MODELOS MATEMÁTICOS: FUNDAMENTOS

1.- MODELOS MATEMÁTICOS

Cuando trabajamos en un laboratorio podemos hacerlo mediante experimentación directa, construcción de un prototipo, o construcción de un modelo cuantitativo lógico-matemático. Los dos primeros tienen el inconveniente de que pueden ser irrealizables debido a la magnitud del sistema real, o pueden ser excesivamente costosos en términos de tiempo o económicos. Como solución se plantea la construcción de un modelo que permite conocer el modo de operación del sistema, mejorar su diseño, llevar a cabo predicciones y simplificar el control sin irrumpir en el entorno del sistema real

De esta forma, cuando queremos estudiar un sistema, primero deberemos realizar una representación del sistema, que denominamos *modelo*. La importancia del modelo es vital ya que en él se basa la simulación: cualquier valor que obtengamos será erróneo si el modelo no se comporta como el sistema. De hecho, esta es la parte más complicada y tediosa del proceso de simulación. Es más, algunos sistemas extremadamente complicados son muy difíciles de modelar y los científicos pueden tardar años en conseguir un modelo, que en muchos casos, sólo es válido para un pequeño rango de valores. Un caso típico es la mecánica de fluidos y también los procesos de combustión.

Existen diversas posibilidades a la hora de generar el modelo de un sistema. En general, el modelo de un sistema va a consistir en un conjunto de ecuaciones o relaciones que nos permiten obtener los valores de salida del sistema respecto a unas variables de entrada.

Clasificación de Modelos.

Se clasifican en:

- Modelos Físicos: son representaciones de sistemas físicos. Son, dicho de un modo coloquial, maquetas de los sistemas reales. Aproximaciones físicas al sistema real donde se realizan experimentos de cara a estudiar el sistema. No son de nuestro interásporque en ellos no aparece el ordenador.
- Modelos Simbólicos: Representaremos nuestro modelo mediante ecuaciones simbólicas. Pueden ser matemáticos y no matemáticos. Generalmente, los matemáticos son los más utilizados por su consistencia y unicidad, así como su relativamente fácil manejo. También existen modelos no matemáticos. En los que las relaciones están expresadas de modo gráfico (diagramas de flujo) o mediante sentencias lógicas.

Proceso de Construcción de Modelos.

Hay dos puntos de vista a la hora de establecer un modelo matemático de un sistema, y son:

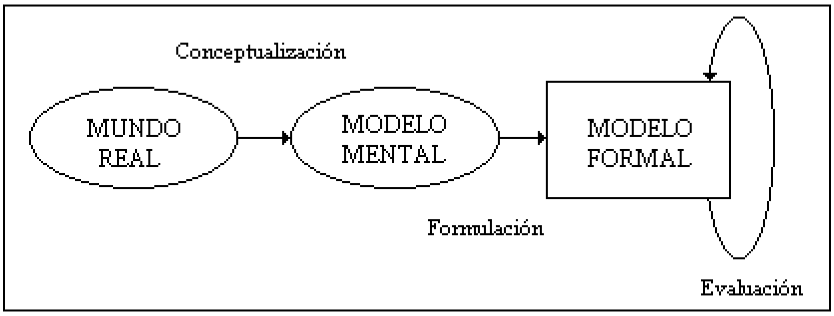
- Conductista o heurístico: La construcción del modelo se realiza a partir de procesamiento de datos históricos de la evolución del sistema. Se trata de ajustar un modelo previamente elaborado a los datos disponibles. No se pretende establecer la estructura interna del sistema, sino que se supone una estructura interna, a priori, que reproduzca el comportamiento observado del sistema. Este enfoque es el seguido en econometría.

- Estructuralista: La construcción del modelo se realiza siguiendo un análisis cuidadoso y detenido de los distintos elementos que intervienen en el sistema observado. De aquí se extrae la lógica interna del modelo que conduce a la obtención de la estructura, realizándose posteriormente, un ajuste de los parámetros libres del modelo con los datos históricos.

Antes de entrar en el proceso de construcción de modelos hay que reseñar que el proceso de selección de variables y establecimiento de relaciones entre ellas, está presidido en gran parte por la experiencia, intuición, inspiración, incluso la suerte. Sin embargo, es posible llegar a una cierta sistematización, describiendo la construcción en tres fases:

- Fase de Conceptualización.
- Fase de Formulación.
- Fase de Evaluación.

En la siguiente figura se muestran las tres fases y se indica el carácter iterativo del proceso de construcción, en el que no se va de una forma progresiva y única de una fase a la siguiente, sino que se procede de una a otra sin un orden especial.



