Para Tod$x$s: Natal

uma introdução à lógica formal

De **P. D. Magnus**
Tim Button
com acréscimos de
J. Robert Loftis
Robert Trueman
remixado e revisado por
Aaron Thomas-Bolduc
Richard Zach
adaptado, re-remixado, re-revisado e ampliado pelo
GEL - Grupo de Estudos em Lógica da UFRN

6 de abril de 2021

Esta é a versão rascunho (0.4) de um livro que ainda não está pronto. Você pode verificar neste link, http://tiny.cc/wwpksz, se alguma versão mais recente já está disponível. Este livro está sendo testado em uma disciplina de lógica da UFRN e pretendemos finalizar uma primeira edição para publicação no final de 2020 ou início de 2021. Para esta finalização ainda falta produzirmos duas partes do livro, uma tratando de rudimentos de lógica modal e outra de metateoria, além de considerações finais, alguns apêndices sobre notação e jargão e um glossário. Falta, principalmente, uma rigorosa revisão e homogeneização do texto. Caso você tenha interesse neste projeto e queira participar mais ativamente, conctacte-nos através do email durante10@gmail.com. Também agradecemos se nos contactar apontando erros (sim, ainda há muitos!), ou tenha sugestões, discordâncias, críticas,... suas contribuições serão todas muito bem-vindas.

Esta obra é baseada no livro `forall§`: *Calgary* de P.D. Magnus, Tim Button, J. Robert Loftis, Robert Trueman, Aaron Thomas-Bolduc e Richard Zach, que foi utilizado aqui sob a licença CC BY 4.0. Mas para você entender direito a autoria deste livro, é preciso listar alguns outros livros e explicar a relação entre todos eles.

1. `forall§`, de P.D. Magnus
2. `forall§`: *Cambridge*, de Tim Button
3. `forall§`: *Calgary* de P.D. Magnus, Tim Button, J. Robert Loftis, Robert Trueman, Aaron Thomas-Bolduc e Richard Zach
4. *Metatheory*, de Tim Button
5. `forall§`: *Lorain Conty Remix*, de Cathal Woods e J. Robert Loftis
6. *A Modal Logic Primer*, de Robert Trueman

A história é a seguinte. P. D. Magnus escreveu o livro (1). Tim Button produziu o livro (2) baseado no livro (1) e Aaron Thomas-Bolduc junto com Richard Zach produziram livro (3) com base no livro (2). Mas Thomas-Bolduc e Zach também utilizaram materiais dos livros (1), (4), (5) e (6) na produção do livro (3). Aí nós, do GEL-UFRN (grupo de estudos em lógica do departamento de filosofia da universidade federal do Rio Grande do Norte), utilizamos o livro (3) como texto base para a produção deste livro, que não é uma tradução, mas uma adaptação livre, em que fizemos modificações, alterações e inclusões. Nossa adaptação foi feita tendo estudantes de graduação em filosofia como público alvo. Nossa experiência ao longo dos anos nos sugere que os estudantes de filosofia se interessam mais e aproveitam mais a lógica quando a estudam juntamente com a filosofia da lógica. O que fizemos, então, foi amplificar os elementos de filosofia da lógica que já estavam presentes no livro (3), e adaptá-los às nossas concepções.

Os livros (1), (2), (3) e (4) estão todos sob a licença CC BY 4.0, e os livros (5) e (6) foram utilizados por Thomas-Bolduc e Zach com permissão.

A editoração gráfica deste livro foi produzida com base no código fonte LaTeX do livro (3), que está disponível em forallx.openlogicproject.org. A capa e o design são de Mark Lyall. Esta versão é a revisão (0.4) (6 de abril de 2021)

Sumário

Prefácio

Como o título indica, este é um livro sobre lógica formal. A lógica formal diz respeito ao estudo de um certo tipo de linguagem que, como qualquer linguagem, pode servir para expressar situações, estados de coisas. O caráter formal do tipo de linguagem estudada na lógica a torna uma ferramenta muito útil, devido à precisão com a qual suas sentenças descrevem as situações. Em particular, é bem difícil ser ambíguo na lógica formal. O foco do estudo da lógica é a relação de consequência entre as sentenças, ou seja, a determinação e identificação de quais sentenças se seguem de quais outras sentenças.

Mas o que exatamente isso significa? Vamos, obviamente, tratar da relação de consequência lógica com a devida minúnica no decorrer deste livro. No entanto, para você ter uma primeira ideia de onde está pisando ao iniciar o estudo da lógica, vejamos aqui um exemplo ilustrativo. Suponha que Virgínia more em Ponta Negra, mas que você não saiba disso. De que modo você poderia ficar sabendo? Bem, você pode ficar sabendo que Virgínia mora em Ponta Negra diretamente, caso você venha a conhecer a casa de Virgínia, ou seu endereço, pelo menos. Mas você pode também ficar sabendo indiretamente, através da lógica. Suponha que você ouça trechos de uma conversa de Virgínia com uma amiga, e que tenha ouvido as seguintes sentenças ditas por ela:

1. Eu vou à praia de Ponta Negra a pé todas as manhãs.

2. Eu permaneço 30 minutos na praia todos os dias.
3. Eu costumo sair de casa para a praia às 6h15 e às 7h já estou de volta.

Bem, você não ouviu Virgínia dizendo onde morava, mas se você conhece Natal, você sabe que:

4. Não é possível ir e voltar a pé à praia de Ponta Negra de nenhum outro bairro (que não seja Ponta Negra) em 15 minutos ou menos.

Então, se você juntar o que ouviu Virgínia dizer (1, 2 e 3) com o que sabe sobre Natal (4), você conclui que:

5. Virgínia mora em Ponta Negra.

Em outras palavras, a afirmação de que Virgínia mora em Ponta Negra é consequência das afirmações 1, 2, 3 e 4. É exatamente este tipo de relação de consequência entre afirmações que é o assunto da lógica.

Estudamos lógica, principalmente, para saber identificar e caracterizar os casos em que a verdade de certas sentenças, tais como as sentenças 1 a 4 acima, configura-se em uma justificativa suficiente para a verdade de alguma outra sentença, tal como a sentença 5. Dizer, então, que uma sentença é consequência lógica de outras, é dizer que ela não pode ser falsa quando essas outras são verdadeiras. Não é possível que Virgínia não more em Ponta Negra se as sentenças 1 a 4 forem todas verdadeiras.[1]

A relação de consequência é fundamental porque ela nos ajuda a reconhecer a verdade. Entendendo-a melhor, poderemos identificar situações que inevitavelmente ocorreriam sempre que certas outras situações tivessem ocorrido. Além do reconhecimento da verdade, a lógica nos ajuda também a reconhecer a

[1] Contemporaneamente as pesquisas em lógica ampliaram-se e é possível encontrar abordagens heterodoxas onde são estudados outros tipos de relação de consequência. Neste livro, no entanto, nos limitaremos à concepção ortodoxa de consequência lógica como preservação da verdade.

mentira (ou a falsidade). A satisfatoriedade conjunta, uma outra noção importante que estudaremos, nos ajudará a identificar se as sentenças de um dado grupo podem ou não ser todas conjuntamente verdadeiras. Se elas não podem, qualquer um que as tenha afirmado todas ou está mentindo ou está equivocado.

A lógica formal ocupa posição privilegiada na metodologia da filosofia. As suposições especulativas, explicações e sistemas que os filósofos propõem são, quase sempre, abstratos demais para que possam ser avaliados diretamente. Sua profundidade, relevância, veracidade, consistência e plausibilidade são avaliadas e comparadas principalmente através daquelas suas consequências lógicas que nos são mais imediatamente acessíveis. Um recurso comum dos diálogos platônicos, por exemplo, é a proposição especulativa de algum princípio moral ou metafísico abstrato que posteriormente é descartado quando se demonstra que sua admissão tem consequências (lógicas) mais imediatamente percebidas como inaceitáveis.

Mas a lógica não é importante para a filosofia apenas como instrumento metodológico. Ela, tanto quanto a ética, a metafísica, a política, a estética e a epistemologia é também uma disciplina filosófica. A lógica é parte da filosofia porque seu objeto de estudo, a relação de consequência, levanta questões cujas respostas não podem ser dadas através de pesquisa empírica. Os princípios lógicos, tanto quanto os sistemas éticos, metafísicos e das demais áreas da filosofia, são resultado de especulação racional livre e são objeto de divergências e disputas para as quais não há um tribunal último capaz de resolvê-las objetivamente. A lógica faz parte da filosofia porque como todas as outras disciplinas filosóficas ela lida com questões cujas respostas sempre envolverão algum tipo de escolha, de engajamento.

