

# TEMA I : INTRODUCCIÓN A LA SIMULACION

1. INTRODUCCIÓN
2. ESTUDIO DE SISTEMAS
3. INTRODUCCIÓN A LA SIMULACIÓN
4. VENTAJAS E INCONVENIENTES.
5. DOMINIOS.
6. HERRAMIENTAS EN LA INDUSTRIA.  
INVESTIGACIÓN Y DOCENCIA.
7. ETAPAS EN LA IMPLEMENTACIÓN.

"La simulación es el proceso de diseñar un modelo de un sistema real y llevar a término experiencias con él, con la finalidad de comprender el comportamiento del sistema o evaluar nuevas estrategias -dentro de los límites impuestos por un cierto criterio o un conjunto de ellos - para el funcionamiento del sistema".

# INTRODUCCIÓN

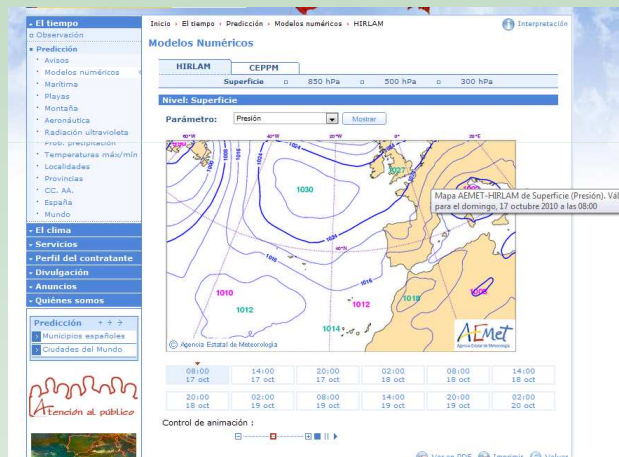
. \* La Simulación es una de las herramientas más importantes y más interdisciplinarias en la investigación , industria y docencia.

\*La simulación actúa cuando el ordenador "finge" ser una tienda, un avión o un mercado.

## Campos de Actuación:

- Industria: Trabajo y ensamblaje de las partes más pequeñas de un mecanismo
- Meteorología: el pronóstico del tiempo (<http://www.aemet.es/es/eltiempo/prediccion/modelosnumericos/hirlam>),

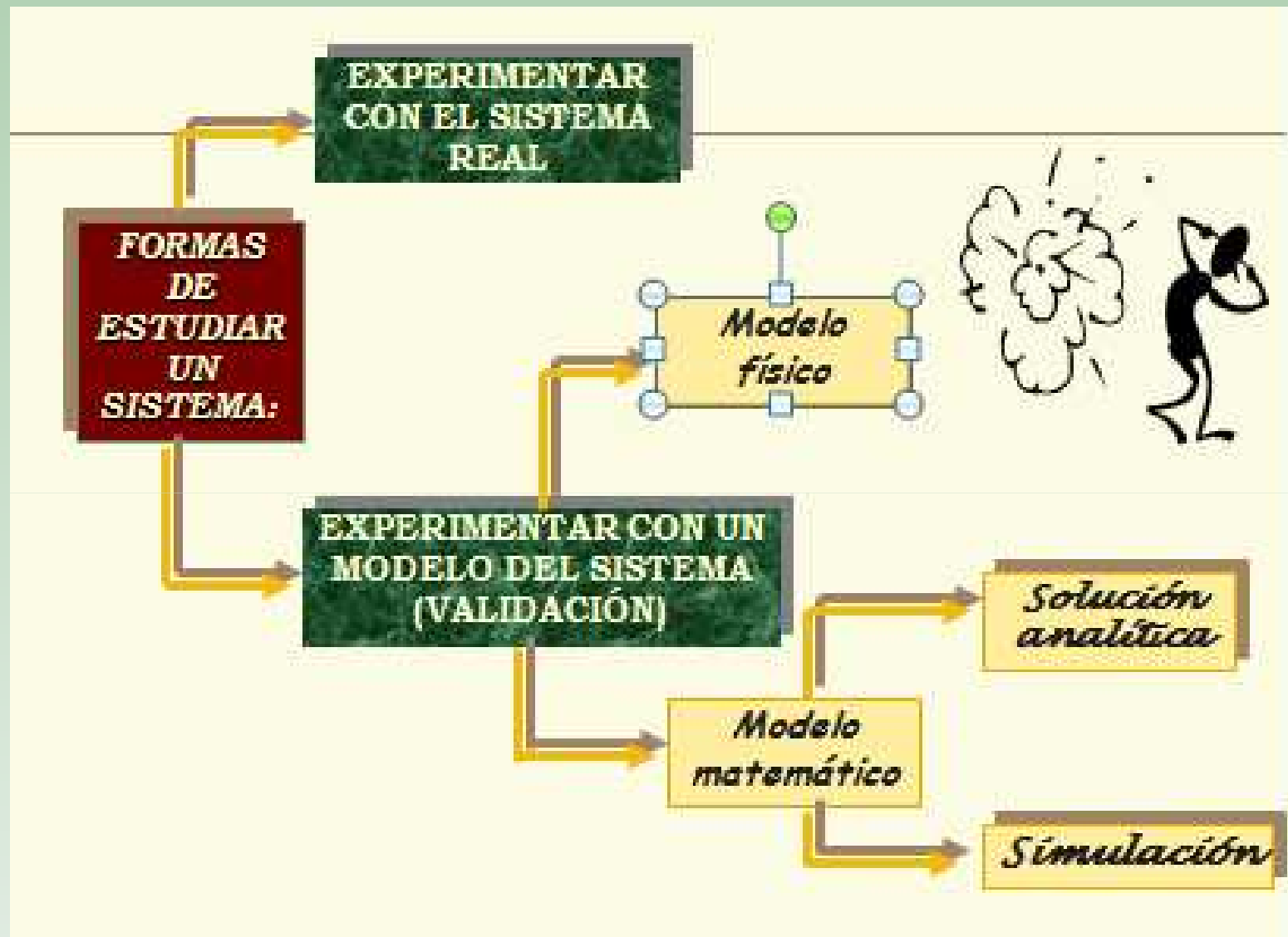
- Medicina: el desarrollo de las epidemias, el sistema inmunológico humano,
- Producción: las plantas productivas, sucursales bancarias, el sistema de repartición de pizzas en grandes ciudades, crecimiento de poblaciones de especies de animales, partidos y torneos de fútbol



- Física , movimiento de los planetas, la evolución del universo, Física Cuántica, Física de la atmosfera
- Biología y Veterinaria: Evolución de poblaciones, etc

# SISTEMA

- Conjunto de objetos- entidades que interactúan entre si como un objetivo común.
  - Entidad : Objeto
  - Atributo: propiedad
  - Actividad: intervalo de tiempo en el que se simula su comportamiento
- Estudiar un Sistema es representar su evolución



# SIMULACIÓN

- “La práctica de generar modelos para representar un sistema del mundo real o hipotéticos mundos futuros, experimentando con él para explicar el comportamiento del sistema, mejorar su funcionamiento o diseñar nuevos sistemas con características deseables”.
- La simulación de sistemas es una técnica que resuelve simultáneamente las ecuaciones de un modelo matemático a valores crecientes de tiempo.

# TECNICA DE SIMULACIÓN

- La técnica de simulación no pretende resolver analíticamente las ecuaciones de un modelo matemático (Simulación Numérica)
- El conjunto de restricciones impuestas en el análisis del modelo mediante simulación será menor que el correspondiente a las técnicas analíticas.
- La construcción de un modelo de simulación es pues mucho más libre.
- Es necesario utilizar procedimientos de tipo iterativo



# SISTEMAS

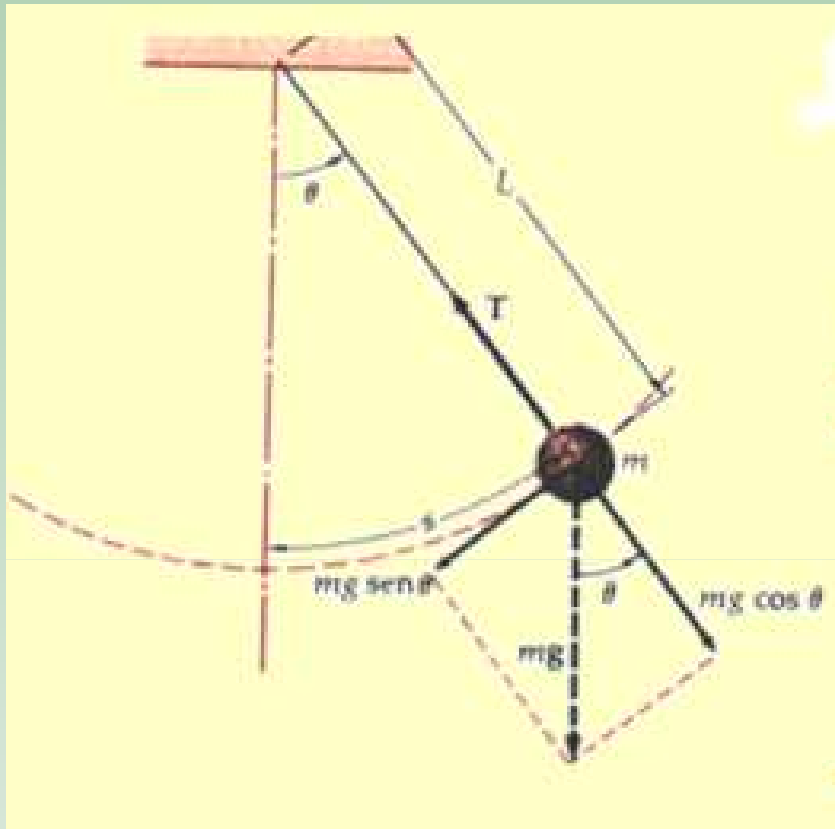
- ESTADO DEL SISTEMA: Colección de variables necesarias para describir un sistema en un instante dado. Se llaman variables de estado.
- TIPOS DE SISTEMAS:
  - \* *Discretos*: las variables de estado cambian en puntos separados del tiempo.
  - \* *Continuos*: las variables de estado cambian de forma continua a lo largo del tiempo.

## HIPÓTESIS SOBRE EL SISTEMA:

- Sencillas: posible obtener soluciones exactas o analíticas
- Complejas: es lo más usual. Deben ser estudiados mediante simulación. Se obtienen soluciones aproximadas.

**SIMULACIÓN:** Técnicas para imitar el funcionamiento de sistemas o procesos reales mediante programas de ordenador.

**MODELO:** Representación simplificada de un sistema que se utiliza para estudiar su comportamiento.



$$T = m g \cos \theta$$

$$F = - m g \sin \theta$$

el movimiento oscilante

$$m \omega^2 / L = - m g \sin \theta$$

$$\omega = d \theta / dt$$

$$(d \theta / dt)^2 = - L g \sin \theta$$

UCO-Escritorio JAVA - Windows Internet Explorer

http://www.uco.es/servicios/informatica/JICAPages/application.html

**Datos iniciales**

Incremento de Velocidad angular:

Angulo:

**Fuerza de rozamiento**

b: 0.00

n: 1

**Simulación de oscilación**

lsprst7.dll

## Estudio del comportamiento del péndulo simple en GALILEO

### Solución numérica a la ecuación del movimiento

El problema que queremos resolver es hallar el valor del ángulo y la velocidad del péndulo en un instante de tiempo 't', sabiendo que el ángulo satisface la ecuación

$$m L \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \operatorname{sen}(\theta) - b \left( L \frac{d\theta}{dt} \right)^n + F_{01} \operatorname{sen}(\omega_1 t + \phi_1) + F_{02} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \operatorname{sen}(\theta) \quad (1)$$

y las condiciones iniciales

$$\theta(t_0) = \theta_0$$

$$V(t_0) = \frac{d\theta}{dt}(t_0) = V_0 \quad (2)$$

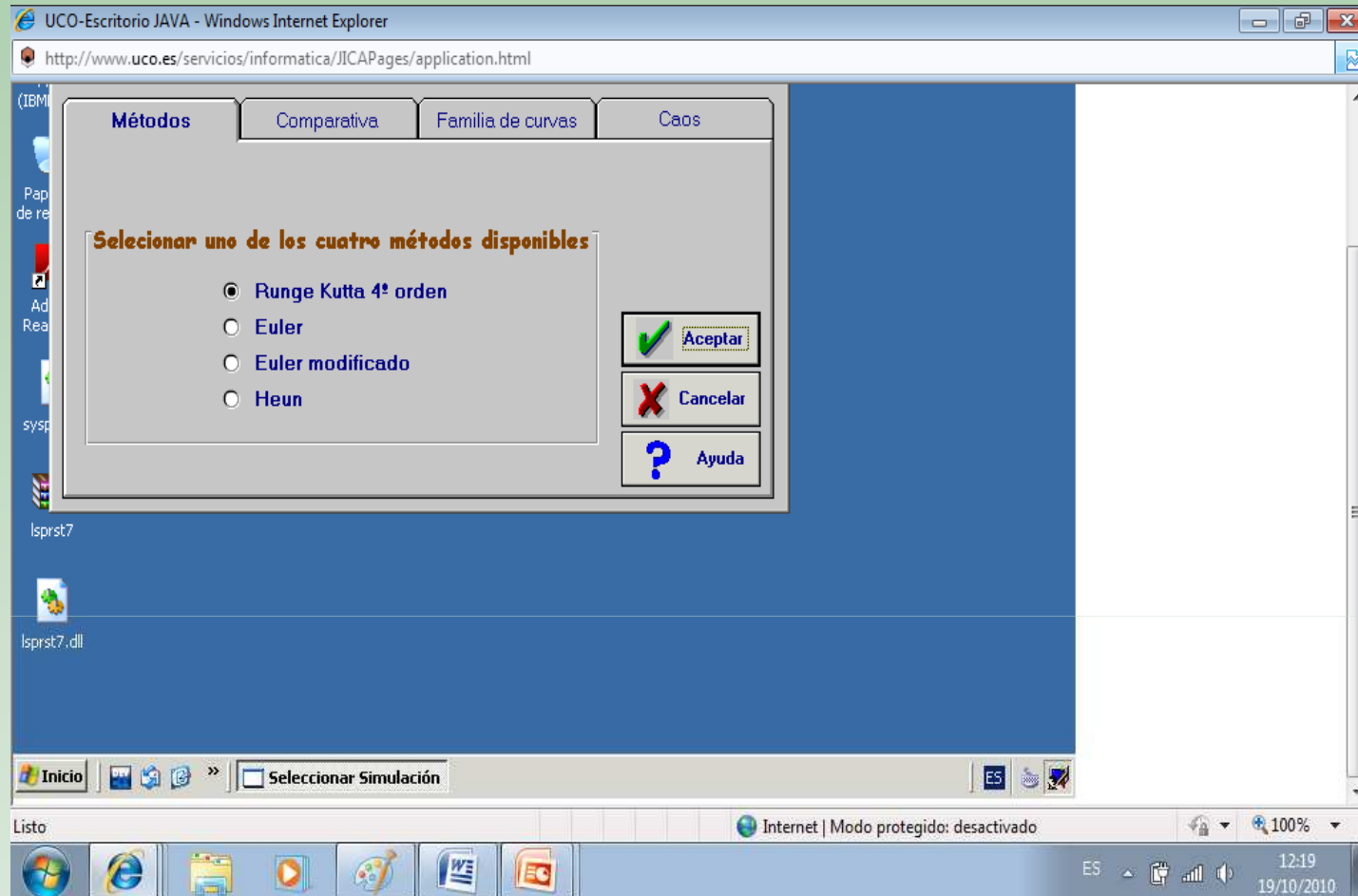
Para resolver numéricamente este problema escribimos la ecuación 1 como un sistema de dos ecuaciones diferenciales

$$\frac{d\theta}{dt}(t) = V(t) \quad (3)$$

Inicio | Simulador de oscilaciones | Configuración del sistema | Tutorial de Galileo

Internet | Modo protegido: desactivado

ES 12:22 19/10/2010



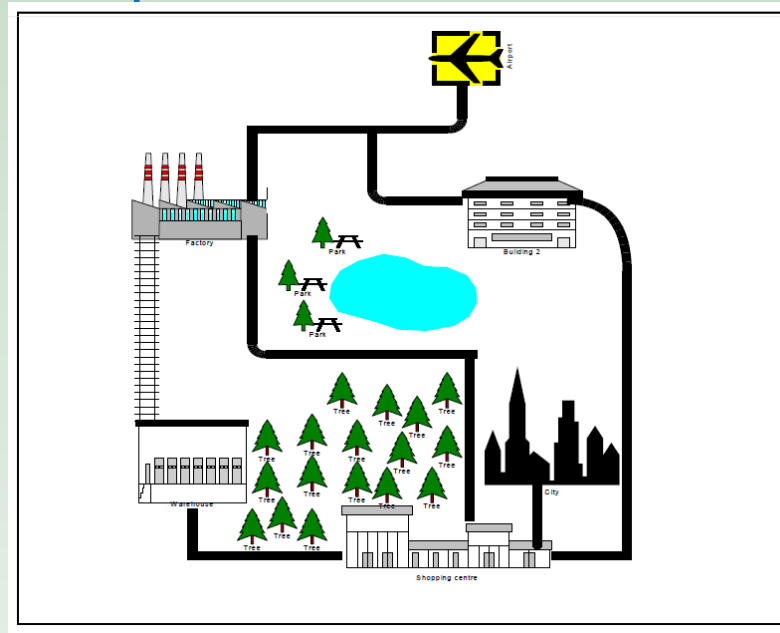
# SIMULADOR GALLILEO



# CLASIFICACIÓN SEGÚN VARIABLE

- Estático: (Monte-Carlo) Representa un sistema en un determinado instante de tiempo.
- Dinámico: Variable con el tiempo.
- Deterministas: No contienen variables aleatorias: poseen un número conocido de entradas, las cuales darán un único conjunto de salidas.
- Estocásticas: Variables de entrada aleatorias, lo que da lugar a salidas aleatorias.
- Discreto o continuo: En instantes de tiempo o en un periodo de tiempo.
- Bucle abierto o cerrado: Cerrado la simulación depende de la interacción con las variables de salida.

- \* Sistemas Continuos : ecuaciones diferenciales
- \* Sistemas discretos: ecuaciones en diferencias.
- \* Sistemas de Eventos Discretos se utilizarán un conjunto de ecuaciones lógicas que expresen las condiciones para que ocurran determinados eventos.





# CARACTERÍSTICAS DE LOS SISTEMAS

- Los sistemas simulados son de Entrada-Salida.
- Estos sistemas nos darán una salida para unos datos iniciales que se deben suministrar.
- Por ello son incapaces de generar una solución por sí mismos. Sólo pueden servir como herramienta para el análisis del comportamiento de un sistema en condiciones especificadas por el experimentador.

- La simulación permite el estudio y la experimentación de interacciones de un sistema complejo.
- Se pueden combinar la información, la organización o el entorno mediante simulación y observar el efecto de estas alteraciones en el comportamiento de un sistema.
- El conocimiento adquirido durante el diseño de un modelo de simulación puede ser de gran valor a la hora de sugerir mejoras en el sistema.
- Mediante el cambio de las variables de entrada se obtiene información sobre las más importantes y cómo interactúan entre ellas.
- Validación de soluciones analíticas como recurso pedagógico para reforzar metodología de solución analítica.
- Experimentar con nuevos diseños y políticas para su implementación o para preparar FUTURO.

- ESTUDIOS DE SISTEMAS

El modo en que se desarrollan los experimentos de simulación dependen directamente de la naturaleza del estudio



## Análisis de Sistemas.

El Análisis de Sistemas pretende comprender la manera en la que opera un sistema existente o propuesto (no hay conocimiento del comportamiento). La situación ideal sería que el investigador pudiera experimentar con el propio sistema, pero lo que se hace realmente es construir un modelo y mediante simulación se investiga el comportamiento del modelo.

Los resultados obtenidos se interpretan en términos del comportamiento del modelo.

- Ejemplo (1)

Un granjero posee 100 Has. de terreno en las que sólo puede plantar cereales o caña de azúcar. El problema es determinar cuál debe ser su política de explotación óptima, es decir, qué plantar y cuánto plantar teniendo en cuenta los recursos disponibles.

## ANÁLISIS DEL SISTEMA

- Seleccionar entidades del problema, sus atributos (parámetros y variables), el entorno del sistema y sus limitaciones
- Dos vías de aproximación:
  - Si el sistema no existe físicamente
- Hacer uso de características físicas, químicas o teóricas del sistema
  - Si el sistema existe
- Como en el caso anterior hacer uso de datos históricos
  - En ambos casos
- Tratar de aplicar leyes conocidas (p.e. Leyes de Kirchoff, fórmulas de producción, etc.)
- Si no es posible recurrir a técnicas estadísticas de predicción

## Diseño de Sistemas.

Tiene como propósito el producir un sistema que satisfaga un conjunto de especificaciones. El diseñador puede para ello elegir o planear determinados sistemas de componentes y conceptualmente elige una determinada combinación para construir el sistema. El sistema propuesto se modela y se predice su comportamiento mediante la simulación.

Si el comportamiento se compara favorablemente con el deseado, se acepta el diseño.

en caso contrario, se rediseña el sistema y se repite el proceso.

Ejemplo diseño de un motor , de experimentos, dispositivo electrónico

- Postulación de Sistemas.

- La Postulación de Sistemas parte del conocimiento del comportamiento del sistema pero no de los procesos que producen dicho comportamiento. Se establecen hipótesis de un conjunto de elementos y procesos que tienen lugar en el sistema que puedan explicar el comportamiento.
- La Postulación del Sistema se utiliza en estudios sociales, económicos, políticos y médicos, en los cuales se conoce el comportamiento del sistema, pero no se conocen los procesos que provocan dicho comportamiento.
- 
- El estudio compara la respuesta del modelo con base en esas hipótesis frente al comportamiento del sistema, ya conocido. Si la comparación es favorable se puede postular una estructura del sistema.



## Ejemplo:

Investigar el funcionamiento del hígado en el cuerpo humano. Cuando se inyecta el producto químico tiroxina en el torrente sanguíneo, llega hasta el hígado, el cual lo cambia a yodo que se absorbe en la bilis

- Sin embargo, ni la conversión ni la absorción ocurren instantáneamente. Parte de la tiroxina vuelve a entrar en el torrente sanguíneo para recircular y volver al hígado. Utilizando isótopos radioactivos, es posible medir la rapidez con que se elimina la tiroxina del torrente sanguíneo, aunque no se conoce el mecanismo específico por el cual se transfiere de la sangre al hígado y de ahí a la bilis.

- Postulación de Sistemas.

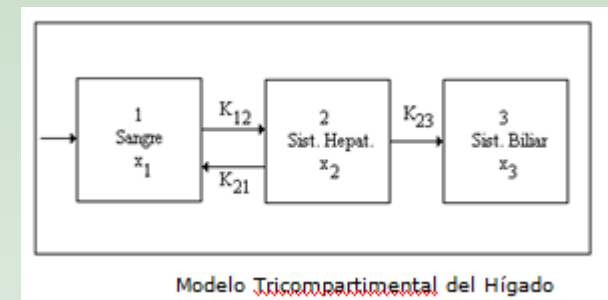
- Se conoce la rapidez de eliminación de tiroxina en la sangre, hígado y bilis mediante isótopos radiactivos (conocimiento del comportamiento).
- No se conoce el mecanismo específico de transferencia de sangre-hígado ni hígado-bilis (no conocimiento de los procesos responsables del comportamiento).

En el estudio se formó un modelo matemático suponiendo que se puede representar al cuerpo como tres compartimientos y que las razones a que se transfiere la tiroxina entre los compartimientos son proporcionales a la concentración de aquélla en éstos.

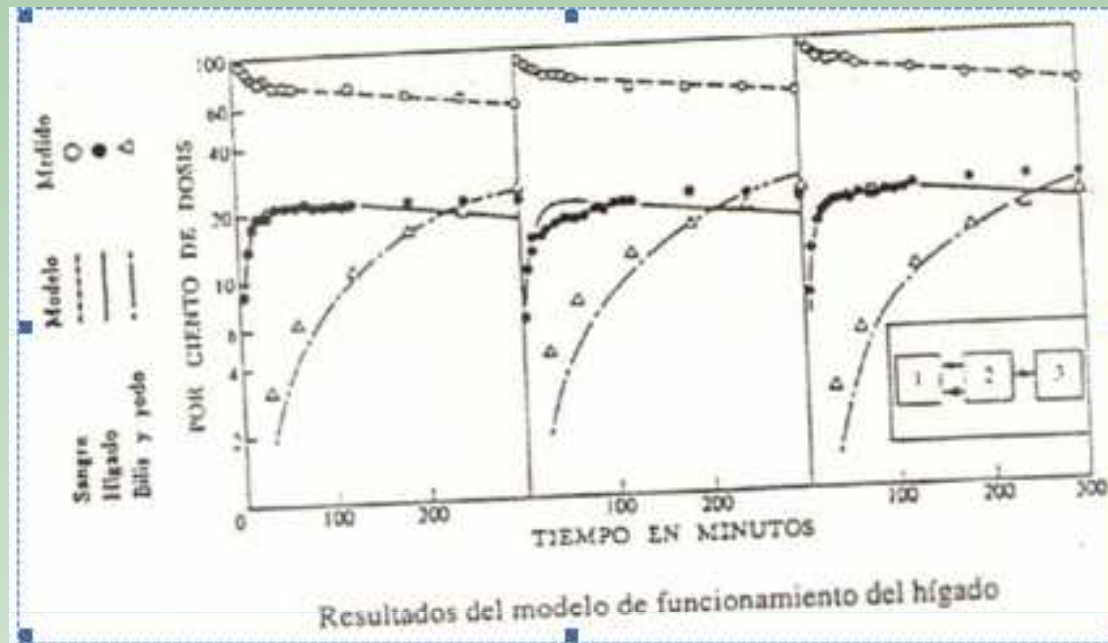
- La figura reproducida ilustra el modelo y muestra los coeficiente de transferencia entre los compartimientos.
- Suponiendo la transferencia de tiroxina proporcional a su concentración, se obtienen las ecuaciones diferenciales del sistema
- Los compartimientos 1, 2 y 3 representan los vasos sanguíneos, el hígado y la bilis respectivamente. El modelo conduce a tres ecuaciones diferenciales simples que se muestran, junto con sus soluciones generales

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -k_{12}x_1 + k_{21}x_2 & x_1 &= C_{11}e^{-b_1t} + C_{12}e^{-b_2t} \\ \frac{dx_2}{dt} &= k_{12}x_1 - (k_{21} + k_{23})x_2 & x_2 &= C_{21}e^{-b_1t} + C_{22}e^{-b_2t} \\ \frac{dx_3}{dt} &= k_{23}x_2 & x_3 &= C_{31} + C_{32}e^{-b_1t} + C_{33}e^{-b_2t}\end{aligned}$$

**FIGURA 2-1. Modelo matemático del hígado.**



- El conjunto de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales dadas se resuelve analíticamente o por simulación



Se comparan las mediciones reales con las predicciones del modelo para valores supuestos de  $k_{ij}$ .

