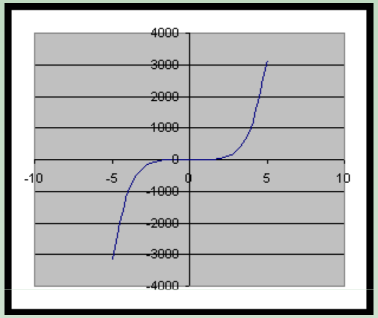
x^2 y x^6

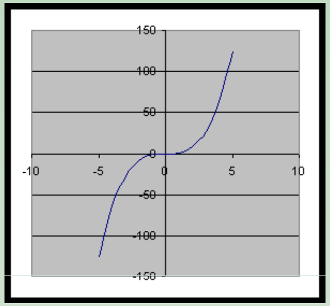




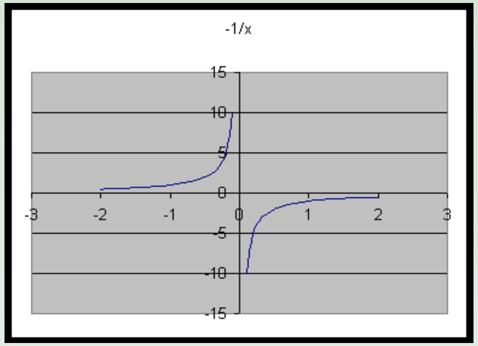
MODELOS MATEMATICOS

Funciones de exponente par x^3 y x^5

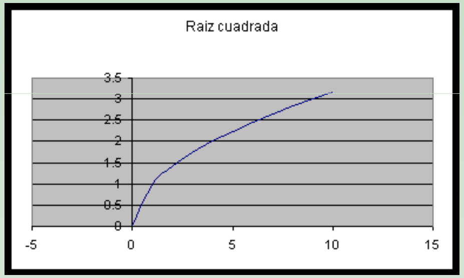


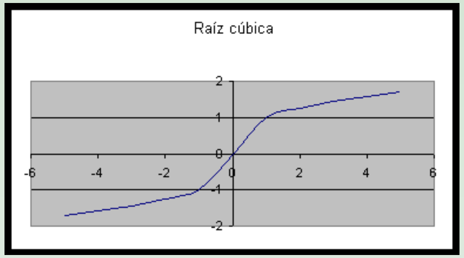


2.3, a= -1 Éste tipo de función es llamada función recíproca, y su forma es $f(x) = x^{-1}$ o $f(x) = -1/x$



2.2. Función raíz
a= 1/n, n es un entero positivo





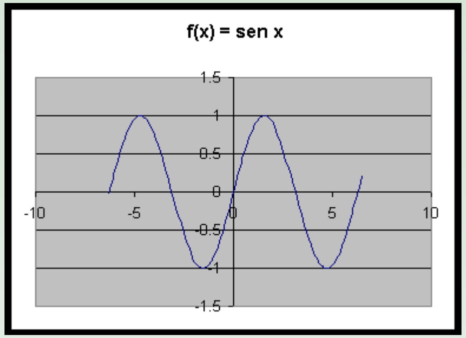
MODELOS MATEMATICOS

Funciones racionales

Una función es llamada racional cuando es una razón o división de dos polinomios: $f(x) = P(x) / Q(x)$, lo constituyen todos los valores que no hagan a $Q(x) = 0$

Funciones trigonométricas

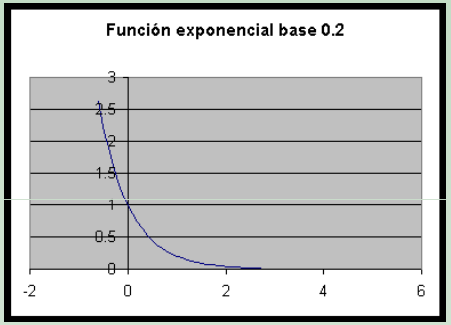
En el caso de éstas funciones, es conveniente utilizar la medida de radianes; es importante mencionar que cada función tiene una gráfica específica. En el caso específico del seno y coseno, su dominio es $(-\infty,\infty)$ y su imagen $[-1, 1]$