Este caráter mais filosófico da lógica costuma ser cuidadosamente apagado e escondido na esmagadora maioria dos livros didáticos, que tendem a apresentar uma versão higienizada da lógica, imitando o que costumeiramente é feito no ensino das ciências e da matemática.

Talvez a justificativa dessa escolha pedagógica seja a disputável ideia de que é preciso primeiro aprender os rudimentos de um assunto (a lógica), para depois questioná-lo e situá-lo filosoficamente. Não cabe discutir aqui os defeitos e méritos desta abordagem. No entanto, o que nossa experiência ao longo dos anos com o ensino da lógica para estudantes de filosofia nos sugere é que os alunos e alunas naturalmente se interessam pelas questões filosóficas que a lógica suscita e tendem a aproveitar melhor a disciplina quando são introduzidos simultaneamente à lógica e à filosofia da lógica.

O livro `forall§`: *Calgary*, base deste, foi o primeiro manual de lógica com o qual nos deparamos que não esconde nem evita as dificuldades filosóficas da lógica, e a apresenta de um modo que nos parece melhor tanto para ajudar o estudante que se especializará em outra área da filosofia a entender o caráter da lógica como disciplina filosófica, quanto a preparar a estudante que se especializará em lógica a compreender o ambiente plural das pesquisas contemporâneas, no qual não há mais nenhum protagonismo para a lógica clássica, e onde o debate e a divergência são tão ou mais intensos que nas outras áreas da filosofia.

A principal diretriz que guiou esta nossa adaptação do livro `forall§`: *Calgary* foi uma tentativa de aprofundar o tratamento dos pontos de filosofia da lógica, juntamente com adaptações contextuais à realidade de nossos estudantes.

Mas a lógica formal não é importante só para a filosofia. Ela também tem papel privilegiado tanto na matemática quanto na ciência da computação. Em matemática, as linguagens formais são usadas para descrever não estados de coisas "do dia a dia", mas estados de coisas matemáticos. Os matemáticos também se interessam pelas consequências de definições e suposições e, para eles, também é importante estabelecer essas consequências (que eles chamam de "teoremas") usando métodos completamente precisos e rigorosos. A lógica formal fornece esses métodos. Na ciência da computação, a lógica formal é aplicada para descrever o estado e os comportamentos dos sistemas computacionais, tais como circuitos, programas, bancos de dados, etc. Os métodos da lógica formal também podem ser usados para estabelecer as consequências de tais descrições, como, por exemplo, se um dado circuito está ou não livre de erros, ou se um programa faz o que se pretende que ele faça, ou se um banco de dados é consistente, ou se algo é verdadeiro a partir dos dados nele contidos.

Este livro está dividido em nove partes. A parte I introduz o assunto e as noções da lógica de maneira informal, ainda sem utilizar uma linguagem formal. As partes II, III e VI tratam das linguagens verofuncionais. Em tais linguagens as sentenças são formadas a partir de sentenças básicas através de certos termos (‘ou’, ‘e’, ‘não’, ‘se ... então’) que conectam sentenças mais simples de modo a formar outras sentenças mais complexas. Noções lógicas tais como a relação de consequência são discutidas de duas maneiras: semanticamente, usando o método das tabelas de verdade (na Parte III) e demonstrativamente, usando um sistema de derivações formais (na Parte VI). As partes IV, V e VII lidam com uma linguagem mais complexa, a da lógica de primeira ordem. Além dos conectivos da lógica verofuncional, esta linguagem inclui também nomes, predicados, a relação de identidade e os chamados quantificadores. Esses elementos adicionais da linguagem a tornam muito mais expressiva do que a linguagem verofuncional, e passaremos um bom tempo investigando quanto se pode expressar nela. As noções da lógica de primeira ordem também são definidas tanto semanticamente, através interpretações (na Parte V), quanto demonstrativamente (na Parte VII), usando uma versão mais complexa do sistema de derivação formal introduzido na Parte VI. A Parte VIII discute uma extensão da LVF (a lógica verofuncional) obtida a partir de operadores não verofuncionais para a possibilidade e a necessidade, conhecida como lógica modal. A Parte IX abrange dois tópicos avançados: o tópico das formas normais conjuntivas e disjuntivas e da adequação expressiva dos conectivos verofuncionais, e o tópico da correção do sistema de dedução natural para a LVF.

Nos apêndices, você encontrará uma discussão sobre notações alternativas para as linguagens tratadas neste texto, uma outra sobre sistemas de derivação alternativos, além de um guia de referência rápida listando a maioria das regras e definições importantes. Os termos principais estão listados em um glossário no final.

Este livro é uma versão adaptada e ampliada do livro `forall§`: *Calgary*, que é uma versão revista e ampliada por Aaron Thomas-Bolduc e Richard Zach do livro `forall§`: *Cambridge*, que, por sua vez, é uma versão revista e ampliada por Tim Button do livro `forall§`, de P.D. Magnus. Além disso, a editoração gráfica desta edição se baseia na estrutura e digramação de Mark Lyall para a versão de Thomas-Bolduc e Zach, que está livremente disponível em forallx.openlogicproject.org.

Este livro é mesmo Para Tod*x*s (para todas e para todos). Você é livre para copiar e redistribuir gratuitamente este material em qualquer meio ou formato, remixar, transformar e desenvolvê-lo para qualquer finalidade, mesmo comercialmente, desde que respeite as restrições da licença Creative Commons Attribution 4.0 descritas na página iii.

PARTE I

Noções-chave da lógica

CAPÍTULO 1

Argumentos

O assunto da lógica é a avaliação de argumentos; a identificação dos bons argumentos, separando-os dos maus.

Na linguagem do dia a dia, às vezes usamos a palavra 'argumento' para falar de bate-bocas e desacordos verbais. Se você e um amigo discutem nesse sentido, as coisas não estão indo bem entre vocês dois. Não é este o sentido da palavra 'argumento' no âmbito da lógica. Estes bate-bocas não são argumentos no sentido lógico. São apenas desacordos.

Um argumento, no sentido em que empregaremos aqui, é algo mais parecido com isto:

Ou foi o mordomo, ou foi o jardineiro.
Não foi o mordomo.
$\therefore$ Foi o jardineiro.

Aqui temos uma série de sentenças. Os três pontos na terceira linha do argumento significam "portanto". Eles indicam que a sentença final expressa a *conclusão* do argumento. As duas sentenças anteriores são as *premissas* do argumento. Se você acredita nas premissas e acha que a conclusão se segue das premissas—que o argumento, como diremos, é válido—então isso (talvez) forneça uma razão para você acreditar na conclusão.

É nesse tipo de coisa que os lógicos estão interessados. Diremos que um argumento é qualquer coleção de premissas, juntamente com uma conclusão.

A Parte I deste livro discute algumas noções lógicas básicas que se aplicam a argumentos em um idioma natural, tal como o português. É fundamental começar com uma compreensão clara do que são argumentos e do que significa um argumento ser válido. Mais tarde, traduziremos os argumentos do português para uma linguagem formal. Queremos que a validade formal, conforme será definida na linguagem formal, tenha pelo menos algumas das características importantes que a validade das linguagens naturais tem.

No exemplo recém apresentado, expressamos cada premissa através de uma sentença separada, e usamos uma terceira sentença para a expressar a conclusão do argumento. Muitos argumentos são expressos dessa maneira, mas uma única sentença pode conter um argumento completo. Considere:

> O mordomo tem um álibi, logo não foi ele.

Este argumento tem uma premissa seguida de uma conclusão.

Muitos argumentos começam com as premissas e terminam com uma conclusão, mas nem todos. O argumento com o qual esta seção começou poderia igualmente ter sido apresentado com a conclusão no início, da seguinte forma:

> Foi o jardineiro. Afinal, ou foi o mordomo, ou o jardineiro. E não foi o mordomo.

Este mesmo argumento também poderia ter sido apresentado com a conclusão no meio:

> Não foi o mordomo. Consequentemente foi o jardineiro, dado que ou foi o mordomo, ou o jardineiro.

Ao avaliar um argumento, queremos saber se a conclusão se segue ou não das premissas. Então, a primeira coisa a fazer é identificar a conclusão e separá-la das premissas. As expressões abaixo são frequentemente usadas para indicar a conclusão de um argumento:

logo
portanto
por conseguinte
sendo assim
assim
deste modo
por isso
em vista disso
isto (prova/mostra/demonstra) que
desta forma
consequentemente

Por esse motivo são, às vezes, chamadas de EXPRESSÕES INDICATIVAS DE CONSLUSÃO.