Se puede observar que la correspondencia de resultados es buena y se pueden aceptar las hipótesis de las tasas de transferencia  $k_{ij}$  y tres compartimentos.

## VENTAJAS

- Será útil siempre que nos sea más barato o más fácil que la realización del experimento sobre el sistema real, bien sea porque el experimento exige parar el sistema, no existen herramientas analíticas para desarrollar una solución o porque alguna de la condición a reproducir es difícil de conseguir.

## VENTAJAS

- Permite, de una forma económica representar y estudiar prácticamente cualquier sistema, dentro de categorías científicas muy diferentes.
- El experimento se puede repetir tantas veces como sea necesario sin un gran coste adicional. Permite jugar con el tiempo de forma totalmente imposible para un experimento tradicional.
- Posibilita realizar experimentos que físicamente serían irrealizables.
- Permite explorar infinidad de alternativas para un problema sin modificar el funcionamiento del mismo, caso de una fábrica. Podríamos rediseñar la parada técnica sin necesidad de pararla y, de este modo, perder ingresos

# VENTAJAS

- ES COMPLETAMENTE REPETIBLE Y NO DESTRUCTIVA.
- La propia naturaleza repetitiva de los experimentos de simulación nos permite obtener muchos datos y traducirlos en resúmenes estadísticos, determinando así propiedades que tal vez no sean visibles en un único experimento.
- Permiten analizar el efecto de un evento incluso aunque las variables iniciales estén incompletas.
- Los resultados mediante simulación son más fáciles de obtener que en el sistema real.
- Los métodos de simulación son más fáciles de aplicar que los analíticos  $\Rightarrow$  Potencialmente más aplicación y utilidad.

## VENTAJAS

- Los métodos de simulación no requieren las simplificaciones que los analíticos  $\Rightarrow$  Los datos generados se pueden utilizar para estimar cualquier resultado posible.
- Es la única forma de llegar a la solución de un problema:
- Ejemplo: Oscilaciones no lineales / Caos.
- Futuro de especies.
- EN SU CONTEXTO MÁS AMPLIO: la Simulación nos permite la animación y visualización de los parámetros más relevantes que definen al sistema físico.



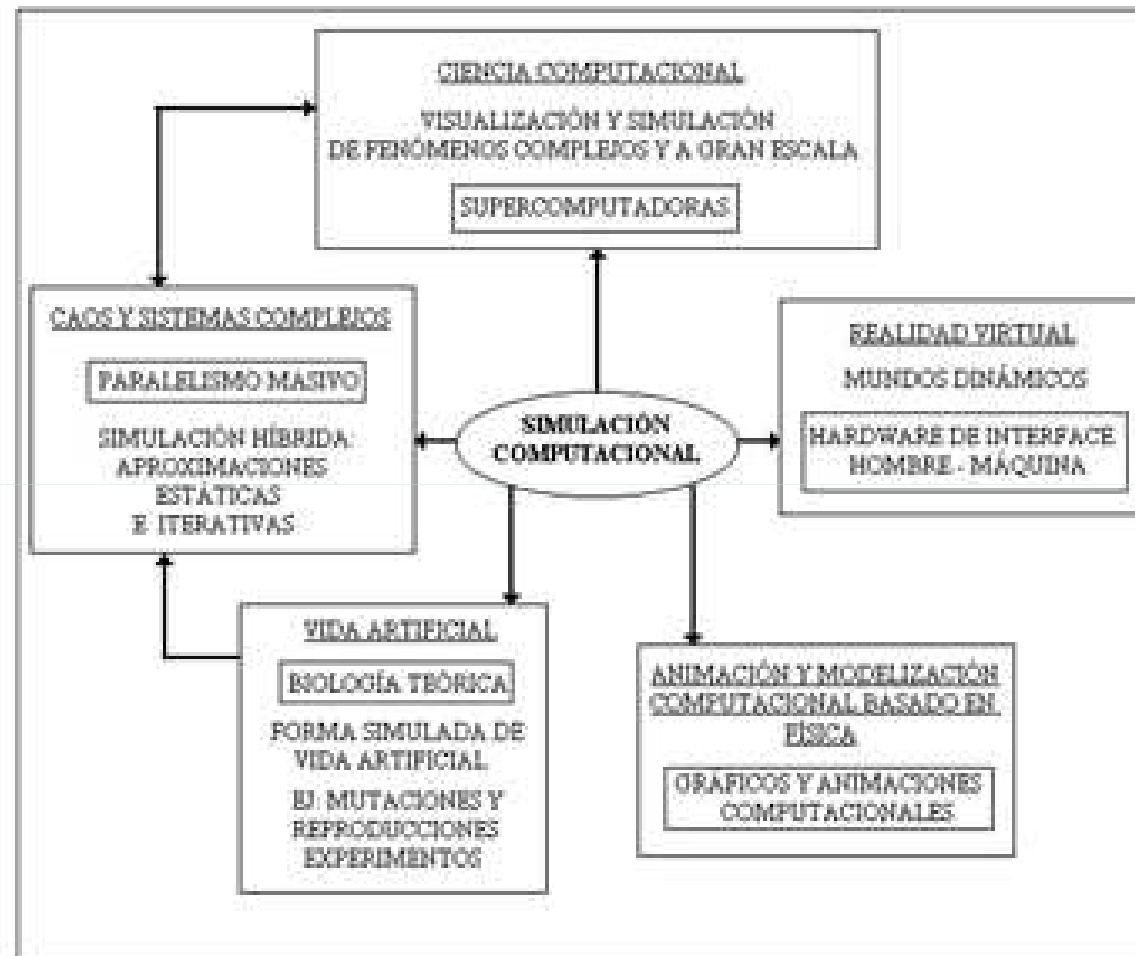
## VENTAJAS

- De aquí que el Campo de la Simulación se haya ampliado y diversificado en los últimos años hacia nuevas áreas, considerándose también el estudio de sistemas que pueden ser representados mediante modelos matemáticos que se explican o responden a soluciones exactas.
- Mediante la simulación nos centramos en el problema físico, dejando menos tiempo a la resolución matemática.

## INCONVENIENTES

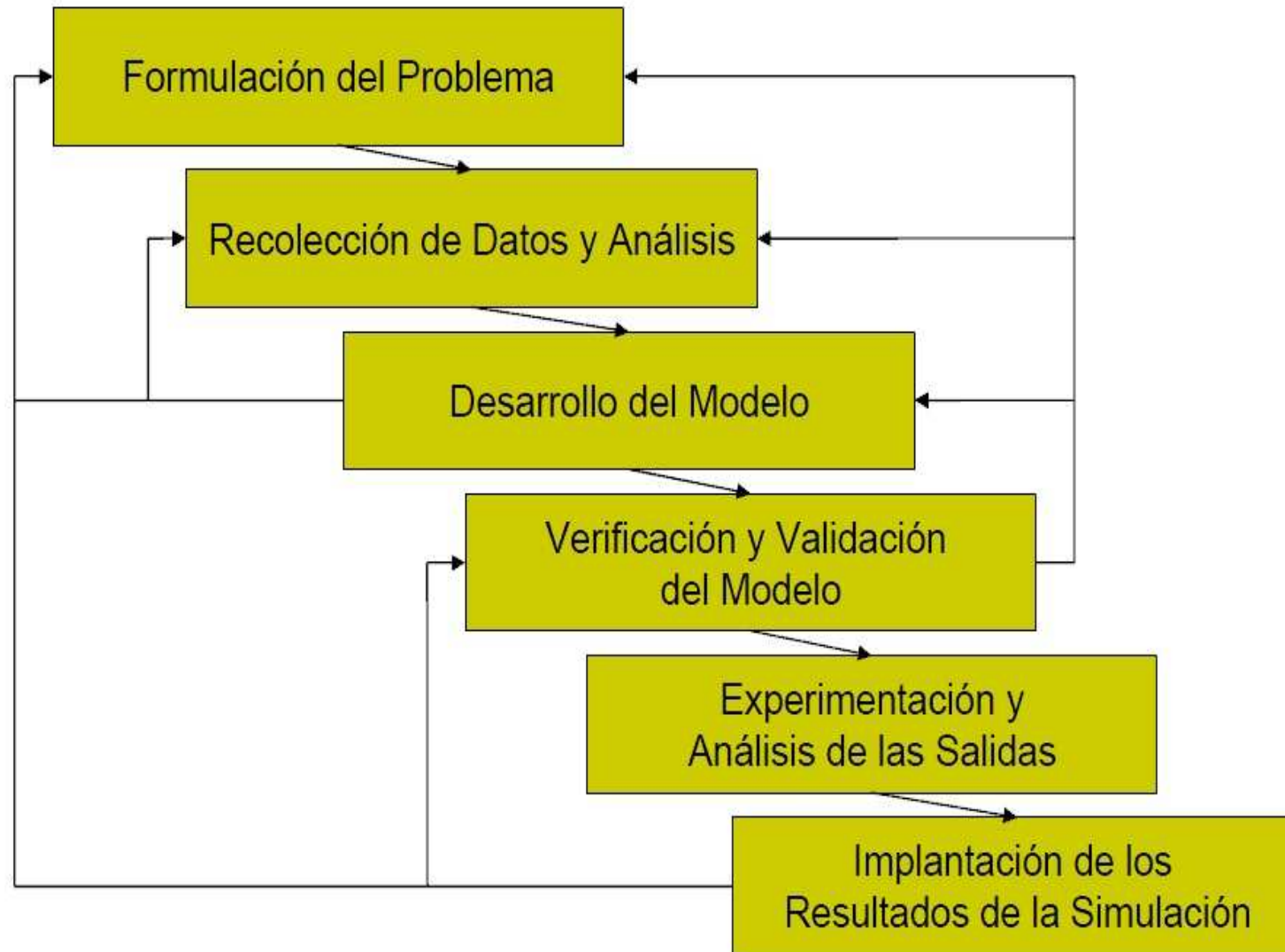
- El desarrollo de un buen modelo de simulación es costoso y requiere de mucho tiempo.
- Puede parecer que una simulación refleja con precisión una situación del mundo real cuando, en verdad, no lo hace. Ciertos problemas intrínsecos a la simulación pueden producir resultados erróneos si no se resuelven correctamente. Ejemplo: Efecto mariposa
- La simulación es imprecisa y no podemos medir con exactitud el grado de imprecisión.

## CAMPOS DE INFLUENCIA



Dominios de la SIMULACIÓN

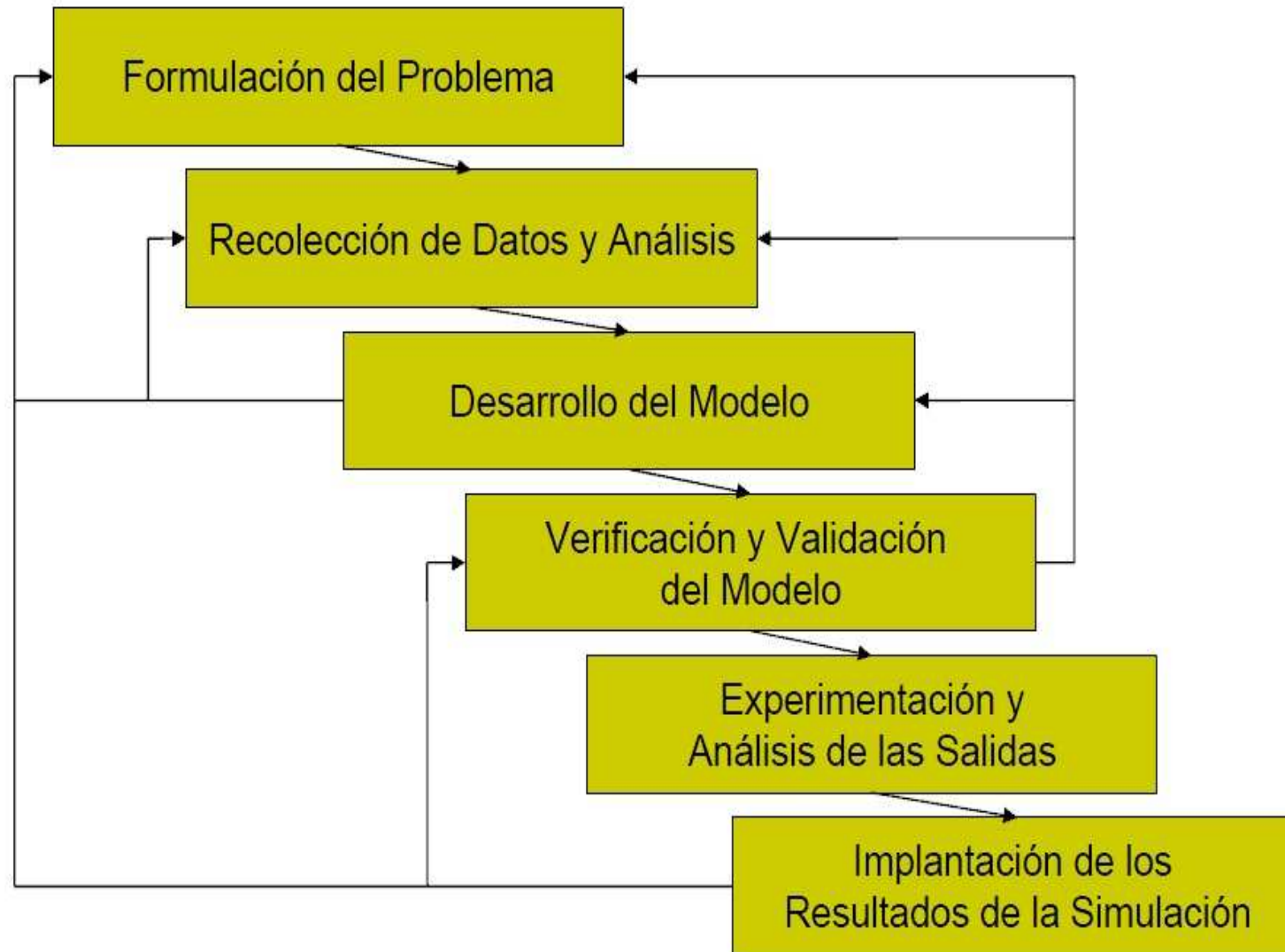
# Pasos en la Simulación



# TEMA II : TÉCNICAS DE MODELADO

1. Introducción a las técnicas de modelado
2. Objetivos
3. Definir modelo matemático.
4. Distinguir los diversos tipos de sistemas y modelos, desde el punto de vista del modelado y la simulación.

# Pasos en la Simulación



# SISTEMA

*"Conjunto de elementos que interactúan entre sí, con un fin común, que se aísla del universo para su estudio."*

*"Conjunto de elementos que interactúan entre ellos" Pierre Delattre 1971."*

*La **simulación** ofrece la posibilidad de conocer el futuro comportamiento del sistema*

*Para ello se construyen los **modelos**, normalmente una **simplificación de la realidad**.*

*Se determina a partir de un análisis de todas las variables que intervienen en el **sistema y de las relaciones** que se descubren que existen entre ellas.*

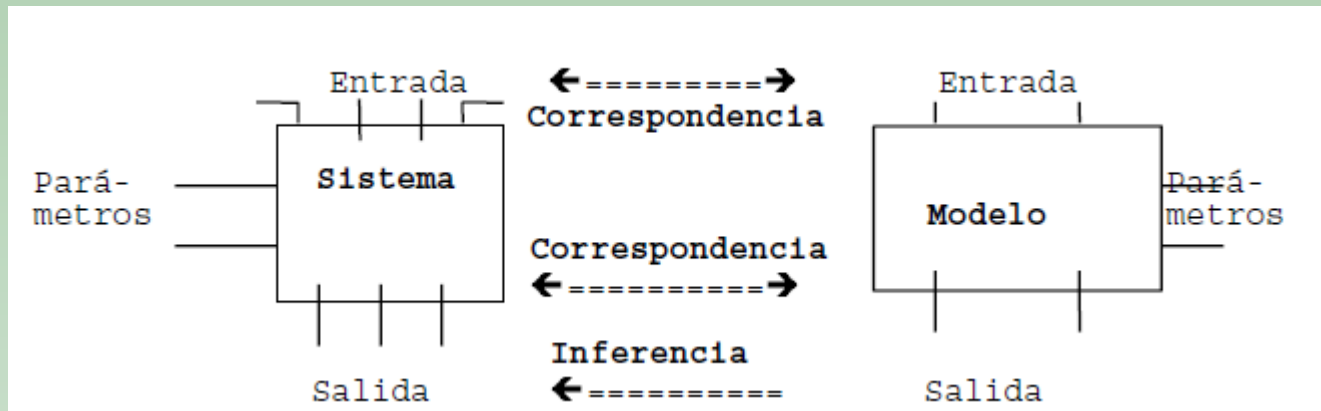


# REPRESENTACIÓN DE SISTEMAS: MODELOS

Modelo puede definirse como:

- Una representación simplificada de un sistema que nos facilitará explicar, comprender, cambiar, preservar, prever y controlar el comportamiento de un sistema.
- Un sustituto de un sistema físico concreto.

# MODELOS DE SIMULACION



*El modelo que se construye debe tener en cuenta todos los detalles que interesan en el estudio para que realmente represente al sistema real (Modelo válido). Por razones de simplicidad deben eliminarse aquellos detalles que no interesan y que lo complicarían innecesariamente.*

*Se requiere pues, que el modelo sea una fiel representación del sistema real.*

*Consiste en una descripción del sistema, junto con un conjunto de reglas que lo gobiernan.*

## CARACTERÍSTICAS DE LOS MODELOS PARA LA SIMULACIÓN DIGITAL

- Concisos
- Sin ambigüedades (interpretación única)
- Procesables por un ordenador



### MODELOS MATEMÁTICOS SIMBÓLICOS



Son una **representación matemática de los mecanismos** que gobiernan el comportamiento de un sistema (atributos) y de su interacción con el entorno, permitiendo el estudio mediante un ordenador de la conducta de dicho sistema

## CONSIDERACIONES SOBRE LOS MODELOS MATEMÁTICOS

El tipo de formalización matemática depende de las características intrínsecas de las dinámicas de interés a representar.

Representación parcial de la realidad y válidos para el objetivo de diseño.  
El modelo está siempre relacionado con el par sistema-experimento.

Ningún modelo de un sistema es válido para todos los posibles experimentos salvo el propio sistema o una copia idéntica del mismo.

Así cuando se escucha a alguien decir "el modelo de ese sistema no es válido" no podemos saber de que están hablando, ya que un modelo del sistema puede ser válido para un experimento y no serlo para otro.

## CONSIDERACIONES SOBRE LOS MODELOS MATEMÁTICOS

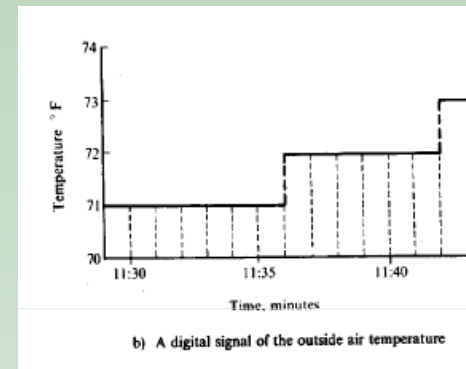
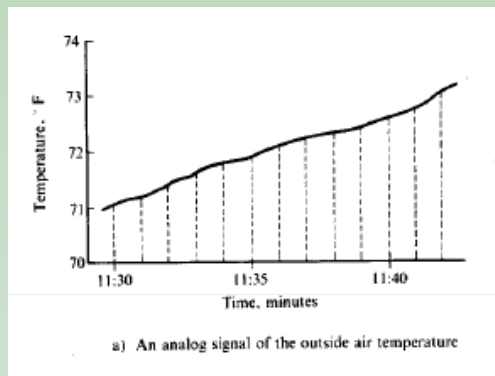
Deben cumplir el principio de *parsimonia*:

- Los modelos simples son preferibles a los complicados.
- El modelo que se utilice debe requerir el menor número posible de parámetros que representen adecuadamente el patrón de los datos.

# CLASIFICACIÓN DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS

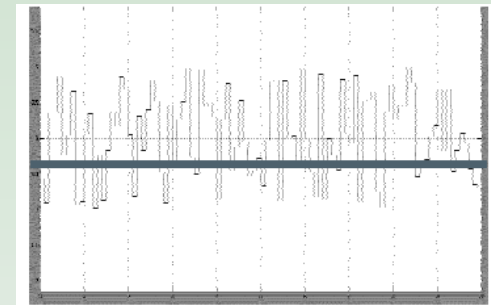
Según tipos de variables dependientes o independiente (tiempo)

– Rango de valores de las variables independientes: continuas o discretas



– Actualización de la variable dependiente en el tiempo

- De un modo continuo
- De un modo discreto
- En instantes predefinidos
- Cuando sucede un evento



## CLASIFICACIÓN DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS

– Deterministas o estocásticos:

Se denomina **estocástico** a aquel sistema que funciona, sobre todo, por el azar.. Las leyes conocidas de causa-efecto no explican cómo actúa el sistema (y de modo reducido, el fenómeno) en función de probabilidades.

Un **algoritmo probabilista** (o probabilístico) es un algoritmo que basa su resultado en la toma de algunas decisiones al azar, de tal forma que, en promedio, obtiene una buena solución al problema planteado para cualquier distribución de los datos de entrada.

## **MODELOS ESTOCASTICOS FRENTE A DETERMINISTAS**

Se puede optar por la elección aleatoria si se tiene un problema cuya elección óptima es demasiado costosa frente a la decisión aleatoria. Un algoritmo probabilista puede comportarse de distinta forma aplicando la misma entrada.

A un algoritmo determinista nunca se le permite que no termine: hacer una división por 0, entrar en un bucle infinito, etc.

Si existe más de una solución para unos datos dados, un algoritmo determinista siempre encuentra la misma solución (a no ser que se programe para encontrar varias o todas).



Un algoritmo probabilista puede encontrar soluciones diferentes ejecutándose varias veces con los mismos datos.

A un algoritmo determinista no se le permite que calcule una solución incorrecta para ningún dato.

Un algoritmo probabilista puede equivocarse siempre que esto ocurra con una probabilidad pequeña para cada dato de entrada.

Repitiendo la ejecución un número suficiente de veces para el mismo dato, puede aumentarse tanto como se quiera el grado de confianza en obtener la solución correcta.

El análisis de la eficiencia de un algoritmo determinista es, en determinadas ocasiones, difícil.

El análisis de los algoritmos probabilistas es, a menudo, muy difícil.

# CLASIFICACIÓN DE ALGORITMOS PROBABILISTAS

- **Numéricos:** Solución aproximada a problemas numéricos para los que es imposible dar una respuesta exacta. Su precisión es mayor cuanto más tiempo se le dedique al algoritmo.
- **Monte Carlo:** Dan una respuesta concreta pero ésta no tiene por qué ser correcta.
- **Las Vegas:** Su respuesta es siempre correcta pero puede no encontrarla.
- **Sherwood:** Dan siempre respuesta y ésta es correcta

## Algoritmos numéricos

La solución obtenida es siempre aproximada pero su precisión esperada mejora aumentando el tiempo de ejecución. Normalmente, el error es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del esfuerzo invertido en el cálculo.

