

TEMA III: METODOLOGÍA Y DESARROLLO EN LA IMPLEMENTACIÓN DE UN PROYECTO DE SIMULACION

- 1. INTRODUCCIÓN.**
- 2. CLASIFICACIÓN.**
- 3. ANÁLISIS.**
- 4. RESOLUCIÓN E IMPLEMENTACIÓN.**
- 5. EVALUACIÓN CRÍTICA DEL FUNCIONAMIENTO.**
- 6. CONTRASTE DE RESULTADOS REALES.**

1. INTRODUCCIÓN. CONCEPTOS BÁSICOS

¿Qué es un sistema?.

Un sistema puede ser definido como “una combinación de elementos o componentes interrelacionados entre sí y con el global que actúan juntos para obtener un fin.” (Natko). En este caso la palabra interrelación es el fundamento de la definición. Un sistema puede estar compuesto por uno o más subsistemas que a su vez también pueden estar divididos en otros subsistemas. Un sistema generalmente se ve afectado por los cambios ocurridos fuera de él, es decir en el entorno de sistema , por ello es necesario establecer los límites del sistema y su entorno, que dependerá de los que se quiera estudiar.

Una forma más sencilla de ver esta definición podría ser partiendo de un sencillo ejemplo. El sistema más grande es el Universo. Cada parte del universo que cortemos y de la que sepamos decir que pertenece a esa parte y que no será un sistema. Por tanto un sistema podrá ser prácticamente cualquier cosa. Un motor, una casa, un horno, etc. La clave está en poder diferenciarlo de su entorno.

Un sistema está formado por un conjunto de objetos. Para entender y analizar un sistema es necesario que todos sus objetos estén definidos. Se emplean términos tales como “entidad”, que es un objeto de interés para el sistema, y “atributo”, que es una propiedad de la entidad.

Es decir,:

- Entidad : objeto de interés del sistema
- Atributo: es una propiedad de una entidad
- Actividad: representa un periodo de tiempo de longitud específica.
- Estado del sistema: Colección de variables, relativas a los objetos sujetos a estudio, necesario para describir al sistema en cualquier momento.

- Evento: hecho que se produce en un instante determinado y que hace variar las condiciones del sistema. Endógenos: aquellos eventos que se producen en el interior del sistema, exógenos, son los que se producen en el exterior

2. CLASIFICACIÓN.

Generalmente los sistemas se clasifican en función de su estado. Definimos como estado de un sistema para un momento de tiempo al valor de un conjunto de variables que definen al sistema en dicho momento de tiempo. Según esto, el sistema podrá ser estático o dinámico.

Un sistema dinámico será aquel cuyos valores varíen con el tiempo. Esta variación puede ser cíclica o puede ser aleatoria. Esto nos dará lugar a una nueva subdivisión dentro de los sistemas dinámicos. Esta clasificación se realizará en función al tipo de variables que conforman el sistema. Según este criterio, existirán tres tipos de sistemas dinámicos. Los continuos, los discretos y los híbridos, en los que las variables pueden ser tanto continuas como discretas.

Entendemos por sistema continuo aquel cuyas variables varían de forma continua en el tiempo. Un sistema continuo podría ser un péndulo, que se va moviendo y en cada momento de tiempo tiene una posición, que será la variable fundamental del sistema.

También lo sería un objeto caliente que se enfría en una habitación, porque el calor que va perdiendo va variando en cada instante hasta que alcanza el equilibrio, momento en que el sistema pasaría a ser de dinámico a estático.

Un sistema dinámico se considerará discreto cuando las variables que le describen varían de una forma discreta sobre el tiempo. Se puede

considerar un sistema discreto la fila de un banco, tomando como variable que describe a dicha fila el número de personas que se encuentran esperando dicha fila. De este modo la variable será discreta porque varía sólo en cantidades discretas. Nunca hay fracciones de clientes, sino unidades enteras.

En general, gran parte de los sistemas asociados a fábricas son sistemas discretos, porque los productos siempre varían en unidades discretas. Por ejemplo, los paquetes que se cargan en un camión o los ladrillos que tienen que entrar en un horno, etc.

Un sistema en el que sus variables varíen unas de forma discreta y otras de forma continua se considerará un sistema híbrido. También lo será si sus variables son continuas pero se producen cambios en la causalidad del sistema. Esto es, que en determinados momentos varíen las ecuaciones que modelan el sistema. Un ejemplo sencillo sería una pelota que cae al suelo y rebota varias veces. Las ecuaciones que describen su posición son diferentes en el caso de la caída que en el del rebote hacia arriba. En un caso la fuerza de la gravedad está a favor del movimiento y en otro en contra.

Otro concepto a tener en cuenta dentro del comportamiento de los sistemas dinámicos es si se encuentra en estado transitorio o estacionario. Diremos que un sistema se encuentra en un estado estacionario cuando los cambios que se produzcan en el estado del sistema, en el tiempo, lo hagan dentro de un intervalo relativamente fijo. Por ejemplo, un avión que vuela en una dirección, a una altura y velocidad fijadas previamente, es un sistema dinámico, porque el avión se mueve, y además es estacionario. Un estado transitorio es aquel en el que se producen cambios bruscos en el estado del sistema. Por ejemplo, cuando encendemos un fluorescente. Hasta que se fija la luz tenemos un periodo en el que se producen variaciones. Durante ese tiempo, ese sistema se comporta de una forma transitoria.

3. ANÁLISIS. ESTUDIO Y DESARROLLO DEL MODELO

Este estudio se ha desarrollado ampliamente en el Tema 2. a modo de recordatorio tenemos:

Definición de Modelo.

Anteriormente, hemos mencionado que un sistema es una sección de la realidad que es el foco primario de nuestro estudio. De cara a estudiar este sistema, primero deberemos realizar una representación del sistema. A esta representación es lo que se denomina *modelo*. Dicho de otra manera, realizaremos otra abstracción del sistema que nos sea útil de cara a estudiar su comportamiento.

Clasificación de los Modelos.

Existen diversas posibilidades a la hora de generar el modelo de un sistema. En general, el modelo de un sistema va a consistir en un conjunto de ecuaciones o relaciones que nos permiten obtener los valores de salida del sistema respecto a unas variables de entrada.

Una clasificación puede ser:

- Modelos Físicos: Como su propio nombre indica, son representaciones de sistemas físicos. Son, dicho de un modo coloquial, maquetas de los sistemas reales. Aproximaciones físicas al sistema real donde se realizan experimentos de cara a estudiar el sistema. No son de nuestro interés porque en ellos no aparece el ordenador.

- Modelos Simbólicos: Representaremos nuestro modelo mediante ecuaciones simbólicas. Pueden ser matemáticos y no matemáticos. Generalmente, los matemáticos son los más utilizados por su consistencia y unicidad, así como su relativamente fácil manejo. También existen modelos no matemáticos. En los que las relaciones están expresadas de modo gráfico (diagramas de flujo) o mediante sentencias lógicas. Nosotros, nos centraremos fundamentalmente en sistemas continuos, en los modelos matemáticos.

Un ejemplo de modelo matemático podría ser la ecuación que representa el movimiento de un muelle excitado exteriormente.

$$k.v = A.\text{sen } t$$

'x' representa la posición del muelle en cada momento. Resolviendo esta ecuación diferencial conoceremos la posición del muelle en cada instante de tiempo. En este caso la solución es relativamente sencilla de calcular y no tiene mucho interés resolverla mediante una simulación porque analíticamente podemos calcular la solución de la ecuación, que será una combinación de senos y cosenos..

Proceso de Construcción de Modelos.

El proceso de construcción de un modelo se realiza siguiendo una secuencia de pasos establecida. Este proceso además no está exento de dificultades.