Por outro lado, as expressões abaixo são EXPRESSÕES INDICATIVAS DE PREMISSA, dado que geralmente elas indicam que a frase que as segue é uma premissa e não uma conclusão:

porque
visto que
desde que
dado que
uma vez que
afinal
afinal de contas
pois
assuma que
é sabido que
por causa de

Tanto as expressões indicativas de conclusão quanto as expressões indicativas de premissa são apenas uma ajuda. O fundamental é ter em mente que a conclusão é sempre aquilo que se quer dizer, a "moral da história"; já as premissas sempre são uma justificativa (ou explicação) da conclusão.

1.1 Sentenças

De um modo bastante geral, podemos definir um ARGUMENTO como uma série de sentenças. Uma delas, geralmente a última, é a conclusão, e as outras são as premissas. Se as premissas são verdadeiras e o argumento é bom, então você tem um motivo para aceitar a conclusão.

Na lógica, estamos interessados apenas em sentenças que podem figurar como premissas ou conclusões de um argumento, ou seja, sentenças que podem ser verdadeiras ou falsas. Portanto, nos restringiremos a sentenças desse tipo e definiremos SENTENÇA como frases ou expressões que podem ser verdadeiras ou falsas.

Não confunda a ideia de uma sentença que pode ser verdadeira ou falsa com a diferença entre fato e opinião. Frequentemente, as sentenças que consideramos na lógica expressam coisas que contariam como fatos, tais como "Kierkegaard era corcunda" ou "Kierkegaard gostava de amêndoas". Mas as sentenças da lógica também podem expressar coisas que nos parecem mais com uma opinião do que com um fato, tais como "Amêndoas são saborosas". Estas expressões de opinião são sentenças legítimas, no sentido lógico que estamos adotando aqui. Em outras palavras, uma sentença não é desqualificada como parte legítima de um argumento só porque não sabemos se ela é verdadeira ou falsa, nem porque sua verdade ou falsidade é uma questão de opinião. Não importa se sabemos, nem mesmo se é possível ou não saber se a sentença é verdadeira ou falsa. Se a sentença for do tipo que pode ser verdadeira ou falsa, então ela será uma sentença em nossa acepção lógica e pode desempenhar o papel de premissa ou conclusão e fazer parte de um argumento lógico. Estas sentenças que podem fazer parte de um argumento, que podem ser verdadeiras ou falsas, são conhecidas como *sentenças declarativas.*

Por outro lado, há coisas que seriam consideradas 'sentenças' por um linguista ou gramático, mas que não são sentenças declarativas e portanto, não contam como sentenças na lógica.

Perguntas Em uma aula de gramática, a expressão “Você já está com sono?” contaria como uma sentença interrogativa. Mas ainda que você esteja mesmo sonolento, a pergunta em si não será verdadeira por causa disso. Perguntas, em geral, não fazem declarações e por isso não são nem verdadeiras nem falsas e não contam como sentenças na lógica. Elas não podem fazer parte de um argumento nem como premissas nem como conclusões. Se, por exemplo, você disser “não estou com sono” em resposta à pergunta acima, sua resposta será uma sentença no sentido lógico, porque diferentemente da pergunta, ela é do tipo que pode ser verdadeira ou falsa. Geralmente, *perguntas* não contam como sentenças, mas *respostas* contam.

‘Sobre o que é este curso?’ não é uma sentença (no nosso sentido). Por outro lado, ‘Ninguém sabe sobre o que este curso trata’ é uma sentença.

Imperativos As ordens costumam ser formuladas como imperativos tais como “Acorde!”, “Sente-se direito” e assim por diante. Em uma aula de gramática, isso contaria como sentenças imperativas. Ainda que seja aconselhável sentar-se com a coluna ereta, a ordem não será verdadeira ou falsa por causa disso. Observe, no entanto, que as ordens ou comandos nem sempre são expressos como imperativos. Por exemplo, a expressão ‘Você respeitará minha autoridade’ *é* ou verdadeira ou falsa, pois você respeitará ou não. Então, estritamente falando, trata-se de uma sentença no sentido lógico, ainda que consigamos perceber que por trás desta declaração há uma intenção de dar uma ordem.

Exclamações Expressões como ‘Ai!’ às vezes são chamadas de sentenças exclamatórias. No entanto, elas não são nem verdadeiras nem falsas. No que diz respeito à lógica, vamos tratar aqui sentenças do tipo ‘Ai, machuquei meu dedão!’ como significando a mesma coisa que ‘Machuquei meu dedão.’ O ‘ai’ não acrescenta nada que possa alterar a verdade ou falsidade da sentença e, por isso, é desconsiderado nas avaliações lógicas.

Exercícios

No final de alguns capítulos, existem exercícios que ajudam a revisar e explorar o material abordado no capítulo. Fazer estes exercícios é parte essencial e insubstituível do seu aprendizado. Aprender lógica é como aprender a falar uma língua estrangeira, ou aprender a jogar tênis, ou a tocar piano. Não basta ler e entender a teoria. A parte mais importante do aprendizado é a prática.

Então, aqui está o primeiro exercício. Identifique a conclusão em cada um dos 4 argumentos abaixo.

1. Faz sol. Logo eu deveria levar meus óculos escuros.
2. Deve ter feito muito sol. Afinal de contas, eu estava de óculos escuros.
3. Ninguém, exceto você, pôs as mãos no pote de biscoitos. E a cena do crime está cheia de migalhas de biscoito. Você é o culpado!
4. A Srta. Rosa e o Prof. Black estavam no escritório na hora do crime. O Sr. Marinho estava com o candelabro no salão de festas, e sabemos que não há sangue em suas mãos. Consequentemente, o Coronel Mostarda cometeu o crime na cozinha, com a chave inglesa. Lembre-se, afinal, que a pistola não foi disparada.

CAPÍTULO 2

O alcance da lógica

2.1 Consequência e validade

No Capítulo 1, falamos sobre argumentos, ou seja, uma coleção de sentenças (as premissas), seguidas por uma única sentença (a conclusão). Dissemos que algumas palavras, tal como "portanto", indicam qual sentença deve ser a conclusão. A palavra "portanto", é claro, sugere que há uma conexão entre as premissas e a conclusão. A conclusão *segue-se* ou *é uma consequência* das premissas.

A principal preocupação da lógica é, exatamente, esta noção de consequência. Pode-se até dizer que a lógica, enquanto um campo do conhecimento, investiga o que se segue de que. Ela é constituída por teorias e ferramentas que nos apontam quando uma sentença se segue de outras.

Pois bem, voltemos ao argumento principal apresentado em §1:

Ou foi o mordomo, ou foi o jardineiro.
Não foi o mordomo.
∴ Foi o jardineiro.

Não sabemos ao quê, exatamente, estas sentenças se referem. Talvez você suspeite que "foi" signifique "foi o autor de algum crime" não especificado. Podemos imaginar, por exemplo, que este argumento tenha sido dito por um detetive que estivesse considerando as evidências de um crime em um livro de mistério ou em uma série de TV. Mas mesmo sem ter qualquer dessas informações, você provavelmente concorda que o argumento é bom no sentido de que, independentemente de a quê exatamente as premissas se referem, se elas forem ambas verdadeiras, a conclusão não pode deixar de ser verdadeira também. Se a primeira premissa for verdadeira, ou seja, se for verdade que "ou foi o mordomo, ou foi o jardineiro", então pelo menos um deles "foi", seja lá o que "foi" signifique. E se a segunda premissa também for verdadeira, não "foi" o mordomo. Isso deixa apenas uma opção: "foi o jardineiro". Esta sentença, a conclusão, deve ser verdadeira. Então, neste caso, a conclusão se segue das premissas. Um argumento que possui esta propriedade é chamado de VÁLIDO.

Um argumento, então, é *válido*, quando em qualquer situação na qual suas premissas são verdadeiras, sua conclusão também é. Nós sabemos que o argumento do mordomo e do jardineiro é válido porque mesmo sem saber exatamente do que as sentenças estão falando, podemos ver que em qualquer situação na qual as duas premissas forem verdadeiras, a conclusão também será.

Considere, agora, o seguinte argumento:

Se foi o motorista, então não foi a babá.
Não foi a babá.
∴ Foi o motorista.

Aqui também não temos ideia do que, especificamente, está sendo dito. No entanto, você provavelmente concorda que esse argumento é diferente do anterior em um aspecto importante. Mesmo que suas premissas sejam ambas verdadeiras, não é garantido que a conclusão também será. Aceitar as premissas desse argumento como verdadeiras não descarta a possibilidade de que "foi" outra pessoa diferente da babá e do motorista. É, portanto, perfeitamente possível que estas sentenças estejam se referindo a uma situação na qual ambas as premissas são verdadeiras e, no entanto, não "foi" o motorista. Nesta situação as premissas são verdadeiras, mas a conclusão não é. Então, neste segundo argumento, a conclusão não segue das premissas. Chamamos de INVÁLIDO qualquer argumento em que, como este, a conclusão não se segue das premissas.