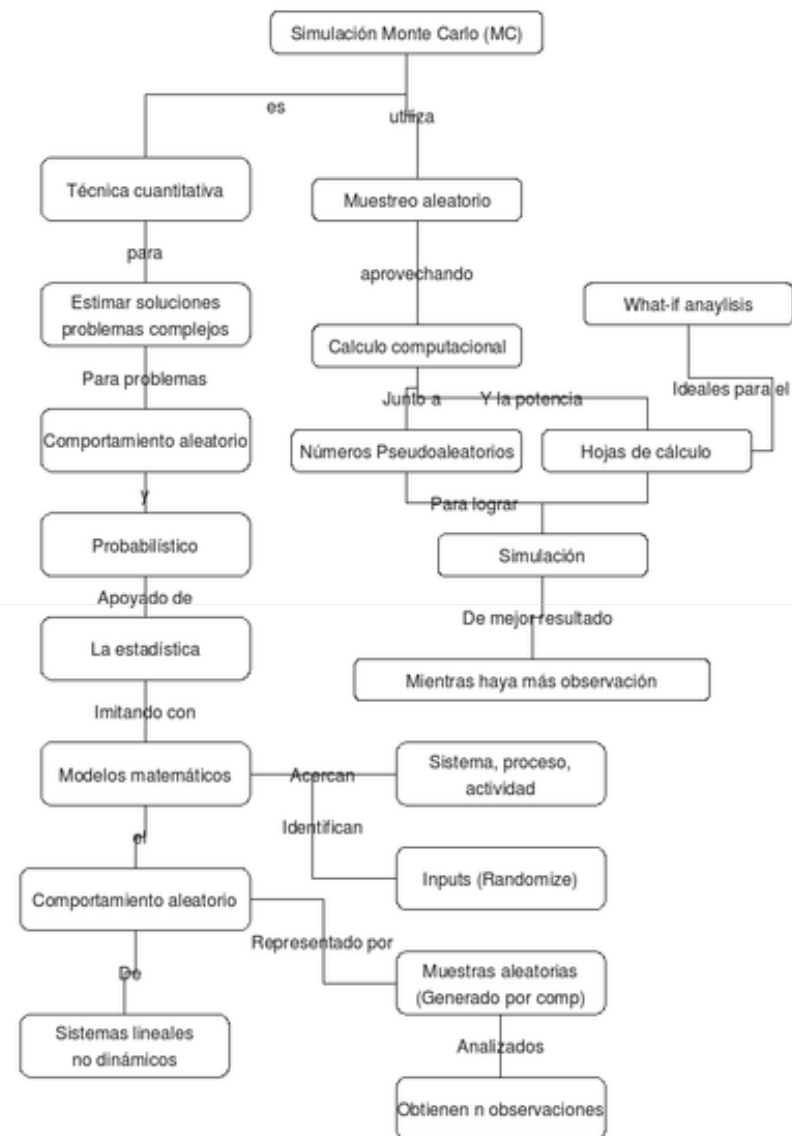
## Algoritmos de Las Vegas

- A veces no dan la respuesta
- Se emplean para resolver problemas para los que no se conoce ningún algoritmo determinista eficiente.
- Se corre el riesgo de tomar decisiones que impidan llegar a la solución.
- Permiten, a veces una eficiencia mayor para todos los ejemplares. La esperanza matemática del tiempo debe ser buena para todo ejemplar y la probabilidad de un tiempo excesivo despreciable.
- Se puede repetir el algoritmo hasta obtener una solución. La probabilidad de éxito es mayor cuanto de más tiempo se dispone

**El método de Montecarlo** es un método no determinístico o estadístico numérico usado para aproximar expresiones matemáticas complejas y costosas de evaluar con exactitud. El método se llamó así en referencia al Casino de Montecarlo (Principado de Mónaco) por ser “la capital del juego de azar”, al ser la ruleta un generador simple de números aleatorios. El nombre y el desarrollo sistemático de los métodos de Montecarlo datan aproximadamente de 1944

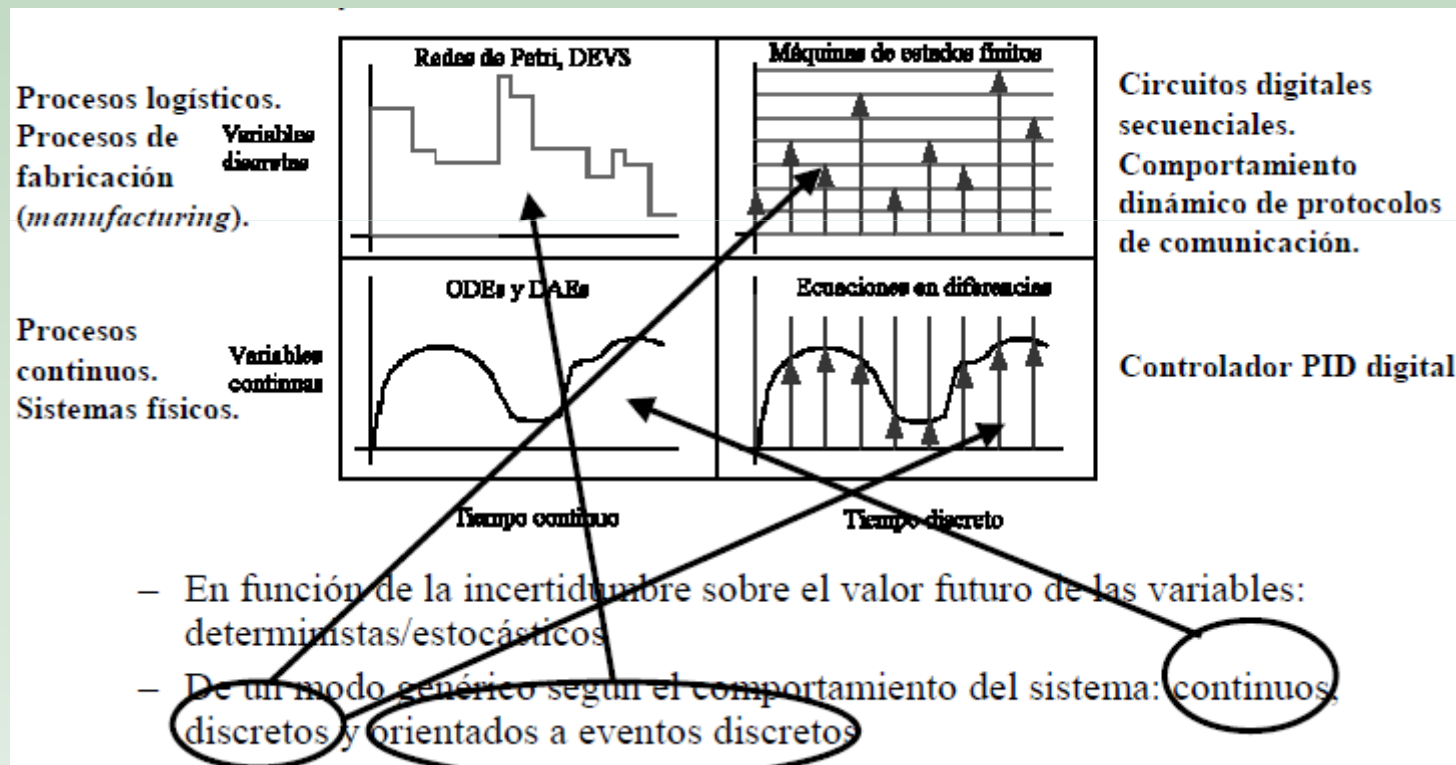
El uso de los métodos de Montecarlo como herramienta de investigación, proviene del trabajo realizado en el desarrollo de la bomba atómica durante la segunda guerra mundial en el Laboratorio Nacional de Los Álamos en EE.UU. Este trabajo conllevaba la simulación de problemas probabilísticos de hidrodinámica concernientes a la difusión de neutrones en el material de fisión.

El método de Montecarlo proporciona soluciones aproximadas a una gran variedad de problemas matemáticos posibilitando la realización de experimentos con muestreos de números pseudoaleatorios en una computadora. El método es aplicable a cualquier tipo de problema, ya sea estocástico o determinista. A diferencia de los métodos numéricos que se basan en evaluaciones en  $N$  puntos en un espacio  $M$ -dimensional para producir una solución aproximada, el método de Montecarlo tiene un error absoluto de la estimación que decrece con el número de iteraciones.



## Taxonomía de sistemas determinista

- Según el rango de la base de tiempos: tiempo continuo/discreto
- Según los valores de las variables dependientes: variables continuas, discretas y mixtos





## Taxonomía de modelos según el tipo de Sistema

### Sistemas de tiempo continuo y variables continuas

- Ecuaciones diferenciales y algebraicas
- Eventos en el tiempo y el estado

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{m} (F(t) - k \cdot x(t) - a \cdot v(t))$$
$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t)$$

### Sistemas de tiempo discreto (periódico) y variables continuas

- Ecuaciones en diferencias

$$v(t + \Delta t) = F(t) - k \cdot x(t - \Delta t) + b \cdot (v(t) - 2 \cdot v(t - \Delta t))$$

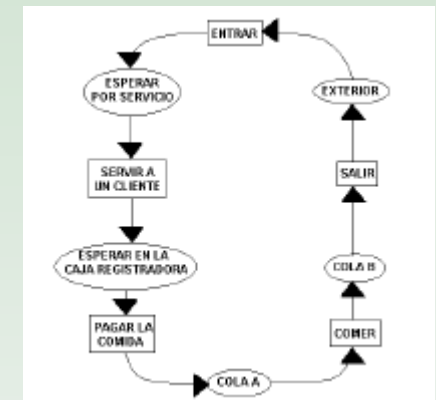
### - Sistemas de tiempo discreto (periódico) y variables discretas

- Máquinas de estados finitos

### Sistemas de tiempo discreto (aperiódico) y variables discretas

### Sistemas orientados a eventos discretos

- Redes de Petri, ACD, DEVS, modelos de colas .



# MODELOS MATEMATICOS

Un modelo matemático se define como una descripción desde el punto de vista de las matemáticas de un hecho o fenómeno del mundo real.

El objetivo del modelo matemático es entender ampliamente el fenómeno y tal vez predecir su comportamiento en el futuro.

Hay una gran cantidad de funciones que representan relaciones observadas en el mundo real

## 1.- Polinomios

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

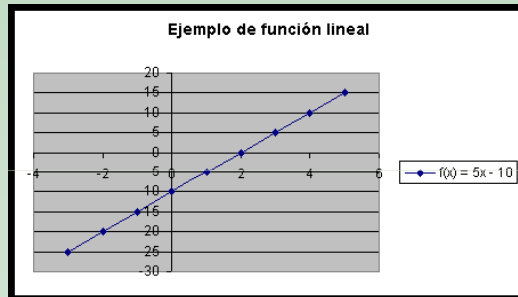
$n$  representa un entero negativo y los números  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ , son constantes llamadas coeficientes del polinomio.

El dominio de todos los polinomios son todos los números reales  $(-\infty, \infty)$ .

# MODELOS MATEMATICOS

## Modelos Lineales

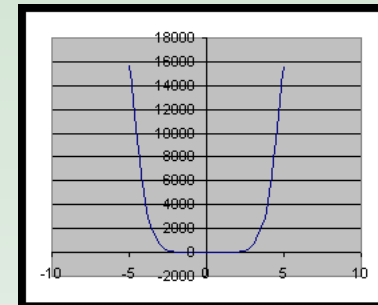
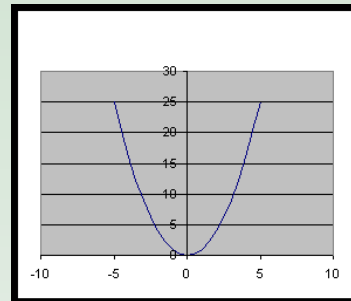
Se dice que una función es lineal cuando su gráfica es una línea recta; y por consecuencia tiene la forma:



## 2. Funciones potencia

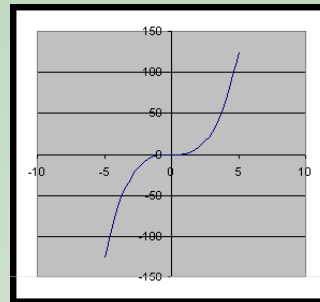
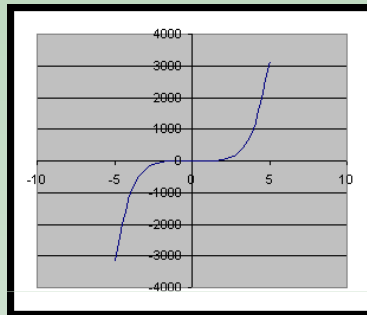
Una función es llamada potencia, cuando tiene la forma:  $f(x) = x^a$ , donde  $a$  es constante.

Funciones de exponente par  
 $x^2$  y  $x^6$

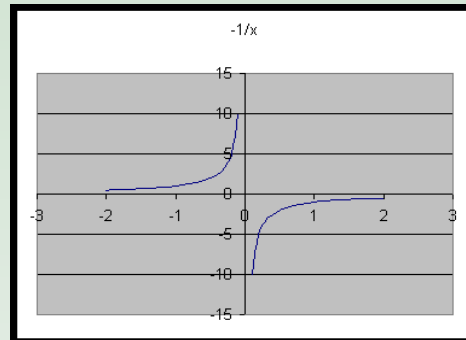


# MODELOS MATEMATICOS

Funciones de exponente par  $x^3$  y  $x^5$

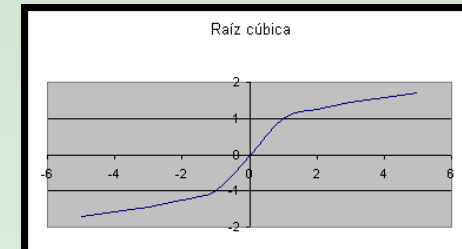
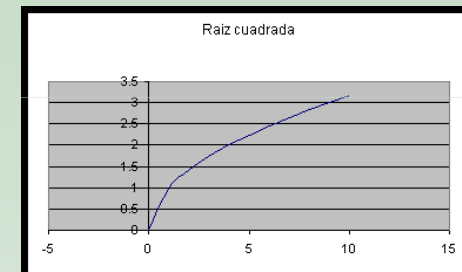


2.3,  $a = -1$  Éste tipo de función es llamada función recíproca, y su forma es  $f(x) = x^{-1}$  o  $f(x) = -1/x$



2.2. Función raíz

$a = 1/n$ ,  $n$  es un entero positivo



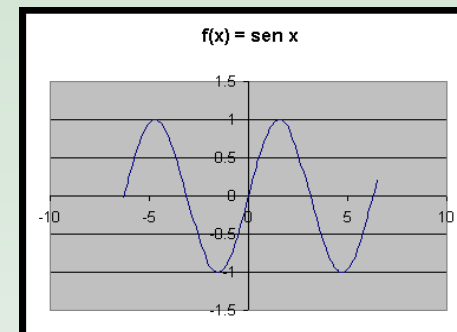
# MODELOS MATEMATICOS

## Funciones racionales

Una función es llamada racional cuando es una razón o división de dos polinomios:  $f(x) = P(x) / Q(x)$ , lo constituyen todos los valores que no hagan a  $Q(x) = 0$

## Funciones trigonométricas

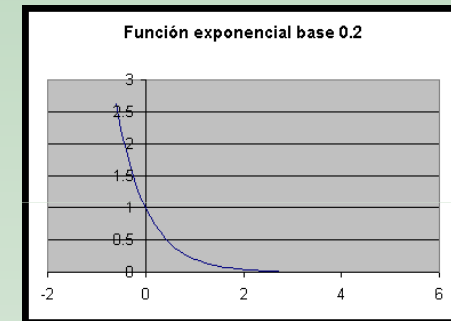
En el caso de éstas funciones, es conveniente utilizar la medida de radianes; es importante mencionar que cada función tiene una gráfica específica. En el caso específico del seno y coseno, su dominio es  $(-\infty, \infty)$  y su imagen  $[-1, 1]$



# MODELOS MATEMATICOS

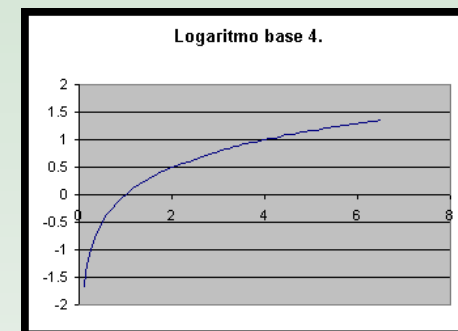
## Funciones exponenciales

Se les llama funciones exponenciales a aquellas que tienen la forma  $f(x) = a^x$ , donde la base  $a$  es una constante positiva. Su dominio es  $(-\infty, \infty)$  y su imagen  $(0, \infty)$



## Funciones logaritmos

Son funciones que tienen la forma  $f(x) = \log_a x$ , donde la base  $a$  es una constante positiva; es importante mencionar que son las funciones inversas a las exponenciales; por lo tanto su dominio es  $(0, \infty)$  y su imagen  $(-\infty, \infty)$ .



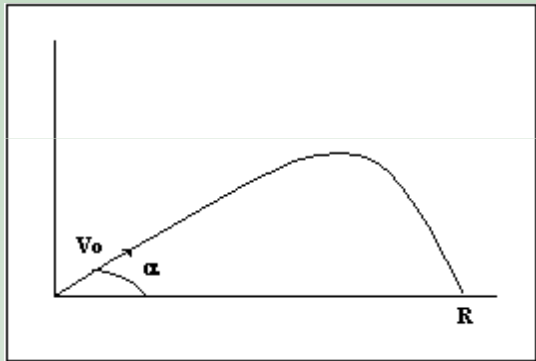
## Funciones trascendentes

En realidad esta clasificación engloba a todas aquellas funciones que no son algebraicas (esto es, las que involucran adición, sustracción, división y multiplicación de variables).

Las funciones trascendentes son las trigonométricas, logarítmicas, exponenciales, y trigonométricas inversas, entre otras.

## EJEMPLO PRACTICO DE MODELO MATEMATICO TRASCENDENTE

Un proyectil que se lanza con un tiro parabólico pero que debido a la fuerza de resistencia del aire, la trayectoria se desvía, la velocidad es inferior a 24 m/s



Las ecuaciones que definen el movimiento son:

$$\sum F_x \Rightarrow m.\ddot{x} = -k.m.\dot{x}$$

$$\sum F_y \Rightarrow m.\ddot{y} = -k.m.\dot{y} - m.g$$

Las soluciones son:

$$x = \frac{V_{ox}}{k} \cdot (1 - e^{-k.T})$$

$$y = -\frac{g.T}{k} + \frac{k.V_{oy} + g}{k^2} \cdot (1 - e^{-k.T})$$

T: tiempo de vuelo

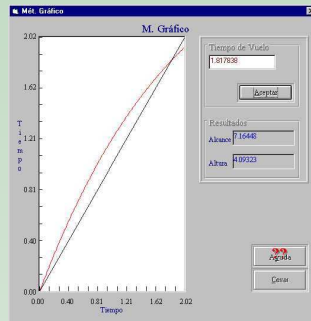
$$T = \frac{k.V_{oy} + g}{g.k} \cdot (1 - e^{-k.T})$$



## SOLUCIONES AL MODELO:

1º la ecuación del tiempo de vuelo se desarrolla en polinomio, se aproxima el tiempo de vuelo a valores próximos a cero y se obtiene soluciones analíticas que sólo son válidas para valores de K inferiores a 0,01

2º Método gráfico:



$$1^\circ T = y$$

$$2^\circ y = \frac{k \cdot V_{oy} + g}{g \cdot k} \cdot (1 - e^{-k \cdot T})$$

Se transforma la ecuación  
trascendente en sistema de  
ecuaciones y se resuelve  
gráficamente el T

3º Método numérico : Iterativo del punto fijo para la resolución de la ecuación del tiempo de vuelo.

| Tiempo  | Altura  | Alcance |
|---------|---------|---------|
| 0.17446 | 1.5912  | 0.37344 |
| 0.34893 | 2.76354 | 0.74688 |

| Tiempo  | Altura  | Alcance |
|---------|---------|---------|
| 0.18404 | 1.66608 | 1.05496 |
| 0.36808 | 2.86826 | 2.01717 |

| Tiempo  | Altura  | Alcance |
|---------|---------|---------|
| 0.18404 | 1.66606 | 1.05494 |
| 0.36807 | 2.86823 | 2.01714 |

## PROCESO DE CONSTRUCCIÓN DE MODELOS

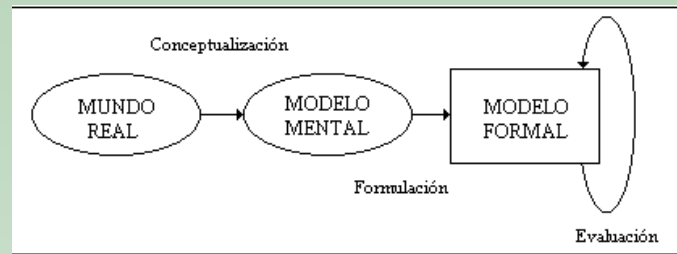
Hay dos puntos de vista a la hora de establecer un modelo matemático de un sistema, y son:

Conductista o heurístico: La construcción del modelo se realiza a partir de procesamiento de datos históricos de la evolución del sistema. Se trata de ajustar un modelo previamente elaborado a los datos disponibles. No se pretende establecer la estructura interna del sistema, sino que se supone una estructura interna, a priori, que reproduzca el comportamiento observado del sistema. Este enfoque es el seguido en econometría.

**Estructuralista:** La construcción del modelo se realiza siguiendo un análisis cuidadoso y detenido de los distintos elementos que intervienen en el sistema observado. De aquí se extrae la lógica interna del modelo que conduce a la obtención de la estructura, realizándose posteriormente, un ajuste de los parámetros libres del modelo con los datos históricos

*En el proceso de construcción de modelos hay que reseñar que el proceso de selección de variables y establecimiento de relaciones entre ellas, está presidido en gran parte por la experiencia, intuición, inspiración, incluso la suerte.*

# FASES DE CONSTRUCCION



La Fase de Conceptualización consiste en la obtención de una comprensión mental de un cierto fenómeno del mundo:

- Obtención de información a través de la opinión de expertos y la literatura al respecto.
- Definición de aspectos del problema a resolver.
- Particularización del comportamiento dinámico del sistema mediante la estructura más simple que lo genere..
- Identificación de elementos del sistema, lo que llevará a establecer los límites del sistema.

La Fase de Formulación trata de representar los elementos manejados en la fase anterior por medio de un lenguaje formal, procediéndose en la secuencia siguiente:

- Establecimiento de diagramas formales.
- Cálculo de ecuaciones dinámicas del modelo.
- Implementación en computador utilizando un lenguaje apropiado que procese el conjunto de ecuaciones dinámicas.

La Fase de Evaluación consiste en el análisis del modelo así como su sometimiento a criterios de aceptabilidad, procediéndose según la secuencia siguiente:

Ensayos mediante simulación de las hipótesis sobre las que se asienta el modelo y su consistencia: Verificación y Validación.

Análisis de sensibilidad para estudiar la dependencia de las conclusiones extraídas del modelo con las variaciones de los parámetros que aparecen en el mismo.

Se ha de utilizar un método que nos permita averiguar cuán parecido es nuestro modelo a la realidad.

El criterio de aceptabilidad empleado no va únicamente a ser el mero ajuste estadístico de datos. Por ello, se utilizará un criterio distinto, llamado “evaluación generalizada” que tendrá en cuenta no sólo las discrepancias predicción-observación, sino todos los aspectos cuantitativos y cualitativos del modelo. Estos aspectos los aportarán los especialistas familiarizados con el sistema (tendencias gráficas, etc...)

Para la evaluación de la calidad y la aplicabilidad de los modelos, se utilizan distintos indicadores estadísticos.

SUMA RESIDUAL CUADRÁTICA COMPUESTA (CRSS), utilizada para cuantificar la calidad de las correlaciones predichas en comparación con las mediciones experimentales a partir de la expresión:

$$CRSS = \sum_{i=1}^N (f_{rel_i}^{sim} - f_{rel_i}^{exp})^2$$

donde

$$f_{rel_i}^{sim} \quad f_{rel_i}^{exp}$$

representan, respectivamente, los valores calculados y medidos de la frecuencia relativa y N es el número de intervalos de clase considerados.

COEFICIENTE DE CORRELACIÓN (R) es una medida de la relación lineal entre los valores calculados por el modelo respectivo y los valores medidos

Estos parámetros únicamente nos permiten conocer la magnitud del error cometido al aceptar como válido un determinado modelo matemático. Existen, por otra parte, unas pruebas estadísticas que calculan la probabilidad de cometer error al rechazar el modelo cuando éste es correcto. Son las denominadas **pruebas de hipótesis** que se emplean para decidir entre dos hipótesis que afectan a una población, a partir de una medida del error cometido al optar por una de estas dos hipótesis.



## ETAPAS EN LA CONSTRUCCIÓN DE MODELOS

Etapa Inicial, comprende una clara y precisa definición del comportamiento dinámico del sistema:

Trazado de gráficos llamado modo de referencia, que representen el comportamiento temporal de las principales magnitudes de interés. El modo de referencia sirve como una imagen aproximada de las gráficas que se obtengan del modelo inicial (fase de conceptualización).

Identificación del conjunto de procesos fundamentales que se consideren suficientes para reproducir el modo de referencia (fase de conceptualización).

# ETAPAS EN LA CONSTRUCCIÓN DE MODELOS

## Etapas Inicial,

Búsqueda del mecanismo básico o conjunto más pequeño de procesos considerados suficientes para generar el modo de referencia (fase de conceptualización):  
Submodelos.

Establecimiento de los diagramas del modelo y las ecuaciones dinámicas del modelo a partir del mecanismo básico (fase de formulación).

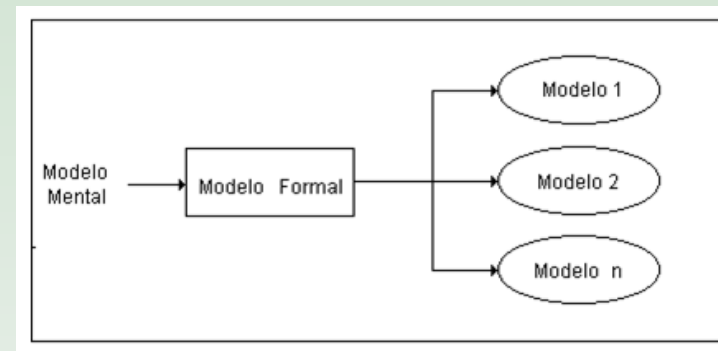
Realización de una pasada del modelo computerizado obtenido a partir de las ecuaciones y comparación de los resultados gráficos con el modo de referencia (fase de evaluación).

# ETAPAS EN LA CONSTRUCCIÓN DE MODELOS

## Etapa Perfeccionamiento,

Una serie de reelaboraciones del modelo obtenido en la etapa inicial con el fin de perfeccionarlo.

Las sucesivas etapas consistirán en una eliminación progresiva de las hipótesis más simplificadoras de manera que el modelo se aproxime cada vez más a la realidad.



## DIFICULTADES EN LA CONSTRUCCIÓN DE UN MODELO

- Para la construcción con éxito de un modelo es necesaria la descripción explícita del comportamiento dinámico formada por el modo de referencia, las hipótesis acerca de las causas y los mecanismos básicos.
- Las hipótesis dinámicas se obtienen a través de una exploración combinada del comportamiento histórico del sistema con estructuras simples de comportamiento conocido.
- Los límites del sistema se deben elegir lo suficientemente amplios para acoger los procesos que generan el comportamiento dinámico.

- El objetivo del modelo no es predecir, sino ensayar las hipótesis dinámicas
- El modelo inicial debe contener únicamente los mecanismos básicos que generen el modo de referencia.
- El modelo debe mantenerse transparente a través de todo el proceso modelado. Esto conduce a que se incluyan sólo las relaciones estrictamente necesarias y que sean también significativas.
- Para reducir la complejidad del modelo debe procederse a restringir el número de detalles

## VALIDACION DEL MODELO

Consiste en comprobar si el modelo conceptual de simulación es una adecuada representación del sistema que se está estudiando. Debe llevarse a cabo a lo largo de todo el estudio de simulación.

## ETAPA 2: CONTRASTAR EMPIRICAMENTE LAS HIPOTESIS DEL MODELO

- Estudiar si los datos de entrada se ajustan al modelo propuesto.
- Realizar análisis de sensibilidad para estudiar cuanto cambian los resultados de la simulación al cambiar los parámetros de entrada o las distribuciones de probabilidad. Las partes más sensibles habrá que programarlas con un mayor nivel de detalle

## ETAPA 3: DETERMINAR HASTA QUE PUNTO SON REPRESENTATIVOS LOS DATOS DE SALIDA

- Si existe un sistema similar al propuesto, se comparan los datos de salida del sistema, y los del modelo de simulación. Si son similares, el modelo es válido. A continuación se modificaría el modelo para representar al sistema que nos interesa estudiar
- Si no existe un sistema similar, se intenta simplificar el modelo de forma que tenga solución analítica, y se comparan los resultados. La validez del modelo será mayor cuanto menores sean las simplificaciones para obtener la solución analítica. El test definitivo se obtiene comparando los resultados del modelo con los del sistema propuesto, si este llega a construirse. Pero si no es válido, ya no puede corregirse.



# **TEMA III: METODOLOGÍA Y DESARROLLO EN LA IMPLEMENTACIÓN DE UN PROYECTO DE SIMULACION**

- 1. INTRODUCCIÓN.**
- 2. CLASIFICACIÓN.**
- 3. ANÁLISIS.**
- 4. RESOLUCIÓN E IMPLEMENTACIÓN.**
- 5. EVALUACIÓN CRÍTICA DEL FUNCIONAMIENTO.**
- 6. CONTRASTE DE RESULTADOS REALES.**

## **1. INTRODUCCIÓN. CONCEPTOS BÁSICOS**

### ¿Qué es un sistema?.

Un sistema puede ser definido como “una combinación de elementos o componentes interrelacionados entre sí y con el global que actúan juntos para obtener un fin.” (Natko). En este caso la palabra interrelación es el fundamento de la definición. Un sistema puede estar compuesto por uno o más subsistemas que a su vez también pueden estar divididos en otros subsistemas. Un sistema generalmente se ve afectado por los cambios ocurridos fuera de él, es decir en el entorno de sistema , por ello es necesario establecer los límites del sistema y su entorno, que dependerá de los que se quiera estudiar.