Hay dos puntos de vista a la hora de establecer un modelo matemático de un sistema, y son:

1. Conductista o heurístico:

La construcción del modelo se realiza a partir de procesamiento de datos históricos de la evolución del sistema. Se trata de ajustar un modelo previamente elaborado a los datos disponibles. No se pretende establecer la estructura interna del sistema, sino que se supone una estructura interna, a priori, que reproduzca el comportamiento observado del sistema. Este enfoque es el seguido en econometría.

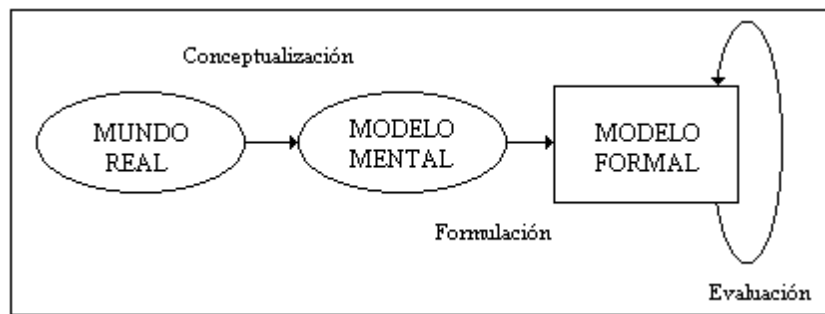
2. Estructuralista:

La construcción del modelo se realiza siguiendo un análisis cuidadoso y detenido de los distintos elementos que intervienen en el sistema observado. De aquí se extrae la lógica interna del modelo que conduce a la obtención de la estructura, realizándose posteriormente, un ajuste de los parámetros libres del modelo con los datos históricos.

Antes de entrar en el proceso de construcción de modelos hay que reseñar que el proceso de selección de variables y establecimiento de relaciones entre ellas, está presidido en gran parte por la experiencia, intuición, inspiración, incluso la suerte. Sin embargo, es posible llegar a una cierta sistematización, describiendo la construcción en tres fases:

- Fase de Conceptualización.
- Fase de Formulación.
- Fase de Evaluación.

En la siguiente figura se muestran las tres fases y se indica el carácter iterativo del proceso de construcción, en el que no se va de una forma progresiva y única de una fase a la siguiente, sino que se procede de una a otra sin un orden especial.



La Fase de Conceptualización consiste en la obtención de una comprensión mental de un cierto fenómeno del mundo real, procediéndose según las siguientes etapas:

- Obtención de información a través de la opinión de expertos y la literatura al respecto.
- Definición de aspectos del problema a resolver.
- Particularización del comportamiento dinámico del sistema mediante la estructura más simple que lo genere, basándose en el conocimiento de estructuras simples.
- Identificación de elementos del sistema, lo que llevará a establecer los límites del sistema.

La Fase de Formulación trara de representar los elementos manejados en la fase anterior por medio de un lenguaje formal, procediéndose en la secuencia siguiente:

- Establecimiento de diagramas formales.
- Cálculo de ecuaciones dinámicas del modelo.
- Implementación en computador utilizando un lenguaje apropiado que procese el conjunto de ecuaciones dinámicas.

La Fase de Evaluación consiste en el análisis del modelo así como su sometimiento a criterios de aceptabilidad, procediéndose según la secuencia siguiente:

- Ensayos mediante simulación de las hipótesis sobre las que se asienta el modelo y su consistencia: Verificación y Validación.
- Análisis de sensibilidad para estudiar la dependencia de las conclusiones extraídas del modelo con las variaciones de los parámetros que aparecen en el mismo.

El criterio de aceptabilidad empleado no va únicamente a ser el mero ajuste estadístico de datos. Por ello, se utilizará un criterio distinto, llamado “evaluación generalizada” que tendrá en cuenta no sólo las discrepancias predicción-observación, sino todos los aspectos cuantitativos y cualitativos del modelo. Estos aspectos los aportarán los especialistas familiarizados con el sistema (tendencias gráficas, etc...)

Etapas de Construcción de un Modelo.

El proceso de construcción de un modelo no es lineal, pasandose en sucesivas etapas por modelos progresivamente mejorados de acuerdo con un cierto criterio de aceptabilidad.

Sin embargo esto presupone la existencia de un modelo inicial, que tenga que ser enjuiciado y en su caso, modificado y mejorado.

Por lo tanto, el proceso de modelado consta de dos etapas, a saber:

- Etapa Inicial
- Etapa de Perfeccionamiento.

La Etapa Inicial comprende una clara y precisa definición del comportamiento dinámico del sistema. Para ello se siguen los siguientes pasos:

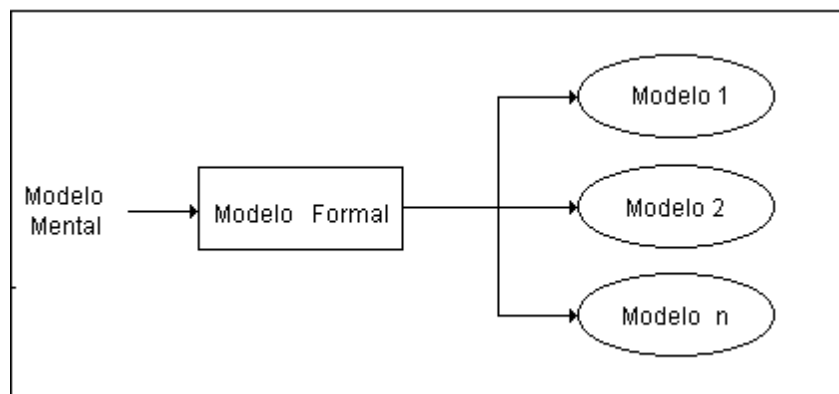
1. Trazado de gráficos llamado modo de referencia, que representen el comportamiento temporal de las principales magnitudes de interés. El modo de referencia sirve como una

imagen aproximada de las gráficas que se obtengan del modelo inicial (fase de conceptualización).

2. Identificación del conjunto de procesos fundamentales que se consideren suficientes para reproducir el modo de referencia (fase de conceptualización).
3. Búsqueda del mecanismo básico o conjunto más pequeño de procesos considerados suficientes para generar el modo de referencia (fase de conceptualización): Submodelos.
4. Establecimiento de los diagramas del modelo y las ecuaciones dinámicas del modelo a partir del mecanismo básico (fase de formulación).
5. Realización de una pasada del modelo computerizado obtenido a partir de las ecuaciones y comparación de los resultados gráficos con el modo de referencia (fase de evaluación).

La Etapa de Perfeccionamiento consiste en una serie de reelaboraciones del modelo obtenido en la etapa inicial con el fin de perfeccionarlo.

Las sucesivas etapas consistirán en una eliminación progresiva de las hipótesis más simplificadoras de manera que el modelo se aproxime cada vez más a la realidad.



Las fases de construcción del modelo serán efectuadas tanto en la etapa inicial como en la de perfeccionamiento.

Dificultades en la Construcción de un modelo.

Se proponen una serie de normas para superar los escollos que habitualmente se presentan en la construcción de un modelo. Estas normas se detallan a continuación:

1. Para la construcción con éxito de un modelo es necesaria la descripción explícita del comportamiento dinámico formada por el modo de referencia, las hipótesis acerca de las causas y los mecanismos básicos.
2. Las hipótesis dinámicas se obtienen a través de una exploración combinada del comportamiento histórico del sistema con estructuras simples de comportamiento conocido.
3. Los límites del sistema se deben elegir lo suficientemente amplios para acoger los procesos que generan el comportamiento dinámico.
4. El objetivo del modelo no es predecir, sino ensayar las hipótesis dinámicas
5. El modelo inicial debe contener únicamente los mecanismos básicos que generen el modo de referencia.
6. El modelo debe mantenerse transparente a través de todo el proceso modelado. Esto conduce a que se incluyan sólo las relaciones estrictamente necesarias y que sean también significativas.
7. Para reducir la complejidad del modelo debe procederse a restringir el número de detalles.

Clasificación de modelos.