MODELOS MATEMATICOS

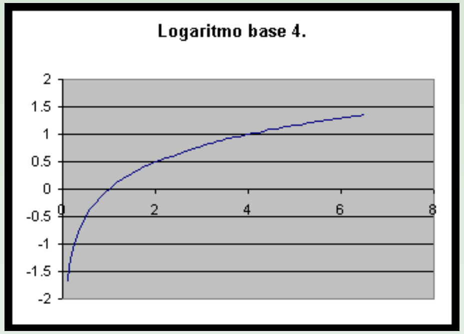
Funciones exponenciales

Se les llama funciones exponenciales a aquellas que tienen la forma $f(x) = a^x$, donde la base a es una constante positiva. Su dominio es $(-\infty,\infty)$ y su imagen $(0, \infty)$



Funciones logaritmos

Son funciones que tienen la forma $f(x) = \log_a x$, donde la base a es una constante positiva; es importante mencionar que son las funciones inversas a las exponenciales; por lo tanto su dominio es $(0, \infty)$ y su imagen $(-\infty, \infty)$.



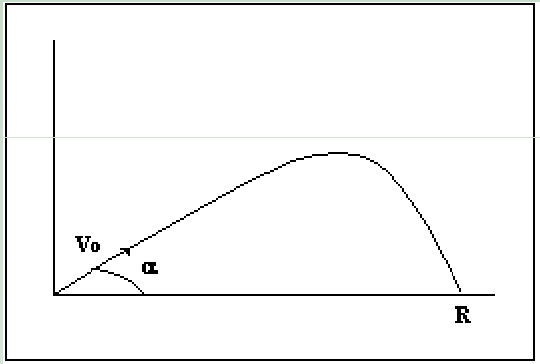
Funciones trascendentes

En realidad esta clasificación engloba a todas aquellas funciones que no son algebraicas (esto es, las que involucran adición, sustracción, división y multiplicación de variables).

Las funciones trascendentes son las trigonométricas, logarítmicas, exponenciales, y trigonométricas inversas, entre otras.

EJEMPLO PRACTICO DE MODELO MATEMATICO TRASCENDENTE

Un proyectil que se lanza con un tiro parabólico pero que debido a la fuerza de resistencia del aire, la trayectoria se desvía, la velocidad es inferior a 24 m/s



Las ecuaciones que definen el

imiento son:

$$\sum Fx \Rightarrow m.\ddot{x} = -k.m.\dot{x}$$

$$\sum Fy \Rightarrow m.\ddot{y} = -k.m.\dot{y} - m.g$$

Las soluciones son:

$$x = \frac{V_{ox}}{k}.\left(1 - e^{-k.T}\right)$$

$$y = -\frac{g.t}{k} + \frac{k.V_{oy} + g}{k^2}.\left(1 - e^{-k.T}\right)$$

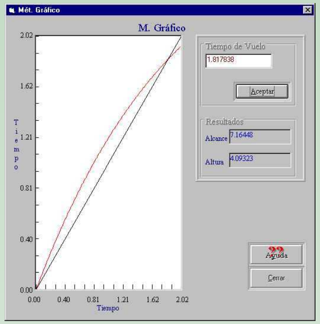
T: tiempo de vuelo

$$T = \frac{k.V_{oy} + g}{g.k}.\left(1 - e^{-k.T}\right)$$

SOLUCIONES AL MODELO:

1º la ecuación del tiempo de vuelo se desarrolla en polinomio, se aproxima el tiempo de vuelo a valores próximos a cero y se obtiene soluciones analíticas que sólo son válidas para valores de K inferiores a 0,01