Una forma más sencilla de ver esta definición podría ser partiendo de un sencillo ejemplo. El sistema más grande es el Universo. Cada parte del universo que cortemos y de la que sepamos decir que pertenece a esa parte y que no será un sistema. Por tanto un sistema podrá ser prácticamente cualquier cosa. Un motor, una casa, un horno, etc. La clave está en poder diferenciarlo de su entorno.

Un sistema está formado por un conjunto de objetos. Para entender y analizar un sistema es necesario que todos sus objetos estén definidos. Se emplean términos tales como “entidad”, que es un objeto de interés para el sistema, y “atributo”, que es una propiedad de la entidad.

Es decir,:

- Entidad : objeto de interés del sistema
- Atributo: es una propiedad de una entidad
- Actividad: representa un periodo de tiempo de longitud específica.
- Estado del sistema: Colección de variables, relativas a los objetos sujetos a estudio, necesario para describir al sistema en cualquier momento.

- Evento: hecho que se produce en un instante determinado y que hace variar las condiciones del sistema. Endógenos: aquellos eventos que se producen en el interior del sistema, exógenos, son los que se producen en el exterior

## **2. CLASIFICACIÓN.**

Generalmente los sistemas se clasifican en función de su estado. Definimos como estado de un sistema para un momento de tiempo al valor de un conjunto de variables que definen al sistema en dicho momento de tiempo. Según esto, el sistema podrá ser estático o dinámico.

Un sistema dinámico será aquel cuyos valores varíen con el tiempo. Esta variación puede ser cíclica o puede ser aleatoria. Esto nos dará lugar a una nueva subdivisión dentro de los sistemas dinámicos. Esta clasificación se realizará en función al tipo de variables que conforman el sistema. Según este criterio, existirán tres tipos de sistemas dinámicos. Los continuos, los discretos y los híbridos, en los que las variables pueden ser tanto continuas como discretas.

Entendemos por sistema continuo aquel cuyas variables varían de forma continua en el tiempo. Un sistema continuo podría ser un péndulo, que se va moviendo y en cada momento de tiempo tiene una posición, que será la variable fundamental del sistema.

También lo sería un objeto caliente que se enfría en una habitación, porque el calor que va perdiendo va variando en cada instante hasta que alcanza el equilibrio, momento en que el sistema pasaría a ser de dinámico a estático.

Un sistema dinámico se considerará discreto cuando las variables que le describen varían de una forma discreta sobre el tiempo. Se puede

considerar un sistema discreto la fila de un banco, tomando como variable que describe a dicha fila el número de personas que se encuentran esperando dicha fila. De este modo la variable será discreta porque varía sólo en cantidades discretas. Nunca hay fracciones de clientes, sino unidades enteras.

En general, gran parte de los sistemas asociados a fábricas son sistemas discretos, porque los productos siempre varían en unidades discretas. Por ejemplo, los paquetes que se cargan en un camión o los ladrillos que tienen que entrar en un horno, etc.

Un sistema en el que sus variables varíen unas de forma discreta y otras de forma continua se considerará un sistema híbrido. También lo será si sus variables son continuas pero se producen cambios en la causalidad del sistema. Esto es, que en determinados momentos varíen las ecuaciones que modelan el sistema. Un ejemplo sencillo sería una pelota que cae al suelo y rebota varias veces. Las ecuaciones que describen su posición son diferentes en el caso de la caída que en el del rebote hacia arriba. En un caso la fuerza de la gravedad está a favor del movimiento y en otro en contra.

Otro concepto a tener en cuenta dentro del comportamiento de los sistemas dinámicos es si se encuentra en estado transitorio o estacionario. Diremos que un sistema se encuentra en un estado estacionario cuando los cambios que se produzcan en el estado del sistema, en el tiempo, lo hagan dentro de un intervalo relativamente fijo. Por ejemplo, un avión que vuela en una dirección, a una altura y velocidad fijadas previamente, es un sistema dinámico, porque el avión se mueve, y además es estacionario. Un estado transitorio es aquel en el que se producen cambios bruscos en el estado del sistema. Por ejemplo, cuando encendemos un fluorescente. Hasta que se fija la luz tenemos un periodo en el que se producen variaciones. Durante ese tiempo, ese sistema se comporta de una forma transitoria.

### **3. ANÁLISIS. ESTUDIO Y DESARROLLO DEL MODELO**

Este estudio se ha desarrollado ampliamente en el Tema 2. a modo de recordatorio tenemos:

#### **Definición de Modelo.**

Anteriormente, hemos mencionado que un sistema es una sección de la realidad que es el foco primario de nuestro estudio. De cara a estudiar este sistema, primero deberemos realizar una representación del sistema. A esta representación es lo que se denomina *modelo*. Dicho de otra manera, realizaremos otra abstracción del sistema que nos sea útil de cara a estudiar su comportamiento.

#### **Clasificación de los Modelos.**

Existen diversas posibilidades a la hora de generar el modelo de un sistema. En general, el modelo de un sistema va a consistir en un conjunto de ecuaciones o relaciones que nos permiten obtener los valores de salida del sistema respecto a unas variables de entrada.

Una clasificación puede ser:

- Modelos Físicos: Como su propio nombre indica, son representaciones de sistemas físicos. Son, dicho de un modo coloquial, maquetas de los sistemas reales. Aproximaciones físicas al sistema real donde se realizan experimentos de cara a estudiar el sistema. No son de nuestro interés porque en ellos no aparece el ordenador.

- Modelos Simbólicos: Representaremos nuestro modelo mediante ecuaciones simbólicas. Pueden ser matemáticos y no matemáticos. Generalmente, los matemáticos son los más utilizados por su consistencia y unicidad, así como su relativamente fácil manejo. También existen modelos no matemáticos. En los que las relaciones están expresadas de modo gráfico (diagramas de flujo) o mediante sentencias lógicas. Nosotros, nos centraremos fundamentalmente en sistemas continuos, en los modelos matemáticos.

Un ejemplo de modelo matemático podría ser la ecuación que representa el movimiento de un muelle excitado exteriormente.

$$k.v = A.\text{sen } t$$

'x' representa la posición del muelle en cada momento. Resolviendo esta ecuación diferencial conoceremos la posición del muelle en cada instante de tiempo. En este caso la solución es relativamente sencilla de calcular y no tiene mucho interés resolverla mediante una simulación porque analíticamente podemos calcular la solución de la ecuación, que será una combinación de senos y cosenos..

### **Proceso de Construcción de Modelos.**

El proceso de construcción de un modelo se realiza siguiendo una secuencia de pasos establecida. Este proceso además no está exento de dificultades.

Hay dos puntos de vista a la hora de establecer un modelo matemático de un sistema, y son:

### 1. Conductista o heurístico:

La construcción del modelo se realiza a partir de procesamiento de datos históricos de la evolución del sistema. Se trata de ajustar un modelo previamente elaborado a los datos disponibles. No se pretende establecer la estructura interna del sistema, sino que se supone una estructura interna, a priori, que reproduzca el comportamiento observado del sistema. Este enfoque es el seguido en econometría.

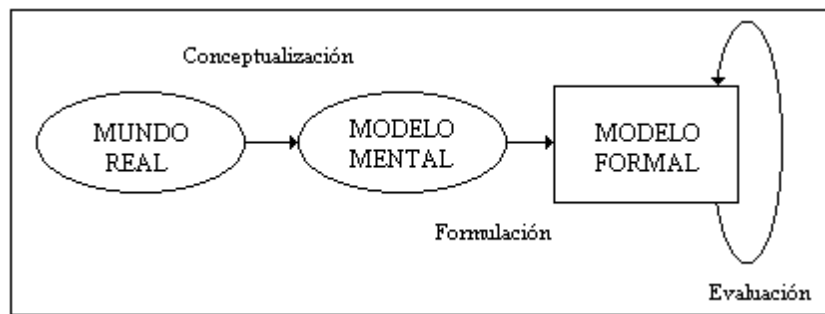
### 2. Estructuralista:

La construcción del modelo se realiza siguiendo un análisis cuidadoso y detenido de los distintos elementos que intervienen en el sistema observado. De aquí se extrae la lógica interna del modelo que conduce a la obtención de la estructura, realizándose posteriormente, un ajuste de los parámetros libres del modelo con los datos históricos.

Antes de entrar en el proceso de construcción de modelos hay que reseñar que el proceso de selección de variables y establecimiento de relaciones entre ellas, está presidido en gran parte por la experiencia, intuición, inspiración, incluso la suerte. Sin embargo, es posible llegar a una cierta sistematización, describiendo la construcción en tres fases:

- Fase de Conceptualización.
- Fase de Formulación.
- Fase de Evaluación.

En la siguiente figura se muestran las tres fases y se indica el carácter iterativo del proceso de construcción, en el que no se va de una forma progresiva y única de una fase a la siguiente, sino que se procede de una a otra sin un orden especial.



La Fase de Conceptualización consiste en la obtención de una comprensión mental de un cierto fenómeno del mundo real, procediéndose según las siguientes etapas:

- Obtención de información a través de la opinión de expertos y la literatura al respecto.
- Definición de aspectos del problema a resolver.
- Particularización del comportamiento dinámico del sistema mediante la estructura más simple que lo genere, basándose en el conocimiento de estructuras simples.
- Identificación de elementos del sistema, lo que llevará a establecer los límites del sistema.

La Fase de Formulación trara de representar los elementos manejados en la fase anterior por medio de un lenguaje formal, procediéndose en la secuencia siguiente:

- Establecimiento de diagramas formales.
- Cálculo de ecuaciones dinámicas del modelo.
- Implementación en computador utilizando un lenguaje apropiado que procese el conjunto de ecuaciones dinámicas.

La Fase de Evaluación consiste en el análisis del modelo así como su sometimiento a criterios de aceptabilidad, procediéndose según la secuencia siguiente:



- Ensayos mediante simulación de las hipótesis sobre las que se asienta el modelo y su consistencia: Verificación y Validación.
- Análisis de sensibilidad para estudiar la dependencia de las conclusiones extraídas del modelo con las variaciones de los parámetros que aparecen en el mismo.

El criterio de aceptabilidad empleado no va únicamente a ser el mero ajuste estadístico de datos. Por ello, se utilizará un criterio distinto, llamado “evaluación generalizada” que tendrá en cuenta no sólo las discrepancias predicción-observación, sino todos los aspectos cuantitativos y cualitativos del modelo. Estos aspectos los aportarán los especialistas familiarizados con el sistema (tendencias gráficas, etc...)

### **Etapas de Construcción de un Modelo.**

El proceso de construcción de un modelo no es lineal, pasandose en sucesivas etapas por modelos progresivamente mejorados de acuerdo con un cierto criterio de aceptabilidad.

Sin embargo esto presupone la existencia de un modelo inicial, que tenga que ser enjuiciado y en su caso, modificado y mejorado.

Por lo tanto, el proceso de modelado consta de dos etapas, a saber:

- Etapa Inicial
- Etapa de Perfeccionamiento.

La Etapa Inicial comprende una clara y precisa definición del comportamiento dinámico del sistema. Para ello se siguen los siguientes pasos:

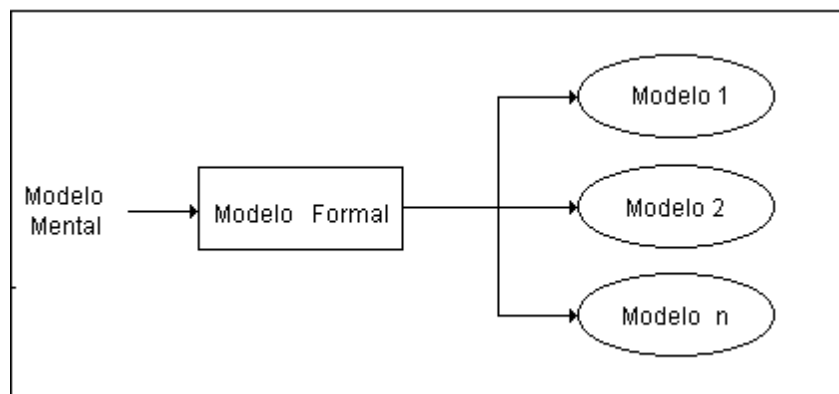
1. Trazado de gráficos llamado modo de referencia, que representen el comportamiento temporal de las principales magnitudes de interés. El modo de referencia sirve como una

imagen aproximada de las gráficas que se obtengan del modelo inicial (fase de conceptualización).

2. Identificación del conjunto de procesos fundamentales que se consideren suficientes para reproducir el modo de referencia (fase de conceptualización).
3. Búsqueda del mecanismo básico o conjunto más pequeño de procesos considerados suficientes para generar el modo de referencia (fase de conceptualización): Submodelos.
4. Establecimiento de los diagramas del modelo y las ecuaciones dinámicas del modelo a partir del mecanismo básico (fase de formulación).
5. Realización de una pasada del modelo computerizado obtenido a partir de las ecuaciones y comparación de los resultados gráficos con el modo de referencia (fase de evaluación).

La Etapa de Perfeccionamiento consiste en una serie de reelaboraciones del modelo obtenido en la etapa inicial con el fin de perfeccionarlo.

Las sucesivas etapas consistirán en una eliminación progresiva de las hipótesis más simplificadoras de manera que el modelo se aproxime cada vez más a la realidad.



Las fases de construcción del modelo serán efectuadas tanto en la etapa inicial como en la de perfeccionamiento.

### **Dificultades en la Construcción de un modelo.**

Se proponen una serie de normas para superar los escollos que habitualmente se presentan en la construcción de un modelo. Estas normas se detallan a continuación:

1. Para la construcción con éxito de un modelo es necesaria la descripción explícita del comportamiento dinámico formada por el modo de referencia, las hipótesis acerca de las causas y los mecanismos básicos.
2. Las hipótesis dinámicas se obtienen a través de una exploración combinada del comportamiento histórico del sistema con estructuras simples de comportamiento conocido.
3. Los límites del sistema se deben elegir lo suficientemente amplios para acoger los procesos que generan el comportamiento dinámico.
4. El objetivo del modelo no es predecir, sino ensayar las hipótesis dinámicas
5. El modelo inicial debe contener únicamente los mecanismos básicos que generen el modo de referencia.
6. El modelo debe mantenerse transparente a través de todo el proceso modelado. Esto conduce a que se incluyan sólo las relaciones estrictamente necesarias y que sean también significativas.
7. Para reducir la complejidad del modelo debe procederse a restringir el número de detalles.

### **Clasificación de modelos.**

Al ser un modelo una representación abstracta de un sistema, seguirá la clasificación atribuida a éste (visto tema anterior). No obstante, se pueden establecer criterios adicionales, resultando la siguiente clasificación:

- Analógicos: representan sólo el comportamiento del sistema real  $\cong$  Físico.
- Simbólicos: asemejan al sistema real de forma física.
- Gráficos: Pueden ser:
  - Modelos Concretos y Abstractos.
  - Modelos Abiertos y Cerrados.
  - Modelos Estáticos y Dinámicos.
  - Modelos Anticipativos y Causales.
  - Modelos Estocásticos y Deterministas.
  - Modelos Continuos, Discretos y de Eventos Discretos.  
Discretos  $\Rightarrow f(k); k = 0, 1, 2, \dots,$   
 $T$  (x toma valores discretos).
  - Modelos de Parámetros Distribuidos y Concentrados.  
Los modelos de parámetros distribuidos son aquellos cuyo comportamiento viene descrito por *ecuaciones diferenciales en derivadas parciales* (por ejemplo, temperatura en una barra), mientras que los de parámetros concentrados vienen definidos por *ecuaciones diferenciales ordinarias* (por ejemplo, velocidad de un avión).
  - Modelos Físicos y Matemáticos: Analógicos, Gráficos y Lógico-matemático.  
En el modelo físico se utilizan un conjunto de variables físicas asociadas para representar el comportamiento del sistema mientras variables y funciones matemáticas lo hacen correspondientemente en el modelo matemático.

### Modelo Físico.

Los modelos Físicos se apoyan en una analogía entre el sistema bajo y otro sistema de diferente naturaleza cuyo comportamiento es fácilmente determinable. La analogía se basa en una similitud subyacente entre las fuerzas que gobiernan el comportamiento de uno y otro sistemas respectivamente. Un caso particular de analogía se da entre circuitos eléctricos y mecánicos.

Las ecuaciones diferenciales de estos sistemas son:

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + kx = kF(t)$$

para el circuito mecánico y:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = E(t)$$

para el circuito eléctrico.

la inspección de las ecuaciones refleja una serie de equivalencias descritas a continuación:

|                              |           |               |                         |
|------------------------------|-----------|---------------|-------------------------|
| <b><u>DESPLAZAMIENTO</u></b> | x         | q             | CARGA                   |
| VELOCIDAD                    | $\dot{x}$ | $I(\dot{q})$  | CORRIENTE               |
| FUERZA                       | F         | E             | VOLTAJE                 |
| MASA                         | M         | L             | INDUCTANCIA             |
| CTE. AMORTIGUACIÓN           | D         | R             | RESISTENCIA             |
| RIGIDEZ                      | K         | $\frac{1}{C}$ | CAPACIDAD <sup>-1</sup> |

Ambos son modelos análogos entre sí y se puede estudiar el comportamiento de uno de ellos con el otro. En la práctica es más simple modificar el circuito eléctrico, por tanto, más fácil de estudiar. En general, los modelos por analogía serán obtenidos en términos de componentes eléctricas, con variables físicas que son medibles, sin necesidad de resolver las ecuaciones del circuito analógico.

### Modelo Matemático.

Los modelos matemáticos dan el comportamiento en forma de relaciones entre variables (ecuaciones) cuya resolución puede ser analítica o mediante simulación.

Ejemplo: Sistema de Suspensión de un Neumático.

La ecuación diferencial que describe el sistema viene dada por:

$$\ddot{x} + 2.\xi.w_n.\dot{x} + w_n^2 = w_n^2.F(t)$$

con:

$$2.\xi.w_n = \frac{D}{M} \Rightarrow w_n^2 = \frac{K}{M}$$

Siendo K, D y M, los valores de las constantes.

Resolviendo la ecuación se obtienen los valores de desplazamiento  $x(t)$  ante una entrada  $F.(t)$  de tipo escalón unidad aplicada en  $t=0$ , para diferentes valores de ' $\xi$ '.

#### **4. RESOLUCIÓN E IMPLEMENTACIÓN.**

Tras haber estudiado con detenimiento qué es un sistema y cómo se modela, llegamos a la parte que más nos interesa: la simulación. Ésta es realmente la que usa el ordenador como herramienta principal y es la que a continuación vamos a intentar desarrollar.

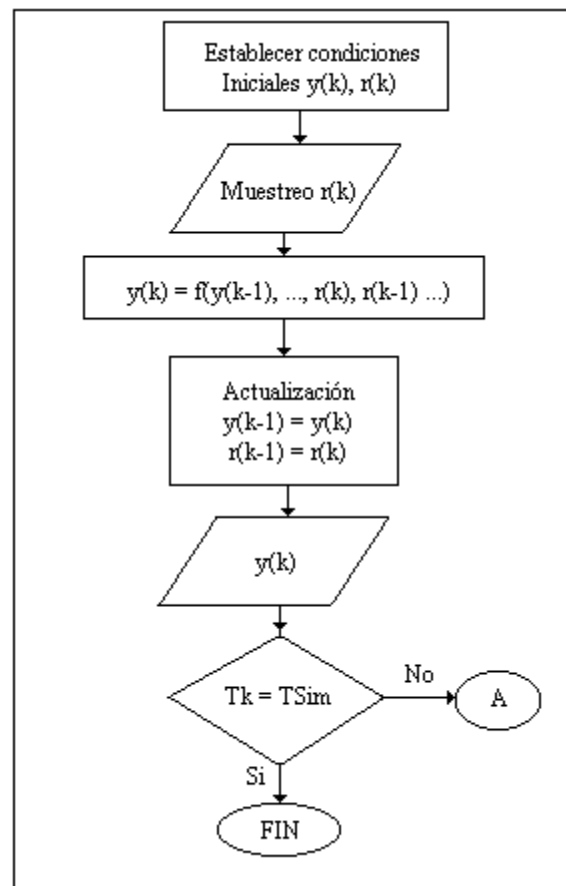
Una definición más académica de la simulación sería: "Es la técnica de construir y poner en funcionamiento el modelo de un sistema real con la intención de estudiar su comportamiento sin irrumpir en el entorno del sistema real" (Koskossidis y Brennan).

De una forma más llana la simulación será el proceso de encontrar las soluciones a las ecuaciones que modelan nuestro sistema para unos valores iniciales que nosotros fijaremos. Posteriormente, con todo ese conjunto de datos obtenidos en la simulación, realizaremos las operaciones necesarias de tratamiento de datos estadístico y gráfico, para acomodar los datos para su posterior estudio. Muchas de las herramientas de simulación incluyen potentes programas gráficos que nos muestran como salida la variación o relación entre datos, pero hay que tener en cuenta que esto es sólo una aplicación más del programa, pero no del proceso de simulación. La simulación únicamente nos dará una lista de valores para las variables que definen el estado del sistema. El uso posterior de esos datos ya no pertenece al proceso.

La simulación de un sistema discreto, que viene descrito por su ecuación, en diferencia, se realiza creando un algoritmo que resuelva iterativamente la ecuación, partiendo de unas condiciones iniciales.

Si el sistema viene descrito por su función de transferencia  $G(z)$  habrá que identificar los coeficientes  $a_i$  y  $b_j$  de  $G(z)$  para construir la ecuación en diferencias de la que procede.

El algoritmo consta de una secuencia de pasos que se describe en la siguiente figura:



### **Métodos de Simulación de Sistemas en Tiempo Continuo.**

Los sistemas continuos se caracterizan por tener variables que toman valores en todo instante de tiempo y que cambian continuamente. Dada la naturaleza discreta del computador digital, la simulación de estos sistemas tendrá que ser forzosamente de tipo discreto, en la cual solo se considerarán las variables continuas en determinados instantes de tiempo.

Por lo tanto, una señal continua  $x(t)$  será transformada en una secuencia



$x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_k), \dots, x(t_n)$

siendo  $T = t_k - t_{k-1}$  el tiempo entre dos valores adyacentes.

Hay dos formas de realizar la simulación de un sistema continuo:

1. Discretización de un sistema continuo:

Consiste en la aplicación de las técnicas de muestreo y reconstrucción para pasar de una descripción en tiempo continuo a una equivalente en tiempo discreto, aplicando a continuación el algoritmo de resolución iterativa de la ecuación en diferencias resultante descrito en la sección anterior.

2. Aplicación de Métodos Numéricos:

Son técnicas para la resolución de las ecuaciones diferenciales del sistema que tienen por objeto el sustituir las derivadas de las variables  $x(t)$   $t = t_k$ , por expresiones aproximadas que involucran a los valores de  $x(t_k)$ ,  $x(t_{k-1})$ , ...,  $x(t_{k+1})$ , ..., etc.

## **CASO PRACTICOS**

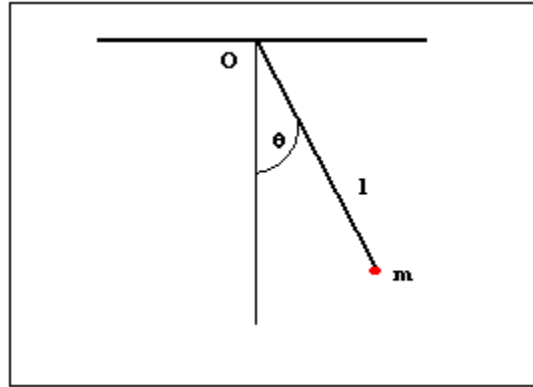
### 1º ESTUDIO DEL PÉNDULO SIMPLE.

Ejemplo: Movimiento oscilatorio: Estudio del péndulo simple.

<http://www.uco.es/servicios/informatica/JICAPages/application.html>

Resolución del problema mediante o analíticos. Estas soluciones resultan útiles y proporcionan una comprensión excelente del comportamiento de algunos sistemas. Sin embargo, estas soluciones sólo se encuentran para una clase determinada de problemas: de aquellos que pueden aproximarse mediante modelos lineales y también aquellos que tienen una geometría simple y pocas dimensiones.

Un péndulo simple se define como una partícula de masa ' $m$ ' suspendida en un punto ' $O$ ' mediante una cuerda de longitud ' $l$ ' y masa despreciable.



La posición del péndulo queda determinada por una sola variable que es el ángulo que forma la varilla con la vertical. Si se desprecia la masa de la varilla y todo rozamiento se obtiene, a partir de la segunda ley de Newton, la ecuación del movimiento del péndulo simple:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \cdot \text{sen } \theta = 0 \quad (1)$$

Donde ' $l$ ' es la longitud del péndulo, ' $g$ ' es la constante de gravedad y  $\frac{g}{l} = \omega^2$  es la frecuencia natural del péndulo.

La ecuación (1) es no lineal debido a la presencia de la función seno, lo que complica su solución analítica. Si sólo estamos interesados en pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable, podemos hacer:

$$\text{sen}(\theta) \cong \theta$$

En cuyo caso, la solución de la ecuación (1) es:

$$\theta = \theta_o \cdot \cos(\omega t + \alpha)$$

Esta simplificación sólo nos permite estudiar un tipo muy limitado de los posibles movimientos del péndulo.

Sin embargo, la solución analítica de la ecuación (1) es muy simple y permite investigar el movimiento del péndulo tanto para pequeñas amplitudes (en ese caso diremos que nos encontramos en la zona lineal del péndulo) como para grandes amplitudes, incluyendo el movimiento rotatorio.

La mayoría de los problemas reales no son lineales e implican formas y procesos complejos.

Estudiemos el movimiento del péndulo bajo cualquier circunstancia:

### Estudio del comportamiento del péndulo simple en GALILEO

#### Desarrollo de la ecuación del movimiento: parámetros y fuerzas que intervienen

La ecuación del movimiento del péndulo simple, si se desprecia la masa de la varilla y todo rozamiento es fácil de obtener a partir de la segunda ley de Newton y es

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \omega_0^2 \text{sen}(\theta) = 0 \quad (1)$$

donde

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

es la frecuencia natural del péndulo, siendo 'g' la aceleración de la gravedad y 'L' la longitud de la varilla.

La ecuación 1 es no lineal debido a la presencia de la función seno, lo que complica su solución analítica. Cuando se está interesado solamente en pequeñas oscilaciones del péndulo alrededor de la posición de equilibrio estable, se puede hacer la aproximación

$$\text{sen}(\theta) \approx \theta \quad (2)$$

con lo cual la ecuación 1 se convierte en la ecuación lineal

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (3)$$

cuya solución

$$\theta(t) = A \text{sen}(\omega_0 t + \phi)$$

se obtiene por métodos elementales. La amplitud (A) y la diferencia de fase (phi) son constantes que se determinan a partir de las condiciones iniciales del ángulo y la velocidad. Al utilizar la ecuación 3 en lugar de la 1 se dice que estamos en la aproximación lineal y solo podemos estudiar un tipo muy limitado de los posibles movimientos del péndulo: las oscilaciones de amplitudes pequeñas, en las que la aproximación (2) es correcta.