Al ser un modelo una representación abstracta de un sistema, seguirá la clasificación atribuida a éste (visto tema anterior). No obstante, se pueden establecer criterios adicionales, resultando la siguiente clasificación:

- Analógicos: representan sólo el comportamiento del sistema real \cong Físico.
- Simbólicos: asemejan al sistema real de forma física.
- Gráficos: Pueden ser:
 - Modelos Concretos y Abstractos.
 - Modelos Abiertos y Cerrados.
 - Modelos Estáticos y Dinámicos.
 - Modelos Anticipativos y Causales.
 - Modelos Estocásticos y Deterministas.
 - Modelos Continuos, Discretos y de Eventos Discretos.
Discretos $\Rightarrow f(k); k = 0, 1, 2, \dots,$
 T (x toma valores discretos).
 - Modelos de Parámetros Distribuidos y Concentrados.
Los modelos de parámetros distribuidos son aquellos cuyo comportamiento viene descrito por *ecuaciones diferenciales en derivadas parciales* (por ejemplo, temperatura en una barra), mientras que los de parámetros concentrados vienen definidos por *ecuaciones diferenciales ordinarias* (por ejemplo, velocidad de un avión).
 - Modelos Físicos y Matemáticos: Analógicos, Gráficos y Lógico-matemático.
En el modelo físico se utilizan un conjunto de variables físicas asociadas para representar el comportamiento del sistema mientras variables y funciones matemáticas lo hacen correspondientemente en el modelo matemático.

Modelo Físico.

Los modelos Físicos se apoyan en una analogía entre el sistema bajo y otro sistema de diferente naturaleza cuyo comportamiento es fácilmente determinable. La analogía se basa en una similitud subyacente entre las fuerzas que gobiernan el comportamiento de uno y otro sistemas respectivamente. Un caso particular de analogía se da entre circuitos eléctricos y mecánicos.

Las ecuaciones diferenciales de estos sistemas son:

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + kx = kF(t)$$

para el circuito mecánico y:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = E(t)$$

para el circuito eléctrico.

la inspección de las ecuaciones refleja una serie de equivalencias descritas a continuación:

<u>DESPLAZAMIENTO</u>	x	q	CARGA
VELOCIDAD	\dot{x}	$I(\dot{q})$	CORRIENTE
FUERZA	F	E	VOLTAJE
MASA	M	L	INDUCTANCIA
CTE. AMORTIGUACIÓN	D	R	RESISTENCIA
RIGIDEZ	K	$\frac{1}{C}$	CAPACIDAD ⁻¹

Ambos son modelos análogos entre sí y se puede estudiar el comportamiento de uno de ellos con el otro. En la práctica es más simple modificar el circuito eléctrico, por tanto, más fácil de estudiar. En general, los modelos por analogía serán obtenidos en términos de componentes eléctricas, con variables físicas que son medibles, sin necesidad de resolver las ecuaciones del circuito analógico.

Modelo Matemático.

Los modelos matemáticos dan el comportamiento en forma de relaciones entre variables (ecuaciones) cuya resolución puede ser analítica o mediante simulación.

Ejemplo: Sistema de Suspensión de un Neumático.

La ecuación diferencial que describe el sistema viene dada por:

$$\ddot{x} + 2.\xi.w_n.\dot{x} + w_n^2 = w_n^2.F(t)$$

con:

$$2.\xi.w_n = \frac{D}{M} \Rightarrow w_n^2 = \frac{K}{M}$$

Siendo K, D y M, los valores de las constantes.

Resolviendo la ecuación se obtienen los valores de desplazamiento $x(t)$ ante una entrada $F.(t)$ de tipo escalón unidad aplicada en $t=0$, para diferentes valores de ' ξ '.

4. RESOLUCIÓN E IMPLEMENTACIÓN.

Tras haber estudiado con detenimiento qué es un sistema y cómo se modela, llegamos a la parte que más nos interesa: la simulación. Ésta es realmente la que usa el ordenador como herramienta principal y es la que a continuación vamos a intentar desarrollar.

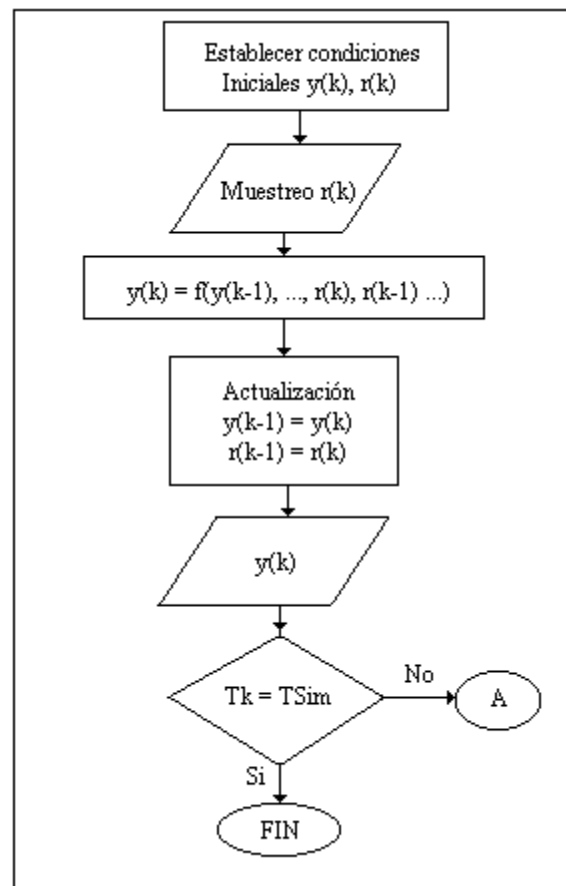
Una definición más académica de la simulación sería: "Es la técnica de construir y poner en funcionamiento el modelo de un sistema real con la intención de estudiar su comportamiento sin irrumpir en el entorno del sistema real" (Koskossidis y Brennan).

De una forma más llana la simulación será el proceso de encontrar las soluciones a las ecuaciones que modelan nuestro sistema para unos valores iniciales que nosotros fijaremos. Posteriormente, con todo ese conjunto de datos obtenidos en la simulación, realizaremos las operaciones necesarias de tratamiento de datos estadístico y gráfico, para acomodar los datos para su posterior estudio. Muchas de las herramientas de simulación incluyen potentes programas gráficos que nos muestran como salida la variación o relación entre datos, pero hay que tener en cuenta que esto es sólo una aplicación más del programa, pero no del proceso de simulación. La simulación únicamente nos dará una lista de valores para las variables que definen el estado del sistema. El uso posterior de esos datos ya no pertenece al proceso.

La simulación de un sistema discreto, que viene descrito por su ecuación, en diferencia, se realiza creando un algoritmo que resuelva iterativamente la ecuación, partiendo de unas condiciones iniciales.

Si el sistema viene descrito por su función de transferencia $G(z)$ habrá que identificar los coeficientes a_i y b_j de $G(z)$ para construir la ecuación en diferencias de la que procede.

El algoritmo consta de una secuencia de pasos que se describe en la siguiente figura:



Métodos de Simulación de Sistemas en Tiempo Continuo.

Los sistemas continuos se caracterizan por tener variables que toman valores en todo instante de tiempo y que cambian continuamente. Dada la naturaleza discreta del computador digital, la simulación de estos sistemas tendrá que ser forzosamente de tipo discreto, en la cual solo se considerarán las variables continuas en determinados instantes de tiempo.

Por lo tanto, una señal continua $x(t)$ será transformada en una secuencia

$x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_k), \dots, x(t_n)$

siendo $T = t_k - t_{k-1}$ el tiempo entre dos valores adyacentes.

Hay dos formas de realizar la simulación de un sistema continuo:

1. Discretización de un sistema continuo:

Consiste en la aplicación de las técnicas de muestreo y reconstrucción para pasar de una descripción en tiempo continuo a una equivalente en tiempo discreto, aplicando a continuación el algoritmo de resolución iterativa de la ecuación en diferencias resultante descrito en la sección anterior.