Um argumento é, então, inválido, quando suas sentenças podem estar se referindo a uma situação na qual todas as premissas são verdadeiras, mas a conclusão não é. Nós sabemos que o argumento do motorista e da babá é inválido porque há situações específicas às quais as sentenças do argumento podem estar se referindo, nas quais as premissas são verdadeiras, mas a conclusão é falsa. Uma destas situações ocorre quando, por exemplo, "foi" significa "foi a última pessoa a deixar a mansão na noite de ontem", e quando, além disso, ontem, a última pessoa que deixou a mansão foi o jardineiro. Como o jardineiro foi o último a deixar a mansão ontem, então a conclusão, que diz que foi o motorista, é falsa, e segunda premissa, que diz que não foi a babá, é verdadeira. E a primeira premissa é verdadeira porque se tivesse sido o motorista o último a deixar a mansão, certamente não teria sido a babá. Então, há uma situação onde as duas premissas do argumento são verdadeiras, mas a conclusão é falsa e, portanto, o argumento é inválido.

2.2 Situações e tipos de validade

Nosso reconhecimento da invalidade do argumento do motorista e da babá foi obtido pela proposição de uma situação na qual as premissas do argumento são verdadeiras, mas a conclusão não é. Chamamos uma situação como esta, que prova a invalidade de um argumento, de CONTRAEXEMPLO ao argumento. Sempre que um argumento possui algum contraexemplo, a conclusão não poderá ser uma consequência das premissas. Para que a conclusão seja uma consequência das premissas, a verdade das premissas deve garantir a verdade da conclusão. Quando há um contraexemplo, a verdade das premissas não garante a verdade da conclusão.

Enquanto lógicos, queremos poder determinar quando a conclusão de um argumento decorre das premissas. E a conclusão será uma consequência das premissas se não houver contraexemplo, uma situação (ou caso) em que as premissas são todas verdadeiras, mas a conclusão não é. Diante disso, podemos propor a seguinte definição:

> Uma sentença A é CONSEQUENCIA das sentenças $B_1, \ldots,$ B_n se e somente se não houver nenhuma situação em que $B_1, \ldots, B_n$ sejam todas verdadeiras e A não seja. (Também dizemos que A SE SEGUE DE $B_1, \ldots, B_n$ ou que $B_1, \ldots, B_n$ SUSTENTAM A.)

Essa "definição" ainda está incompleta. Ela não nos diz o que é uma "situação" ou o que significa ser "verdadeiro em uma situação". Até agora, vimos apenas um exemplo: um cenário hipotético envolvendo três pessoas, um motorista, uma babá e um jardineiro; nesse cenário, não foi o motorista nem a babá. Foi o jardineiro. Nesse cenário, conforme vimos, as premissas do nosso segundo argumento são verdadeiras, mas a conclusão não é: o cenário é um contraexemplo.

Dissemos que argumentos onde a conclusão é uma consequência das premissas são válidos e aqueles onde a conclusão não é uma consequência das premissas são inválidos. Como já apresentamos uma priemeira aproximação de uma definição de consequência, vamos utilizá-la para registrar as definições de argumento válido e inválido:

> Um argumento é VÁLIDO se e somente se a conclusão é uma consequência das premissas.

> Um argumento é INVÁLIDO se e somente se ele não é válido, ou seja, se ele possui um contraexemplo.

A principal tarefa dos lógicos é tornar esta noção de "situação" mais precisa e investigar em que medida diferentes modos de tornar mais precisa a noção de "situação" afetam quais argumentos serão classificados como válidos e quais não serão. Se, por exemplo, considerarmos que uma "situação" é um "cenário hipotético", tal como o do contraexemplo do argumento do motorista e da babá, fica claro que o primeiro argumento, o do mordomo e do jardineiro, será classificado como válido. Isso porque em qualquer cenário que imaginarmos no qual ou foi o mordomo, ou foi o jardineiro (ou seja, no qual a primeira premissa é verdadeira) e no qual, além disso, não foi o mordomo (a segunda premissa também é verdadeira), neste cenário, inevitavelmente, foi o jardineiro (a conclusão é verdadeira). Qualquer cenário hipotético em que as premissas de nosso primeiro argumento sejam verdadeiras, a conclusão, inevitavelmente, também será verdadeira. Isso torna nosso primeiro argumento válido.

Tornar a noção de "situação" mais específica, interpretando-a como "cenário hipotético" é um avanço. Mas não é o fim da história. O primeiro problema é que não sabemos o que pode e o que não pode ser considerado como um cenário hipotético. Os cenários hipotéticos são limitados pelas leis da física? São eles obrigados a serem compatíveis com nossos conceitos e o modo como estes se relacionam uns com os outros? Quais os limites para o que é aceitável que seja considerado como um cenário hipotético? Respostas diferentes a estas perguntas levarão a diferentes modos de separar os argumentos em válidos e inválidos.

Suponha, por exemplo, que os cenários hipotéticos sejam limitados pelas leis da física. Ou seja, suponha que um cenário hipotético que viola alguma lei da física não possa ser considerado como uma situação legitimamente aceitável para refutar um argumento. Considere, então, o seguinte argumento:

A espaçonave *Rocinante* levou seis horas na viagem entre a estação espacial Tycho e o planeta Júpiter.
∴ A distância entre a estação espacial Tycho e Júpiter é menor do que 14 bilhões de quilómetros.

Um contraexemplo para esse argumento seria um cenário hipotético em que a nave *Rocinante* faz uma viagem de mais de 14 bilhões de quilômetros em 6 horas, excedendo, assim, a velocidade da luz. Mas esse cenário é incompatível com as leis da física, já que de acordo com elas nada pode exceder a velocidade da luz. Então, se aceitarmos nossa suposição de que os cenários hipotéticos devem respeitar as leis da física, não conseguiremos produzir nenhum contraexemplo a este argumento, que será, por isso, considerado válido. Por outro lado, se os cenários hipotéticos puderem desafiar as leis da física, então é fácil propor um no qual a premissa deste argumento é verdadeira e a conclusão é falsa. Basta que, neste cenário, a nave *Rocinante* viaje mais rápido que a luz. Sendo aceitável, este cenário torna-se um contraexemplo ao argumento que, por isso, não será considerado válido.

Suponha, agora, que os cenários hipotéticos sejam limitados pelos nossos conceitos e pelo modo que eles se relacionam, e considere este outro argumento:

Jussara é uma oftalmologista.
∴ Jussara é uma médica de olhos.

Se estamos permitindo apenas cenários compatíveis com nossos conceitos e suas relações, então este também é um argumento válido. Afinal, em qualquer cenário que imaginarmos no qual Jussara é uma oftalmologista, Jussara será uma médica de olhos, porque os conceitos de ser uma oftalmologista e ser uma médica de olhos são idênticos, têm o mesmo significado. Então, qualquer situação que seria contraexemplo ao argumento, na qual Jussara é uma oftalmologista, mas não uma médica de olhos, está proibida sob a suposição de que os cenários hipotéticos estão restritos aos nossos conceitos e suas relações. Sob esta suposição o argumento não terá qualquer contraexemplo e, portanto, será válido.

Dependendo dos tipos de cenários que consideramos aceitáveis como situações que representam contra-exemplos, chegaremos a diferentes noções de validade e consequência. Podemos chamar de NOMOLOGICAMENTE VALIDO um argumento para o qual não há contra-exemplos que não violem as leis da natureza. E podemos chamar de CONCEITUALMENTE VALIDO um argumento para o qual não há contra-exemplos que não violem as conexões de nossos conceitos. Estes dois casos nos dão uma primeira e importante lição sobre a lógica. Eles mostram que a lógica e suas as noções principais, tais como a validade e a consequência, não é anterior, separada ou prioritária com relação a outros domínios, tais como o domínio da realidade natural e das leis da natureza, e o domínio dos conceitos e significados das sentenças. O modo como entendermos e concebermos estes outros domínios poderá interferir e alterar nosso entendimento sobre se um argumento é válido ou não.