2º Método gráfico:

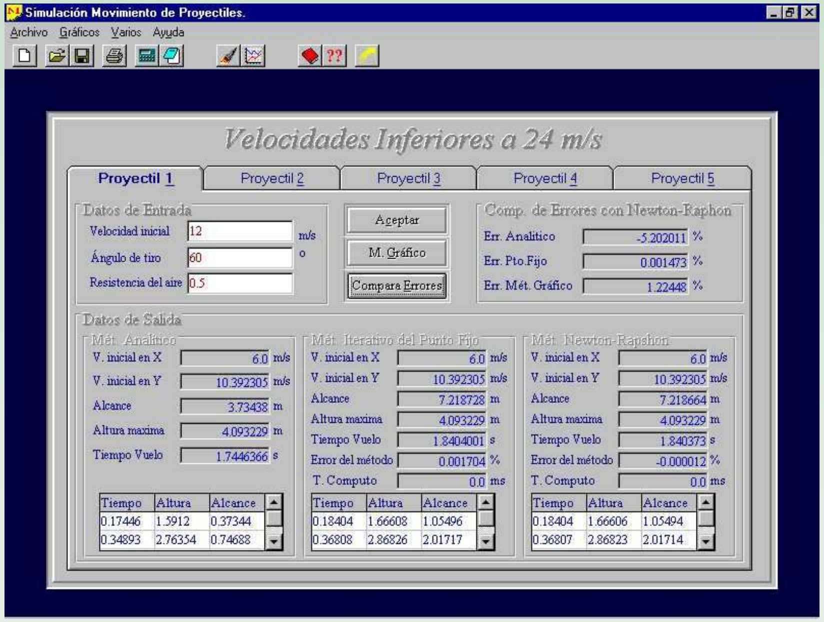


$$1^{o}\; T = y$$

$$2^{o}\; y = \frac{k.V_{oy} + g}{g.k}.\left(1 - e^{-k.T}\right)$$

Se transforma la ecuación trascendente en sistema de ecuaciones y se resuelve gráficamente el T

3º Método numérico : Iterativo del punto fijo para la resolución de la ecuación del tiempo de vuelo.



PROCESO DE CONSTRUCCIÓN DE MODELOS

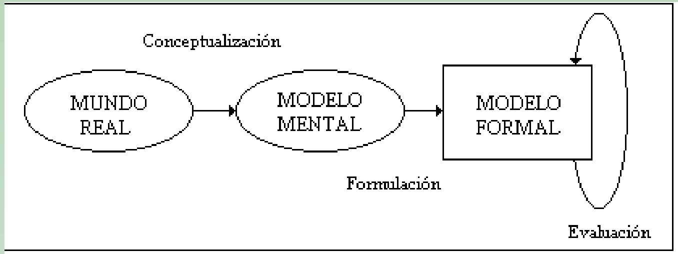
Hay dos puntos de vista a la hora de establecer un modelo matemático de un sistema, y son:

Conductista o heurístico: La construcción del modelo se realiza a partir de procesamiento de datos históricos de la evolución del sistema. Se trata de ajustar un modelo previamente elaborado a los datos disponibles. No se pretende establecer la estructura interna del sistema, sino que se supone una estructura interna, a priori, que reproduzca el comportamiento observado del sistema. Este enfoque es el seguido en econometría.

Estructuralista: La construcción del modelo se realiza siguiendo un análisis cuidadoso y detenido de los distintos elementos que intervienen en el sistema observado. De aquí se extrae la lógica interna del modelo que conduce a la obtención de la estructura, realizándose posteriormente, un ajuste de los parámetros libres del modelo con los datos históricos

En el proceso de construcción de modelos hay que reseñar que el proceso de selección de variables y establecimiento de relaciones entre ellas, está presidido en gran parte por la experiencia, intuición, inspiración, incluso la suerte.