La solución numérica de la ecuación 1 es muy simple y nos permitirá estudiar el comportamiento del péndulo tanto con pequeñas amplitudes (diremos entonces que nos encontramos en la zona lineal del péndulo) como cuando estas son grandes, incluyendo el caso del movimiento rotatorio. Se incluirá en este estudio el efecto producido por una fuerza de rozamiento

$$\vec{F}_{roz} = -bv^n = -b \left( L \frac{d\theta}{dt} \right)^n$$

siendo 'b' el coeficiente de rozamiento. También actúan dos fuerzas externas

$$\begin{aligned}\vec{F}_{ext1} &= F_{01} \text{sen}(\omega_1 t + \phi_1) \\ \vec{F}_{ext2} &= F_{02} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \text{sen}(\theta)\end{aligned}$$

siendo 'Fo1' y 'Fo2' los módulos de las fuerzas externas y las 'w' y las 'phi' son la frecuencia y la fase respectivamente. La fuerza de rozamiento y la primera fuerza externa actúan sobre la masa del péndulo tangencialmente a su trayectoria, mientras que la segunda fuerza externa lo hace en la dirección del eje de ordenadas.

#### Ecuación del movimiento

Teniendo en cuenta la fuerza de rozamiento y las dos fuerzas externas la ecuación del movimiento del péndulo simple queda

$$\begin{aligned}m L \frac{d^2\theta}{dt^2} &= -mg \text{sen}(\theta) - b \left( L \frac{d\theta}{dt} \right)^n + F_{01} \text{sen}(\omega_1 t + \phi_1) + \\ &+ F_{02} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \text{sen}(\theta)\end{aligned}$$

Esta ecuación se obtiene de la segunda ley de Newton y se reduce a la ecuación 1 si tomamos 'b=Fo1=Fo2=0' y dividimos por 'mL'.

De aquí se puede deducir que:

$$\theta \ll 10 \Rightarrow \text{Ecuación: } \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

Oscilaciones Lineales

$$\theta > 10 \Rightarrow \text{Ecuación: } \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \text{sen} \theta = 0$$

Oscilaciones no Lineales.

$$\theta \gg 10 \Rightarrow \text{Caos.}$$

Para el modelo general del movimiento, el estudio de este sistema sólo se puede realizar mediante métodos numéricos.

# Métodos numéricos

## Contenido

[Introducción](#)

[Ecuaciones diferenciales ordinarias \(EDO\)](#)

[Fundamentos matemáticos](#)

**Métodos de un paso:**

[Introducción a los métodos de un paso](#)

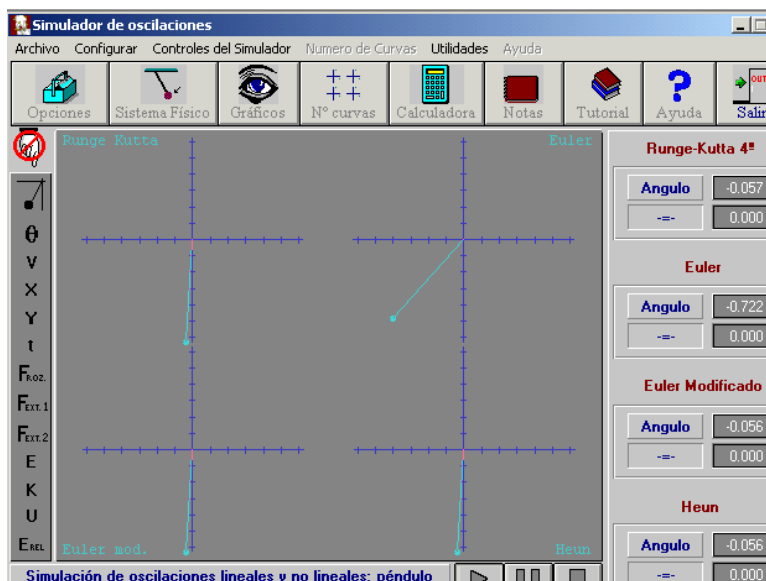
[Método de Euler](#)

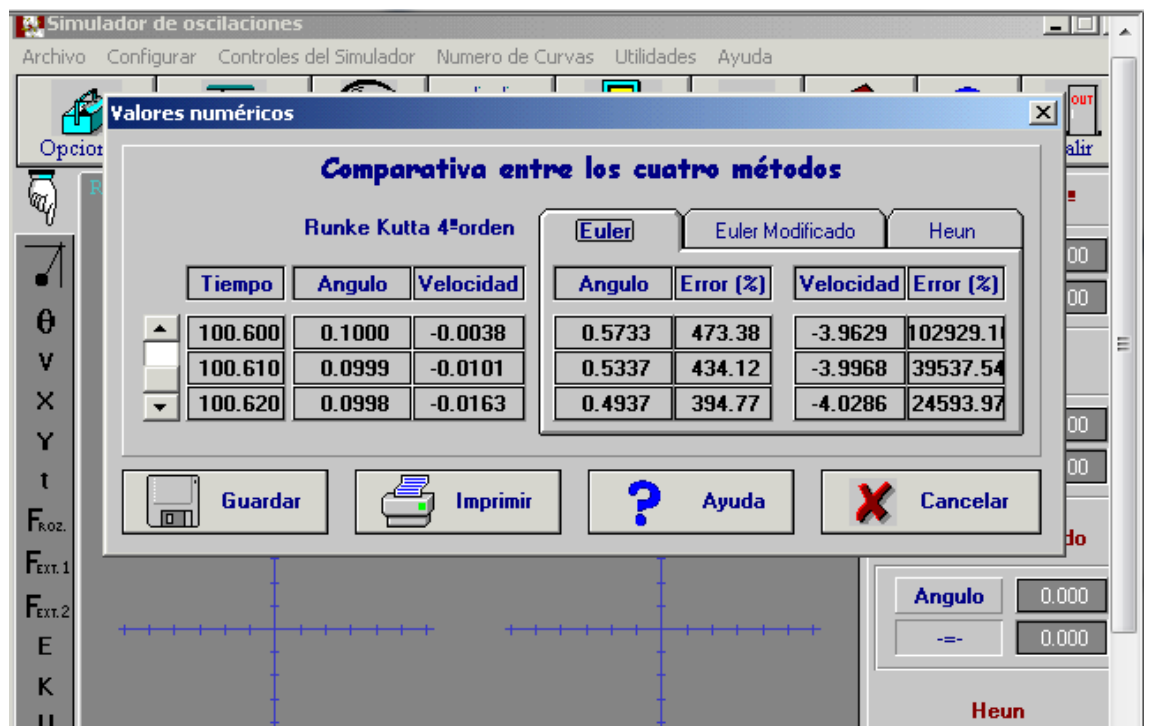
[Métodos de Euler modificado y Heun](#)

[Metodos de Runge-Kutta](#)

[Análisis de error](#)

Aún así no todos los métodos numéricos son válidos, en este caso en particular sólo el método de Runge-Kutta.

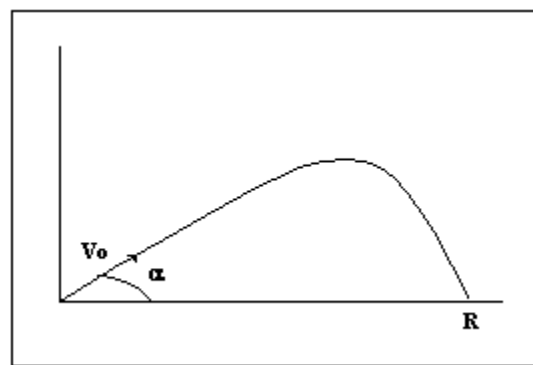




Como se observa en la iteración continua para tiempos de discretización de 0.01 s se observa un error del 394% en el ángulo y de 24593,97% de error en la velocidad mediante el método de Euler. El único método válido para esta simulación es el método de Runge-Kutta.

## **2º EJEMPLO: ESTUDIO DE MOVIMIENTO DE PROYECTILES EN MEDIOS RESISTENTES**

Un proyectil que se lanza con un tiro parabólico pero debido a la fuerza de resistencia del aire, la trayectoria se desvía.



Las ecuaciones que definen el movimiento son:

$$\sum F_x \Rightarrow m.\ddot{x} = -k.m.\dot{x}$$

$$\sum F_y \Rightarrow m.\ddot{y} = -k.m.\dot{y} - m.g$$

$k$  = cte de resistencia del aire.

Las soluciones a estas ecuaciones son:

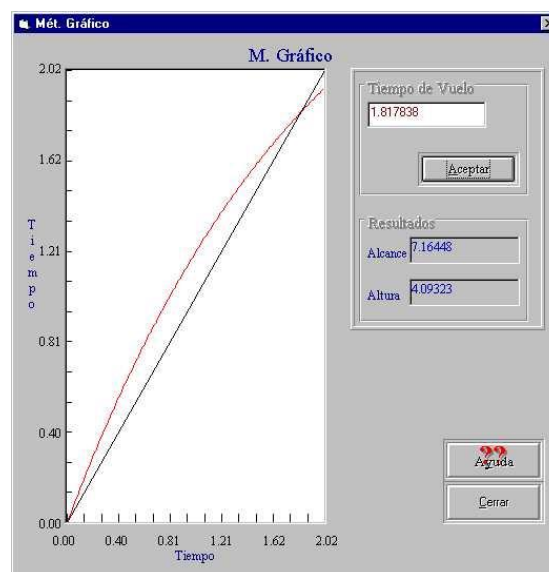
$$x = \frac{V_{ox}}{k} \cdot (1 - e^{-k.T})$$

$$y = -\frac{g.t}{k} + \frac{k.V_{oy} + g}{k^2} \cdot (1 - e^{-k.T})$$

El alcance 'R' del proyectil se calcula sustituyendo en la ecuación de 'x' el tiempo total de vuelo 'T', pero la ecuación que define a éste es:

$$T = \frac{k.V_{oy} + g}{g.k} \cdot (1 - e^{-k.T})$$

Ecuación trascendente en la que la variable dependiente e independiente 't' es la misma.



**Simulación Movimiento de Projectiles.**

Archivo Gráficos Varios Ayuda

*Velocidades Inferiores a 24 m/s*

Proyectil 1 Proyectil 2 Proyectil 3 Proyectil 4 Proyectil 5

Datos de Entrada

Velocidad inicial 12 m/s

Ángulo de tiro 60 °

Resistencia del aire 0.5

Aceptar

M. Gráfico

Compara Errores

Comp. de Errores con Newton-Raphson

Err. Analítico -5.202011 %

Err. Pto Fijo 0.001473 %

Err. Mét. Gráfico 1.22448 %

Datos de Salida

Mét. Analítico

V. inicial en X 6.0 m/s

V. inicial en Y 10.392305 m/s

Alcance 3.73438 m

Altura máxima 4.093229 m

Tiempo Vuelo 1.7446366 s

Mét. Iterativo del Punto Fijo

V. inicial en X 6.0 m/s

V. inicial en Y 10.392305 m/s

Alcance 7.218728 m

Altura máxima 4.093229 m

Tiempo Vuelo 1.8404001 s

Error del método 0.001704 %

T. Computo 0.0 ms

Mét. Newton-Raphson

V. inicial en X 6.0 m/s

V. inicial en Y 10.392305 m/s

Alcance 7.218664 m

Altura máxima 4.093229 m

Tiempo Vuelo 1.840373 s

Error del método -0.000012 %

T. Computo 0.0 ms

| Tiempo  | Altura  | Alcance |
|---------|---------|---------|
| 0.17446 | 1.5912  | 0.37344 |
| 0.34893 | 2.76354 | 0.74688 |

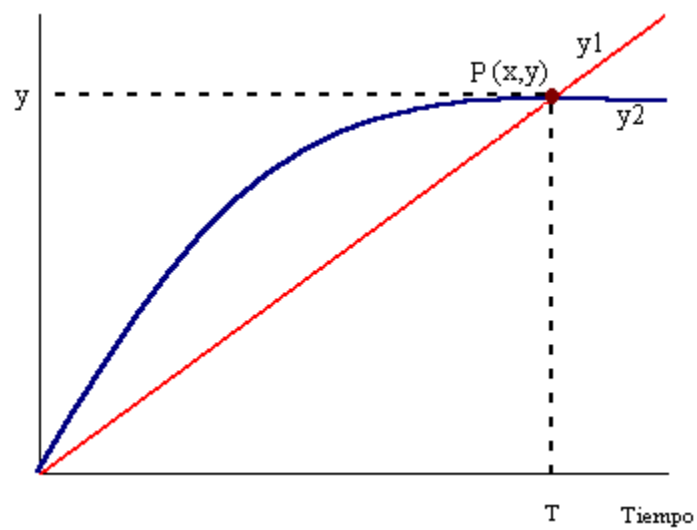
| Tiempo  | Altura  | Alcance |
|---------|---------|---------|
| 0.18404 | 1.66608 | 1.05496 |
| 0.36808 | 2.86826 | 2.01717 |

| Tiempo  | Altura  | Alcance |
|---------|---------|---------|
| 0.18404 | 1.66606 | 1.05494 |
| 0.36807 | 2.86823 | 2.01714 |

Método de resolución gráfico:

$$y_1 = T$$

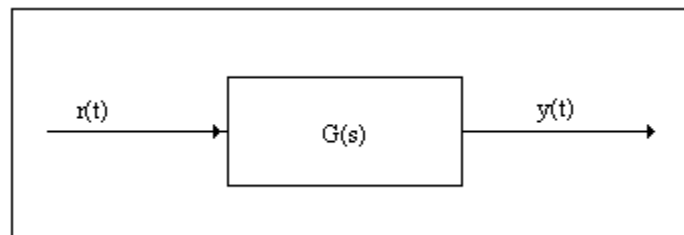
$$y_2 = \frac{k \cdot V_{oy} + g}{g \cdot k} \cdot (1 - e^{-k \cdot T})$$





## **Discretización de un Sistema en Tiempo Continuo**

El método de discretización parte del conocimiento de la función de transferencia del sistema  $G(s)$ , descrito en la figura 5.2.



El método consta de una secuencia de pasos

### 1. Cálculo del equivalente discreto de $G(s)$

Se realiza en cuatro operaciones:

- muestreo de la entrada para obtener una secuencia de impulsos

$$r(t) \mid r^*(t)$$

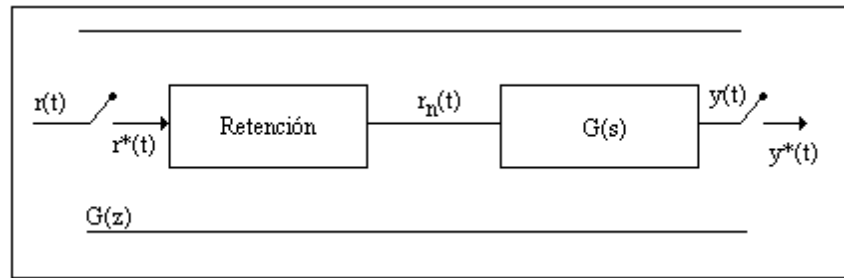
- reconstrucción de  $r(t)$ , mediante un dispositivo de retención con  $G_r(s)$  dada por

$$G_r(s) = \frac{1 - e^{-T \cdot s}}{s}$$

- aplicación de  $r_n(t)$  al sistema definido por  $G(s)$  y obtención de la salida  $y(t)$ .
- muestreo de  $y(t)$  para obtener una secuencia de impulsos

$$y(t) \mid y^*(t)$$

En la siguiente figura, se muestran las diferentes señales que aparecen en el proceso de discretización.



2. Obtención de la función de transferencia en  $s$  del sistema formado por el dispositivo de retención y el sistema de  $G(s)$ , definido por

$$G_t(s) = G_r(s) G(s)$$

3. Cálculo de la función de transferencia discreta  $G_t(z)$  a partir de  $G_t(s)$  por aplicación de la transformación

$$z = e^{sT}$$

que mapea el plano  $s$  en el plano  $z$ , o bien a través de la relación entre las tablas de transformadas en  $s$  y  $z$  de una misma señal.

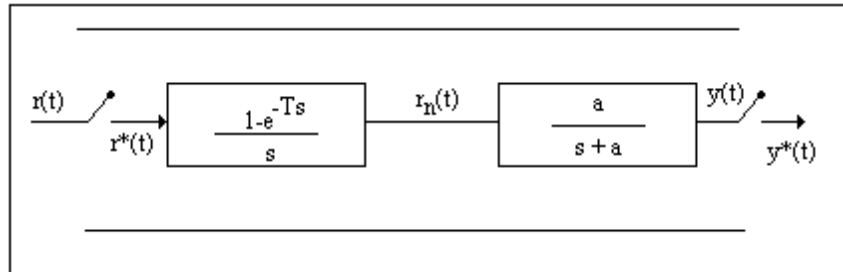
4. Obtención de la ecuación en diferencias a partir de  $G_t(z)$

**Ejemplo:** Discretizar el sistema dado por:

$$G(s) = \frac{a}{s} + a$$

Se procederá con la secuencia de pasos descrita:

1. Equivalente discreto:



2. Obtención de  $G(s)$ :

$$G_t(s) = \frac{1 - e^{-T.s}}{s} \cdot \frac{a}{a + s}$$

$$G_t(s) = (1 - e^{-T.s}) \cdot \frac{a}{s(s + a)}$$

3. Cálculo de  $G_t(z)$ :

Aplicando el cambio  $z = e^{sT}$

$$G_t(z) = (1 - z^{-1}) \cdot Z \left\{ \frac{a}{s(s + a)} \right\}$$

Descomponiendo en fracciones simples

$$P(s) = \frac{a}{s(s + a)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + a}$$

Y hallando las equivalentes Z de las fracciones

$$P(z) = \frac{z}{z - 1} - \frac{z}{z - e^{-a.T}}$$

Luego:

$$G_t(z) = \frac{z-1}{z} \left( \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-aT}} \right)$$

La función de transferencia viene dada por

$$G_t(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{1-e^{-aT}}{z-e^{-aT}}$$

#### 4. Ecuación en diferencias

$$z.Y(z) - e^{-aT}.Y(z) = (1-e^{-aT}).R(z)$$

$$y.(k+1) - e^{-aT} . y.(k) = (1 - e^{-aT}).r(k)$$

### **Métodos Numéricos de Simulación**

El objeto de los métodos numéricos es obtener, a partir de un sistema continuo expresado mediante la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u)$$

una secuencia de valores  $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_k)$  que aproximan la solución  $x(t)$  de la ecuación diferencial anterior. Al intervalo  $T = t_k - t_{k-1}$  se le denomina intervalo o tiempo de integración.

Existe una gran variedad de métodos numéricos para la resolución de la ecuación diferencial del sistema, entre los cuales se citan

- Fórmulas de Integración Abiertas.
- Fórmulas de Integración Cerradas.
- Fórmulas de Predicción – Corrección.
- Métodos de Runge Kutta.

Es común a todos estos métodos la resolución de la ecuación diferencial:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t)) = f(t)$$

por integración de la misma entre los puntos  $t_{i-r}$  y  $t_{i+1}$ , según:

$$\int_{x_{i-r}}^{x_{i+1}} dx = \int_{t_{i-r}}^{t_{i+1}} f(t).dt$$

$$x(t_{i+1}) = x(t_{i-r}) + \int_{t_{i-r}}^{t_{i+1}} f(t).dt$$

Por lo tanto:

$$x_{i+1} = x_{i-r} + \int_{t_{i-r}}^{t_{i+1}} f(t).dt$$

Para generar la expresión de la solución de  $x(t)$  se utilizará el polinomio interpolador de Newton de diferencias regresivas para aproximar la función  $f(t)$ .

### Polinomio Interpolador de Newton

Se definen como diferencias regresivas de una función  $f(x)$  a las expresiones  $\delta f(x)$ ,  $\delta^2 f(x)$ , ...,  $\delta^n f(x)$  cuyo valor viene dado por

$$\delta.f(x) = f(x) - f(x-T)$$

$$\delta^2 f(x) = f(x) - 2f(x - T) + f(x - 2T)$$

$$\delta^n . f(x) = \sum (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} . f(x - kT)$$

Dada una función  $f(x)$  cuyos valores son conocidos en un conjunto de puntos distanciados entre sí, un periodo  $T$  se define el polinomio interpolador de Newton de diferencias regresivas a la expresión:

$$f(x) = f(x_n + \alpha T) = f(x_n) + \alpha . \delta f(x_n) + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!} . \delta^2 . f(x_n) + \frac{\alpha . (\alpha+1) . (\alpha+2)}{3!} . \delta^3 . f(x_n) + \dots$$

siendo  $\alpha$  la distancia fraccional desde  $x_n$  al punto  $x$  genérico en términos de longitud ' $T$ '.

La aproximación a  $f(x)$  será mejor a medida que se incluyan más términos en diferencias  $\delta f, \delta^2 f, \dots, \delta^n$ .

### Fórmulas de Integración Abiertas

:

Utilizando el polinomio interpolador de Newton en base a  $t_i$

$$f = f(t_i) + \alpha . \delta . f(t_i) + \frac{\alpha . (\alpha+1)}{2} . \delta^2 . f(t_i) + \frac{\alpha . (\alpha+1) . (\alpha+2)}{6} . \delta^3 . f(t_i) + \dots$$

$$x_{i+1} = x_i + T/6 (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

donde los coeficientes  $k_i$  vienen dados por :

$$k_1 = f(x_i, t_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{T}{2} k_1, t_i + \frac{T}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{T}{2}k_2, t_i + \frac{T}{2}\right)$$

$$k_4 = f(x_i + Tx_3, t_i + T)$$

El error del método viene dado por

$$\mathcal{E} = x_{i+1} - \frac{x_{i+1}^*}{2^m - 1}$$

con  $x_{i+1}^*$  resultado de calcular  $x_{i+1}$  a partir de  $x_{i-1}$  con un periodo de integración de  $2T$ .

No plantean problemas de arranque y pueden ser utilizados como arrancadores de otros.

### Métodos Numéricos Aplicados a Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior

En el caso de que desee resolver una ecuación diferencial de orden superior a uno mediante un método numérico, se transformará ésta en un sistema de ecuaciones diferenciales de orden uno utilizando la metodología del espacio de estado. Esto es, para un sistema definido por :

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = u$$

se define un vector:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y, y', \dots, y^{(n)})$$

obteniéndose el sistema:

$$x_1' = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_n = -a_n x_1 - \dots - a_1 x_n + u$$

Aplicando simultáneamente los métodos anteriores a cada una de las ecuaciones diferenciales de primer orden se obtiene en la primera variable  $x_1(t)$  la solución del sistema.

### **Intervalo de integración**

La elección del periodo de integración  $T$  siempre es crítica de cara a obtener resultados aceptables en la simulación.

La elección de un  $T$  demasiado grande provoca:

- Errores de discretización de variables altos.
- Inestabilidad en la solución.

Mientras que un  $T$  demasiado pequeño produce:

- Aumento de cálculos, simulación lenta.
- Errores por excesivo truncamiento.

Por lo tanto existe un compromiso en el valor a elegir del tiempo de integración.

Hay varios criterios para elegirlo:

1. Contante de Tiempo del sistema, definida como el tiempo característico de cambio de las variables del sistema. Existe un criterio general para la determinación de  $T$  en función de la constante de tiempo menor del sistema  $\tau$ , según:

$$\tau/5 < T < \tau/2$$



2. En la práctica, o no se conoce  $\tau$  o bien es de difícil determinación. En este caso la elección de  $T$  se hará realizando simulaciones sucesivas, empleando criterios de estimación del error respecto a respuestas reales, tal que definiéndolo como un error cuadrático según:

$$E^2 = |Y_{\text{real}} - Y_{\text{sim}}|^2$$

y para un intervalo de error ( $E_{\text{min}}$ ,  $E_{\text{max}}$ ) se tendrá que:

- Si  $E < E_{\text{min}} \Rightarrow$  Aumento de  $T$
- Si  $E < E_{\text{max}} \Rightarrow$  Disminución de  $T$

3. Método numérico empleado.

El método de integración dará una mejor o peor aproximación a la solución exacta, por tanto a medida que la precisión del método aumenta se hacen menores las restricciones impuestas al valor del tiempo de integración  $T$ .

**Ejemplo:** Elegir  $T$  para el sistema

$$\frac{dx}{dt} + ax = bu, x(0) = 0$$

La constante de tiempo del sistema se halla a partir de  $G(s)$

$$G(s) = \frac{b}{s+a} = \frac{\frac{b}{a}}{1 + \left(\frac{1}{a}\right)s}$$

Luego la constante de tiempo es  $t = \frac{1}{a}$

Para ver el efecto de  $T$  se van a obtener las soluciones tanto exactas como aproximadas ante entrada escalón.

- Solución exacta, aplicando la transformada de Laplace.

$$x(t) = \frac{b}{a} \cdot (1 - e^{-a \cdot t})$$

- Solución aproximada, aplicando el método de Euler

$$x_{i+1} = x_i + T(-ax_i + bu_i)$$

## **5. EVALUACIÓN CRÍTICA DEL FUNCIONAMIENTO.**

Los sistemas rígidos se caracterizan por tener constantes de tiempo características muy diferentes. Por lo tanto, si se elige un  $T$  pequeño para simular la parte rápida del sistema ( $\tau$  menor) se tendrán grandes errores e incluso inestabilidad en la resolución de la parte lenta ( $\tau$  mayor).

Para evitar este efecto se utiliza el método de integración rectangular hacia atrás después de que se haya amortiguado la parte rápida.

El método rectangular hacia atrás viene dado por:

- Técnica 2: Es aconsejable en el desarrollo del modelo ayudarse de una segunda persona para leer el programa, que detecte los fallos inconscientes del modelador.

- Técnica 3: Efectuar trazas del programa, en concreto de la lista de eventos, variables de estado, contadores estadísticos, etc.

- Técnica 4: Ejecutar el modelo bajo hipótesis simplificadoras que permitan evaluar características conocidas o fáciles de calcular del modelo.

Por ejemplo en una cola M/M/C empezar progresivamente con las colas M/M/1, M/M/2 hasta llegar a M/M/C.

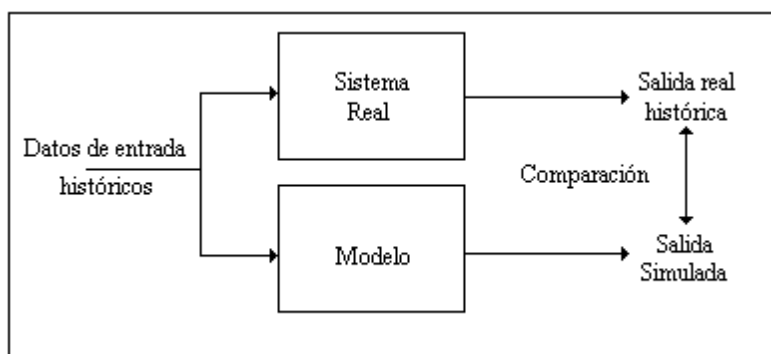
- Técnica 5: Con algunos tipos de modelos puede ser de ayuda el mostrar la salida gráfica a medida que la simulación avanza.