2.3 Validade Formal

Uma característica distintiva da consequência *lógica* é que ela não deve depender do conteúdo das premissas e conclusões, mas apenas de sua forma lógica. Em outras palavras, como lógicos, queremos desenvolver uma teoria que possa fazer distinções ainda mais finas. Por exemplo, ambos os argumentos

Jussara é uma oftalmologista ou uma dentista.
Jussara não é uma dentista.
∴ Jussara é uma médica de olhos.

e

Jussara é uma oftalmologista ou uma dentista.
Jussara não é uma dentista.
∴ Jussara é uma oftalmologista.

são argumentos válidos. Mas enquanto a validade do primeiro depende do conteúdo (ou seja, o significado de "oftalmologista" e "médico de olhos"), a validade do segundo não depende disso. O segundo argumento é FORMALMENTE VALIDO. Podemos descrever a "forma" desse argumento através de um padrão mais ou menos assim:

A é um X ou um Y.
A não é um Y.
$\therefore$ A é um X.

Aqui, A, X e Y funcionam como espaços reservados para expressões apropriadas que, quando substituem A, X e Y, transformam este padrão em um argumento de fato, constituído por sentenças. Por exemplo,

Edna é uma matemática ou uma bióloga.
Edna não é uma bióloga.
$\therefore$ Edna é uma matemática.

é um argumento com esta mesma forma que o padrão acima descreve. Já o primeiro argumento sobre Jussara, da página anterior, não. Porque nele há duas expressões diferentes substituindo Y: "oftalmologista" e "médica de olhos".

Mais ainda, este primeiro argumento não é formalmente válido. *sua* forma é:

A é um X ou um Y.
A não é um Y.
$\therefore$ A é um Z.

Quando substituímos, neste padrão, X por "oftalmologista" e Z por "médica de olhos", obtemos o primeiro argumento original. Mas eis aqui um outro argumento com esta mesma forma:

Edna é uma matemática ou uma bióloga.
Edna não é uma bióloga.
$\therefore$ Edna é uma trapezista.

Este argumento claramente não é válido, uma vez que podemos imaginar (uma situação em que há) uma matemática chamada Edna que não é uma trapezista nem uma bióloga. Nesta situação as duas premissas são verdadeiras, mas a conclusão não é, e o argumento, por isso, não é válido.

Nossa estratégia, enquanto lógicos, será a de apresentar uma noção de "situação" na qual um argumento se torne válido se ele for formalmente válido. Claramente, essa noção de "situação" violará não apenas algumas leis da natureza, mas algumas regras da língua portuguesa. Como o primeiro argumento desta seção é inválido nesse sentido formal, devemos admitir como contraexemplo uma situação em que Jussara é uma oftalmologista, mas não uma médica de olhos. Esta situação não é conceitualmente concebível: ela é descartada pelos significados de "oftalmologista" e "médica de olhos".

Faremos algumas suposições sobre os diversos tipos diferentes de situações que admitiremos na análise da validade de um argumento. A primeira suposição é que toda situação admissível tem que ser capaz de determinar a verdade ou não de cada sentença do argumento em consideração. Isso significa, em primeiro lugar, que não será aceito como uma situação admissível para um possível contra-exermplo, qualquer cenário imaginário no qual a verdade ou não de alguma sentença do argumento considerado não seja determinada. Por exemplo, um cenário em que Jussara é dentista, mas não oftalmologista, contará como uma situação a ser considerada nos primeiros argumentos desta seção, mas não como uma situação a ser considerada nos últimos dois argumentos: este cenário nada nos diz sobre se Edna é matemática, bióloga ou trapezista. Se uma situação não determina que uma sentença é verdadeira, diremos que ela determina que a sentença é FALSA. Assumiremos, então, que as situações determinam a verdade ou a falsidade das sentenças, mas nunca ambas.[1]

---

[1] Ainda que estas suposições sobre as situações admissíveis pareçam nada mais do que recomendações do senso comum, elas são controversas entre os filósofos da lógica. Em primeiro lugar, há lógicos que querem admitir situações

2.4 Argumentos Corretos

Antes de prosseguirmos, alguns esclarecimentos. Argumentos em nosso sentido, compostos por conclusões que (supostamente) se seguem de premissas, são usados o tempo todo no discurso cotidiano e científico. E em seu uso, os argumentos são apresentados para dar suporte ou mesmo provar as suas conclusões. Mas um argumento válido dá suporte para sua conclusão *somente se* suas premissas forem todas verdadeiras. Se o argumento é válido, sabemos que não é possível que sua conclusão seja falsa e suas premissas verdadeiras. Mas um argumento válido pode sim ter a conclusão falsa se alguma ou algumas de suas premissas também forem falsas. Ou seja, é sim perfeitamente possível que um argumento válido tenha conclusão que não é verdadeira.

Considere o seguinte exemplo:

As laranjas ou são frutas ou são instrumentos musicais.
As laranjas não são frutas.
∴ As laranjas são instrumentos musicais.

A conclusão desse argumento é ridícula. No entanto, ela se segue das premissas. *Se* ambas as premissas são verdadeiras, *então* a conclusão deve ser verdadeira. E por isso o argumento é válido, apesar de ter uma conclusão falsa.

Por outro lado, ter premissas verdadeiras e uma conclusão verdadeira não é suficiente para validar um argumento. Considere este exemplo:

Todo potiguar é brasileiro.
Oscar Schmidt é brasileiro.
∴ Oscar Schmidt é potiguar.

---

em que as sentenças não são verdadeiras nem falsas, mas têm algum tipo de nível intermediário de verdade. De modo um pouco mais controverso, outros filósofos pensam que devemos permitir a possibilidade de que as sentenças sejam verdadeiras e falsas ao mesmo tempo. Existem sistemas de lógica, que não discutiremos neste livro, em que uma sentença pode tanto ser nem verdadeira nem falsa, quanto ser ambas, verdadeira e falsa.

As premissas e a conclusão desse argumento são todas verdadeiras, mas o argumento é inválido. Se Oscar Schmidt tivesse nascido na Paraíba, as duas premissas continuariam sendo verdadeiras, mas a conclusão não seria. Então há um caso em que as premissas desse argumento são verdadeiras, mas a conclusão não é. Portanto, o argumento é inválido.

O mais importante é lembrar que a validade não se refere à verdade ou falsidade real das sentenças do argumento. Ela é sobre se é *possível* que todas as premissas sejam verdadeiras e que a conclusão não seja verdadeira ao mesmo tempo (em alguma situação hipotética). A situação que realmente ocorre não tem nenhum papel especial na determinação de se um argumento é válido ou não.[2] Nada sobre o modo como as coisas são na realidade pode, por si só, determinar se um argumento é válido. Costuma-se dizer que a lógica não se importa com sentimentos. Na verdade, também não se importa muito com fatos.

A moral da história aqui é que quando usamos um argumento para provar que sua conclusão *é verdadeira*, precisamos de duas coisas. Primeiro, precisamos que o argumento seja válido, ou seja, precisamos que a conclusão se siga das premissas. E segundo, precisamos também que as premissas sejam verdadeiras. Diremos que um argumento válido com todas as suas premissas verdadeiras é um argumento CORRETO.

Em contrapartida, quando queremos refutar um argumento, temos duas opções à disposição: podemos mostrar que uma (ou mais) premissas não são verdadeiras, ou podemos mostrar que o argumento não é válido. A lógica, no entanto, só nos ajuda na segunda opção!

---

[2]Bem, o único caso em que a situação real parece interferir na avaliação lógica de um argumento é quando as premissas são de fato verdadeiras e a conclusão de fato não é verdade. Neste caso o contraexemplo será um fato (real) e não uma possibilidade imaginada. Vivemos no contraexemplo, e o argumento é inválido. Mas a realidade do contraexemplo não o torna especial. De um ponto de vista lógico, um contraexemplo imaginário é tão forte quanto um contraexemplo real.

2.5 Argumentos Indutivos

Muitos argumentos bons são inválidos. Considere o seguinte:

Até hoje jamais nevou em Natal.
∴ Não nevará em Natal no próximo inverno.

Esse argumento faz uma generalização baseada na observação sobre muitas situações (passadas) e conclui sobre todas as situações (futuras). Tais argumentos são chamados argumentos INDUTIVOS. No entanto, este argumento é inválido. Mesmo que jamais tenha nevado em Natal até agora, permanece *possível* que uma onda súbita de frio e umidade chegue a Natal no próximo inverno e neve na cidade. Esta situação configura-se em um cenário hipotético bastante implausível, mas ainda assim possível, em que a premissa do argumento é verdadeira, mas sua conclusão não é, o que caracteriza o argumento com inválido.

