Lënda: **Sinjalet dhe sistemet**

**Literatura:**

1. Shënime të shtypura dhe transparencat e ligjëratave.
2. “Schaum's Outline of Theory and Problems of Signals and Systems”, Hwei P. Hsu, 2011, McGraw-Hill.
3. “Signals and Systems”, Alan V. Oppenheim, 2nd ed., 1996, Prentice Hall.



# *Ligjërata e 1.*

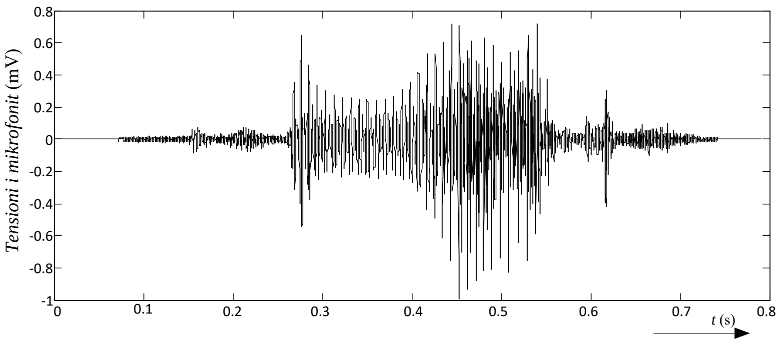
# ***Sinjalet***

- Sinjalet dhe klasifikimi i tyre
- Sinjalet e vazhduara themelore



## *Sinjalet dhe klasifikimi i tyre*

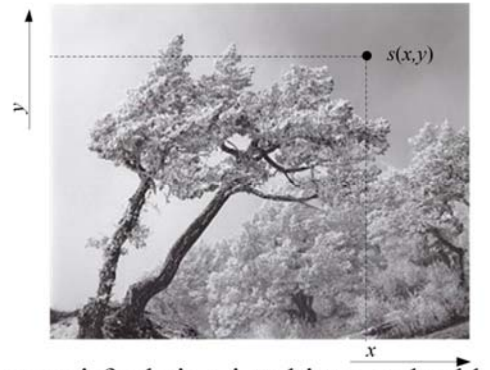
- Sinjali përcjellë informatën për zhvillimin e një dukurie.
- E shprehur matematikisht: sinjali është funksion i një apo më shumë variabëlve të pavarura.




- Në grafik është treguar sinjali i tensionit në dalje të mikrofonit me rastin e shqiptimit të fjalës “**sinjal**”.
- Ky është sinjal njëdimensional, ku variabëli i pavarur është koha *t*.



## *Sinjalet dhe klasifikimi i tyre*




- Sinjali i formuar si funksion i të hirtës të bashkësisë së pikave të fotografisë në funksion të variabëlve hapësinorë *x* dhe *y*.
- Ky është sinjal dydimensional, ku asnjëra nga variabëlat nuk është kohë

**Klasifikimi i parë i sinjaleve:**

- Sinjalet njëdimensionale.
- Sinjalet shumëdimensionale.

# Sinjalet dhe klasifikimi i tyre

**Klasifikimi i dytë i sinjaleve:**

- Sinjalet e vazhduara
- Sinjalet diskrete

*Sinjalet e vazhduara*

- Sinjali i vazhduar (kontinual) $x(t)$ është funksion i variabëlit të vazhduar $t$, që merr vlera nga bashkësia e numrave realë.
- Sinjali i vazhduar matematikisht shprehet si funksion i vazhduar $x(t)$ i variabëlit të pavarur $t$.

*Sinjalet diskrete*

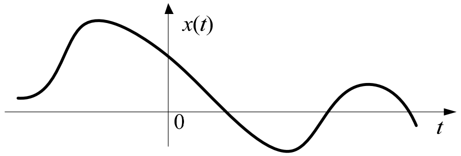
- Sinjali diskret $x[n]$ përkufizohet vetëm për vlera diskrete të kohës $n$, ku koha $n$ merr vlera nga bashkësia e numrave të plotë.
- Sinjali diskret matematikisht shprehet si varg i numrave $x[n]$, ku indeksi $n$ paraqet variabëlin e pavarur të sinjalit, përkatësisht kohën diskrete.