La <u>Fase de Conceptualización</u> consiste en la obtención de una compresión mental de un cierto fenómeno del mundo real, procediéndose según las siguientes etapas:

- Obtención de información a través de la opinión de expertos y la literatura al respecto.
- Definición de aspectos del problema a resolver.
- Particularización del comportamiento dinámico del sistema mediante la estructura más simple que lo genere, basándose en el conocimiento de estructuras simples.
- Identificación de elementos del sistema, lo que llevará a establecer los límites del sistema.

La <u>Fase de Formulación</u> trata de representar los elementos manejados en la fase anterior por medio de un lenguaje formal, procediéndose en la secuencia siguiente:

- Establecimiento de diagramas formales.
- Cálculo de ecuaciones dinámicas del modelo.
- Implementación en computador utilizando un lenguaje apropiado que procese el conjunto de ecuaciones dinámicas.

La <u>Fase de Evaluación</u> consiste en el análisis del modelo así como su sometimiento a criterios de aceptabilidad, procediéndose según la secuencia siguiente:

- Ensayos mediante simulación de las hipótesis sobre las que se asienta el modelo y su consistencia: Verificación y Validación.
- Análisis de sensibilidad para estudiar la dependencia de las conclusiones extraidas del modelo con las variaciones de los parámetros que aparecen en el mismo.

Y es que cualquier modelo no es válido para representar un sistema. Deberemos utilizar un método que nos permita averiguar cuan parecido es nuestro modelo a la realidad de cara a evitar lamentables errores que puedan echar a perder nuestra simulación. El criterio de aceptabilidad empleado no va únicamente a ser el mero ajuste estadístico de datos. Por ello, se utilizará un criterio distinto, llamado “evaluación generalizada” que tendrá en cuenta no sólo las discrepancias predicción-observación, sino todos los aspectos cuantitativos y cualitativos del modelo. Estos aspectos los aportarán los especialistas familiarizados con el sistema (tendencias gráficas, etc...)
Para la evaluación de la calidad y la aplicabilidad de los modelos, se utilizan distintos indicadores estadísticos.

SUMA RESIDUAL CUADRÁTICA COMPUESTA (CRSS), utilizada para cuantificar la calidad de las correlaciones predichas en comparación con las mediciones experimentales a partir de la expresión:

$$CRSS = \sum_{i=1}^{N} \left(f_{rel_i}^{sim} - f_{rel_i}^{\exp} \right)^2$$

donde $f_{rel_i}^{sim}$ y $f_{rel_i}^{\exp}$ representan, respectivamente, los valores calculados y medidos de la frecuencia relativa y N es el número de intervalos de clase considerados. Este estadístico, sin embargo, no proporciona información sobre el grado del error cometido respecto de los valores con los que trabajamos, por lo que no resulta un buen indicador.

ERROR MEDIO ABSOLUTO (MAB), que es un indicador de la desviación media absoluta entre el modelo y los valores medidos. El MAB se define como:

$$MAB = \sum_{i=1}^{N} \frac{\left| f_{rel_i}^{sim} - f_{rel_i}^{\exp} \right|}{N}$$

COEFICIENTE DE CORRELACIÓN (R) es una medida de la relación lineal entre los valores calculados por el modelo respectivo y los valores medidos. Se define de la forma:

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(f_{rel_i}^{sim} - \bar{f}_{rel}^{sim} \right) \left(f_{rel_i}^{\exp} - \bar{f}_{rel}^{\exp} \right)}{\left[\sum_{i=1}^{N} \left(f_{rel_i}^{sim} - \bar{f}_{rel}^{sim} \right)^2 \sum_{i=1}^{N} \left(f_{rel_i}^{\exp} - \bar{f}_{rel}^{\exp} \right)^2 \right]^{1/2}}$$

siendo $\bar{f}_{rel}^{sim}$ y $\bar{f}_{rel}^{\exp}$,respectivamente, los promedios de los valores calculados y medidos.