A questão importante aqui é que argumentos indutivos—mesmo os bons argumentos indutivos—não são (dedutivamente) válidos. Eles não são *infalíveis.* Por mais improvável que seja, é *possível* que sua conclusão seja falsa, mesmo quando todas as suas premissas são verdadeiras. Neste livro, deixaremos de lado (inteiramente) a questão do que gera um bom argumento indutivo. Nosso interesse é apenas separar os argumentos (dedutivamente) válidos dos inválidos.

Antes de finalizar o capítulo um alerta vocabular: estamos interessados em saber se uma conclusão se *segue* de algumas premissas. Não diga, porém, que as premissas *inferem* a conclusão. Implicar ou seguir-se de é uma relação entre premissas e conclusões; já inferência é algo que nós fazemos. Portanto, se você quiser falar em inferência, você pode dizer que quando a conclusão se segue das premissas, então *alguém* pode corretamente *inferir* a conclusão das premissas.

Exercícios

A. Quais argumentos a seguir são válidos? Quais são inválidos?

1. Sócrates é um homem.
2. Todos os homens são repolhos.

∴ Sócrates é um repolho.

1. Lula nasceu em Porto Alegre ou foi presidente do Brasil.
2. Lula nunca foi presidente do Brasil.

∴ Lula nasceu em Porto Alegre.

1. Se eu acordar tarde eu me atrasarei.
2. Eu não acordei tarde.

∴ Eu não me atrasei.

1. Lula é gaúcho ou mato-grossense.
2. Lula não é mato-grossense.

∴ Lula é gaúcho.

1. Se o mundo acabar hoje, não precisarei acordar cedo amanhã.
2. Precisarei acordar cedo amanhã.

∴ O mundo não vai acabar hoje.

1. Lula tem hoje 74 anos.
2. Lula tem hoje 39 anos.

∴ Lula tem hoje 50 anos.

B. Será que pode...

1. Um argumento válido com uma premissa falsa e uma verdadeira?
2. Um argumento válido com todas as premissas falsas e a conclusão verdadeira?
3. Um argumento válido com todas as premissas e também a conclusão falsa?
4. Um argumento inválido com todas as premissas e também a conclusão verdadeiras?
5. Um argumento válido com as premissas verdadeiras e a conclusão falsa?

6. Um argumento inválido se tornar válido devido a adição de uma premissa extra?
7. Um argumento válido se tornar inválido devido a adição de uma premissa extra?

Em cada caso, se pode, dê um exemplo, e se não pode, explique por que não.

CAPÍTULO 3

Outras noções lógicas

No Capítulo 2, introduzimos as noções correlatas de consequência e de argumento válido. Essas são as noções mais importantes da lógica. Neste Capítulo, no entanto, apresentaremos algumas outras noções igualmente importantes. Todos elas dependem, tanto quanto a validade, da pressuposição de que sentenças são sempre classificáveis como verdadeiras ou não por aquilo que estamos chamando de "situações". No restante deste Capítulo, consideraremos como situações aceitáveis apenas aqueles cenários que respeitem nossos conceitos e a relação entre eles, com os quais definimos os argumentos conceitualmente válidos (p 12). O que dissemos até agora sobre os diferentes tipos de validade (validade nomológica, conceitual ou formal) pode ser estendido para as noções que apresentaremos neste capítulo. Ou seja, sempre que usarmos uma ideia diferente do que conta como uma "situação", teremos noções diferentes. E, enquanto lógicos, nós eventualmente consideraremos, mais adiante, uma definição de situação mais permissiva do que esta, da validade conceitual, apenas provisoriamente assumida.

3.1 Possibilidade Conjunta

Considere estas duas sentenças:

B1. O único irmão de Joana é mais baixo que ela.
B2. O único irmão de Joana é mais alto do que ela.

A lógica não consegue, sozinha, nos dizer qual dessas frases é verdadeira. No entanto, é evidente que *se* a primeira sentença (B1) for verdadeira, *então* a segunda (B2) deve ser falsa. Da mesma forma, se a segunda (B2) for verdadeira, então a primeira (B1) deve ser falsa. Não há cenário possível em que ambas as sentenças sejam verdadeiras juntas. Essas sentenças são incompatíveis entre si, não podem ser ambas verdadeiras ao mesmo tempo. Isso motiva a seguinte definição:

> As sentenças de um grupo são CONJUNTAMENTE POSSIVEIS se e somente se houver uma situação em que todas elas sejam verdadeiras.

B1 e B2 são, então, *conjuntamente impossíveis*, ao passo que, as duas sentenças abaixo são conjuntamente possíveis:

B3. O único irmão de Joana é mais baixo do que ela.
B4. O único irmão de Joana é mais velho do qu ela.

Podemos nos perguntar sobre a possibilidade conjunta de um número qualquer de sentenças. Por exemplo, considere as seguintes quatro sentenças:

G1. Há pelo menos quatro girafas no zoológico de Natal.
G2. Há exatamente sete gorilas no zoológico de Natal.
G3. Não há mais do que dois marcianos no zoológico de Natal.
G4. Cada girafa no zoológico de Natal é um marciano.

G1 e G4 juntas implicam que há pelo menos quatro girafas marcianas no zoológico de Natal. E isso entra em conflito com o G3, que afirma não haver mais de dois marcianos no zoológico de Natal. Portanto, as sentenças G1, G2, G3, G4 são impossíveis em conjunto. Não há situação na qual todas elas sejam verdadeiras. (Observe que as sentenças G1, G3 e G4, sem G2, já são impossíveis em conjunto. Mas se elas são impossíveis em conjunto, adicionar uma frase extra ao grupo, como G2, não vai jamais torná-las possíveis em conjunto!)

3.2 Verdades necessárias, falsidades necessárias e contingências

Quando avaliamos se um argumento é válido ou não, nossa preocupação é com o que seria verdadeiro *se* as premissas fossem verdadeiras. Mas além das sentenças que podem ser verdadeiras e podem não ser, existem algumas sentenças que simplesmente têm que ser verdadeiras, que não é possível que não sejam verdadeiras. E existem outras que simplesmente têm que ser falsas, que não é possível que sejam verdadeiras. Considere as seguintes sentenças:

1. Está chovendo.
2. Ou está chovendo, ou não está.
3. Está e não está chovendo.

Para saber se a sentença 1 é verdadeira, você precisa olhar pela janela. Ela pode ser verdadeira, mas também pode ser falsa. Uma sentença como 1 que é capaz de ser verdadeira e capaz de ser falsa (em diferentes circunstâncias, é claro) é chamada CONTINGENTE.

A sentença 2 é diferente. Você não precisa olhar pela janela para saber que ela é verdadeira. Independentemente de como está o tempo, ou está chovendo ou não está. Uma sentença como 2 que é incapaz de ser falsa, ou seja, que é verdadeira em qualquer situação, é chamada de VERDADE NECESSARIA.

Da mesma forma, você não precisa verificar o clima para saber se a sentença 3 é verdadeira. Ela não pode ser verdadeira, tem que ser falsa. Pode estar chovendo aqui e não estar chovendo em outro lugar; pode estar chovendo agora, e parar de chover antes mesmo de você terminar de ler esta sentença; mas é impossível que esteja e não esteja chovendo no mesmo lugar e ao mesmo tempo. Então, independentemente de como seja o mundo, a sentença 3, que afirma que está e não está chovendo, é falsa. Uma sentença como 3, que é incapaz de ser verdadeira, ou seja, que é falsa em qualquer situação, é uma FALSIDADE NECESSARIA.

Algo, porém, pode ser verdadeiro *sempre* e, mesmo assim, ainda ser contingente. Por exemplo, se é verdade que nenhum ser humano jamais viveu 150 anos ou mais, então a sentença 'Nenhum ser humano morreu com 150 anos ou mais' sempre foi verdadeira. Apesar disso, esta ainda é uma sentença contingente, porque podemos conceber um cenário hipotético, uma situação, na qual os seres humanos vivem mais do que 150 anos. Então a sentença é e sempre foi verdadeira, mas poderia ser falsa e é, por isso, uma sentença contingente.

Equivalência Necessária

Podemos também perguntar sobre as relações lógicas *entre* duas sentenças. Por exemplo:

> Isabel foi trabalhar depois de lavar a louça.
> Isabel lavou a louça antes de ir trabalhar.

Essas duas sentenças são contingentes, pois Isabel poderia não ter lavado a louça, ou não ter ido trabalhar. No entanto, se uma delas for verdadeira, a outra também será; se uma for falsa, a outra também será. Quando duas sentenças têm sempre o mesmo valor de verdade em todas as situações, dizemos que elas são NECESSARIAMENTE EQUIVALENTES.