## 6. CONTRASTE DE RESULTADOS REALES.

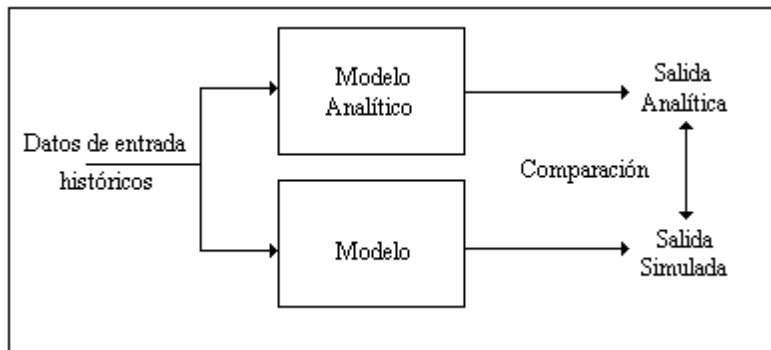
La validación consiste en determinar si un modelo de simulación es una representación válida del sistema real bajo estudio.

Dos procedimientos pueden ser usados para validar un modelo:

1. Si el modelo describe a un sistema real del que se poseen datos históricos de salida, se pueden comparar estos con los obtenidos con el modelo bajo el mismo conjunto de condiciones de entrada, según se indica en la siguiente figura:



2. Si el modelo bajo ciertas condiciones de entrada (restricciones) puede ser resuelto analíticamente, se compararán los resultados analíticos de salida con los obtenidos por simulación, según se ilustra en la siguiente figura:



Para los modelos que no estén en las condiciones anteriores todo lo que se puede hacer es ejecutar el modelo con diferentes datos de entrada y determinar si la salida está en el campo de la credibilidad aparente.

### Procedimiento de Comparación

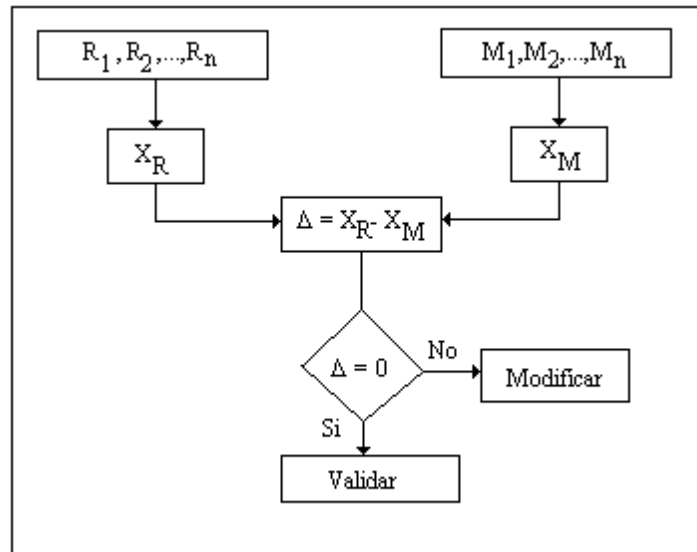
La comparación de resultados de simulación con datos históricos o analíticos ha de ser realizada empleando procedimientos estadísticos debido a que la comparación no es punto a punto sino entre dos conjuntos de observaciones  $R_1, R_2, \dots, R_n$  y  $M_1, M_2, \dots, M_n$  correspondientes a diferentes ejecuciones.

Existen tres técnicas para la comparación de resultados:

#### 1. *Método de Inspección*

Se utilizan estadísticos (media muestral, varianza muestral) que sintetizan las informaciones relativas a los valores de datos históricos  $R_i$  y los de simulación  $M_i$ , comparándose entre sí los valores del estadístico para  $R_i$  y  $M_i$  respectivamente para asegurar la validez.

El método de inspección se ilustra gráficamente en la siguiente figura:



El problema presentado por este método es que  $\Delta$  varía de experimento a experimento.

## 2. Construcción del Intervalo de Confianza

Dado dos conjuntos de observaciones  $R_i$  y  $M_i$  correspondientes a los resultados del sistema real o analítico y los de simulación respectivamente, se calculan las medias

$$\mu_r = E(R_i)$$

$$\mu_m = E(M_i)$$

y se construye un intervalo de confianza para la variable  $\xi$  definida por:

$$\xi = \mu_r - \mu_m$$

para comparar las dos muestras.

Para ello se usará la variable  $Z_i$  diferencia de muestras:

$$Z_i = R_i - M_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Y se calculará la media y la desviación de esta nueva variable:

$$Z = \sum \frac{Z_i}{n}, \sigma_Z = \frac{\sqrt{(Z_i - Z)^2}}{n-1}$$

Si la variable se distribuye normal o el tamaño de la muestra n es suficientemente alto para aplicar el teorema central del límite, el intervalo de confianza viene dado por:

$$IC \cong Z \pm t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_2}{\sqrt{n}}$$

que da un intervalo que acota la diferencia entre las medias ' $\xi$ ' en el ' $1 - \alpha\%$ ' de los casos en el caso de muestras independientes. Si el intervalo descrito contiene al 0 ( $\mu_r = \mu_m$ ) se dirá que la diferencia ' $\alpha$ ' no es significativa y por tanto se puede validar el modelo.

Para el caso de muestras no independientes hay que incluir el efecto de la correlación en las fórmulas del cálculo de la desviación típica ' $\sigma_2$ '.

**Ejemplo:** Supóngase que un sistema de colas real se puede aproximar por un modelo M/M/1 con ' $\rho = 0.6$ ' y que el modelo de simulación es M/M/1 con ' $\rho = 0.5$ '. Determinar su validez sabiendo que ' $\mu_r = 0.797$ ' y ' $\mu_m = 0.442$ ', para un conjunto de 10 observaciones.

Se evaluarán las diferencias entre las medidas ' $Z_i = R_i - M_i$ ' y se calcularán la media ' $Z$ ' y desviación ' $\sigma_Z$ ', esto es:

$$Z = \mu_r - \mu_m = 0.797 - 0.442 = 0.356$$

$$\sigma_2 = \frac{\sqrt{(Z_i - 0.356)^2}}{9} = 0.150$$

El intervalo de confianza del 90% ( $\alpha = 10\%$ ) vendrá dado por:

$$IC \equiv 0.356 \pm t_{9,0.95}$$

Por lo tanto, se puede decir que en el 90% de los casos ' $\zeta$ ' estará en ese intervalo. Al no contener el '0', la diferencia es significativa y el modelo será inválido.

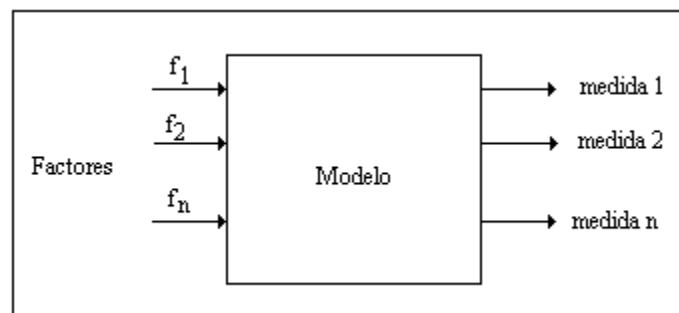
### *3. Análisis de Series Temporales*

Se trata de construir series temporales con los datos del modelo y el sistema real o analítico y realizar un análisis espectral.

El análisis espectral consiste en computar el espectro muestral mediante transformada de Fourier de la función de autocovarianzas para cada grupo de observaciones, y construir un intervalo de confianza para la diferencia de los logaritmos del espectro.

### **Diseño de Experimentos**

El diseño de experimentos de simulación sobre un modelo comprende un conjunto de reglas y principios con objeto de determinar los efectos de varios factores (variables de entrada) sobre las medidas de funcionamiento (variables de salida), según se indica en la figura siguiente:



El interés del diseño de experimentos radica en la posibilidad de evaluar sistemas alternativos e incluso de optimizar el funcionamiento de un sistema.

El diseño comprende tres tareas diferenciadas como son:

- Elección de parámetros de entrada.
- Selección de la longitud de simulación.
- Determinación del número de replicaciones.

#### Elección de Parámetros de Entrada

Consiste en la especificación de los factores o parámetros de entrada que influyen los resultados de la simulación.



**TEMA IV: ANÁLISIS DE HERRAMIENTAS DE MODELIZACIÓN Y  
DESARROLLO**

**1 INTRODUCCIÓN.**

**2 HERRAMIENTAS DE MODELIZACIÓN**

**3. HERRAMIENTAS DE DESARROLLO DE SIMULACIÓN:  
PROGRAMACIÓN GENERAL**

**4. HERRAMIENTAS ESPECÍFICAS**

## **INTRODUCCIÓN.**

Existe hoy en día una amplia gama de softwares para la modelización y para la realización de simulación digital, destacando tres grupos fundamentales:

- Lenguajes de Programación
- Lenguajes de Simulación
- Paquetes de Simulación

Los Lenguajes de Programación son de propósito generales tales como el FORTRAN, PASCAL, C, etc..., requieren menos tiempo de ejecución que los lenguajes de simulación, y están disponibles en cualquier computador.

Los Lenguajes de Simulación están diseñados específicamente para los fines de simulación y requieren un menor tiempo de programación. Están especialmente creados para resolver sistemas en tiempo continuo, discreto y eventos discretos, pudiendo algunos simular conjuntamente más de uno de estos tipos de sistemas.

Los Paquetes de Simulación son colecciones de rutinas que pueden ser incluidas en otros programas de uso general. Son en realidad herramientas que dotan de un carácter interactivo al proceso de modelado y simulación de sistemas, siendo empleadas en CAD, CAM y CAE, control de sistemas y diseño de sistemas en Ingeniería.

Entre los tres tipos se va a hacer un mayor énfasis en los lenguajes de simulación. Dentro de esta clase, se pueden distinguir una serie de aspectos que diferencian unos lenguajes de otros, a saber:

- Objetivo de lenguaje
- Código de base del lenguaje
- Grado de documentación
- Mecanismo de avance del tiempo
- Algoritmo de generación de números aleatorios
- Inicialización del programa
- Entrada de datos
- Salida de informes
- Métodos para análisis de datos

Entre los lenguajes de simulación que serán utilizados destacan el ACSL, MATLAB-SIMULINK. DYNAMO, SIMAN y SIMSCRIPT, alguno de los cuales será objeto de explicación en temas posteriores.

Por último cabe mencionar a los Sistemas Expertos y Redes Neuronales como herramienta de simulación en el caso de sistemas cuyo comportamiento viene expresado por un conjunto de reglas heurísticas y datos de funcionamiento.

## **2 HERRAMIENTAS DE MODELIZACIÓN**

En general son aplicaciones informáticas para el análisis estadístico de un gran volumen de datos. Entre los numerosos programas existentes, cabe destacar dos SPSS y otro de uso libre Programa R.

### **FUNDAMENTO Y MANEJO DE SPSS**

**Statistical Package for the Social Sciences (SPSS)** es un programa estadístico informático muy usado en las ciencias sociales y las empresas de investigación de mercado. En la actualidad, la sigla se usa tanto para designar el programa estadístico como la empresa que lo produce. Originalmente SPSS fue creado como el acrónimo de *Statistical Package for the Social Sciences* ya que se está popularizando la idea de traducir el acrónimo como "Statistical Product and Service Solutions". Sin embargo, aunque realizando búsquedas por internet estas pueden llevar a la página

web de la empresa, dentro de la página misma de la empresa no se encuentra dicha denominación.

Como programa estadístico es muy popular su uso debido a la capacidad de trabajar con bases de datos de gran tamaño. En la versión 12 es de 2 millones de registros y 250.000 variables. Además, de permitir la recodificación de las variables y registros según las necesidades del usuario. El programa consiste en un módulo base y módulos anexos que se han ido actualizando constantemente con nuevos procedimientos estadísticos. Cada uno de estos módulos se compra por separado.

Actualmente, compete no solo con softwares licenciados como lo son SAS, MatLab, Statistica, Stata, sino también con software de código abierto y libre, de los cuales el más destacado es el Lenguaje R.

Fue creado en 1968 por Norman H. Nie, C. Hadlai (Tex) Hull y Dale H. Bent. Entre 1969 y 1975 la Universidad de Chicago por medio de su *National Opinion Research Center* estuvo a cargo del desarrollo, distribución y venta del programa. A partir de 1975 corresponde a SPSS Inc.

Originalmente el programa fue creado para grandes computadores. En 1970 se publica el primer manual de usuario del SPSS por Nie y Hall. Este manual populariza el programa entre las instituciones de educación superior en EE. UU. En 1984 sale la primera versión para computadores personales.

Desde la versión 14, pero más específicamente desde la versión 15 se ha implantado la posibilidad de hacer uso de las librerías de objetos del SPSS desde diversos lenguajes de programación. Aunque principalmente se ha implementado para Python, también existe la posibilidad de trabajar desde Visual Basic, C++ y otros lenguajes.

El 28 de Junio de 2009 se anuncia que IBM, meses después de ver frustrado su intento de compra de Sun Microsystems, el gigante informático estadounidense anuncia la adquisición de SPSS, por 1.200 millones de dólares.

## Módulos del SPSS

El sistema de módulos de SPSS, como los de otros programas (similar al de algunos lenguajes de programación) provee toda una serie de capacidades adicionales a las existentes en el sistema base. Algunos de los módulos disponibles son:

- **Modelos de Regresión**
- **Modelos Avanzados**
  - **Reducción de datos:** Permite crear variables sintéticas a partir de variables colineales por medio del Análisis Factorial.
  - **Clasificación:** Permite realizar agrupaciones de observaciones o de variables (*cluster analysis*) mediante tres algoritmos distintos.
  - **Pruebas no paramétricas:** Permite realizar distintas pruebas estadísticas especializadas en distribuciones no normales.
- **Tablas:** Permite al usuario dar un formato especial a las salidas de los datos para su uso posterior. Existe una cierta tendencia dentro de los usuarios y de los desarrolladores del software por dejar de lado el sistema original de TABLES para hacer uso más extensivo de las llamadas CUSTOM TABLES.
- **Tendencias**
- **Categorías:** Permite realizar análisis multivariados de variables normalmente categorías. También se pueden usar variables métricas siempre que se realice el proceso de recodificación adecuado de las mismas.
- **Análisis Conjunto:** Permite realizar el análisis de datos recogidos para este tipo específico de pruebas estadísticas.
- **Mapas:** Permite la representación geográfica de la información contenida en un fichero (descontinuado para SPSS 16).

- **Pruebas Exactas:** permite realizar pruebas estadísticas en muestras pequeñas.
- **Análisis de Valores Perdidos:** Regresión simple basada en imputaciones sobre los valores ausentes.
- **Muestras Complejas:** permite trabajar para la creación de muestras estratificadas, por conglomerados u otros tipos de muestras.
- **SamplePower** (cálculo de tamaños muestrales)
- **Árboles de Clasificación:** Permite formular árboles de clasificación y/o decisión con lo cual se puede identificar la conformación de grupos y predecir la conducta de sus miembros.
- **Validación de Datos:** Permite al usuario realizar revisiones lógicas de la información contenida en un fichero.sav. y obtener reportes de los valores considerados extraños. Es similar al uso de sintaxis o scripts para realizar revisiones de los ficheros. De la misma forma que estos mecanismos es posterior a la digitalización de los datos.
- **SPSS Programmability Extension** (SPSS 14 en adelante). Permite utilizar el lenguaje de programación Python para un mejor control de diversos procesos dentro del programa que hasta ahora eran realizados principalmente mediante scripts (con el lenguaje SAX Basic). Existe también la posibilidad de usar las tecnologías .NET de Microsoft para hacer uso de las librerías del SPSS. Aunque algunos usuarios han cuestionado sobre la necesidad de incluir otros lenguajes, la empresa no tiene esto entre sus objetivos inmediatos.

Desde el SPSS/PC hay una versión adjunta denominada **SPSS Student** que es un programa completo de la versión correspondiente pero limitada en su capacidad en cuanto al número de registros y variables que puede procesar. Esta versión es para fines de enseñanza del manejo del programa.

## **LENGUAJE DE PROGRAMACIÓN R**

**R** es un lenguaje y entorno de programación para análisis estadístico y gráfico.

Se trata de un proyecto de software libre, resultado de la implementación GNU del premiado lenguaje S. R y S-Plus -versión comercial de S- son, probablemente, los dos lenguajes más utilizados en investigación por la comunidad estadística, siendo además muy populares en el campo de la investigación biomédica, la bioinformática y las matemáticas financieras. A esto contribuye la posibilidad de cargar diferentes librerías o paquetes con finalidades específicas de cálculo o gráfico.

Fue desarrollado inicialmente por Robert Gentleman y Ross Ihaka del Departamento de Estadística de la Universidad de Auckland en 1993.

### **CARACTERÍSTICAS**

R proporciona un amplio abanico de herramientas estadísticas (modelos lineales y no lineales, tests estadísticos, análisis de series temporales, algoritmos de clasificación y agrupamiento, etc.) y gráficas.

Se trata de un lenguaje de programación, lo que permite que los usuarios lo extiendan definiendo sus propias funciones. De hecho, gran parte de las funciones de R están escritas en el mismo R, aunque para algoritmos computacionalmente exigentes es posible desarrollar librerías en C, C++ o Fortran que se cargan dinámicamente. Los usuarios más avanzados pueden también manipular los objetos de R directamente desde código desarrollado en C. R también puede extenderse a través de paquetes desarrollados por su comunidad de usuarios.

R hereda de S su orientación a objetos( como Visual C). Además, R puede integrarse con distintas bases de datos y existen librerías que facilitan su utilización desde lenguajes de programación interpretados como Perl y Python.

Otra de las características de R es su capacidad gráfica, que permite generar gráficos con alta calidad. R posee su propio formato para la documentación basado en LaTeX.

R también puede usarse como herramienta de cálculo numérico, campo en el que puede ser tan eficaz como otras herramientas específicas tales como GNU Octave y su versión comercial, MATLAB.

#### EXTENSIONES Y PAQUETES

R forma parte de un proyecto colaborativo y abierto. Sus usuarios pueden publicar paquetes que extienden su configuración básica. Existe un repositorio oficial de paquetes cuyo número superó en otoño de 2009 la cifra de los 2000.

Dado el enorme número de nuevos paquetes, éstos se han organizado en vistas (o temas), que permiten agruparlos según su naturaleza y función. Por ejemplo, hay grupos de paquetes relacionados con estadística bayesiana, econometría, series temporales, etc.

Para facilitar el desarrollo de nuevos paquetes, se ha puesto a servicio de la comunidad una forja de desarrollo que facilita las tareas relativas a dicho proceso.

#### PROYECTOS RELACIONADOS

- Bioconductor, un conjunto de paquetes para el análisis de datos en genómica.
- Rmetrics, orientado al análisis de los mercados financieros y la valoración de instrumentos de inversión.
- 

#### HERRAMIENTAS DE PRODUCTIVIDAD

Existen diversas interfaces que facilitan el trabajo con R.

##### **INTERFACES GRÁFICAS**

- JGR o *Java GUI for R*, una terminal de R multiplataforma basada en Java



- R Commander (Rcmdr), una interfaz gráfica multiplataforma basada en tcltk
- RExcel, que permite usar R y Rcmdr desde Microsoft Excel
- rggobi, una interfaz a GGobi para visualización
- RKward, basado en KDE
- Sage
- Statistical Lab
- nexusBPM, una herramienta de automatización
- RWorkBench

### **EDITORES E IDES**

De entre los editores de texto e IDEs con soporte para R se cuentan:

Bluefish,<sup>6</sup> Crimson Editor, ConTEXT, Eclipse,<sup>7</sup> Emacs (Emacs Speaks Statistics), Geany, jEdit,<sup>8</sup> Kate,<sup>9</sup> Syn, TextMate, Tinn-R, Vim, gedit, SciTE, WinEdt (R Package RWinEdt) y notepad++.<sup>10</sup>

Sweave es un procesador de documentos que puede ejecutar código de R incrustado en código de LaTeX y para insertar código, resultados y gráficos en el documento escrito en LaTeX. LyX puede usarse para crear y compilar documentos desarrollados en Sweave. El paquete odfWeave es similar, generando documentos en el formato OpenDocument (ODF); extensiones en estado experimental también permiten generar documentos del tipo presentación u hoja de cálculo.

## **3 HERRAMIENTAS DE DESARROLLO DE SIMULACIÓN**

### **PRÁCTICA CON UN SISTEMA CONTINUO**

Trataremos de exponer como se realizaría la simulación de un sistema dinámico mediante diversas herramientas, comenzando en C, un

lenguaje de propósito general, hasta finalizar con ACSL o SimuLink, entornos específicos de simulación.

Dado el propósito didáctico, el sistema que se va a simular no será muy complicado. De este modo nos podremos fijar más en la metodología y olvidar un tanto el complejo desarrollo matemático de este tipo de sistemas. En este caso se ha escogido un sistema de *amortiguación de un coche*. Una vez conocido el sistema, el siguiente paso consiste en modelar este sistema mediante elementos que nos sean conocidos y que seamos capaces de describir matemáticamente.

En esta práctica, el modelo de una amortiguación de un coche se puede expresar como una masa unida a un muelle con un amortiguador en paralelo (ver figura1).

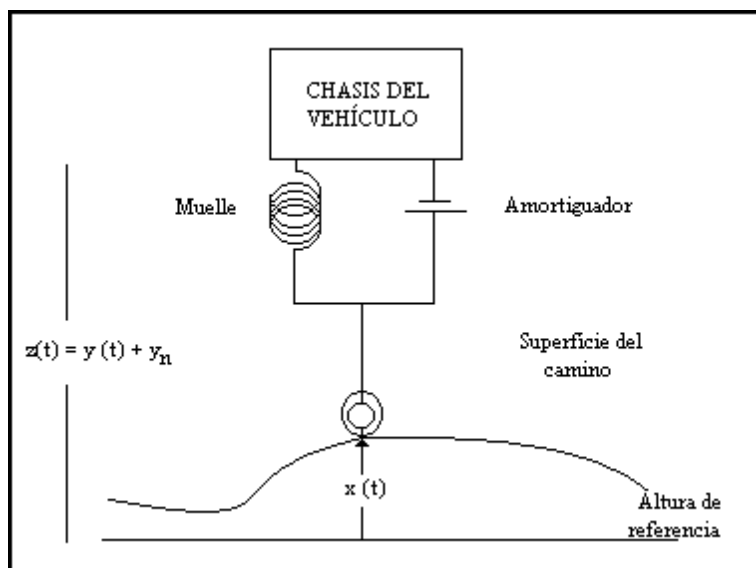


Figura 1:

El objetivo de la simulación será determinar los valores óptimos de las constantes que definen tanto al muelle como al amortiguador, para que la comodidad dentro del coche sea máxima dentro de sus límites de

seguridad necesarios. De esta manera, realizaremos la simulación para un rango de valores de 'K' y 'V', de modo que, observando los resultados obtenidos seamos capaces de diseñar la amortiguación del coche.

Únicamente con nuestra computadora, conseguiremos diseñar un sistema que de un modo tradicional hubiera necesitado complicados y caros mecanismos físicos.

El modelo matemático de este sistema sería el siguiente:

$$\left( \frac{d}{dt} \cdot y(t) \right) + \left( \frac{v}{m} \right)_{d(t)}^{dy(t)} + \left( \frac{k}{m} \right) \cdot y \cdot t = \left( \frac{v}{m} \right)_{d(t)}^{dx(t)} + \left( \frac{k}{m} \right) \cdot y \cdot (t)$$

Donde 'm' representa el valor de la masa, 'k', la constante de amortiguador. La función 'x(t)' representa la forma que tendrá la carretera sobre la que avanza el coche. En general será una combinación de una función de baja frecuencia, que será la forma de la carretera, si está en cuesta, etc..., y una función de alta frecuencia, que serán los baches que haya en el camino. En un caso real, se deberían conocer estos datos, normalmente con una función interpolada o mediante valores numéricos. En este artículo, para facilitar el cálculo utilizaremos una rampa, de modo que "x(t) = t". Como condiciones de contorno supondremos que el amortiguador está parado en el instante inicial de tiempos:

$$\begin{aligned} \frac{dy(0)}{dt} &= 0 \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

Para realizar nuestro ejemplo, daremos unos valores a las constantes un tanto arbitrarios para facilitar los cálculos. En el caso de una simulación real, deberíamos tomar los valores reales de 'm' 'k' y 'v'. Los valores usados serán:

$$m = 0.5$$

$$k = 1$$

$$v = 1.5$$

luego la ecuación a resolver será:

$$\left( \frac{d}{dt} \cdot y(t) \right) + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2 \cdot y(t) = 3 \frac{dx(t)}{dt} + 2y(t)$$

La solución general de esta ecuación con las condiciones de valor inicial indicadas anteriormente será de la forma:

$$y(t) = c_1 \cdot e + c_2 \cdot e^t + a + b \cdot t$$

Esta información nos será útil para comprobar los resultados de la simulación con el valor real y ver cuan acertado es nuestro método. La forma gráfica de esta solución para un valor de 't' grande será aproximadamente la de una rampa, puesto que el sistema trata de seguir la entrada, que en este caso es 'x(t)'. Si llegamos a variar los valores de las constantes obtendríamos otras soluciones que, en general, seguirán a la rampa pero provocarán oscilaciones que en nuestro sistema darán lugar a pequeños desplazamientos verticales del coche que disminuyen el confort de los ocupantes.

En los siguientes puntos se realizará la simulación mediante varias técnicas diferentes que nos permitirán ver los diferentes pros y contras de cada metodología. Para ello realizaremos la simulación en *C*, un lenguaje de propósito general, muy adecuado para ello, en *Matlab*, una herramienta matemática, en *ACSL*, un lenguaje específico de simulación de sistemas y mediante *SimuLink*, una Toolbox de Matlab, que permite simular de una forma casi visual y muy sencilla.

## HERRAMIENTAS DE PROGRAMACIÓN GENERAL: SIMULACIÓN EN C.

Se ha escogido C porque es uno de los lenguajes más extendidos por su enorme versatilidad, que permite al programador todo tipo de programas. Esto a su vez es una desventaja para nuestro caso, que es un problema muy específico. Al no disponer de una herramienta especializada, deberemos resolver la ecuación diferencial numéricamente por nuestra cuenta. Esto es, deberemos implementar nosotros mismos un algoritmo de resolución de ecuaciones diferenciales.

Para ello, se ha utilizado el algoritmo de Eüler, tras reducir la ecuación a un sistema de ecuaciones de primer orden, que es el método más sencillo. Para obtener un resultado mejor podríamos haber utilizado un algoritmo de Runge-Kutta de orden superior.