Sin embargo, estos parámetros únicamente nos permiten conocer la magnitud del error cometido al aceptar como válido un determinado modelo matemático. Existen, por otra parte, unas pruebas estadísticas que calculan la probabilidad de cometer error al rechazar el modelo cuando éste es correcto. Son las denominadas **pruebas de hipótesis** que se emplean para decidir entre dos hipótesis que afectan a una población, a partir de una medida del error cometido al optar por una de estas dos hipótesis.
Pueden ser paramétricas o no paramétricas según se basen en la suposición de que la distribución sea normal o no lo sea. En nuestro caso, puesto que nuestras distribuciones no cumplen las condiciones de normalidad, hemos recurrido a los métodos no paramétricos.
Los métodos no paramétricos, también denominados métodos independientes de la distribución o de distribución libre, son procedimientos inferenciales que no se encuentran sujetos a la forma de la distribución de la población de interés (Canovas, 1998). En la actualidad, se están utilizando con mayor frecuencia en el análisis de datos ya que, equipado con las técnicas no paramétricas, el analista de datos tiene más posibilidades de acomodar una variedad más amplia de situaciones experimentales (Walpole, 1992).
Son varios los métodos no paramétricos de que disponemos para probar la hipótesis de que, dadas dos muestras independientes, las poblaciones siguen la misma distribución.
PRUEBA DE WILCOXON recurrimos a la prueba propuesta en 1945 por Frank Wilcoxon y que se denomina Prueba de rangos y signos de Wilcoxon. Este test es el mejor método no paramétrico a la hora de trabajar con observaciones en parejas (Canovas, 1998).
La prueba de rangos y signos de Wilcoxon toma en cuenta tanto el signo como la magnitud de las diferencias entre cada par de observaciones. Para implementar la prueba de Wilcoxon, se obtienen las diferencias para los N pares considerados. Entonces, se ordenan, sin importar el signo, y de acuerdo con este orden se les asigna un rango, es decir, la diferencia más pequeña recibe un rango 1 y a la diferencia absoluta más grande se le asigna un rango igual a N, teniendo en cuenta que, cuando el valor absoluto de dos o más diferencias es el mismo, se asigna a cada uno el promedio de los rangos que se les hubiera asignado si las diferencias fueran diferentes. Por otra parte, si una diferencia es igual a cero, el procedimiento que se sugiere es omitir el par y ajustar N.
La estadística de la prueba de Wilcoxon es la suma de los rangos positivos y se denota por T_+ de forma tal que si las distribuciones son similares se espera que tenga el mismo valor, aproximadamente, que la suma de las magnitudes de los rangos negativos.

Etapas de Construcción de un Modelo.

El proceso de construcción de un modelo no es lineal, basándose en sucesivas etapas por modelos progresivamente mejorados de acuerdo con un cierto criterio de aceptabilidad. Sin embargo esto presupone la existencia de un modelo inicial, que tenga que ser enjuiciado y en su caso, modificado y mejorado.
Por lo tanto, el proceso de modelado consta de dos etapas, a saber:

a.) La Etapa Inicial comprende una clara y precisa definición del comportamiento dinámico del sistema. Para ello se siguen los siguientes pasos:

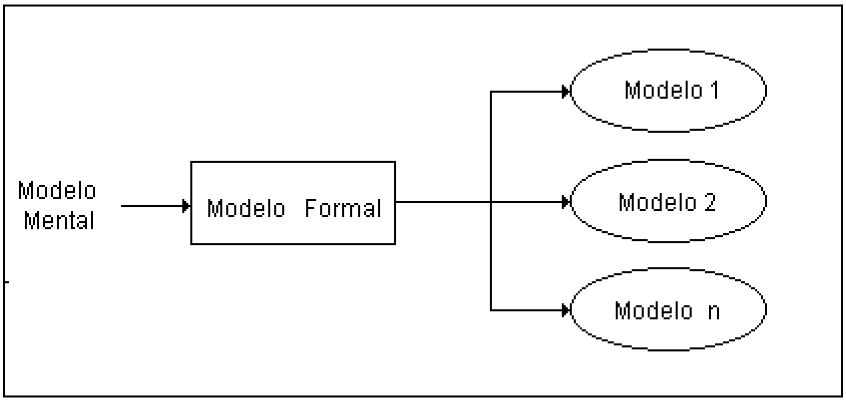
1. Trazado de gráficos llamado modo de referencia, que representen el comportamiento temporal de las principales magnitudes de interés. El modo de

referencia sirve como una imagen aproximada de las gráficas que se obtengan del modelo inicial (fase de conceptualización).

2. Identificación del conjunto de procesos fundamentales que se consideren suficientes para reproducir el modo de referencia (fase de conceptualización).
3. Búsqueda del mecanismo básico o conjunto más pequeño de procesos considerados suficientes para generar el modo de referencia (fase de conceptualización): Submodelos.
4. Establecimiento de los diagramas del modelo y las ecuaciones dinámicas del modelo a partir del mecanismo básico (fase de formulación).
5. Realización de una pasada del modelo computerizado obtenido a partir de las ecuaciones y comparación de los resultados gráficos con el modo de referencia (fase de evaluación).

b.) La Etapa de Perfeccionamiento consiste en una serie de reelaboraciones del modelo obtenido en la etapa inicial con el fin de perfeccionarlo.

Las sucesivas etapas consistirán en una eliminación progresiva de las hipótesis más simplificadoras de manera que el modelo se aproxime cada vez más simplificadoras de manera que el modelo se aproxime cada vez más a la realidad.



Las fases de construcción del modelo serán efectuadas tanto en la etapa inicial como en la de perfeccionamiento.

<u>Dificultades en la Construcción de un modelo.</u>

Se proponen una serie de normas para superar los escollos que habitualmente se presentan en la construcción de un modelo. Estas normas se detallan a continuación:

1. Para la construcción con éxito de un modelo es necesaria la descripción explícita del comportamiento dinámico formada por el modo de referencia, las hipótesis acerca de las causas y los mecanismos básicos.