Sumário das noções lógicas

- ▹ Um argumento é VALIDO se não houver nenhuma situação em que as premissas sejam todas verdadeiras e a conclusão não seja; é INVALIDO caso contrário.
- ▹ Uma VERDADE NECESSARIA é uma sentença verdadeira em todas as situações.
- ▹ Uma FALSIDADE NECESSARIA é uma sentença que é falsa em todas as situações.
- ▹ Uma SENTENCA CONTINGENTE não é nem uma verdade necessária nem uma falsidade necessária; é verdadeira em algumas situações e falsa em outras.
- ▹ Duas sentenças são NECESSARIAMENTE EQUIVALENTES se, em qualquer situação, têm o mesmo valor de verdade; ou são ambas verdadeiras ou ambas falsas.
- ▹ Uma coleção de sentenças é CONJUNTAMENTE POSSIVEL se houver uma situação em que todas sejam verdadeiras; e é CONJUNTAMENTE IMPOSSIVEL caso contrário.

Exercícios

A. Para cada uma das sentenças seguintes, decida se ela é uma verdade necessária, uma falsidade necessária, ou se é contingente.

1. Penélope atravessou a estrada.
2. Alguém uma vez atravessou a estrada.
3. Ninguém jamais atravessou a estrada.
4. Se Penélope atravessou a estrada, então alguém atravessou.
5. Embora Penélope tenha atravessado a estrada, ninguém jamais atravessou a estrada.
6. Se alguém alguma vez atravessou a estrada, foi Penélope.

B. Para cada uma das sentenças seguintes, decida se ela é uma verdade necessária, uma falsidade necessária, ou se é contingente.

1. Os elefantes dissolvem na água.
2. A madeira é uma substância leve e durável, útil para construir coisas.
3. Se a madeira fosse um bom material de construção, seria útil para construir coisas.
4. Eu moro em um prédio de três andares que é de dois andares.
5. Se os calangos fossem mamíferos, eles amamentariam seus filhotes.

C. Quais pares abaixo possuem sentenças necessariamente equivalentes?

1. Os elefantes dissolvem na água.
   Se você colocar um elefante na água, ele irá se desmanchar.
2. Todos os mamíferos dissolvem na água.
   Se você colocar um elefante na água, ele irá se desmanchar.
3. Lula foi o 4º presidente depois da ditadura militar de 64–85.
   Dilma foi a 5ª presidenta depois da ditadura militar de 64–85.
4. Dilma foi a 5ª presidenta depois da ditadura militar de 64–85.
   Dilma foi a presidenta imediatamente após o 4º presidente depois da ditadura militar de 64–85.
5. Os elefantes dissolvem na água.
   Todos os mamíferos dissolvem na água.

D. Quais pares abaixo possuem sentenças necessariamente equivalentes?

1. Luiz Gonzaga tocava sanfona.
   Jackson do Pandeiro tocava pandeiro.

2. Luiz Gonzaga tocou junto com Jackson do Pandeiro.
   Jackson do Pandeiro tocou junto com Luiz Gonzaga.
3. Todos pianistas profissionais têm mãos grandes.
   A pianista Nina Simone tinha mãos grandes.
4. Nina Simone tinha a saúde mental abalada.
   Todos os pianistas têm a saúde mental abalada.
5. Roberto Carlos é profundamente religioso.
   Roberto Carlos concebe a música como uma expressão de sua espiritualidade.

E. Considere as seguintes sentenças:

G1. Há pelo menos quatro girafas no zoológico de Natal.

G2. Há exatamente sete gorilas no zoológico de Natal.

G3. Não há mais do que dois marcianos no zoológico de Natal.

G4. Cada girafa do zoológico de Natal é um marciano.

Agora considere cada uma das seguintes coleções de sentenças. Quais são conjuntamente possíveis? Quais são conjuntamente impossíveis?

1. Sentenças G2, G3 e G4
2. Sentenças G1, G3 e G4
3. Sentenças G1, G2 e G4
4. Sentenças G1, G2 e G3

F. Considere as seguintes sentenças.

M1. Todas as pessoas são mortais.

M2. Sócrates é uma pessoa.

M3. Sócrates nunca morrerá.

M4. Sócrates é mortal.

Quais combinações de sentenças são conjuntamente possíveis? Quais são impossíveis?

1. Sentenças M1, M2, e M3
2. Sentenças M2, M3, e M4
3. Sentenças M2 e M3
4. Sentenças M1 e M4
5. Sentenças M1, M2, M3 e M4

G. Para cada item abaixo, decida se ele é possível ou impossível. Se for possível apresente um exemplo. Se for impossível, explique por quê.

1. Um argumento válido que possui uma premissa falsa e uma premissa verdadeira.
2. Um argumento válido que tem a conclusão falsa.
3. Um argumento válido, cuja conclusão é uma falsidade necessária.
4. Um argumento inválido, cuja conclusão é uma verdade necessária.
5. Uma verdade necessária que é contingente.
6. Duas sentenças necessariamente equivalentes, ambas verdades necessárias.
7. Duas sentenças necessariamente equivalentes, uma das quais é uma verdade necessária e uma das quais é contingente.
8. Duas sentenças necessariamente equivalentes que são conjuntamente impossíveis.
9. Um grupo de sentenças conjuntamente possíveis que contém uma falsidade necessária.
10. Um grupo de sentenças conjuntamente impossíveis que contém uma verdade necessária.

H. Para cada item abaixo, decida se ele é possível ou impossível. Se for possível apresente um exemplo. Se for impossível, explique por quê.

1. Um argumento válido, cujas premissas são todas verdades necessárias e cuja conclusão é contingente.

2. Um argumento válido com premissas verdadeiras e conclusão falsa.
3. Um grupo de sentenças conjuntamente possíveis que contém duas sentenças que não são necessariamente equivalentes.
4. Uma coleção de sentenças conjuntamente possíveis, todas elas contingentes.
5. Uma verdade necessária falsa.
6. Um argumento válido com premissas falsas.
7. Um par de sentenças necessariamente equivalentes que não são conjuntamente possíveis.
8. Uma verdade necessária que também é uma falsidade necessária.
9. Um grupo de sentenças conjuntamente possíveis que também são falsidades necessárias.

PARTE II

Lógica verofuncional

CAPÍTULO 4

Primeiros passos para a simbolização

4.1 Validade em virtude da forma

Considere este argumento:

Chove lá fora.
Se chove lá fora, então Sheila está melancólica.
∴ Sheila está melancólica.

e este outro também:

Márcia é uma sindicalista anarquista.
Se Márcia é uma sindicalista anarquista, então Sílvio é um ávido leitor de Tolstoy.
∴ Sílvio é um ávido leitor de Tolstoy.

Ambos os argumentos são válidos e não é difícil notar que eles compartilham uma erstrutura comum, que pode ser expressada assim:

A
Se A, então C
$\therefore$ C

Esta parece ser uma *estrutura* excelente para um argumento. De fato, qualquer argumento com essa *estrutura* será válido. E essa não é a única estrutura boa para argumentos. Considere um argumento como:

Raquel está lendo Platão ou estudando lógica
Raquel não está lendo Platão.
$\therefore$ Raquel está estudando lógica.

Este também é um argumento válido e sua estrutura é algo como:

A ou B
não-A
$\therefore$ B

Uma estrutura excelente! Veja este outro exemplo:

Não é o caso que Leonardo fez ambos, atuou em vários filmes e estudou muito.
Leonardo atuou em vários filmes.
$\therefore$ Leonardo não estudou muito.

Este argumento também é válido e tem uma estrutura que poderíamos representar como:

não-(A e B)
A
$\therefore$ não-B

Esses exemplos ilustram uma ideia muito importante, que podemos chamar de *validade em virtude da forma*. A validade dos argumentos que acabamos de considerar não tem muito a ver com os significados das expressões em português como 'Sheila está melancólica', 'Sílvio é um ávido leitor de Tolstoi' ou 'Leonardo atuou em vários filmes'. Se a validade destes argumentos têm algo a ver com significado, é apenas com os significados de expressões tais como 'e', 'ou', 'não' e 'se ..., então...'.

Nas Partes II, III e VI deste livro, vamos desenvolver uma linguagem formal que nos permitirá simbolizar muitos argumentos de tal modo que poderemos mostrar que eles são válidos em virtude de sua forma. Essa linguagem será a *lógica verofuncional*, ou LVF.

4.2 Validade por razões especiais

Existem, no entanto, inúmeros argumentos que são válidos, mas não por razões relacionadas à sua forma. Vejamos um exemplo:

Morgana gosta de macaxeira.
∴ Morgana gosta de aipim.