2. Aplicación de Métodos Numéricos:

Son técnicas para la resolución de las ecuaciones diferenciales del sistema que tienen por objeto el sustituir las derivadas de las variables $x(t)$ $t = t_k$, por expresiones aproximadas que involucran a los valores de $x(t_k)$, $x(t_{k-1})$, ..., $x(t_{k+1})$, ..., etc.

CASO PRACTICOS

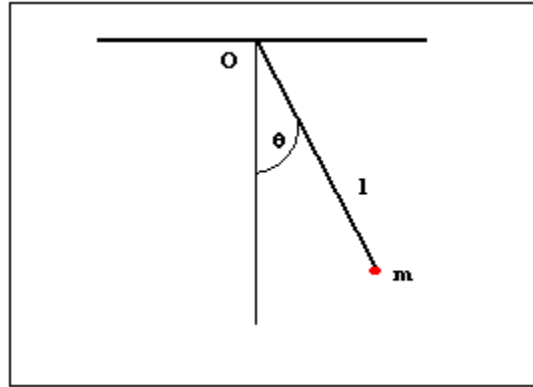
1º ESTUDIO DEL PÉNDULO SIMPLE.

Ejemplo: Movimiento oscilatorio: Estudio del péndulo simple.

<http://www.uco.es/servicios/informatica/JICAPages/application.html>

Resolución del problema mediante o analíticos. Estas soluciones resultan útiles y proporcionan una comprensión excelente del comportamiento de algunos sistemas. Sin embargo, estas soluciones sólo se encuentran para una clase determinada de problemas: de aquellos que pueden aproximarse mediante modelos lineales y también aquellos que tienen una geometría simple y pocas dimensiones.

Un péndulo simple se define como una partícula de masa ' m ' suspendida en un punto ' O ' mediante una cuerda de longitud ' l ' y masa despreciable.



La posición del péndulo queda determinada por una sola variable que es el ángulo que forma la varilla con la vertical. Si se desprecia la masa de la varilla y todo rozamiento se obtiene, a partir de la segunda ley de Newton, la ecuación del movimiento del péndulo simple:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \cdot \text{sen } \theta = 0 \quad (1)$$

Donde ' l ' es la longitud del péndulo, ' g ' es la constante de gravedad y $\frac{g}{l} = \omega^2$ es la frecuencia natural del péndulo.

La ecuación (1) es no lineal debido a la presencia de la función seno, lo que complica su solución analítica. Si sólo estamos interesados en pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable, podemos hacer:

$$\text{sen}(\theta) \cong \theta$$

En cuyo caso, la solución de la ecuación (1) es:

$$\theta = \theta_o \cdot \cos(\omega t + \alpha)$$

Esta simplificación sólo nos permite estudiar un tipo muy limitado de los posibles movimientos del péndulo.

Sin embargo, la solución analítica de la ecuación (1) es muy simple y permite investigar el movimiento del péndulo tanto para pequeñas amplitudes (en ese caso diremos que nos encontramos en la zona lineal del péndulo) como para grandes amplitudes, incluyendo el movimiento rotatorio.

La mayoría de los problemas reales no son lineales e implican formas y procesos complejos.

Estudiemos el movimiento del péndulo bajo cualquier circunstancia:

Estudio del comportamiento del péndulo simple en GALILEO

Desarrollo de la ecuación del movimiento: parámetros y fuerzas que intervienen

La ecuación del movimiento del péndulo simple, si se desprecia la masa de la varilla y todo rozamiento es fácil de obtener a partir de la segunda ley de Newton y es

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \omega_0^2 \text{sen}(\theta) = 0 \quad (1)$$

donde

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

es la frecuencia natural del péndulo, siendo 'g' la aceleración de la gravedad y 'L' la longitud de la varilla.

La ecuación 1 es no lineal debido a la presencia de la función seno, lo que complica su solución analítica. Cuando se está interesado solamente en pequeñas oscilaciones del péndulo alrededor de la posición de equilibrio estable, se puede hacer la aproximación

$$\text{sen}(\theta) \approx \theta \quad (2)$$

con lo cual la ecuación 1 se convierte en la ecuación lineal

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (3)$$

cuya solución

$$\theta(t) = A \text{sen}(\omega_0 t + \phi)$$

se obtiene por métodos elementales. La amplitud (A) y la diferencia de fase (phi) son constantes que se determinan a partir de las condiciones iniciales del ángulo y la velocidad. Al utilizar la ecuación 3 en lugar de la 1 se dice que estamos en la aproximación lineal y solo podemos estudiar un tipo muy limitado de los posibles movimientos del péndulo: las oscilaciones de amplitudes pequeñas, en las que la aproximación (2) es correcta.

La solución numérica de la ecuación 1 es muy simple y nos permitirá estudiar el comportamiento del péndulo tanto con pequeñas amplitudes (diremos entonces que nos encontramos en la zona lineal del péndulo) como cuando estas son grandes, incluyendo el caso del movimiento rotatorio. Se incluirá en este estudio el efecto producido por una fuerza de rozamiento

$$\vec{F}_{roz} = -bv^n = -b \left(L \frac{d\theta}{dt} \right)^n$$

siendo 'b' el coeficiente de rozamiento. También actúan dos fuerzas externas

$$\begin{aligned}\vec{F}_{ext1} &= F_{01} \text{sen}(\omega_1 t + \phi_1) \\ \vec{F}_{ext2} &= F_{02} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \text{sen}(\theta)\end{aligned}$$

siendo 'Fo1' y 'Fo2' los módulos de las fuerzas externas y las 'w' y las 'phi' son la frecuencia y la fase respectivamente. La fuerza de rozamiento y la primera fuerza externa actúan sobre la masa del péndulo tangencialmente a su trayectoria, mientras que la segunda fuerza externa lo hace en la dirección del eje de ordenadas.

Ecuación del movimiento

Teniendo en cuenta la fuerza de rozamiento y las dos fuerzas externas la ecuación del movimiento del péndulo simple queda

$$\begin{aligned}m L \frac{d^2\theta}{dt^2} &= -mg \text{sen}(\theta) - b \left(L \frac{d\theta}{dt} \right)^n + F_{01} \text{sen}(\omega_1 t + \phi_1) + \\ &+ F_{02} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \text{sen}(\theta)\end{aligned}$$

Esta ecuación se obtiene de la segunda ley de Newton y se reduce a la ecuación 1 si tomamos 'b=Fo1=Fo2=0' y dividimos por 'mL'.

De aquí se puede deducir que:

$$\theta \ll 10 \Rightarrow \text{Ecuación: } \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

Oscilaciones Lineales

$$\theta > 10 \Rightarrow \text{Ecuación: } \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \text{sen} \theta = 0$$

Oscilaciones no Lineales.

$$\theta \gg 10 \Rightarrow \text{Caos.}$$

Para el modelo general del movimiento, el estudio de este sistema sólo se puede realizar mediante métodos numéricos.