2. Las hipótesis dinámicas se obtienen a través de una exploración combinada del comportamiento histórico del sistema con estructuras simples de comportamiento conocido.
3. Los límites del sistema se deben elegir lo suficientemente amplios para acoger los procesos que generan el comportamiento dinámico.
4. El objetivo del modelo no es predecir, sino ensayar las hipótesis dinámicas
5. El modelo inicial debe contener únicamente los mecanismos básicos que generen el modo de referencia.
6. El modelo debe mantenerse transparente a través de todo el proceso modelado. Esto conduce a que se incluyan sólo las relaciones estrictamente necesarias y que sean también significativas.
7. Para reducir la complejidad del modelo debe procederse a restringir el número de detalles.

CLASIFICACIÓN DE MODELOS MATEMÁTICOS

Un modelo matemático se define como una descripción desde el punto de vista de las matemáticas de un hecho o fenómeno del mundo real.
El objetivo del modelo matemático es entender ampliamente el fenómeno y tal vez predecir su comportamiento en el futuro.

El proceso para elaborar un modelo matemático es el siguiente:

1. Encontrar un problema del mundo real
2. Formular un modelo matemático acerca del problema, identificando variables (dependientes e independientes) y estableciendo hipótesis lo suficientemente simples para tratarse de manera matemática.
3. Aplicar los conocimientos matemáticos que se posee para llegar a conclusiones matemáticas.
4. Comparar los datos obtenidos como predicciones con datos reales. Si los datos son diferentes, se reinicia el proceso.

Es importante mencionar que un modelo matemático no es completamente exacto con problemas de la vida real, de hecho, se trata de una idealización.

Hay una gran cantidad de funciones que representan relaciones observadas en el mundo real; las cuales se analizarán en los párrafos siguientes, tanto algebraicamente como gráficamente.

1.- Polinomios

Una función es polinomio si tiene la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Donde n representa un entero negativo y los números a_0, a_1, a_2,….. a_n, son constantes llamadas coeficientes del polinomio.
El dominio de todos los polinomios son todos los números reales (-∞, ∞).

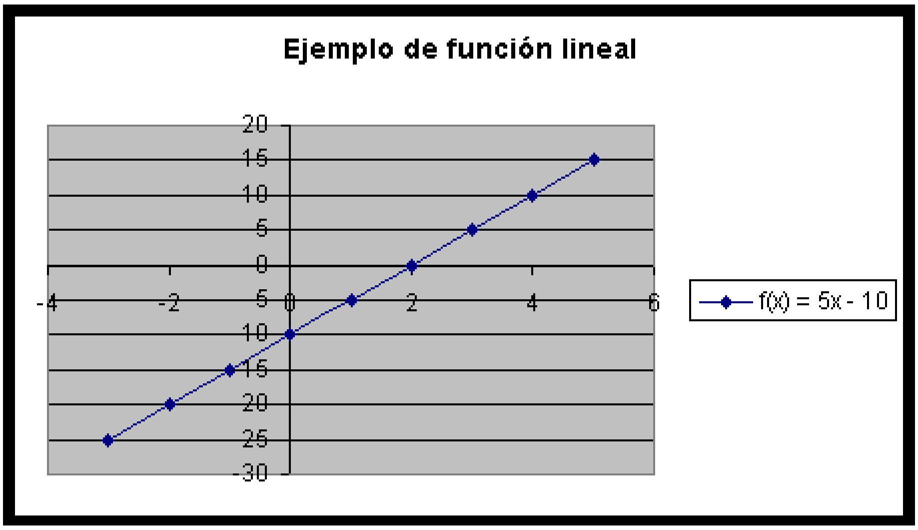
Los polinomios se nombran de acuerdo al grado del primer termino. Los polinomios de grado uno son de la forma: P(x) = mx + b, y son funciones lineales. Los polinomios de segundo grado son llamados funciones cuadráticas y presentan la forma $P(x) = ax^x + bx + c$; su gráfica es de una parábola. Una función de tercer grado, es llamada función cúbica, y tiene la forma: $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. A continuación se muestran las gráficas de algunas funciones de polinomios.

1.1.- Modelos Lineales

Se dice que una función es lineal cuando su gráfica es una línea recta; y por consecuencia tiene la forma:

$$y = f(x) = mx + b$$

Donde m representa la pendiente de la recta y b la ordenada al origen (el punto en el que la recta interfecta al eje de las "y"). Es importante mencionar que este tipo de funciones crecen a tasa constante; y su dominio e imagen son todos los números reales.