Por otra parte, de cara a realizar simulaciones más serias utilizando este lenguaje, muy popular en entornos Unix, sería adecuado realizar, o bien obtener, alguna librería de cálculo numérico. De este modo, evitaríamos tener que realizar los algoritmos numéricos de resolución de las ecuaciones diferenciales. Tan sólo tendríamos que utilizar las funciones propias de las librerías y luego enlazar nuestro programa con ellas.

En Internet se pueden encontrar algunas librerías de este tipo distribuidas libremente, aunque las que más abundan son las de Fortran, un lenguaje muy popular en entornos matemáticos y preferidos por algunos profesionales hasta hace muy poco tiempo.

El código de la simulación será el siguiente:

```
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>

void main()
{
float t[200],y[200],x[200];
float k,h,c,m;
/* El incremento del tiempo será de 0.5 segundos */
float it=0.05;
int n;
FILE *fichero;

/* Abriremos el fichero de salida*/
fichero=fopen("salida.dat", "w");

/* Introducimos los valores iniciales*/
y[0]=0;
x[0]=0;
t[0]=0;
fprintf(fichero,"%f%f\n",t[0],y[0]);

/* Fijamos un valor de 0.5 para h que nos asegura la estabilidad*/
h=0.5;

/* Bucle de resolución de la ecuación diferencial*/
for (n=0;n<200;n++)
{
    t[n+1]=(n+1)*it;
    /* Resolvemos la ecuación diferencial mediante el método de
Eüler*/
    x[n+1]=x[n]+h*(3+2*t[n]-3*x[n]-2*y[n]);
```

```

        y[n+1]=y[n]+h*x[n];
        /* Guardamos los datos en el fichero*/
        fprintf(fichero, "%f%f\n", t[n+1],y[n+1]);
    }
    /*Cerramos el fichero de salida*/
    fclose(fichero);
}

```

Los resultados de salida, se obtienen en un fichero llamado "salida.dat", que generará el programa durante su ejecución. Está formado por dos columnas. La primera contiene los valores del tiempo en segundos y la segunda el valor de ' $y(t)$ ', donde esta función representa la distancia desde la carrocería hasta la base de cotas. Además, se podría representar gráficamente, mediante un programa exterior, por ejemplo Excel, la salida obtenida, que tendrá una forma muy similar a la obtenida de una forma teórica.

Otros lenguajes pueden ser, Visual C, Visual Basic o los nuevos lenguajes de Programación en red: JAVA, Visual.NET, Flash etc.

## SIMULACIÓN MEDIANTE MATLAB

El entorno Matlab trae herramientas que nos facilitarán mucho el trabajo frente a la programación tradicional. Matlab, para los que no la conozcan, es un entorno orientado a cálculos habituales en el álgebra matricial, que viene complementado con múltiples *toolboxes*, que son librerías que contienen funciones adicionales que permitirán resolver problemas más específicos, como puede ser el control de sistemas, tratamiento de imágenes o lógica difusa (*fuzzy logic*).

Entre otras ventajas de este entorno, nos encontraremos que contiene funciones que resuelven directamente sistemas de ecuaciones diferenciales. De este modo, podemos obviar el algoritmo de resolución de la ecuación y centrarnos en nuestra simulación. Además, posee una

estructura de programación bastante similar al C, lo que nos permitirá dominarlo con mayor facilidad.

En primer lugar, debemos crear un fichero que describa nuestra ecuación diferencial. Se llamará "*edo.m*" y será de la forma:

```
function xdot=edo(t,x)
xdot(1)=x(2);
xdot(2)=3+2*t-3*x(2)-2*x(1);
```

Seguidamente crearemos otro fichero llamado "*simul.m*" que contendrá el proceso de simulación completo:

```
t0=0;%tiempo inicial de la simulación
tf=10;%tiempo final de la simulación
x0=[0,0];%valores iniciales de la ecuación diferencial
[t,y]=ode45('edo',t0,tf,x0);%solución numérica de la ecuación
plot(t,y)
```

La función "*ode45*" devolverá un vector 't' con el tiempo y una matriz 'y' con dos columnas, una en la que aparece el valor de 'y' junto con el valor 'de' la derivada de 'y'.

Otra ventaja que se puede observar en este entorno, es que posee una potente función interna de representación gráfica para los resultados, evitando de este modo la necesidad de utilizar un programa externo como ocurrió con la simulación en C.

## SIMULACIÓN EN ACSL

ACSL, es un metalenguaje creado y diseñado específicamente para la simulación de sistemas continuos. Sus siglas provienen de *Advanced*



*Continuous Simulation Language*. Con él podremos simular de una forma sencilla los más completos sistemas físicos. Además, como se apoya en el lenguaje Fortran, podremos crear nuevas funciones y librerías en este lenguaje, en el caso en que necesitemos alguna función que el código no traiga implementada.

En la simulación mediante ACSL tendremos que dividir nuestro trabajo en al menos dos programas. En uno, introduciremos el modelo de nuestro sistema, con sus ecuaciones y en otro, los comandos que se ejecutarán en la simulación. En el caso de utilizar rutinas en Fortran o librerías, deberíamos también incluir estos programas. El interprete de ACSL se creará un programa en Fortran a partir de nuestros programas y lo compilará generando un ejecutable. Nuestro modelo (simul.csl) se describirá como sigue:

```
PROGRAM simul
  DECLARATIVE
    CINTERVAL CINT=0.02
    CONSTANT XIC=0.0, XDIC=0.0, TSTP=100.0
    TIME INTEG(1.0,0.0)
    XDD=3+2*RAMP(0)-3*XD-2*X
    XD=INTEG(XDD,XDIC)
    TERM(T.GE.TSTP)
  END
END
```

Aquí la definición es bastante diferente a la presentada en los métodos anteriores. Este lenguaje posee una potente función llamada *INTEG* que será capaz de integrar la ecuación diferencial dándole un valor inicial. De este modo 'XDD' representa a la derivada segunda y 'XD' la derivada primera.

En segundo lugar definiremos el fichero de comandos (simul.cmd):

```
SET TITTLE="Simulación de amortiguación de un vehículo"  
SPARE  
SET TCWPRN=72  
OUTPUT TIME,XDD,XD,X,"NCIOUT"=20  
PREPAR XDD,XD,TIME,X  
START  
RANGE "ALL"  
PLOT "XAXIS"=TIME  
PLOT X,XD  
PLOT X,"HI"=1.0,"LO"=0.0,XD  
PLOT "XAXIS"=XD,X  
APARE  
STOP
```

Mediante estos comandos hemos configurado la simulación. Antes de 'START' hemos definido el formato que tendrá el fichero de salida (simul.out), donde encontraremos los valores numéricos de la simulación. Tras 'START', se le ha indicado al metalenguaje ACSL los gráficos que queremos que realice. En función de la versión de ACSL que utilizemos y si tenemos un posprocesador, estos gráficos serán en modo texto o bien en modo gráfico.

## SIMULACIÓN MEDIANTE SIMULINK

Simulink es una *toolbox* de Matlab, por lo que requiere que esté instalado este programa para funcionar. En ella utilizaremos distintos bloques de entrada/salida para definir nuestro sistema. Dispondremos de distintos generadores de señal, varios tipos de gráficos de salida y bloques que describirán las partes de nuestro sistema.

La aproximación al problema aquí es un tanto diferente. Simulink es una herramienta utilizada habitualmente en el mundo de la Ingeniería de

Control. Por ello, los sistemas se suelen describir de dos formas: o bien mediante ecuaciones de estado, o con funciones de transferencia. Para obtener la función de transferencia de un sistema deberemos tomar transformadas de Laplace en la ecuación diferencial que define el sistema.

Al estar definido nuestro sistema por una única ecuación diferencial, será más fácil tomar transformadas y calcular la función de transferencia. En el caso de un sistema de ecuaciones diferenciales sería preferible, por comodidad, trabajar en variable de estado. De cualquier forma, existen bloques para definir nuestro sistema en cualquiera de los dos modelos.

Transformando nuestra ecuación obtendríamos la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{3s+2}{s^2+3s+2}$$

Donde  $Y(s)$  representa la señal de salida y  $X(s)$  la señal de entrada. En nuestro caso  $X(s)$  será una rampa. En el caso de querer utilizar una señal de entrada más complicada deberemos importarla desde un fichero. La posibilidad de importar ficheros como entrada, nos permitirá utilizar modelos de terrenos mucho más complicados que en el caso de tener que describirlos analíticamente. En nuestro caso, la forma del terreno se encuentra en el fichero "simul.mat", por si se desea utilizar el fichero en lugar de la rampa para realizar el ejercicio.

Una vez que tengamos configurada la entrada de nuestro sistema, utilizaremos un bloque de función de transferencia dentro del menú de sistemas lineales. Por último colocaremos un gráfico autoescalable como salida.

Ya queda solamente comenzar la simulación. En el menú de simulación encontraremos la opción "Start". Dentro de este mismo menú encontraremos la opción "Parameters", desde la cual podremos configurar los parámetros de nuestra simulación. Podremos escoger el periodo temporal de simulación, la precisión y el algoritmo utilizado para resolver las ecuaciones diferenciales.

## CONCLUSIONES

Como hemos podido observar, el proceso de simulación no es muy diferente de un entorno a otro. La gran diferencia aparece en forma de facilidad de resolución de nuestro modelo. Los entornos Matlab y ACSL, contienen sus propias rutinas que facilitan enormemente el trabajo, además de incluir posprocesadores gráficos que permiten representar de una forma fácil y cómoda los resultados numéricos que hayamos obtenido tras la simulación. Sin embargo, la simulación no acaba aquí.

Posteriormente, debemos estudiar estos resultados y alterar las variables del sistema hasta que obtengamos el resultado deseado. En nuestro caso vemos que la salida sigue casi perfecta a la entrada. Sería conveniente, que se cambiaran los valores de las variables ' $k$ ' y ' $v$ ', para observar como varía la respuesta del sistema con valores diferentes, o cambiar la señal  $x(t)$  y ver como respondería nuestra amortiguación a terrenos diferentes, como podría ser un terreno de forma senoidal, mucho más exigente para la amortiguación.

Es fundamental estudiar los resultados tras realizar la simulación numérica.

Resumiendo, podemos observar como el lenguaje C, pese a ser un lenguaje de gran versatilidad, es una solución complicada que obliga al usuario a realizar todas las tareas, algo que el resto de entornos facilita ofreciendo herramientas especializadas.

Sin embargo, Matlab no es el más adecuado para grandes simulaciones donde utilicemos sistemas muy complejos. En ese caso es donde emergen con fuerza las herramientas específicas como ACSL o Dymola, que es un entorno cuasi gráfico que genera una salida en ACSL. Por último, reseñar la gran facilidad de manejo que ofrecen las herramientas gráficas tipo Simulink.

Muchas de las herramientas comentadas hasta ahora son de carácter comercial. Sin embargo, para alguna de ellas podemos encontrar opciones freeware o de libre distribución de igual calidad. Este es el caso de Matlab. Existe un programa clónico distribuido bajo licencia de GNU llamado Octave, que existe en versiones para Linux, FreeBSD y Windows'95.

Este paquete incluye una librería llamada Scicos que es muy similar a Simulink, permitiendo la simulación de sistemas, continuos e incluso híbridos, de un modo gráfico. En el caso de ACSL se pueden encontrar versiones para estudiantes a un precio más económico que el paquete profesional, algo que también con Matlab 5.0 y Simulink 2.0.

#### **4. HERRAMIENTAS ESPECÍFICAS EN EDUCACIÓN**

El creciente desarrollo de herramientas de bajo costo orientadas a la simulación de procesos y al estudio de los distintos operadores técnicos de control ha hecho posible el que podamos plantear la posibilidad de considerar una serie de programas y herramientas aplicables en el aprendizaje de temas relacionados con la Instrumentación, Adquisición de Datos, Automática, Sistemas de regulación y Control, Autómatas Programables, Sensorica, etc..., en los niveles de EE.MM. y estudios Universitarios.

## ACERCA DEL DISEÑO Y SIMULACIÓN.

La simulación en el campo de la automática y la electrónica está resuelta a nivel profesional con una serie de herramientas del tipo de MATLAB, LabVIEW, HP VEE, MATRIXx, etc... pero estas herramientas en algunos casos son costosas y requieren de sólidos conocimientos de matemáticas así como de módulos opcionales de estos grandes programas que también encarecen su implantación en el aula. En las tablas 1 y 2 se pueden ver una selección de herramientas clasificadas en dos grandes niveles. La tabla 1 nos representa una serie de herramientas de fácil manejo y bastante asequibles, ya que si bien existen versiones profesionales de ellas también se ofrecen versiones educativas o de estudiante a bajo precio, del mismo modo que de algunas existen "generosas demos" que bien vale la pena evaluar. En la tabla 2 se muestran las más conocidas y a mi juicio poderosas herramientas orientadas al diseño, simulación y elaboración de prototipos de laboratorio que además son de uso muy extendido en la industria.

| <u>HERRAMIENTAS DE COSTO MEDIO BAJO ORIENTADO A LA ENSEÑANZA</u> |  |                         |                         |
|--|--|-------------------------|-------------------------|
| Nombre   | Fabricante-distribuidor                | Versión/Plataforma      | Costo<br>Vers.Educ<br>. |
| WinLabPro  | © Graf Elektronik Systeme GmbH         | V:2.98 Win3.1           | -----                   |
| Visual Designer  | © Inetelligent Instrumentation         | V:3.0 Win3.1/Win95      | -----                   |
| DasyLab32  | © Dasytec Daten Sysetem Technik GmbH   | V:4.0 Win95/NT          | 600 US\$                |
| WorkBench  | © Strawberry Tree, Inc. Y Dasytec GmbH | V:2 Win3.1              | 800 US\$                |
| WinFAC 96  | © Ingenieurbüro Dr. J. Kahlert.        | V:96/FT<br>Win3.1/Win32 | 2250 DM                 |

|                   |  |                     |            |
|-------------------|--|---------------------|------------|
| DIAdem            | © GFS mbH                              | V:3.0 Win3.1/Win95  | 2000 DM    |
| IAS               | © Com Pro-Hard&Software Vertriebs GmbH | V:3.11 Win3.1/Win95 | 682 US\$   |
| Snap-Master       | © HEM Data Corporation                 | V:3.1 Win3.1/Win95  | -----      |
| FLOWCHART TRAINER | © Com Tec GmbH                         | V:3.0 MS-DOS/Win3.1 | 60000ptas. |

Tabla 1

| <u>OTRAS HERRAMIENTAS ORIENTADAS A APLICACIONES PROFESIONALES DE INVESTIGACIÓN O UNIVERSIDADES</u> |                            |                       |                  |
|--|----------------------------|-----------------------|------------------|
| Nombre   | Fabricante                 | Versión/Plataforma    | Precio Ver.Educ. |
| LabVIEW  | © National Instruments     | V:5.0 Multiplataforma | Varios Precios   |
| LabWindows/CVI   | © National Instruments     | V:5.0 Multiplataforma | Varios Precios   |
| HP VEE   | © Hewlett Packard          | V:4.0 Multiplataforma |                  |
| VisSim   | © Visual Solutions Inc.    | V:3.0 Multiplataforma | .                |
| MATRIXx  | © Integrated Systems, Inc. | V:6.0                 |                  |
| MATLAB   | © The Math Works, Inc.     | V:4.0                 | Varios Precios   |

Tabla 2

La gran mayoría de estas herramientas están concebidas con la misma filosofía. Se organizan mediante un entorno gráfico cuyo núcleo es un editor que permite realizar el cableado o conexionado de distintos bloques funcionales que posteriormente podremos parametrizar a nuestro gusto acercándonos poco a poco el modelo matemático o físico que

deseamos. Poseen además, en su mayoría, una serie de módulos que permiten la conexión con el mundo exterior, convirtiendo de este modo el ordenador en un sistema de adquisición de datos con la posibilidad de crear una serie de instrumentos virtuales y pantallas gráficas que nos permitan un mayor acercamiento a nuestro modelo real.

Con la proliferación de los lenguajes de programación orientados a objetos y los entornos tipo Visual Basic, Delphi o últimamente Java, estas herramientas permiten la integración de bloques de código en nuestra aplicación con lo cual se multiplica su potencia. Algo parecido ocurre con las modernas técnicas de control Fuzzy y Redes Neuronales. Por ejemplo mediante las herramientas WinFAC 96 o DIAdem podemos implementar controladores proporcionales con algoritmos difusos o crear una red neuronal con VisSim, entrenarla y enlazarla mediante el módulo de Adquisición de datos con un proceso como por ejemplo el control de la temperatura de un horno.

En muchas de estas herramientas, como en el caso de Visual Designer o de DasyLab el usuario haciendo uso de un módulo especial puede diseñar sus propios bloques funcionales tipo Librería e incorporarlos al entorno.

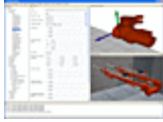
La herramienta IAS es muy apropiada para desarrollar aplicaciones de control mediante PLC o Sistemas de Adquisición de Datos ya que se incorpora la posibilidad de implementar un algoritmo de control haciendo uso de un editor de Organigramas, un editor de esquema funcional, un editor de pantallas de visualización y un potente trazador gráfico.

## HERRAMIENTAS ESPECIFICAS DE USO PROFESIONAL

Son numerosas las herramientas software que el mercado nos ofrece para poder desarrollar estrategias de simulación. A continuación y a modo de ejemplo se muestra una serie de herramientas específicas de simulación.



## 1º



Software de modelización de sistema dinámico

MeVEA Modeller

La plataforma de la simulación de MeVEA consta de dos software que se pueden combinar: modelizador y simulador. El software se puede modificar para ser utilizado para probar y para desarrollar casi cualquier clase de máquinas y de componentes mecánicos.

## 2º



Software para cálculo de estructura

ANSYS Structural

## 3º



Software de modelización 3D

Edgecam Part Modeler

Modelado rápido para la fabricación.

El Modelado de la pieza de Edgecam es un 3D que modela la herramienta diseñada específicamente para la construcción y/o la modificación rápidas y simples de modelos sólidos.

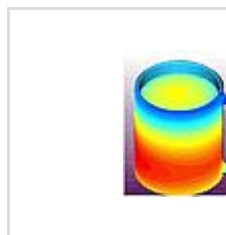
4º



Software de simulación de campo electromagnético en 2D

características:

- Elegir a un método de elemento de límite (BEM), al método de elemento finito (FEM) o a disolvente híbrido del método de BE-FE que combina las fuerzas del análisis de BEM y del mercado de cambios
- Enlaces directos para mayor los paquetes del cad para la representación verdadera de formas geométricas complejas
- Asignar las distribuciones de carga constantes o no uniformes a las superficies
- Simular la conductividad y la permitividad no lineales
- Analizar los campos eléctricos estáticos, la conducción eléctrica y la cuasi-estática de los dieléctricos del lossy
- Exportar los datos a la hoja de balance y otros programas del software para el análisis adicional
- El visualizador resulta con los gráficos, animaciones, y el contorno, la flecha, la línea aerodinámica, o los lugares geométricos del vector traza



# **TEMA I : INTRODUCCIÓN A LA SIMULACION**

**1. INTRODUCCIÓN**

**2. SIMULACIÓN**

**3. TAXONOMÍA Y ESTUDIO.**

**3. EVOLUCIÓN DEL CONCEPTO Y SOFTWARE.**

**4. VENTAJAS E INCONVENIENTES.**

**5. DOMINIOS.**

**6. HERRAMIENTAS EN LA INDUSTRIA. INVESTIGACIÓN Y  
DOCENCIA.**

**7. ETAPAS EN LA IMPLEMENTACIÓN.**

## INTRODUCCIÓN

La creciente capacidad de las computadoras y la inmensa investigación en el campo de la Ciencia de la Computación otorgan nuevas herramientas para apoyar el proceso de la toma de decisiones en diversas disciplinas y áreas de diseño y manejo de la industria. La Simulación es una de las herramientas más importantes y más interdisciplinarias. En pocas palabras podemos decir, que la simulación actúa cuando el ordenador "finge" ser una tienda, un avión o un mercado. El usuario define la estructura del sistema que quiere simular. Una ejecución del programa de simulación correspondiente le dice cual será el comportamiento dinámico de su empresa o de la maquina que está diseñando. Así podemos ver los pronósticos para la demanda y utilidad de nuestro producto, o ver cuando un mecanismo pueda fallar en las condiciones adversas del ambiente donde funcionará.

Las aplicaciones de la simulación parecen no tener límites. Actualmente se simulan los comportamientos hasta las partes más pequeñas de un mecanismo, el pronóstico del tiempo (<http://www.aemet.es/es/eltiempo/prediccion/modelosnumeros/hirlam> ), el desarrollo de las epidemias, el sistema inmunológico humano, las plantas productivas, sucursales bancarias, el sistema de repartición de pizzas en grandes ciudades, crecimiento de poblaciones de especies de animales, partidos y torneos de fútbol, movimiento de los planetas y la evolución del universo, para mencionar unos pocos ejemplos de las aplicaciones de esta herramienta. Cabe mencionar la creciente importancia de la Simulación en la Investigación de operaciones y en sus aplicaciones industriales. En los países altamente desarrollados la simulación es una herramienta principal en los procesos de toma de decisiones, en el manejo de empresas y la planificación de la producción. Además, la Simulación es cada vez

más “amigable” para el usuario, que no tiene que ser un especialista en computación.

Como el Dr. Ralph Huntsinger, ex-presidente de la “Society for Computer Simulation” y Presidente del Instituto McLeod de las Ciencias de Simulación dijo en sus presentaciones en el Primer Simposio sobre la Simulación por Computadora y la III Conferencia sobre Simulación por Computadora (Universidad Panamericana, Noviembre 1992 y 1995):

***!LA SIMULACIÓN ES ÚTIL Y DIVERTIDA;  
¡DISFRUTE SUS VENTAJAS;***

## **1. SIMULACIÓN**

Muchas veces habremos oído la palabra simulación, sin entender plenamente su significado. Una definición formal podría ser: *“La práctica de generar modelos para representar un sistema del mundo real o hipotéticos mundos futuros, experimentando con él para explicar el comportamiento del sistema, mejorar su funcionamiento o diseñar nuevos sistemas con características deseables”*. ¿Qué hay tras esta definición?. Una actividad que, de una manera no profesional, todos realizamos día a día.

Se define la *simulación de sistemas* como una técnica que resuelve simultáneamente las ecuaciones de un modelo matemático a valores crecientes de tiempo.

La técnica de simulación no pretende resolver analíticamente las ecuaciones de un modelo matemático. Por tanto, los modelos construidos para fines de simulación serán de naturaleza muy distinta a los formados para técnicas analíticas. Como consecuencia, el conjunto de restricciones

impuestas en el análisis del modelo mediante simulación será menor que el correspondiente a las técnicas analíticas.

La construcción de un modelo de simulación es pues mucho más libre. Sin embargo, es necesario formar y organizar las ecuaciones dinámicas de tal manera que se puedan utilizar los procedimientos de tipo iterativo empleados en simulación para la resolución simultánea de las mismas.

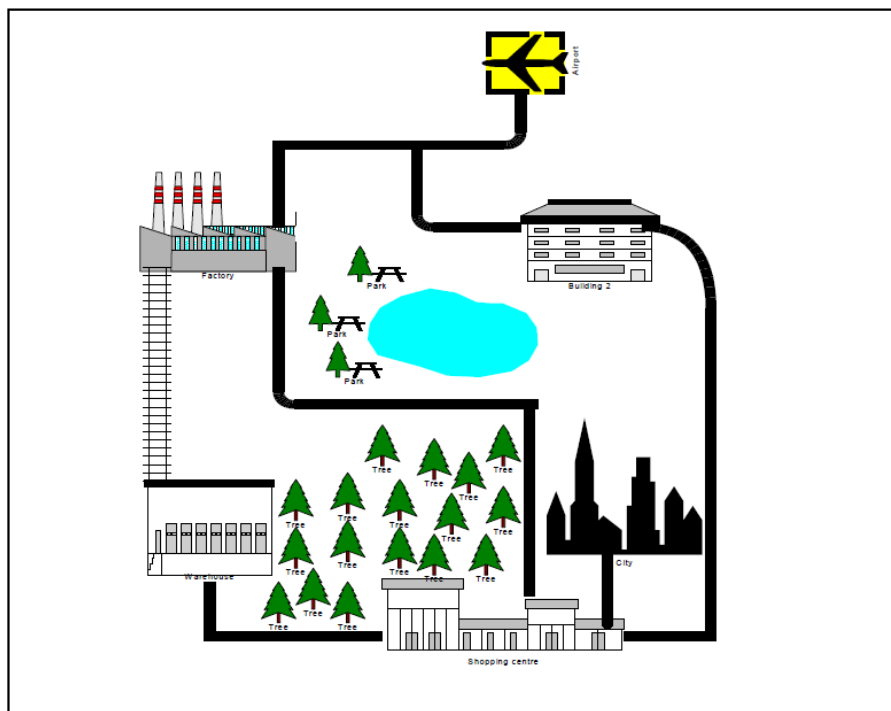


Figura 1: Sistema real a modelar

La simulación de Sistemas Continuos y Discretos requiere la utilización de ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencias respectivamente para su descripción. Para los Sistemas de Eventos Discretos se utilizarán un conjunto de ecuaciones lógicas que expresen las condiciones para que ocurran determinados eventos.

### **¿Cuándo se debe utilizar la Simulación?**

Cuando realizamos cualquier acción, normalmente la simulamos anteriormente de una forma mental, como cuando movemos un mueble en una habitación. Antes nos imaginaremos el movimiento del mueble y cual serán las acciones mejores para realizar este movimiento. Pues esta acción tan habitual es lo que llamamos simulación ('Simulación' es la resolución de un modelo lógico-matemático, resuelto fundamentalmente mediante métodos numéricos).

Su utilización a nivel profesional se viene realizando desde hace aproximadamente medio siglo, auspiciado por el crecimiento de los ordenadores, que hacían posible la realización de muchas operaciones matemáticas, fundamentales en la simulación, y ha ido creciendo con el paso de los años, llegando a convertirse en una herramienta de uso fundamental en la industria e investigación, por una serie de ventajas frente a otros métodos tradicionales que enumeraremos más adelante.

Conviene precisar que la simulación no se restringe al uso de computadoras, y se puede aplicar de muchos modos, aunque el uso de éstas es el principal. Tomemos por ejemplo un túnel de viento, donde se prueban aviones, y todo tipo de material aerodinámico. En este caso estamos simulando el comportamiento, por ejemplo, de un avión, en una tormenta dentro de nuestro túnel de viento. Sin embargo, es mucho más sencillo incluso económico, reproducir en un ordenador los fenómenos físicos asociados al vuelo del avión y realizar la simulación en una computadora.

De todos modos, la simulación va unida fielmente al desarrollo de las otras ciencias, y no es posible simular aquello que no se puede estudiar adecuadamente, de modo que en algunas situaciones la simulación no es una situación posible.

⇒ Los sistemas simulados son de Entrada-Salida.