Métodos numéricos

Contenido

[Introducción](#)

[Ecuaciones diferenciales ordinarias \(EDO\)](#)

[Fundamentos matemáticos](#)

Métodos de un paso:

[Introducción a los métodos de un paso](#)

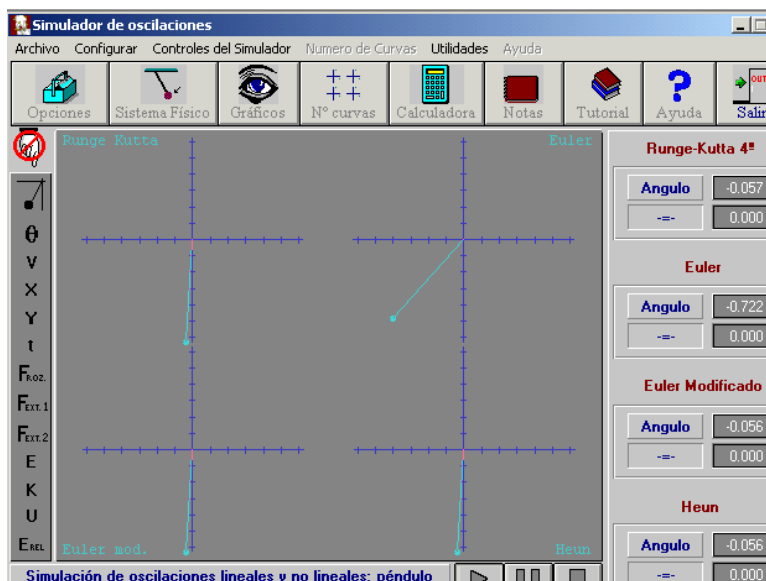
[Método de Euler](#)

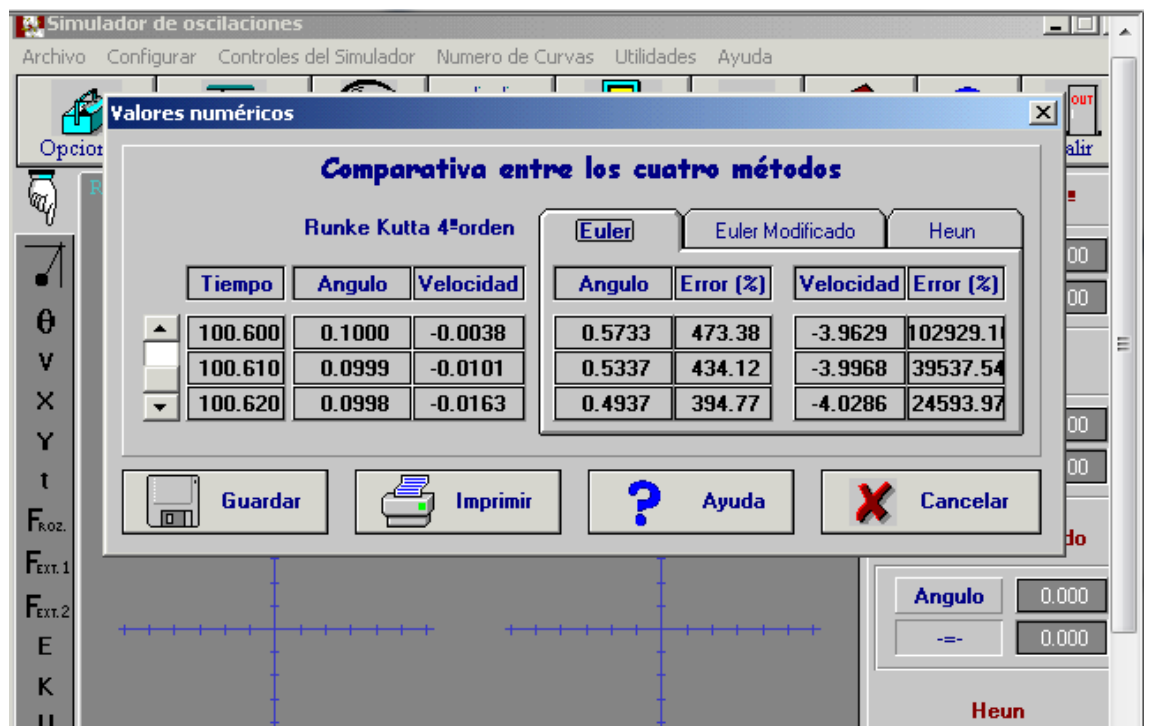
[Métodos de Euler modificado y Heun](#)

[Métodos de Runge-Kutta](#)

[Análisis de error](#)

Aún así no todos los métodos numéricos son válidos, en este caso en particular sólo el método de Runge-Kutta.

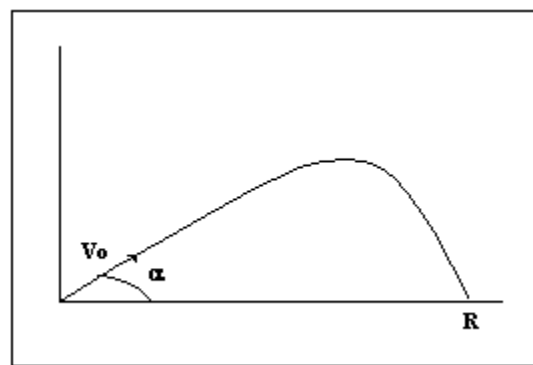




Como se observa en la iteración continua para tiempos de discretización de 0.01 s se observa un error del 394% en el ángulo y de 24593,97% de error en la velocidad mediante el método de Euler. El único método válido para esta simulación es el método de Runge-Kutta.

2º EJEMPLO: ESTUDIO DE MOVIMIENTO DE PROYECTILES EN MEDIOS RESISTENTES

Un proyectil que se lanza con un tiro parabólico pero debido a la fuerza de resistencia del aire, la trayectoria se desvía.



Las ecuaciones que definen el movimiento son:

$$\sum F_x \Rightarrow m.\ddot{x} = -k.m.\dot{x}$$

$$\sum F_y \Rightarrow m.\ddot{y} = -k.m.\dot{y} - m.g$$

k = cte de resistencia del aire.

Las soluciones a estas ecuaciones son:

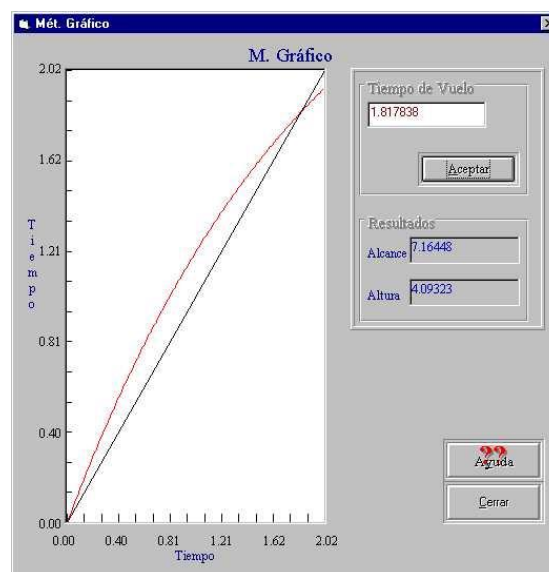
$$x = \frac{V_{ox}}{k} \cdot (1 - e^{-k.T})$$

$$y = -\frac{g.t}{k} + \frac{k.V_{oy} + g}{k^2} \cdot (1 - e^{-k.T})$$

El alcance 'R' del proyectil se calcula sustituyendo en la ecuación de 'x' el tiempo total de vuelo 'T', pero la ecuación que define a éste es:

$$T = \frac{k.V_{oy} + g}{g.k} \cdot (1 - e^{-k.T})$$

Ecuación trascendente en la que la variable dependiente e independiente 't' es la misma.



Simulación Movimiento de Projectiles.