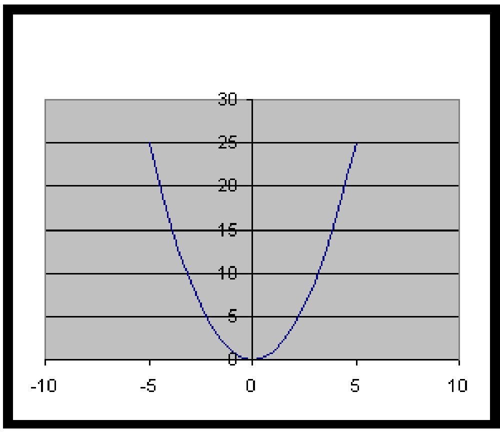
2. Funciones potencia

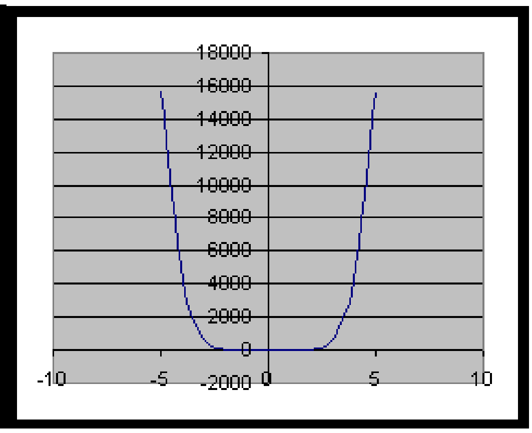
Una función es llamada potencia, cuando tiene la forma: $f(x) = x^a$, donde a es constante. Y hay varios casos:

2.1.- a= n, n es un entero positivo

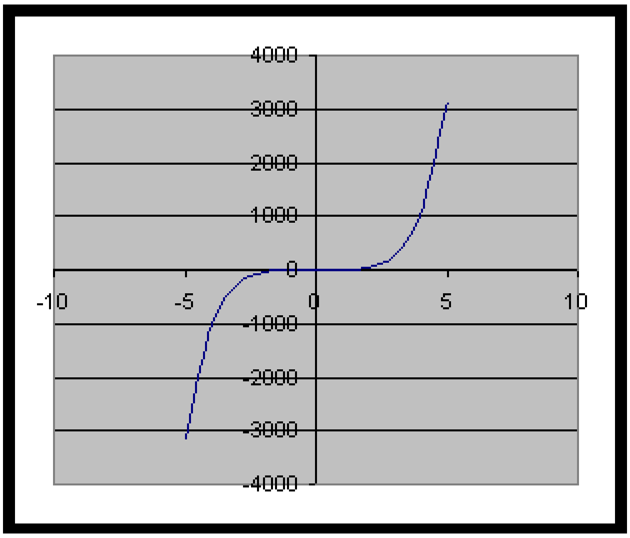
La forma genera de la gráfica depende si n es par o impar; si n es par, la gráfica de f es similar a la parábola $y = x^2$; de lo contrario, la gráfica se parecerá a la función $y = x^3$.

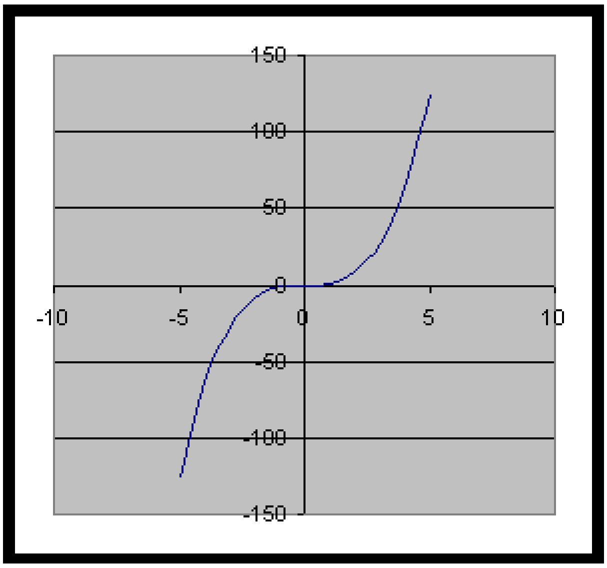
Es importante mencionar, que en cualquiera que sea el caso, cuando n crece, la gráfica se vuelve más plana cerca de 0, y más empinada cuando Ix I es menor o igual a 1.





Las dos gráficas anteriores son ejemplos de funciones pares: x^2 y x^6.