FASES DE CONSTRUCCION



La <u>Fase de Conceptualización</u> consiste en la obtención de una compresión mental de un cierto fenómeno del mundo:

- Obtención de información a través de la opinión de expertos y la literatura al respecto.
- Definición de aspectos del problema a resolver.
- Particularización del comportamiento dinámico del sistema mediante la estructura más simple que lo genere..
- Identificación de elementos del sistema, lo que llevará a establecer los límites del sistema.

La <u>Fase de Formulación</u> trata de representar los elementos manejados en la fase anterior por medio de un lenguaje formal, procediéndose en la secuencia siguiente:

- Establecimiento de diagramas formales.
- Cálculo de ecuaciones dinámicas del modelo.
- Implementación en computador utilizando un lenguaje apropiado que procese el conjunto de ecuaciones dinámicas.

La **<u>Fase de Evaluación</u>** consiste en el análisis del modelo así como su sometimiento a criterios de aceptabilidad, procediéndose según la secuencia siguiente:

Ensayos mediante simulación de las hipótesis sobre las que se asienta el modelo y su consistencia: Verificación y Validación.

Análisis de sensibilidad para estudiar la dependencia de las conclusiones extraídas del modelo con las variaciones de los parámetros que aparecen en el mismo.

Se ha de utilizar un método que nos permita averigua cuan parecido es nuestro modelo a la realidad.

El criterio de aceptabilidad empleado no va únicamente a ser el mero ajuste estadístico de datos. Por ello, se utilizará un criterio distinto, llamado "evaluación generalizada" que tendrá en cuenta no sólo las discrepancias predicción-observación, sino todos los aspectos cuantitativos y cualitativos del modelo. Estos aspectos los aportarán los especialistas familiarizados con el sistema (tendencias gráficas, etc...)

Para la evaluación de la calidad y la aplicabilidad de los modelos, se utilizan distintos indicadores estadísticos.

SUMA RESIDUAL CUADRÁTICA COMPUESTA (CRSS), utilizada para cuantificar la calidad de las correlaciones predichas en comparación con las mediciones experimentales a partir de la expresión:

$$CRSS = \sum_{i=1}^{N} \left(f_{rel_i}^{sim} - f_{rel_i}^{\exp} \right)^2$$

donde $f_{rel_i}^{sim}$ $f_{rel_i}^{\exp}$ representan, respectivamente, los valores calculados y medidos de la frecuencia relativa y N es el número de intervalos de clase considerados.

COEFICIENTE DE CORRELACIÓN (R) es una medida de la relación lineal entre los valores calculados por el modelo respectivo y los valores medidos

Estos parámetros únicamente nos permiten conocer la magnitud del error cometido al aceptar como válido un determinado modelo matemático. Existen, por otra parte, unas pruebas estadísticas que calculan la probabilidad de cometer error al rechazar el modelo cuando éste es correcto. Son las denominadas **pruebas de hipótesis** que se emplean para decidir entre dos hipótesis que afectan a una población, a partir de una medida del error cometido al optar por una de estas dos hipótesis.

ETAPAS EN LA CONSTRUCCIÓN DE MODELOS

Etapa Inicial, comprende una clara y precisa definición del comportamiento dinámico del sistema:

Trazado de gráficos llamado modo de referencia, que representen el comportamiento temporal de las principales magnitudes de interés. El modo de referencia sirve como una imagen aproximada de las gráficas que se obtengan del modelo inicial (fase de conceptualización).

Identificación del conjunto de procesos fundamentales que se consideren suficientes para reproducir el modo de referencia (fase de conceptualización).

ETAPAS EN LA CONSTRUCCIÓN DE MODELOS

Etapa Inicial,

Búsqueda del mecanismo básico o conjunto más pequeño de procesos considerados suficientes para generar el modo de referencia (fase de conceptualización): Submodelos.