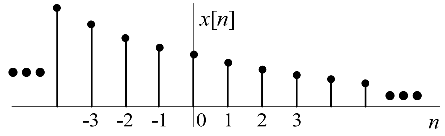
# Sinjalet dhe klasifikimi i tyre

*Sinjalet analoge dhe digjitale*

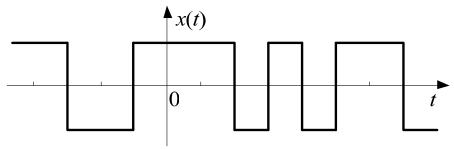
- Nëse vlerat e sinjalit, $x(t)$ apo $x[n]$, i takojnë bashkësisë së numrave realë, atëherë thuhet se sinjali është *analog* (në vlera).
- Nëse vlerat e sinjalit, $x(t)$ apo $x[n]$, i takojnë një bashkësie të fundme, atëherë thuhet se sinjali është *digjital* (në vlera).



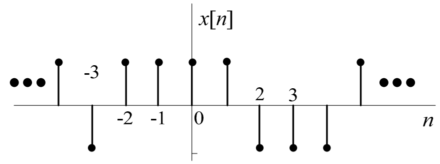
Sinjali analog i vazhdueshëm në kohë



Sinjali analog diskret në kohë



Sinjali digjital i vazhdueshëm në kohë

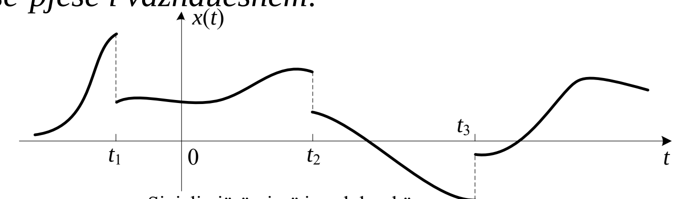


Sinjali digjital diskret në kohë



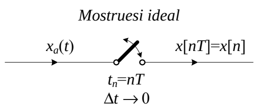
# Sinjalet dhe klasifikimi i tyre

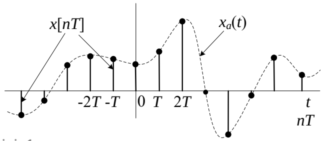
- *Sinjali pjesë-pjesë i vazhdueshëm*
- Në qoftë se sinjali i vazhduar ka hope (diskontinuitete) në numër të numërueshëm të pikave të kohës $t$, atëherë ai sinjal quhet *pjësë-pjesë i vazhdueshëm*.



Sinjali pjësë-pjesë i vazhdueshëm

- Sinjali diskret mund të përfitohet nga sinjali analog duke i veçuar vlerat e këtij të fundit në intervale të njëtrajtshme kohore. Procesi i veçimit të vlerave të sinjalit të vazhdueshëm në çaste të caktuara kohore quhet *mostrim* (kampionim).






# Sinjalet dhe klasifikimi i tyre

**Klasifikimi i tretë i sinjaleve:**

- Sinjalet e parapërcaktuara (deterministike)
- Sinjalet e rastit (stokastike)

*Sinjalet e parapërcaktuara*

- Sinjalet e përcaktuara janë ato sinjale, vlera e të cilave është e njohur për çdo vlerë të variabëlit të pavarur.
- Vlerat e sinjalit mund të shprehen me ndonjë shprehje matematikore, paraqitje grafike, apo me ndonjë listë tabelore.

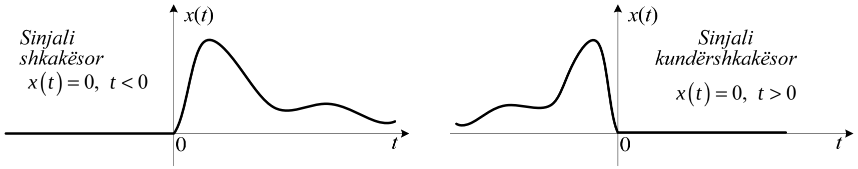
*Sinjalet e rastit*

- Te sinjalet e rastit vlera e sinjalit në një moment të caktuar kohor nuk mund të dihet paraprakisht me siguri të plotë.
- Këto sinjale përshkruhen përmes funksioneve të shpërndarjes së gjasës. Nga aspekti matematikor *sasia e informacionit* është në përpjesëtim të zhdrejtë me gjasën e paraqitjes së vlerës së caktuar, për pasojë vetëm sinjalet e rastit përcjellin informacion.