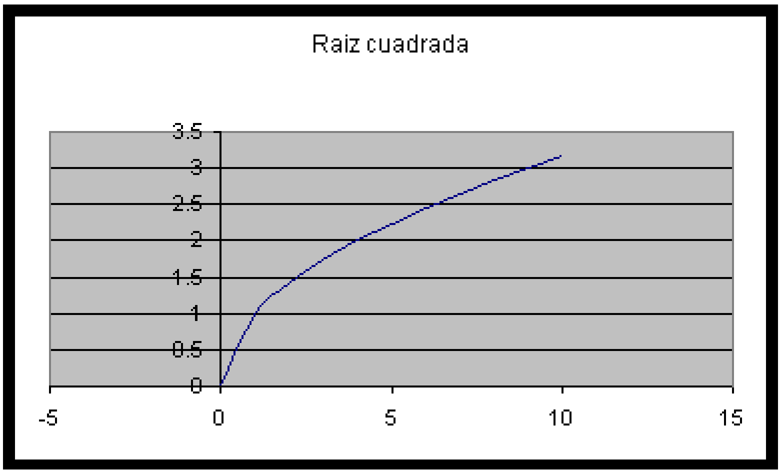


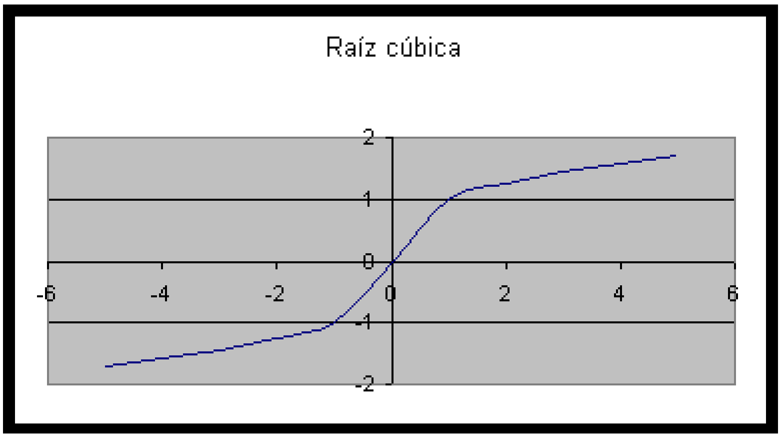


Las dos gráficas anteriores son ejemplos de funciones pares: x^3 y x^5.

2.2.- a= 1/n, n es un entero positivo.

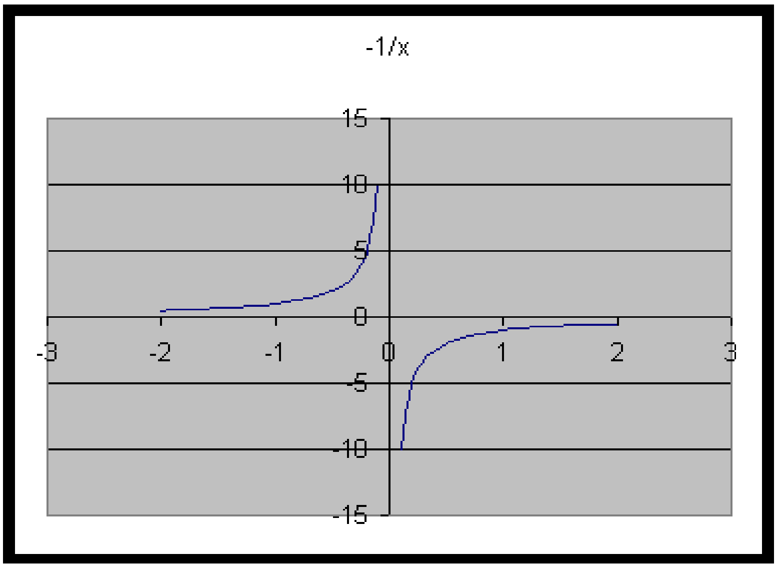
La función f(x) = $x^{1/n}$ es una función raíz. Al igual que en el caso anterior, su gráfica depende de n, ya que si n es par su gráfica será similar al de raíz cuadrada; y si n es impar su gráfica será similar al de raíz cúbica.





2.3.- a= -1

Éste tipo de función es llamada función recíproca, y su forma es f(x) = x^{-1} o f(x) = -1/x. Y su gráfica corresponde a una hipérbola cuyas asíntotas son los ejes de coordenadas.



3. Funciones racionales

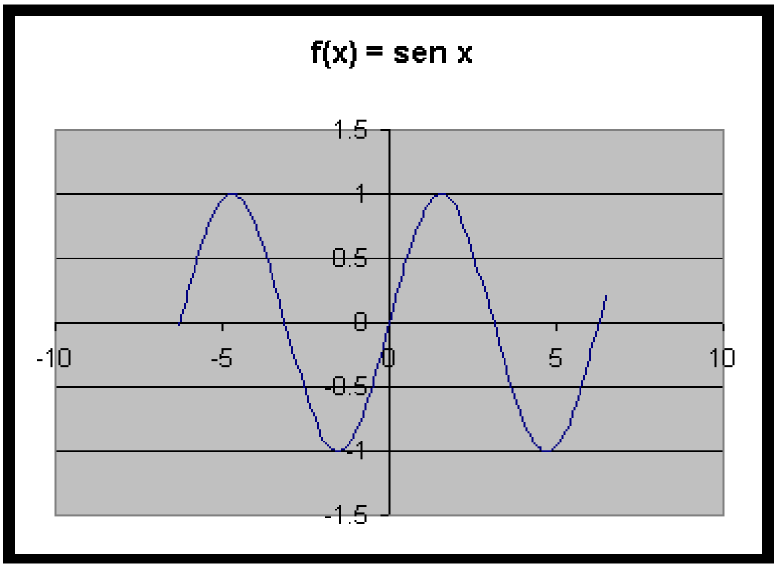
Una función es llamada racional cuando es una razón o división de dos polinomios.