Establecimiento de los diagramas del modelo y las ecuaciones dinámicas del modelo a partir del mecanismo básico (fase de formulación).

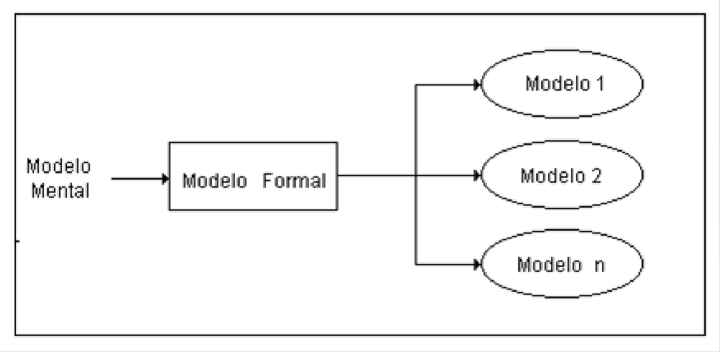
Realización de una pasada del modelo computerizado obtenido a partir de las ecuaciones y comparación de los resultados gráficos con el modo de referencia (fase de evaluación).

ETAPAS EN LA CONSTRUCCIÓN DE MODELOS

Etapa Perfeccionamiento,

Una serie de reelaboraciones del modelo obtenido en la etapa inicial con el fin de perfeccionarlo.

Las sucesivas etapas consistirán en una eliminación progresiva de las hipótesis más simplificadoras de manera que el modelo se aproxime cada vez más simplificadoras de manera que el modelo se aproxime cada vez más a la realidad



DIFICULTADES EN LA CONSTRUCCIÓN DE UN MODELO

- Para la construcción con éxito de un modelo es necesaria la descripción explícita del comportamiento dinámico formada por el modo de referencia, las hipótesis acerca de las causas y los mecanismos básicos.
- Las hipótesis dinámicas se obtienen a través de una exploración combinada del comportamiento histórico del sistema con estructuras simples de comportamiento conocido.
- Los límites del sistema se deben elegir lo suficientemente amplios para acoger los procesos que generan el comportamiento dinámico.

- El objetivo del modelo no es predecir, sino ensayar las hipótesis dinámicas
- El modelo inicial debe contener únicamente los mecanismos básicos que generen el modo de referencia.
- El modelo debe mantenerse transparente a través de todo el proceso modelado. Esto conduce a que se incluyan sólo las relaciones estrictamente necesarias y que sean también significativas.
- Para reducir la complejidad del modelo debe procederse a restringir el número de detalles

VALIDACION DEL MODELO

Consiste en comprobar si el modelo conceptual de simulación es una adecuada representación del sistema que se está estudiando. Debe llevarse a cabo a lo largo de todo el estudio de simulación.

ETAPA 2: CONTRASTAR EMPIRICAMENTE LAS HIPOTESIS DEL MODELO

- Estudiar si los datos de entrada se ajustan al modelo propuesto.

- Realizar análisis de sensibilidad para estudiar cuanto cambian los resultados de la simulación al cambiar los parámetros de entrada o las distribuciones de probabilidad. Las partes más sensibles habrá que programarlas con un mayor nivel de detalle

ETAPA 3: DETERMINAR HASTA QUE PUNTO SON REPRESENTATIVOS LOS DATOS DE SALIDA

- Si existe un sistema similar al propuesto, se comparan los datos de salida del sistema, y los del modelo de simulación. Si son similares, el modelo es válido. A continuación se modificaría el modelo para representar al sistema que nos interesa estudiar

- Si no existe un sistema similar, se intenta simplificar el modelo de forma que tenga solución analítica, y se comparan los resultados. La validez del modelo será mayor cuanto menores sean las simplificaciones para obtener la solución analítica. El test definitivo se obtiene comparando los resultados del modelo con los del sistema propuesto, si este llega a construirse. Pero si no es válido, ya no puede corregirse.