Archivo Gráficos Varios Ayuda

Velocidades Inferiores a 24 m/s

Proyectil 1 Proyectil 2 Proyectil 3 Proyectil 4 Proyectil 5

Datos de Entrada

Velocidad inicial 12 m/s

Ángulo de tiro 60 °

Resistencia del aire 0.5

Aceptar

M. Gráfico

Compara Errores

Comp. de Errores con Newton-Raphson

Err. Analítico -5.202011 %

Err. Pto Fijo 0.001473 %

Err. Mét. Gráfico 1.22448 %

Datos de Salida

Mét. Analítico

V. inicial en X 6.0 m/s

V. inicial en Y 10.392305 m/s

Alcance 3.73438 m

Altura máxima 4.093229 m

Tiempo Vuelo 1.7446366 s

Mét. Iterativo del Punto Fijo

V. inicial en X 6.0 m/s

V. inicial en Y 10.392305 m/s

Alcance 7.218728 m

Altura máxima 4.093229 m

Tiempo Vuelo 1.8404001 s

Error del método 0.001704 %

T. Computo 0.0 ms

Mét. Newton-Raphson

V. inicial en X 6.0 m/s

V. inicial en Y 10.392305 m/s

Alcance 7.218664 m

Altura máxima 4.093229 m

Tiempo Vuelo 1.840373 s

Error del método -0.000012 %

T. Computo 0.0 ms

Tiempo	Altura	Alcance
0.17446	1.5912	0.37344
0.34893	2.76354	0.74688

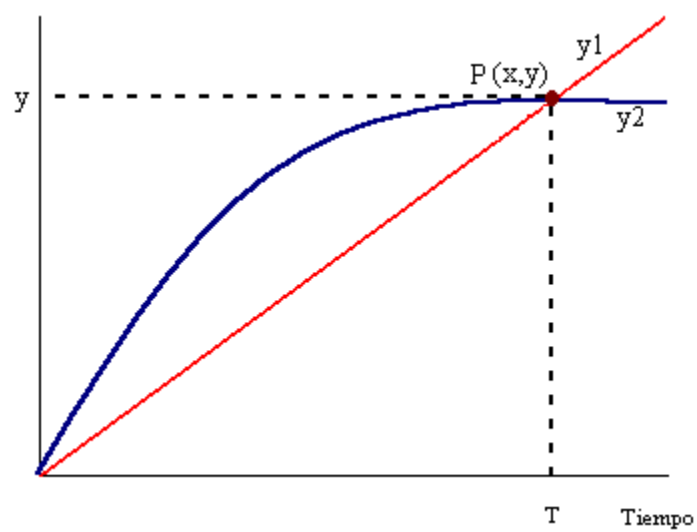
Tiempo	Altura	Alcance
0.18404	1.66608	1.05496
0.36808	2.86826	2.01717

Tiempo	Altura	Alcance
0.18404	1.66606	1.05494
0.36807	2.86823	2.01714

Método de resolución gráfico:

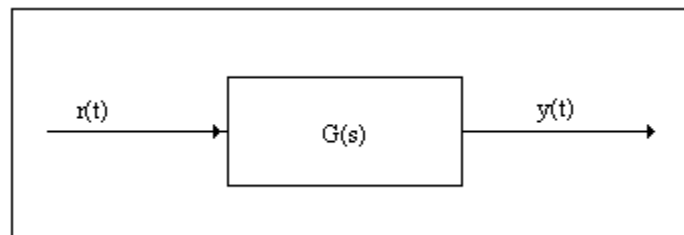
$$y_1 = T$$

$$y_2 = \frac{k \cdot V_{oy} + g}{g \cdot k} \cdot (1 - e^{-k \cdot T})$$



Discretización de un Sistema en Tiempo Continuo

El método de discretización parte del conocimiento de la función de transferencia del sistema $G(s)$, descrito en la figura 5.2.



El método consta de una secuencia de pasos

1. Cálculo del equivalente discreto de $G(s)$

Se realiza en cuatro operaciones:

- muestreo de la entrada para obtener una secuencia de impulsos

$$r(t) \mid r^*(t)$$

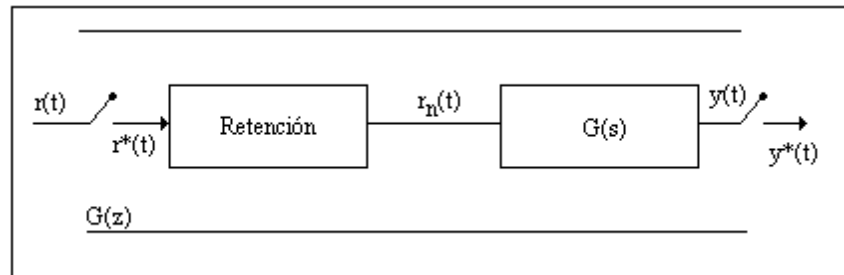
- reconstrucción de $r(t)$, mediante un dispositivo de retención con $G_r(s)$ dada por

$$G_r(s) = \frac{1 - e^{-T \cdot s}}{s}$$

- aplicación de $r_n(t)$ al sistema definido por $G(s)$ y obtención de la salida $y(t)$.
- muestreo de $y(t)$ para obtener una secuencia de impulsos

$$y(t) \mid y^*(t)$$

En la siguiente figura, se muestran las diferentes señales que aparecen en el proceso de discretización.



2. Obtención de la función de transferencia en s del sistema formado por el dispositivo de retención y el sistema de $G(s)$, definido por

$$G_t(s) = G_r(s) G(s)$$

3. Cálculo de la función de transferencia discreta $G_t(z)$ a partir de $G_t(s)$ por aplicación de la transformación

$$z = e^{sT}$$

que mapea el plano s en el plano z , o bien a través de la relación entre las tablas de transformadas en s y z de una misma señal.

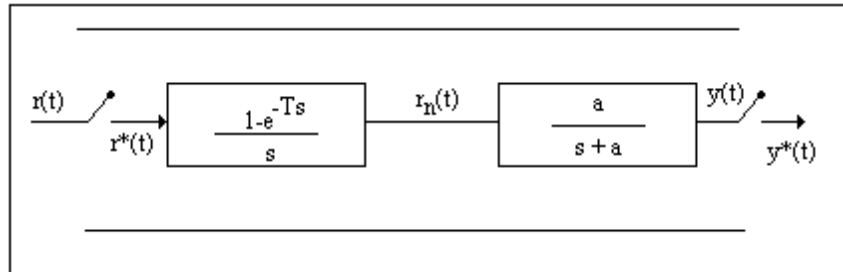
4. Obtención de la ecuación en diferencias a partir de $G_t(z)$

Ejemplo: Discretizar el sistema dado por:

$$G(s) = \frac{a}{s} + a$$

Se procederá con la secuencia de pasos descrita:

1. Equivalente discreto:



2. Obtención de $G(s)$:

$$G_t(s) = \frac{1 - e^{-T.s}}{s} \cdot \frac{a}{a + s}$$

$$G_t(s) = (1 - e^{-T.s}) \cdot \frac{a}{s(s + a)}$$

3. Cálculo de $G_t(z)$:

Aplicando el cambio $z = e^{sT}$

$$G_t(z) = (1 - z^{-1}) \cdot Z \left\{ \frac{a}{s(s + a)} \right\}$$

Descomponiendo en fracciones simples

$$P(s) = \frac{a}{s(s + a)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + a}$$

Y hallando las equivalentes Z de las fracciones

$$P(z) = \frac{z}{z - 1} - \frac{z}{z - e^{-a.T}}$$

Luego:

$$G_t(z) = \frac{z-1}{z} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-aT}} \right)$$

La función de transferencia viene dada por

$$G_t(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{1-e^{-aT}}{z-e^{-aT}}$$

4. Ecuación en diferencias

$$z.Y(z) - e^{-aT}.Y(z) = (1-e^{-aT}).R(z)$$

$$y.(k+1) - e^{-aT} . y.(k) = (1 - e^{-aT}).r(k)$$

Métodos Numéricos de Simulación

El objeto de los métodos numéricos es obtener, a partir de un sistema continuo expresado mediante la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u)$$

una secuencia de valores $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_k)$ que aproximan la solución $x(t)$ de la ecuación diferencial anterior. Al intervalo $T = t_k - t_{k-1}$ se le denomina intervalo o tiempo de integración.

Existe una gran variedad de métodos numéricos para la resolución de la ecuación diferencial del sistema, entre los cuales se citan

- Fórmulas de Integración Abiertas.
- Fórmulas de Integración Cerradas.
- Fórmulas de Predicción – Corrección.
- Métodos de Runge Kutta.