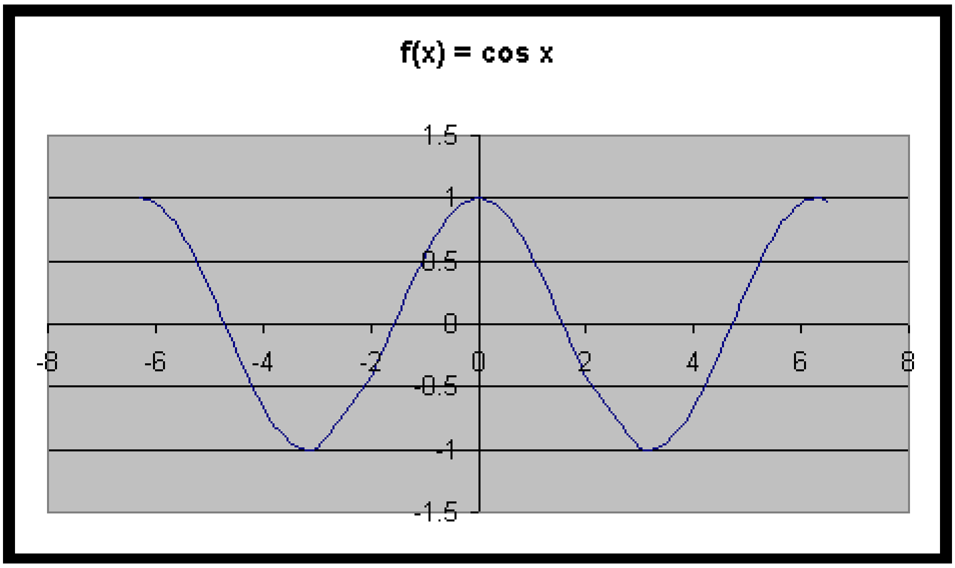
f(x) = P(x) / Q(x)

Su dominio lo constituyen todos los valores que no hagan a Q(x) = 0, ya que una división es indivisible entre 0.

4. Funciones trigonométricas

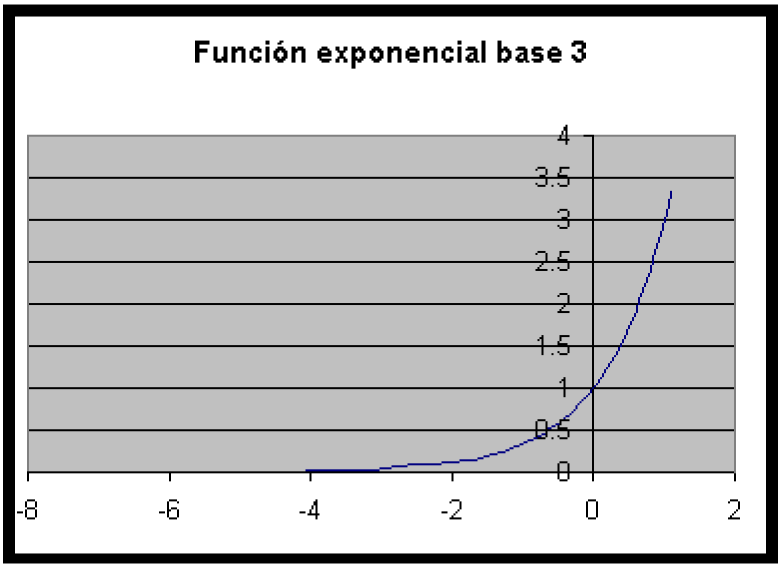
En el caso de éstas funciones, es conveniente utilizar la medida de radianes; es importante mencionar que cada función tiene una gráfica específica. En el caso específico del seno y coseno, su dominio es (-∞,∞) y su imagen [-1, 1]. Veamos en las gráficas.