Por otro lado debemos tener en cuenta que los sistemas simulados son de Entrada-Salida. Estos sistemas nos darán una salida para unos datos iniciales que nosotros debemos suministrar.

Por ello son incapaces de generar una solución por sí mismos. Sólo pueden servir como herramienta para el análisis del comportamiento de un sistema en condiciones especificadas por el experimentador.

⇒ EN ORDENADORES DE INVESTIGACIÓN Y EN ANÁLISIS DE SISTEMAS:

- 1) La simulación permite el estudio y la experimentación de interacciones de un sistema complejo o de un subsistema incluido en un sistema complejo.
- 2) Se pueden combinar la información, la organización o el entorno mediante simulación y observar el efecto de estas alteraciones en el comportamiento de un sistema.
- 3) El conocimiento adquirido durante el diseño de un modelo de simulación puede ser de gran valor a la hora de sugerir mejoras en el sistema.
- 4) Mediante el cambio de las variables de entrada se obtiene información sobre las más importantes y cómo interactúan entre ellas.
- 5) Validación de soluciones analíticas como recurso pedagógico para reforzar metodología de solución analítica.
- 6) Experimentar con nuevos diseños y políticas para su implementación o para preparar FUTURO.



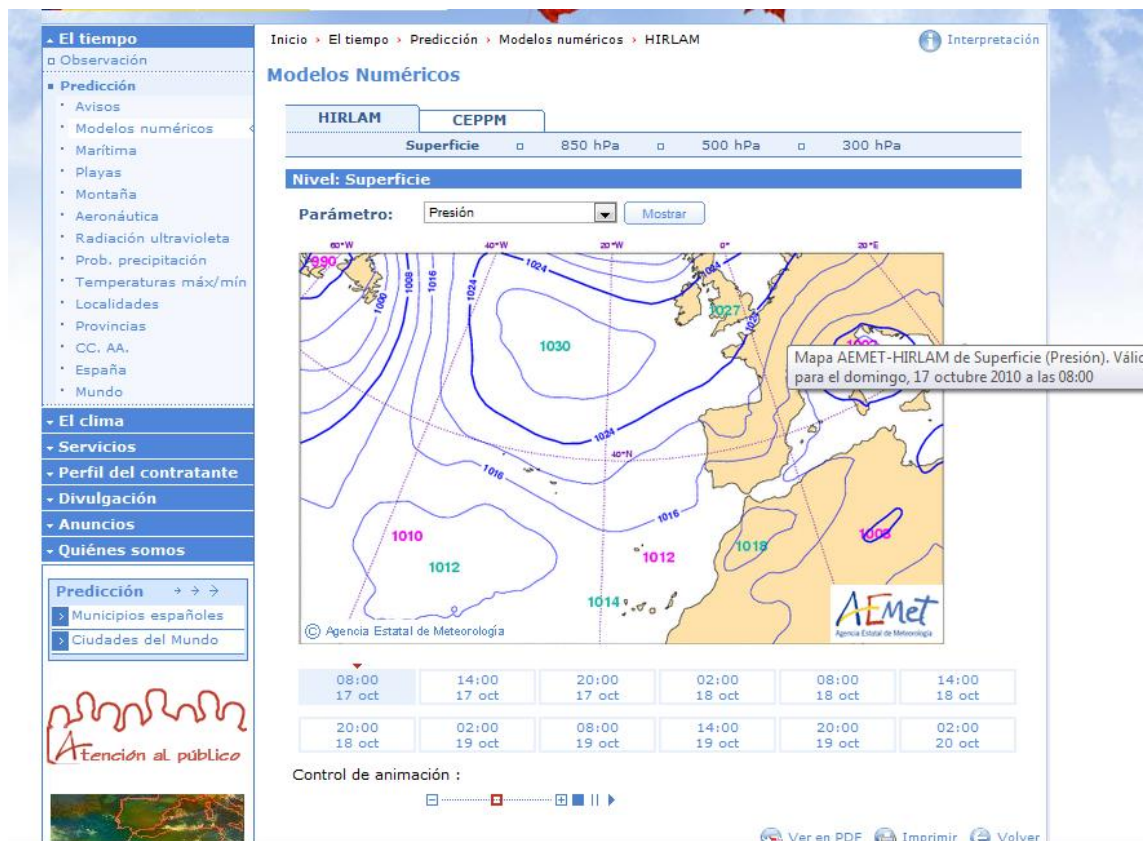


Figura 2: Modelos numéricos en meteorología

## **2. CLASIFICACIÓN DE SIMULACIÓN.**

- **Simulación Analógica.**

La Simulación Analógica emplea computadores analógicos y las variables del sistema son continuas, estando representadas en las tensiones de los amplificadores operacionales. La forma de operación es en paralelo, al producir el computador todas las variables del sistema simultáneamente. Esto hace posible la simulación en tiempo real.

La programación es realizada interconectando integradores, sumadores y potenciómetros que resuelvan la ecuación diferencial del sistema.

Ejemplo: Sistema de suspensión con ecuación diferencial.

$$M.\ddot{x} + D.\dot{x} + kx = F(t)$$

El circuito que simula este sistema se describe en la siguiente figura:

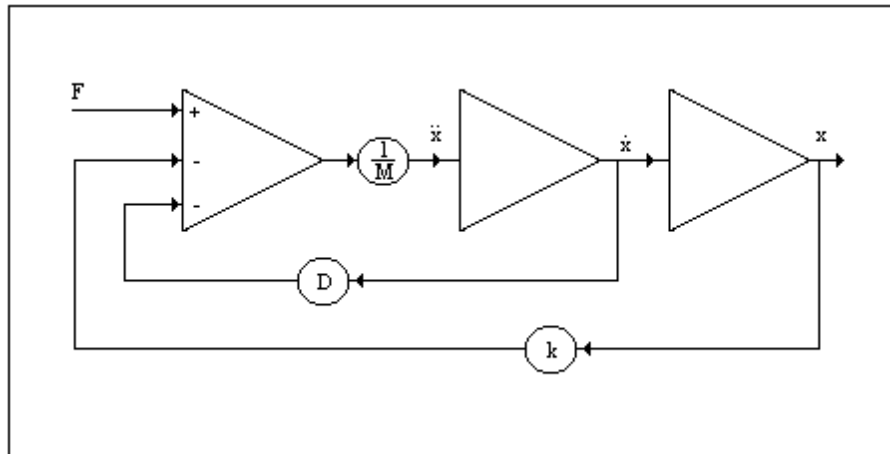


Figura 3: Simulación analógica del sistema de suspensión

El inconveniente de la simulación analógica está en que necesita un escalado de magnitudes previo a la implementación del circuito simulador con el fin de no saturar los amplificadores operacionales, provocando de esta forma una falta de flexibilidad.

- **Simulación Digital.**

La Simulación Digital emplea el computador digital resolviendo el modelo matemático del sistema de forma numérica. Las variables del sistema son definidas en tiempo discreto, a diferencia de la simulación analógica, esto es, en intervalos específicos de tiempo y están representadas por una combinación de bits.

La programación tradicional se realiza de forma secuencial siendo pues este tipo de simulación capaz de resolver problemas en tiempo real.

Ejemplo: Simulación del sistema con ecuación diferencial.

$$\dot{x} + ax = r(t) \quad \text{con } x(0) = 0$$

ante una entrada  $r(t)$  de tipo escalón unitario.

La discretización de la variable  $r(t)$  en la serie  $r(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$  y la resolución numérica de la ecuación diferencial conducen a:

$$x_{i+1} = x_i - aTx_i + T.r_i$$

siendo 'T' el periodo de discretización e integración. La resolución de la ecuación del sistema se transforma en una resolución iterativa fácilmente implementable en un computador.

No posee el inconveniente del escalado al utilizarse la aritmética del punto flotante, pero sin embargo, sí se necesitan utilizar convertidores A/D y D/A, pues resultarán errores de cuantificación, aparte del efecto del muestreo.

- **Simulación Híbrida.**

La Simulación Híbrida combina los anteriores tipos de simulación y se basa en la utilización óptima de los elementos de computación analógicos y digitales. Una interface formada por convertidores A/D y D/A permite la comunicación entre ambos elementos, según aparece en la siguiente figura:

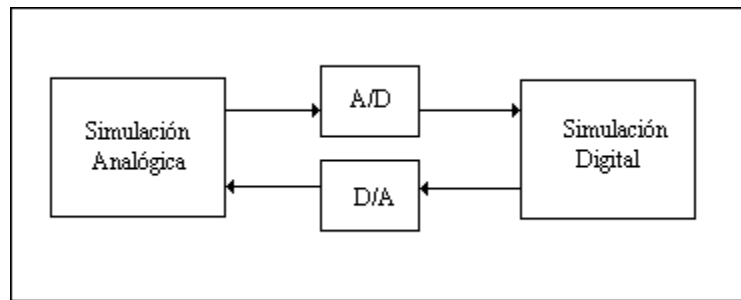


Figura 4: Interface de simulación híbrida

La sección analógica se encarga de simular la parte dinámica de la simulación incluyendo integración, mientras la sección digital realiza los cálculos imposibles de efectuar la sección analógica.

Permite que la realización de la simulación sea efectuada en tiempo real, pero tiene como inconveniente la dificultad de programar ambas secciones.

Entre los tres tipos de simulación se utilizará la digital debido fundamentalmente al avance surgido en los computadores digitales en lo que se refiere a incremento de velocidad y potencia de cálculo, añadiéndose además la posibilidad de utilización de procesamiento en paralelo.

### **CLASIFICACIÓN SEGÚN LA VARIABLE:**

- \* Estático: (Monte-Carlo) Representa un sistema en un determinado instante de tiempo.
- \* Dinámico: Variable con el tiempo.
- \* Deterministas: No contienen variables aleatorias: poseen un número conocido de entradas, las cuales darán un único conjunto de salidas.
- \* Estocásticas: Variables de entrada aleatorias, lo que da lugar a salidas aleatorias.
- \* Discreto o continuo: En instantes de tiempo o en un periodo de tiempo.
- \* Bucle abierto o cerrado: Cerrado la simulación depende de la interacción con las variables de salida.

### **3. NATURALEZA EXPERIMENTAL DE LA SIMULACIÓN**

La simulación no pretende aislar las relaciones entre determinadas variables, sino que busca observar la forma en que cambian todas las variables del modelo a través del tiempo. Las relaciones entre las variables deben ser deducidas de las observaciones. Para lograr comprender las relaciones que participan en el sistema, es necesario realizar varias "ejecuciones" de simulación, por consiguiente, la Simulación debe planearse como una serie de experimentos.

La manera en que se desarrolla una simulación depende fundamentalmente de la naturaleza del estudio a realizar. Los estudios de simulación son de tres tipos: Análisis del Sistemas, Diseño de Sistemas y Postulación de Sistemas.

- **Análisis de Sistemas.**

El Análisis de Sistemas pretende comprender la manera en la que opera un sistema existente o propuesto (no hay conocimiento del comportamiento). La situación ideal sería que el investigador pudiera experimentar con el propio sistema, pero lo que se hace realmente es construir un modelo y mediante simulación se investiga el comportamiento del modelo.

Los resultados obtenidos se interpretan en términos del comportamiento del modelo.

- **Diseño de Sistemas.**

Tiene como propósito el producir un sistema que satisfaga un conjunto de especificaciones. El diseñador puede para ello elegir o planear

determinados sistemas de componentes y conceptualmente elige una determinada combinación para construir el sistema. El sistema propuesto se modela y se predice su comportamiento mediante la simulación.

- si el comportamiento se compara favorablemente con el deseado, se acepta el diseño.
- en caso contrario, se rediseña el sistema y se repite el proceso.

Con frecuencia se utiliza el término Ingeniería de Sistemas que describe el estudio de sistemas combinando el Análisis y el Diseño, comprendiendo primero como trabaja el sistema y preparando modificaciones al mismo, para cambiar su comportamiento después.

- **Postulación de Sistemas.**

La Postulación de Sistemas parte del conocimiento del comportamiento del sistema pero no de los procesos que producen dicho comportamiento. Se establecen hipótesis de un conjunto de elementos y procesos que tienen lugar en el sistema que puedan explicar el comportamiento.

La Postulación del Sistema se utiliza en estudios sociales, económicos, políticos y médicos, en los cuales se conoce el comportamiento del sistema, pero no se conocen los procesos que provocan dicho comportamiento.

El estudio compara la respuesta del modelo con base en esas hipótesis frente al comportamiento del sistema, ya conocido. Si la comparación es favorable se puede postular una estructura del sistema.

Ejemplo: Funcionamiento del hígado (postulación de sistemas).

Se inyecta tiroxina en la sangre, llega al hígado que la cambia a yodo y que es eliminado en forma de bilis. Parte de la tiroxina vuelve al torrente sanguíneo como recirculación, tal que:

- se conoce la rapidez de eliminación de tiroxina en la sangre, hígado y bilis mediante isótopos radiactivos (conocimiento del comportamiento).
- no se conoce el mecanismo específico de transferencia de sangre-hígado ni hígado-bilis (no conocimiento de los procesos responsables del comportamiento).

Se utiliza un modelo matemático tricompartimental descrito en la siguiente figura:

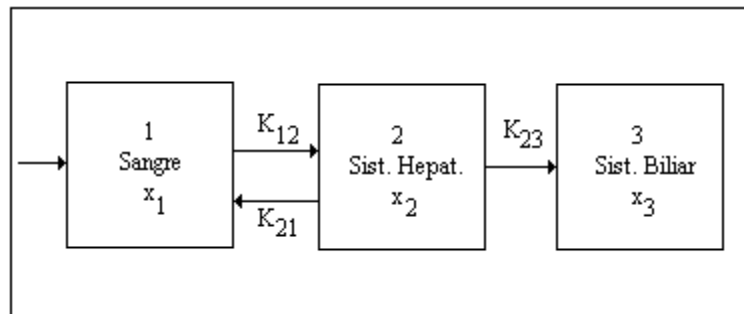


Figura 5: Modelo Tricompartimental del Hígado

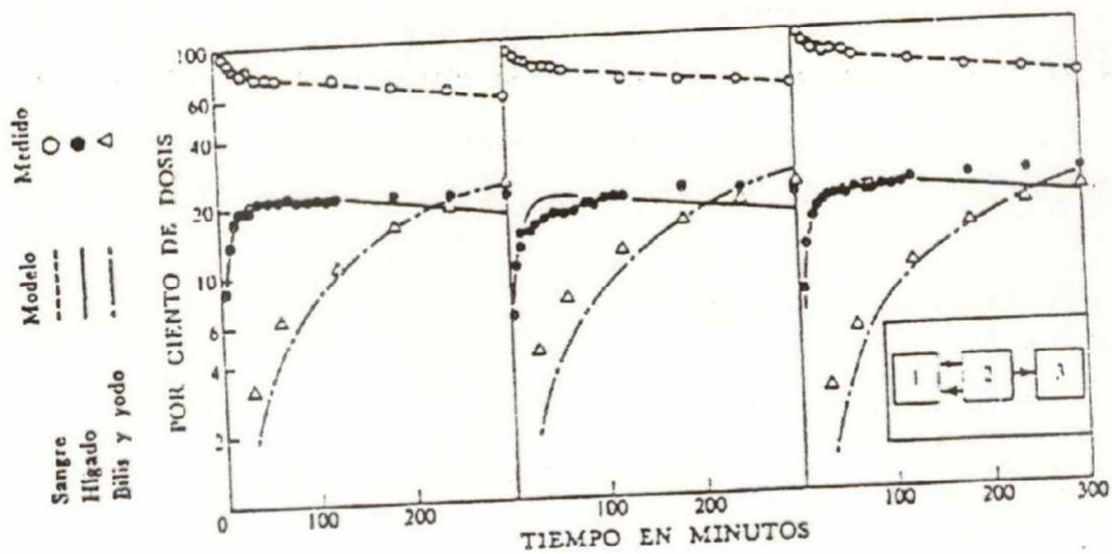
Suponiendo la transferencia de tiroxina proporcional a su concentración, se obtienen las ecuaciones diferenciales del sistema siguientes:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -k_{12} \cdot x_1 + k_{21} \cdot x_2 \\ \dot{x}_2 &= k_{12} \cdot x_1 - (k_{21} + k_{23}) \cdot x_2 \\ \dot{x}_3 &= k_{23} \cdot x_2\end{aligned}$$

El conjunto de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales dadas se resuelve analíticamente o por simulación y en la siguiente figura

(transparencia) se comparan las mediciones reales con las predicciones del modelo para valores supuestos de  $k_{ij}$ .

Se puede observar que la correspondencia de resultados es buena y se pueden aceptar las hipótesis de las tasas de transferencia  $k_{ij}$  y tres compartimentos.



Resultados del modelo de funcionamiento del hígado

Figura 6

## **EVOLUCIÓN DEL CONCEPTO Y SOFTWARE.**

### **PRIMERAS SIMULACIONES.**

- Salida de resultados numéricos, sólo comprensible para el científico o profesional desarrollador.

### **SEGUNDA FASE.**

- A los resultados numéricos se les acompañaban de gráficos



## **SOFTWARE DE SIMULACIÓN ACTUAL.**

- Entornos gráficos interactivos.
- Resultados numéricos y gráficos.
- Visualización de variables.
- Animaciones explicativas de la evolución del sistema.
- Público en general y no únicamente expertos en la materia.
- Aplicaciones:
  - Investigación
  - Docencia
  - Lúdico

## **VENTAJAS E INCONVENIENTES.**

El hecho de que no siempre se pueda aplicar la técnica de la simulación y su uso no produzca una solución analítica, nos sugiere una pregunta: ¿cuándo es útil la utilización de la simulación?.

En general, nos será útil siempre que nos sea más barato o más fácil que la realización del experimento sobre el sistema real, bien sea porque el experimento exige parar el sistema, no existen herramientas analíticas para desarrollar una solución o porque alguna de la condición a reproducir es difícil de conseguir.

En general, las ventajas que presenta la simulación son las siguientes:

- Permite, de una forma económica representar y estudiar prácticamente cualquier sistema, dentro de categorías científicas muy diferentes.
- El experimento se puede repetir tantas veces como sea necesario sin un gran coste adicional. Permite jugar con el tiempo de forma totalmente imposible para un experimento tradicional.

- Posibilita realizar experimentos que físicamente serían irrealizables.
- Permite explorar infinidad de alternativas para un problema sin modificar el funcionamiento del mismo, caso de una fábrica. Podríamos rediseñar el Layout sin necesidad de pararla y, de este modo, perder ingresos.
- ES COMPLETAMENTE REPETIBLE Y NO DESTRUCTIVA.
- La propia naturaleza repetitiva de los experimentos de simulación nos permite obtener muchos datos y traducirlos en resúmenes estadísticos, determinando así propiedades que tal vez no sean visibles en un único experimento.
- Permiten analizar el efecto de un evento incluso aunque las variables iniciales estén incompletas.
- Los resultados mediante simulación son más fáciles de obtener que en el sistema real.
- Los métodos de simulación son más fáciles de aplicar que los analíticos  $\Rightarrow$  Potencialmente más aplicación y utilidad.
- Los métodos de simulación no requieren las simplificaciones que los analíticos  $\Rightarrow$  Los datos generados se pueden utilizar para estimar cualquier resultado posible.
- Es la única forma de llegar a la solución de un problema:  
Ejemplo: Oscilaciones no lineales / Caos.  
Futuro de especies.

EN SU CONTEXTO MÁS AMPLIO: la Simulación nos permite la animación y visualización de los parámetros más relevantes que definen al sistema físico.

De aquí que el Campo de la Simulación se haya ampliado y diversificado en los últimos años hacia nuevas áreas, considerándose también el estudio de sistemas que pueden ser representados mediante modelos matemáticos que se explican o responden a soluciones exactas.

Mediante la simulación nos centramos en el problema físico, dejando menos tiempo a la resolución matemática.

Pero no todo es bueno dentro de la simulación. Si tenemos fe ciega en ella podremos encontrarnos con problemas indeseables. Por ello es importante tener en cuenta estos inconvenientes:

- El desarrollo de un buen modelo de simulación es costoso y requiere de mucho tiempo.
- Puede parecer que una simulación refleja con precisión una situación del mundo real cuando, en verdad, no lo hace. Ciertos problemas intrínsecos a la simulación pueden producir resultados erróneos si no se resuelven correctamente.
- La simulación es imprecisa y no podemos medir con exactitud el grado de imprecisión.

## **CAMPOS DE INFLUENCIA**

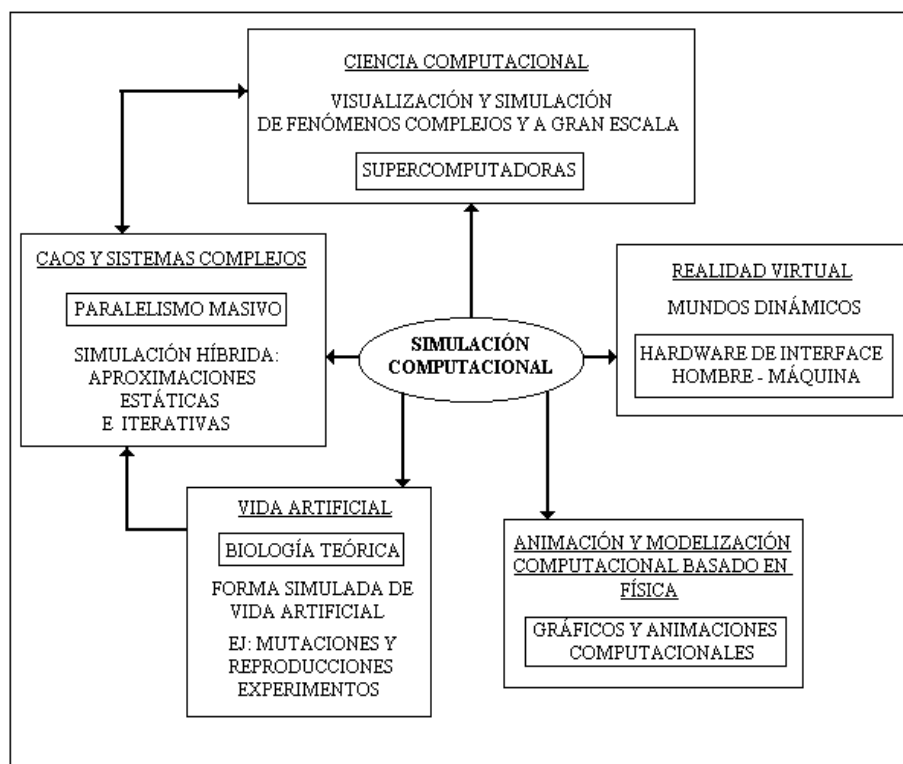


Figura 7: Dominios de la SIMULACIÓN

## **HERRAMIENTAS EN LA INDUSTRIA. INVESTIGACIÓN Y DOCENCIA.**

Algunos ejemplos de áreas donde la simulación es una herramienta de uso habitual podrían ser:

- Servicios financieros. Son habituales las simulaciones de sistemas bancarios o seguros.
- Logísticas. Su uso es habitual en el diseño de almacenes o en el reparto de trabajo dentro de una planta de producción.
- Diseño en Ingeniería. Se suele simular el funcionamiento de circuitos electrónicos, complejos mecanismos y todo tipo de maquinaria. Nunca se produce un diseño sin antes haber sido simulado.
- Transporte. Se suele modelar y simular el tráfico en carreteras para descubrir posibles atascos o problemas de tráfico.

## **ETAPAS EN LA IMPLEMENTACIÓN.**

Las etapas en las que se dividirá un proceso de simulación podrían ser las siguientes:

# Pasos en la Simulación

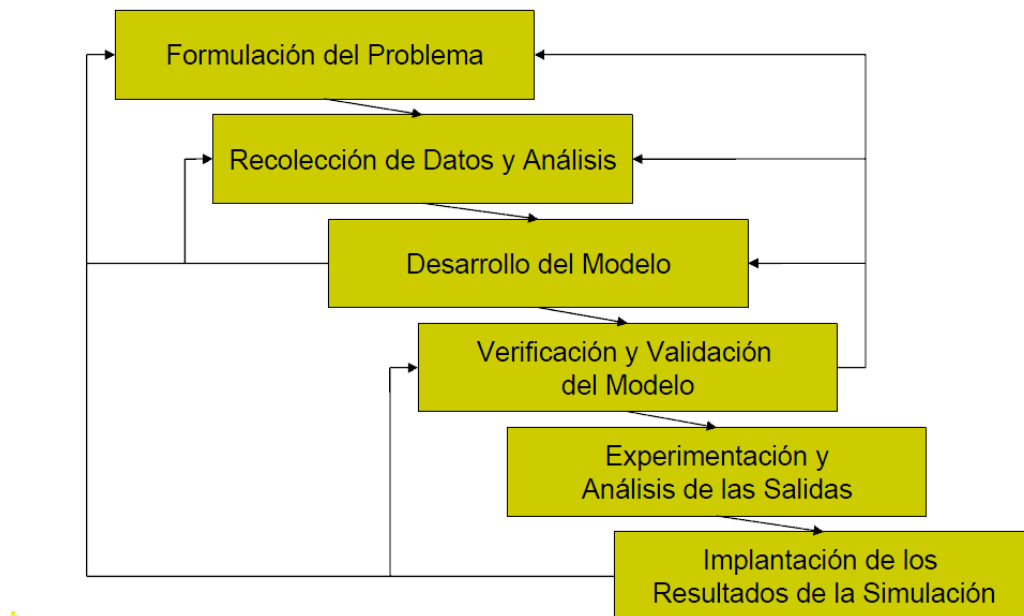


Figura 8: Etapas de la SIMULACIÓN

1. *Definición del sistema*, determinación de los límites, restricciones y medidas de efectividad.
2. *Formulación del modelo*, reducción o abstracción del sistema real a un diagrama de flujo lógico o a un modelo matemático.
3. *Preparación de datos*, identificación de los datos que el modelo requiere y reducción de éstos a una forma adecuada.
4. *Translación del modelo*, descripción del modelo en un lenguaje que comprenda el ordenador. En esta etapa será donde centraremos nuestros esfuerzos en los próximos números, donde aprenderemos a trasladar el modelo del lenguaje formal al lenguaje de simulación.
5. *Validación*, comprobar que el modelo realmente representa el sistema real.
6. *Planeación estratégica*, diseño de un experimento que producirá la información deseada. El experimento será lo que reproduzcamos con el ordenador. Una vez modelado el sistema, fijaremos cómo varían sus parámetros y esto nos dará la información deseada.
7. *Planeación táctica*, determinación de cómo se realizará cada una de las ejecuciones de prueba especificadas en el diseño experimental.

8. *Experimentación*, ejecución de la simulación para generar los datos deseados y efectuar el análisis de sensibilidad.

9. *Interpretación*, obtención de inferencias con base en datos generados por la simulación.

10. *Implantación*, uso del modelo y resultados.

11. *Documentación*, registro de las actividades del proyecto y resultados, así como de la documentación del modelo y su uso.