Es común a todos estos métodos la resolución de la ecuación diferencial:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t)) = f(t)$$

por integración de la misma entre los puntos t_{i-r} y t_{i+1} , según:

$$\int_{x_{i-r}}^{x_{i+1}} dx = \int_{t_{i-r}}^{t_{i+1}} f(t).dt$$

$$x(t_{i+1}) = x(t_{i-r}) + \int_{t_{i-r}}^{t_{i+1}} f(t).dt$$

Por lo tanto:

$$x_{i+1} = x_{i-r} + \int_{t_{i-r}}^{t_{i+1}} f(t).dt$$

Para generar la expresión de la solución de $x(t)$ se utilizará el polinomio interpolador de Newton de diferencias regresivas para aproximar la función $f(t)$.

Polinomio Interpolador de Newton

Se definen como diferencias regresivas de una función $f(x)$ a las expresiones $\delta f(x)$, $\delta^2 f(x)$, ..., $\delta^n f(x)$ cuyo valor viene dado por

$$\delta.f(x) = f(x) - f(x-T)$$

$$\delta^2 f(x) = f(x) - 2f(x - T) + f(x - 2T)$$

$$\delta^n . f(x) = \sum (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} . f(x - kT)$$

Dada una función $f(x)$ cuyos valores son conocidos en un conjunto de puntos distanciados entre sí, un periodo T se define el polinomio interpolador de Newton de diferencias regresivas a la expresión:

$$f(x) = f(x_n + \alpha T) = f(x_n) + \alpha . \delta f(x_n) + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!} . \delta^2 . f(x_n) + \frac{\alpha . (\alpha+1) . (\alpha+2)}{3!} . \delta^3 . f(x_n) + \dots$$

siendo α la distancia fraccional desde x_n al punto x genérico en términos de longitud ' T '.

La aproximación a $f(x)$ será mejor a medida que se incluyan más términos en diferencias $\delta f, \delta^2 f, \dots, \delta^n$.

Fórmulas de Integración Abiertas

:

Utilizando el polinomio interpolador de Newton en base a t_i

$$f = f(t_i) + \alpha . \delta . f(t_i) + \frac{\alpha . (\alpha+1)}{2} . \delta^2 . f(t_i) + \frac{\alpha . (\alpha+1) . (\alpha+2)}{6} . \delta^3 . f(t_i) + \dots$$

$$x_{i+1} = x_i + T/6 (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

donde los coeficientes k_i vienen dados por :

$$k_1 = f(x_i, t_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{T}{2} k_1, t_i + \frac{T}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{T}{2}k_2, t_i + \frac{T}{2}\right)$$

$$k_4 = f(x_i + Tx_3, t_i + T)$$

El error del método viene dado por

$$\mathcal{E} = x_{i+1} - \frac{x_{i+1}^*}{2^m - 1}$$

con x_{i+1}^* resultado de calcular x_{i+1} a partir de x_{i-1} con un periodo de integración de $2T$.

No plantean problemas de arranque y pueden ser utilizados como arrancadores de otros.

Métodos Numéricos Aplicados a Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior

En el caso de que desee resolver una ecuación diferencial de orden superior a uno mediante un método numérico, se transformará ésta en un sistema de ecuaciones diferenciales de orden uno utilizando la metodología del espacio de estado. Esto es, para un sistema definido por :

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = u$$

se define un vector:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y, y', \dots, y^{(n)})$$

obteniéndose el sistema:

$$x_1' = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_n = -a_n x_1 - \dots - a_1 x_n + u$$

Aplicando simultáneamente los métodos anteriores a cada una de las ecuaciones diferenciales de primer orden se obtiene en la primera variable $x_1(t)$ la solución del sistema.

Intervalo de integración

La elección del periodo de integración T siempre es crítica de cara a obtener resultados aceptables en la simulación.

La elección de un T demasiado grande provoca:

- Errores de discretización de variables altos.
- Inestabilidad en la solución.

Mientras que un T demasiado pequeño produce:

- Aumento de cálculos, simulación lenta.
- Errores por excesivo truncamiento.

Por lo tanto existe un compromiso en el valor a elegir del tiempo de integración.

Hay varios criterios para elegirlo:

1. Contante de Tiempo del sistema, definida como el tiempo característico de cambio de las variables del sistema. Existe un criterio general para la determinación de T en función de la constante de tiempo menor del sistema τ , según:

$$\tau/5 < T < \tau/2$$

2. En la práctica, o no se conoce τ o bien es de difícil determinación. En este caso la elección de T se hará realizando simulaciones sucesivas, empleando criterios de estimación del error respecto a respuestas reales, tal que definiéndolo como un error cuadrático según:

$$E^2 = |Y_{\text{real}} - Y_{\text{sim}}|^2$$

y para un intervalo de error (E_{\min} , E_{\max}) se tendrá que:

- Si $E < E_{\min} \Rightarrow$ Aumento de T
- Si $E < E_{\max} \Rightarrow$ Disminución de T

3. Método numérico empleado.

El método de integración dará una mejor o peor aproximación a la solución exacta, por tanto a medida que la precisión del método aumenta se hacen menores las restricciones impuestas al valor del tiempo de integración T .

Ejemplo: Elegir T para el sistema

$$\frac{dx}{dt} + ax = bu, x(0) = 0$$

La constante de tiempo del sistema se halla a partir de $G(s)$

$$G(s) = \frac{b}{s+a} = \frac{\frac{b}{a}}{1 + \left(\frac{1}{a}\right)s}$$

Luego la constante de tiempo es $t = \frac{1}{a}$

Para ver el efecto de T se van a obtener las soluciones tanto exactas como aproximadas ante entrada escalón.

- Solución exacta, aplicando la transformada de Laplace.

$$x(t) = \frac{b}{a} \cdot (1 - e^{-a \cdot t})$$

- Solución aproximada, aplicando el método de Euler

$$x_{i+1} = x_i + T(-ax_i + bu_i)$$

5. EVALUACIÓN CRÍTICA DEL FUNCIONAMIENTO.

Los sistemas rígidos se caracterizan por tener constantes de tiempo características muy diferentes. Por lo tanto, si se elige un T pequeño para simular la parte rápida del sistema (τ menor) se tendrán grandes errores e incluso inestabilidad en la resolución de la parte lenta (τ mayor).

Para evitar este efecto se utiliza el método de integración rectangular hacia atrás después de que se haya amortiguado la parte rápida.

El método rectangular hacia atrás viene dado por:

- Técnica 2: Es aconsejable en el desarrollo del modelo ayudarse de una segunda persona para leer el programa, que detecte los fallos inconscientes del modelador.
- Técnica 3: Efectuar trazas del programa, en concreto de la lista de eventos, variables de estado, contadores estadísticos, etc.
- Técnica 4: Ejecutar el modelo bajo hipótesis simplificadoras que permitan evaluar características conocidas o fáciles de calcular del modelo.

Por ejemplo en una cola M/M/C empezar progresivamente con las colas M/M/1, M/M/2 hasta llegar a M/M/C.

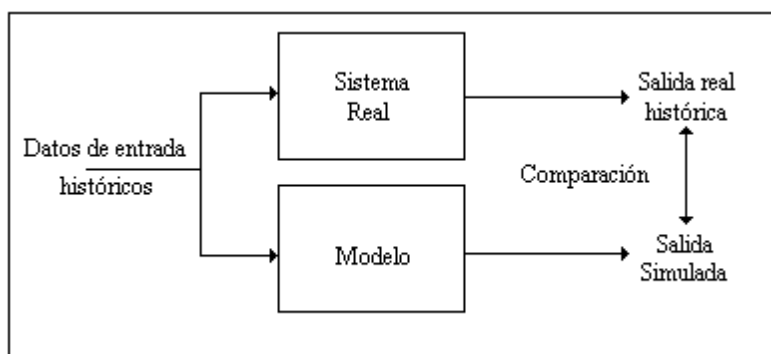
- Técnica 5: Con algunos tipos de modelos puede ser de ayuda el mostrar la salida gráfica a medida que la simulación avanza.