## Sinjalet dhe klasifikimi i tyre

**Klasifikimi i katërt i sinjaleve:**

- Sinjalet shkakësore
- Sinjalet kundër-shkakësore
- Sinjali është *shkakësor* (kauzal) në qoftë se të gjitha vlerat e tij janë zero për vlera negative të kohës *t*.
- Në të kundërtën, nëse vlerat jo zero të sinjalit paraqiten vetëm për *t*<0, atëherë sinjali do të jetë *kundër-shkakësor* (antikauzal).




- Nëse nuk plotësohen kushtet për të qenë një sinjal shkakësor, apo kundër-shkakësor, atëherë ai emërtohet *sinjal jo-shkakësor*.
- Sinjali me kohëzgjatje të pafundme nga të dy anët e boshtit kohor quhet *sinjal dy-anësor*.

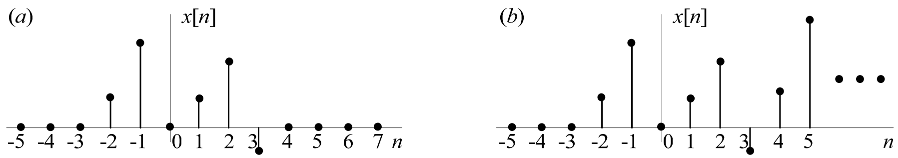


## Sinjalet dhe klasifikimi i tyre

- Nëse kohëzgjatja e sinjalit është e pakufizuar nga djathta e boshtit kohor, atëherë ai quhet *djathtë-anësor*.
- Në të kundërtën kur kohëzgjatja e sinjalit është e pakufizuar nga e majta, sinjali quhet *majtë-anësor.*

**Klasifikimi i pestë i sinjaleve:**

- Sinjalet me kohëzgjatje (zgjatje) të fundme
- Sinjalet me kohëzgjatje (zgjatje) të pafundme
- Grafikisht janë ilustruar konceptet e zgjatjes së fundme (a) dhe të pafundme (b) për rastin e sinjaleve diskrete, $x[n]$.

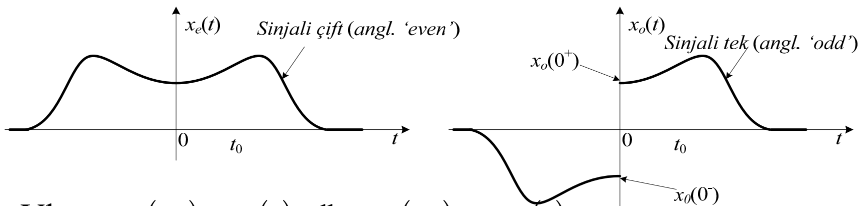





## Sinjalet dhe klasifikimi i tyre

**Klasifikimi i gjashtë i sinjaleve:**

- Sinjalet çifte
- Sinjalet teke
- Sinjali thuhet se është çift (simetrik) nëse grafiku i tij është simetrik ndaj boshtit vertikal.
- Ndërsa sinjali do të jetë tek (antisimetrik) nëse grafiku i tij është simetrik nda origjinës së sistemit koordinativ.




- Vlen $x_e(-t)=x_e(t)$ dhe $x_o(-t)=-x_o(t)$
- Nëse vlera e sinjalit tek në origjinë *t*=0 nuk është zero, $x_o(t)\neq 0$, atëherë sinjali tek domosdo duhet të ketë hop në *t*=0, si në figurë.



## Sinjalet dhe klasifikimi i tyre

- Sinjali çift dhe tek diskret definohen si në vijim

$$x_e[n]=x_e[-n] \text{ dhe } x_o[n]=-x_o[-n]$$

*Zbatimi i sinjaleve çifte dhe teke*

- Një sinjal arbitrar, i vazhdueshëm në kohë apo diskret, mund të shprehet si shumë e komponentit të tij çift dhe tek.

$$x(t)=x_e(t)+x_o(t) \text{ dhe } x[n]=x_e[n]+x_o[n]$$

- ku

$$x_e(t)=\tfrac{1}{2}\left[x(t)+x(-t)\right] \text{ dhe } x_o(t)=\tfrac{1}{2}\left[x(t)-x(-t)\right]$$

$$x_e[n]=\tfrac{1}{2}\left\{x[n]+x[-n]\right\} \text{ dhe } x_o[n]=\tfrac{1}{2}\left\{x[n]-x[-n]\right\}$$