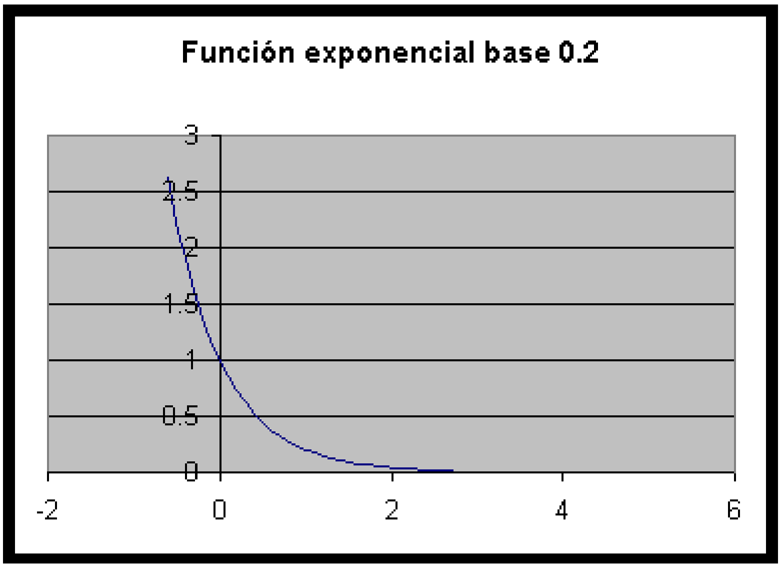




5. Funciones exponenciales

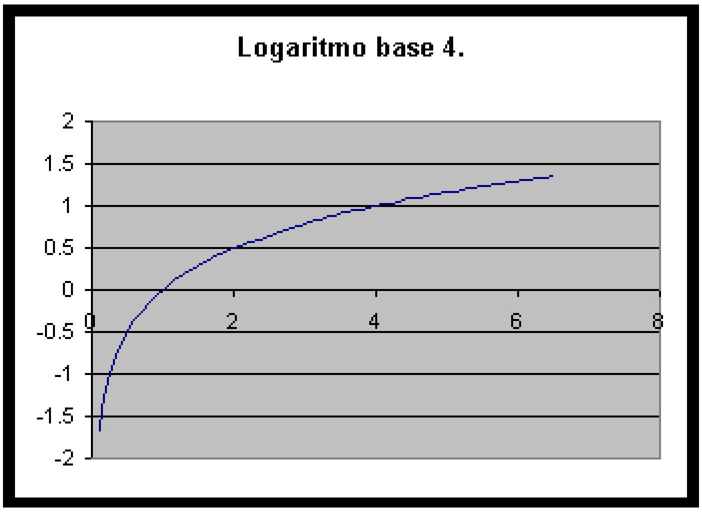
Se les llama funciones exponenciales a aquellas que tienen la forma $f(x) = a^x$, donde la base a es una constante positiva. Su dominio es (-∞,∞) y su imagen (0, ∞). Es importante mencionar que si la base de la función exponencial es mayor a 1, la gráfica será descendente, y si la base se encuentra entre 0 y 1 la gráfica será descendente (pero en el cuadrante contrario).

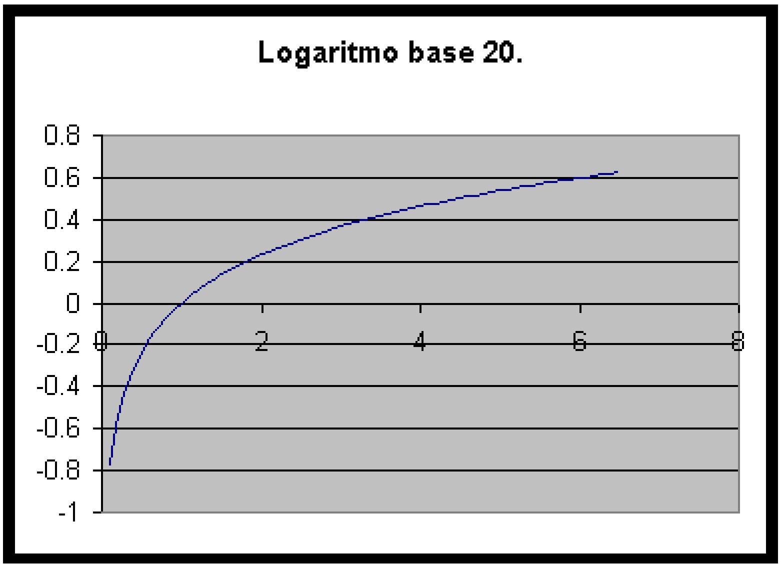




6. Funciones logaritmos

Son funciones que tienen la forma $f(x) = \log_a x$, donde la base a es una constante positiva; es importante mencionar que son las funciones inversas a las exponenciales; por lo tanto su dominio es $(0, \infty)$ y su imagen $(-\infty, \infty)$. Veamos ejemplos:





Como podemos observar en las dos gráficas anteriores, a medida que la base del logaritmo es mayor, la gráfica de éste se apega más al eje Y.

7. Funciones trascendentes

En realidad esta clasificación engloba a todas aquellas funciones que no son algebraicas (esto es, las que involucran adición, sustracción, división y multiplicación de variables). Las funciones trascendentes son las trigonométricas, logarítmicas, exponenciales, y trigonométricas inversas, entre otras.