6. CONTRASTE DE RESULTADOS REALES.

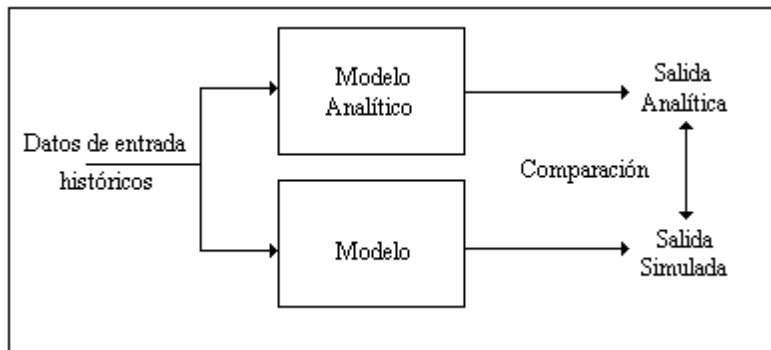
La validación consiste en determinar si un modelo de simulación es una representación válida del sistema real bajo estudio.

Dos procedimientos pueden ser usados para validar un modelo:

1. Si el modelo describe a un sistema real del que se poseen datos históricos de salida, se pueden comparar estos con los obtenidos con el modelo bajo el mismo conjunto de condiciones de entrada, según se indica en la siguiente figura:



2. Si el modelo bajo ciertas condiciones de entrada (restricciones) puede ser resuelto analíticamente, se compararán los resultados analíticos de salida con los obtenidos por simulación, según se ilustra en la siguiente figura:



Para los modelos que no estén en las condiciones anteriores todo lo que se puede hacer es ejecutar el modelo con diferentes datos de entrada y determinar si la salida está en el campo de la credibilidad aparente.

Procedimiento de Comparación

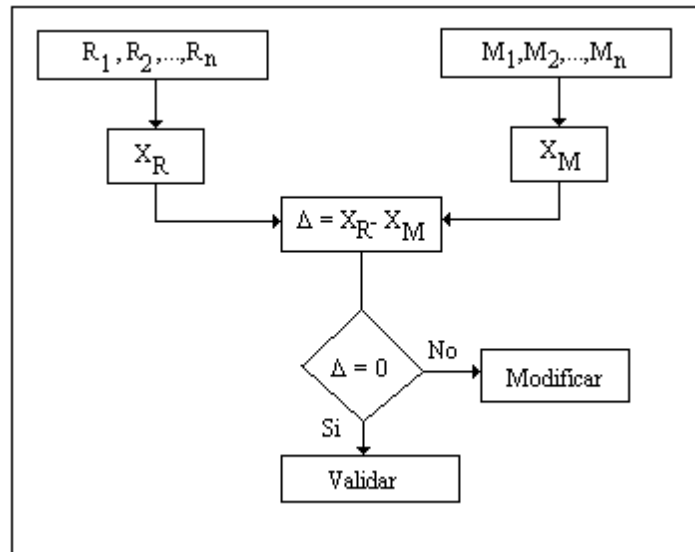
La comparación de resultados de simulación con datos históricos o analíticos ha de ser realizada empleando procedimientos estadísticos debido a que la comparación no es punto a punto sino entre dos conjuntos de observaciones R_1, R_2, \dots, R_n y M_1, M_2, \dots, M_n correspondientes a diferentes ejecuciones.

Existen tres técnicas para la comparación de resultados:

1. *Método de Inspección*

Se utilizan estadísticos (media muestral, varianza muestral) que sintetizan las informaciones relativas a los valores de datos históricos R_i y los de simulación M_i , comparándose entre sí los valores del estadístico para R_i y M_i respectivamente para asegurar la validez.

El método de inspección se ilustra gráficamente en la siguiente figura:



El problema presentado por este método es que Δ varía d experimento a experimento.

2. Construcción del Intervalo de Confianza

Dado dos conjuntos de observaciones R_i y M_i correspondientes a los resultados del sistema real o analítico y los de simulación respectivamente, se calculan las medias

$$\mu_r = E(R_i)$$

$$\mu_m = E(M_i)$$

y se construye un intervalo de confianza para la variable ξ definida por:

$$\xi = \mu_r - \mu_m$$

para comparar las dos muestras.

Para ello se usará la variable Z_i diferencia de muestras:

$$Z_i = R_i - M_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Y se calculará la media y la desviación de esta nueva variable:

$$Z = \sum \frac{Z_i}{n}, \sigma_Z = \frac{\sqrt{(Z_i - Z)^2}}{n-1}$$

Si la variable se distribuye normal o el tamaño de la muestra n es suficientemente alto para aplicar el teorema central del límite, el intervalo de confianza viene dado por:

$$IC \cong Z \pm t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_2}{\sqrt{n}}$$

que da un intervalo que acota la diferencia entre las medias ' ξ ' en el ' $1 - \alpha\%$ ' de los casos en el caso de muestras independientes. Si el intervalo descrito contiene al 0 ($\mu_r = \mu_m$) se dirá que la diferencia ' α ' no es significativa y por tanto se puede validar el modelo.

Para el caso de muestras no independientes hay que incluir el efecto de la correlación en las fórmulas del cálculo de la desviación típica ' σ_2 '.

Ejemplo: Supóngase que un sistema de colas real se puede aproximar por un modelo M/M/1 con ' $\rho = 0.6$ ' y que el modelo de simulación es M/M/1 con ' $\rho = 0.5$ '. Determinar su validez sabiendo que ' $\mu_r = 0.797$ ' y ' $\mu_m = 0.442$ ', para un conjunto de 10 observaciones.

Se evaluarán las diferencias entre las medidas ' $Z_i = R_i - M_i$ ' y se calcularán la media ' Z ' y desviación ' σ_Z ', esto es:

$$Z = \mu_r - \mu_m = 0.797 - 0.442 = 0.356$$

$$\sigma_2 = \frac{\sqrt{(Z_i - 0.356)^2}}{9} = 0.150$$

El intervalo de confianza del 90% ($\alpha = 10\%$) vendrá dado por:

$$IC \equiv 0.356 \pm t_{9,0.95}$$

Por lo tanto, se puede decir que en el 90% de los casos ' ζ ' estará en ese intervalo. Al no contener el '0', la diferencia es significativa y el modelo será inválido.

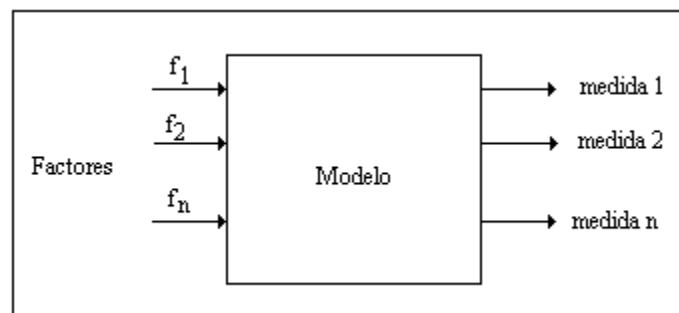
3. Análisis de Series Temporales

Se trata de construir series temporales con los datos del modelo y el sistema real o analítico y realizar un análisis espectral.

El análisis espectral consiste en computar el espectro muestral mediante transformada de Fourier de la función de autocovarianzas para cada grupo de observaciones, y construir un intervalo de confianza para la diferencia de los logaritmos del espectro.

Diseño de Experimentos

El diseño de experimentos de simulación sobre un modelo comprende un conjunto de reglas y principios con objeto de determinar los efectos de varios factores (variables de entrada) sobre las medidas de funcionamiento (variables de salida), según se indica en la figura siguiente:



El interés del diseño de experimentos radica en la posibilidad de evaluar sistemas alternativos e incluso de optimizar el funcionamiento de un sistema.

El diseño comprende tres tareas diferenciadas como son:

- Elección de parámetros de entrada.
- Selección de la longitud de simulación.
- Determinación del número de replicaciones.

Elección de Parámetros de Entrada

Consiste en la especificación de los factores o parámetros de entrada que influyen los resultados de la simulación.