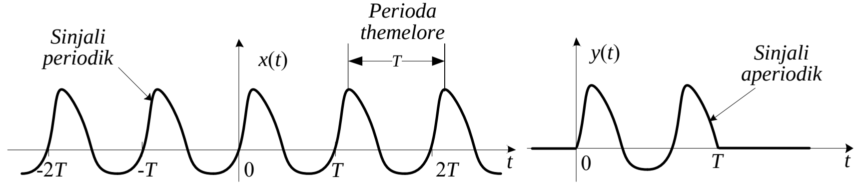
# Sinjalet dhe klasifikimi i tyre

**Klasifikimi i shtatë i sinjaleve:**

- Sinjalet periodike
- Sinjalet jo periodike (aperiodike)
- Sinjali i vazhduar $x(t)$ është *periodik* në qoftë se mund të gjendet së paku një $T \in \mathbb{R}$, për të cilin vlen
$$x(t) = x(t+T)$$
- Sinjali diskret $x[n]$ është periodik nëse mund të gjendet së paku një numër i plotë $N \in \mathbb{Z}$ ashtu që të vlej
$$x[n] = x[n+N]$$
- Nëse sinjali është periodik për një $T$, apo $N$, atëherë ai është periodik edhe për shumëfishin e tyre.
- Vlera më e vogël e $T$, apo $N$, quhet *periodë themelore* e sinjalit periodik.
- Nëse sinjalit nuk mund t'i caktohet perioda atëherë ai është *aperiodik* (*jo periodik*).



# Sinjalet dhe klasifikimi i tyre




- Sinjali periodik mund të formohet nga sinjali aperiodik, duke e përsëritur këtë të fundit me shumëfishet e periodës themelore nga të dy anët e boshit kohor.
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(t+kT)$$
- Kjo mënyre e përfitimit të sinjalit periodik $x(t)$ nga ai aperiodik $y(t)$ quhet *zgjatje periodike* e sinjalit $y(t)$.
- Sinjali aperiodik mund të trajtohet si një sinjal periodik, përsëritja periodike e të cilit shtyhet në pafundësi
$$y(t) = \lim_{T\to\infty} x(t) = \lim_{T\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(t+kT)$$
- Komentet e ngjashme vlejnë edhe për sinjale diskrete.



# Sinjalet dhe klasifikimi i tyre

**Klasifikimi i tetë i sinjaleve:**

- Sinjalet e energjisë
- Sinjalet e fuqisë
- Energjia ($E$) e sinjalit të vazhduar $x(t)$ përkufizohet me formulën:
$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt$$
- ndërsa fuqia e sinjalit ($P$) me relacionin:
$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt$$
- Për sinjalet diskrete vlejnë shprehjet:
$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \quad \text{dhe} \quad P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$
- Në qoftë se sinjali ka energji $E$ të fundme atëherë ai hyn në klasën e *sinjaleve të energjisë*.
- Në rast se sinjali ka fuqi $P$ të fundme atëherë ai i takon *sinjaleve të fuqisë*.



# Sinjalet dhe klasifikimi i tyre

*Disa komente lidhur me sinjalet e energjisë dhe të fuqisë*

- Sinjalet e energjisë kanë fuqi zero, $P=0$.
- Sinjalet e fuqisë kanë energji të pafundme, $E \to \infty$.
- Nuk mund të ndodhë që sinjali të jetë njëherazi i energjisë dhe i fuqisë.
- Ndërsa, mund të ndodhë që një sinjal të mos jetë as i energjisë, e as i fuqisë.
- Sinjalet periodike mund të jenë vetëm sinjale të fuqisë. Fuqia e tyre llogaritet brenda një periode me shprehjet:
$$P = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 \, dt \quad \text{dhe} \quad P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2$$
- ku $T$ dhe $N$ janë periodat themelore të sinjalit të vazhduar, përkatësisht e atij diskret.

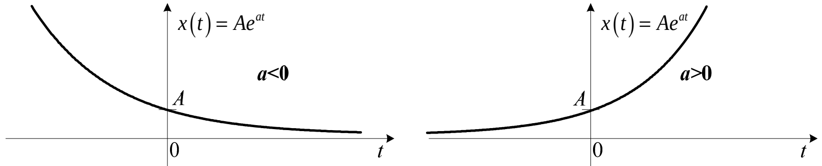
# Sinjalet e vazhduara themelore

## 1. Sinjalet eksponenciale dhe sinusoidale

- Sinjali kompleks eksponencial, me zgjatje të pafundme nga të dy anët përkufizohet me

$$x(t) = Ae^{at}, \quad -\infty < t < \infty$$

- Ku konstantat $A$ dhe $a$, në rastin e përgjithshëm kanë vlera komplekse, $A,a \in \mathbb{C}$.
- Nëse të dy parametrat, $A$ dhe $a$, marrin vlera reale, atëherë sinjali $x(t)$ quhet *funksioni real eksponencial*.




- Kur parametri $a$ merr vlerë të pastër imagjinare, $a=j\omega_0$, nga sinjali eksponencial sajohet *sinusoida komplekse*.

$$x(t) = Ae^{j\omega_0 t}$$



# Sinjalet e vazhduara themelore

- Për dallim nga eksponencialit real i cili qartazi është një sinjal aperiodik, sinusoida komplekse është sinjal periodik.

$$Ae^{j\omega_0 t} = Ae^{j\omega_0 (t+T)} = Ae^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T}$$

Ky barazim plotësohet për

$$e^{j\omega_0 T} = 1 = e^{j2\pi k}, \quad k = 1,2,\ldots, \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} k, \quad k = 1,2,\ldots$$

- Për $k$=1 fitohet vlera më e vogël e $T$ përkatësisht perioda themelore e sinjalit sinusoidal

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

- Po të merret se edhe parametri $A$ ka vlerë komplekse

$$A = |A| e^{j\varphi}$$

- Atëherë sinusoida komplekse zbërthehet në komponentët sinusoidalë, real dhe imagjinar,

$$Ae^{j\omega_0 t} = |A| e^{j(\omega_0 t + \varphi)} = |A| \cos(\omega_0 t + \varphi) + j|A| \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

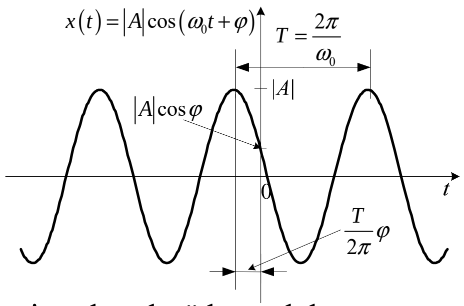


# Sinjalet e vazhduara themelore

- *Sinjali real sinusoidal* (*kosinusoidal*) i përkufizuar me

$$x(t) = |A| \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

- e trashëgon periodicitetin e sinusoidës komplekse T.




- Nëse parametrin $a$ ka vlerë komplekse

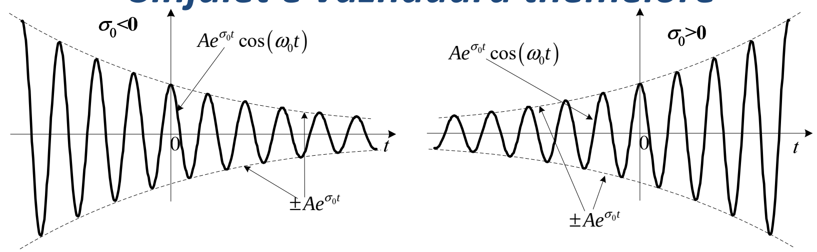
$$a = \sigma_0 + j\omega_0$$

atëherë eksponenciali kompleks merr trajtën

$$x(t) = Ae^{at} = Ae^{(\sigma_0 + j\omega_0)t} = Ae^{\sigma_0 t} e^{j\omega_0 t} = Ae^{\sigma_0 t} \cos(\omega_0 t) + jAe^{\sigma_0 t} \sin(\omega_0 t)$$



# Sinjalet e vazhduara themelore



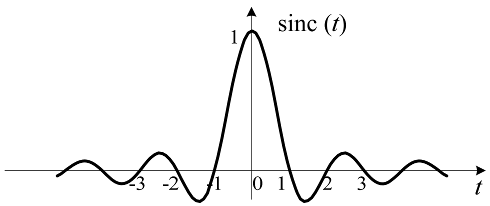

## 2. "Sinc" funksioni

- Sinc funksioni (lexo "sink") përfitohet pas integrimit të sinusoidës komplekse për nga $\omega$, në kufijtë $[-\pi,\pi]$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{jt}\left(e^{j\pi t} - e^{-j\pi t}\right) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

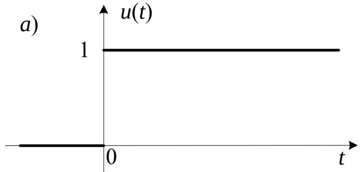
$$x(t) = \text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}, \quad -\infty < t < \infty$$

# Sinjalet e vazhduara themelore




## 3. Sinjali shkallë njësi

$$u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\geq 0\end{cases}$$




- Përmes sinjalit shkallë njësi mund të veçohet pjesa shkakësore e çfarëdo sinjali

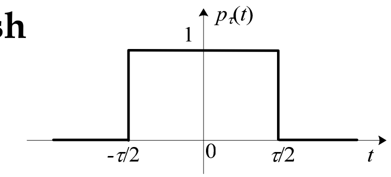
$$x_{shk}(t)=x(t)u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ x(t), & t\geq 0\end{cases}$$



# Sinjalet e vazhduara themelore

## 4. Sinjali puls drejtkëndësh

$$p_\tau(t)=\begin{cases}1, & |t|\leq \frac{\tau}{2}\\ 0, & |t|>\frac{\tau}{2}\end{cases}$$




## 5. Sinjali impuls njësi $\delta(t)$

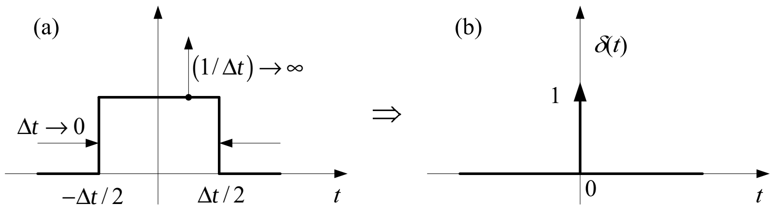
- Impulsi njësi ose delta impulsi, që shpesh quhet edhe impulsi i Dirakut, është njëri ndër sinjalet më të rëndësishme që përdoren në analizën e sinjaleve dhe të sistemeve.
- Ky sinjal nuk i takon klasës së funksioneve të zakonshme, si shumica e sinjaleve të tjera që kanë zbatim të gjerë.
- Përkufizimi i $\delta(t)$ $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)\,dt = x(0)$
- Sinjali impuls njësi mund të përkufizohet vetëm përmes integralit, sepse

$$\delta(t)=0 \text{ për } t\neq 0 \text{ dhe } \delta(0) \text{ i padefinuar } (\infty)$$



# Sinjalet e vazhduara themelore

- Në figurë dhe shprehjet përcjellëse është ilustruar përafrimi i impulsit njësi $\delta(t)$ përmes sinjalit puls drejtkëndësh.




$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)\,dt=\lim_{\Delta t\to 0}\int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} x(t)\frac{1}{\Delta t}dt=\lim_{\Delta t\to 0} X(t)\Big|_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{X\left(\frac{\Delta t}{2}\right)-X\left(-\frac{\Delta t}{2}\right)}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{X\left(\frac{\Delta t}{2}\right)-X\left(-\frac{\Delta t}{2}\right)}{\Delta t}=\frac{dX(t)}{dt}\Big|_{t=0}=x(0)$$

- Disa veti dhe relacione të rëndësishme të delta impulsit

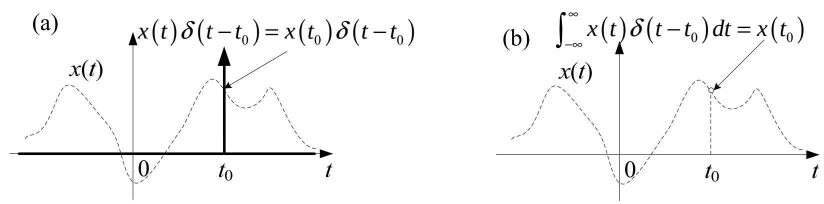
$$\delta(-t)=\delta(t);\ \ x(t)\delta(t)=x(0)\delta(t);\ \ t\delta(t)=0$$



# Sinjalet e vazhduara themelore

- *Vetia e mostrimit*

$$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)\,dt=x(t_0)$$




- Relacioni në mes të impulsit njësi dhe sinjalit shkallë njësi

$$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt} \quad \text{dhe} \quad u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,d\tau$$

- Edhe dy shprehje shtesë me $\delta(t)$.

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau;\quad \delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$$