É impossível que a premissa seja verdadeira e a conclusão falsa. Portanto, o argumento é válido. No entanto, a validade não está relacionada à forma do argumento. Veja abaixo um argumento inválido com exatamente a mesma forma:

Morgana gosta de macaxeira.
∴ Morgana gosta de rapadura.

Isso poderia sugerir que a validade do primeiro argumento *depende* do significado das palavras 'macaxeira' e 'aipim'. Mas, esteja isso correto ou não, não é apenas a *forma* daquele argumento que o torna válido. Considere agora este outro argumento:

A escultura é toda verde.
∴ A escultura não é toda vermelha.

Novamente, parece impossível que a premissa seja verdadeira e a conclusão falsa, pois nada pode ser todo verde e todo vermelho. Portanto, o argumento é válido. Mas aqui está um argumento inválido com esta mesma forma:

A escultura é toda verde.

$\therefore$ A escultura não é toda brilhante.

Este argumento é inválido, pois é possível que uma coisa seja toda verde e toda brilhante também. (Pode-se, por exemplo, pintar as unhas com um elegante esmalte verde brilhante.) A validade do primeiro argumento parece estar relacionada com a maneira como as cores (ou as palavras-que-designam-cores) interagem. Mas, seja isso correto ou não, não é simplesmente a *forma* daquele argumento que o torna válido.

A conclusão importante a ser tirada aqui é a seguinte: *Na melhor das hipóteses, a lógica verofuncional (LVF) nos ajudará a entender argumentos válidos devido à sua forma.*

4.3 Sentenças atômicas

Na Seção 4.1 começamos a isolar a forma de um argumento substituindo *subsentenças* de sentenças por letras específicas. Assim, no primeiro exemplo daquela seção, 'chove lá fora' é uma subsentença de 'Se chove lá fora, então Sheila está melancólica', e substituímos essa subsentença por 'A'.

Nossa linguagem artificial, a LVF (lógica verofuncional), leva a cabo essa ideia de forma absolutamente implacável. Seu componente mais básico é uma coleção destas letras que chamaremos de *letras sentenciais*. Elas serão os blocos de construção básicos a partir dos quais sentenças mais complexas são construídas. Usaremos as letras maiúsculas do alfabeto como letras sentenciais da LVF. Existem apenas 26 letras diferentes, mas não há limite para o número de letras sentenciais que podemos querer considerar. Obtemos novas letras sentenciais adicionando subíndices às letras do alfabeto. Por exemplo, abaixo temos cinco letras sentenciais diferentes:

$$A, P, P_1, P_2, A_{234}$$

Usaremos as letras sentenciais para representar ou *simbolizar* certas sentenças em português. Para fazer isso, precisamos fornecer uma CHAVE DE SIMBOLIZACAO, tal como a seguinte

A: Chove lá fora
C: Sheila está melancólica

Ao fazer isso, não estamos fixando essa chave simbolização *para sempre*. Estamos apenas dizendo que, por enquanto, usaremos a letra sentencial 'A' da LVF para simbolizar a sentença em português 'Chove lá fora', e a letra sentencial 'C' para simbolizar a sentença 'Sheila está melancólica'. Mais tarde, quando estivermos lidando com sentenças diferentes ou argumentos diferentes, poderemos fornecer uma nova chave de simbolização, tal como:

A: Márcia é uma sindicalista anarquista
C: Sílvio é um ávido leitor de Tolstoy

É importante entender que qualquer que seja a estrutura interna que uma sentença em português possa ter, esta estrutura é perdida quando a sentença é simbolizada por uma letra sentencial da LVF. Do ponto de vista da LVF, uma letra sentencial é apenas uma letra. Ela pode ser usada para criar sentenças mais complexas, mas não pode ser desmontada.

CAPÍTULO 5

Conectivos

No capítulo anterior, propusemos simbolizar as sentenças básicas do português através das letras sentenciais da lógica verofuncional (LVF). Neste capítulo veremos como simbolizar as expressões 'e', 'ou', 'não',... que normalmente ligam, conectam as sentenças. As suas simbolizações na LVF são, por esta razão, chamadas de *conectivos*. Usaremos os conectivos lógicos para criar sentenças complexas a partir de componentes atômicos. Existem cinco conectivos na LVF. A tabela a seguir os resume e a explicação de cada um deles será dada nas seções seguintes.

símbolo	**nome do símbolo**	**significado**
$\neg$	negação	'não é o caso que...'
$\wedge$	conjunção	'... e ...'
$\vee$	disjunção	'... ou ...'
$\rightarrow$	condicional	'se ... então ...'
$\leftrightarrow$	bicondicional	'... se e somente se ...'

Esses não são os únicos conectivos do português que interessam. Outros são, por exemplo, 'a menos que', 'nem... nem...' e 'porque'. Veremos que os dois primeiros podem ser expressos através dos conectivos da tabela acima, enquanto o último não pode. 'Porque', diferentemente dos outros, não é um conectivo *verofuncional*.

5.1 Negação

Considere como nós poderíamos simbolizar estas sentenças:

1. Maria está em Mossoró.
2. Não é o caso de que Maria esteja em Mossoró.
3. Maria não está em Mossoró.

Para simbolizar a sentença 1, simplesmente adotamos uma letra sentencial. Podemos propor a seguinte chave de simbolização:

M: Maria está em Mossoró.

Dessa forma, a sentença 1 é simbolizada simplesmente por:

$$M$$

Como a sentença 2 é claramente relacionada à sentença 1, não devemos simbolizá-la com uma nova letra sentencial. Grosso modo, a sentença 2 significa algo como 'Não é o caso que M'. Na tabela acima o símbolo de negação '$\neg$' faz este papel. Podemos, agora, simbolizar a sentença 2 como:

$$\neg M$$

A sentença 3 também contém a palavra 'não' e claramente diz a mesma coisa que a sentença 2. Portanto, também podemos simbolizá-la como:

$$\neg M$$

As sentenças 1 a 3 acima podem, então, ser simbolizadas como:

M: Maria está em Mossoró.
$\neg M$: Não é o caso de que Maria esteja em Mossoró.
$\neg M$: Maria não está em Mossoró.

A regra básica para saber se usamos a negação ($\neg$) na simbolização de uma sentença pode ser assim expressa:

Uma sentença pode ser simbolizada como $\neg\mathcal{A}$ se puder ser parafraseada em português como 'Não é o caso que …'.

Considerar mais alguns exemplos nos ajudará a entender melhor a negação.

4. O dispositivo pode ser substituído.
5. O dispositivo é insubstituível.
6. O dispositivo não é insubstituível.

Vamos usar a seguinte chave de substituição:

S: O dispositivo é substituível

A sentença 4 agora pode ser simbolizada por:

$$S$$

Repare que a sentença da chave de simbolização é ligeiramente diferente de 4, mas é evidente que elas têm o mesmo significado, afinal ser substituível é poder ser substituído. Passando para a sentença 5, dizer que o dispositivo é insubstituível significa que não é o caso que o dispositivo é substituível. Portanto, mesmo que a sentença 5 não contenha a palavra 'não', nós a simbolizaremos da seguinte forma:

$$\neg S$$

A sentença 6 pode ser parafraseada como 'Não é o caso que o dispositivo seja insubstituível.' E esta paráfrase pode novamente ser parafraseada como 'Não é o caso que não é o caso que o dispositivo seja substituível'. Portanto, podemos simbolizar essa sentença na LVF como:

$$\neg\neg S$$

As sentenças 4 a 6 acima podem, então, ser simbolizadas como:

S: O dispositivo pode ser substituído.
$\neg S$: O dispositivo é insubstituível.

$\neg\neg S$: O dispositivo não é insubstituível.

Mas é necessário termos cuidado quando lidamos com negações. Considere:

7. Glória está feliz.
8. Glória está infeliz.

Se usamos como chave de simbolização

F: Glória está feliz

então podemos simbolizar a sentença 7 como 'F'. No entanto, seria um erro simbolizar a sentença 8 como '$\neg F$'. Porque a sentença 8 diz que Glória está infeliz. Mas isso não é o mesmo que 'Não é o caso que Glória está feliz'. Glória pode, por exemplo, estar estudando lógica, e não estar nem feliz nem infeliz, mas em um estado de plácida indiferença. Como 'estar infeliz' não significa o mesmo que 'não estar feliz', então, para simbolizar a sentença 8, precisamos de uma nova letra sentencial da LVF.

As sentenças 7 e 8 acima são melhor simbolizadas na LVF como:

F: Glória está feliz.
I: Glória está infeliz.

5.2 Conjunção

Considere estas sentenças:

9. Suzana é atleta.
10. Bárbara é artista.
11. Suzana é atleta e, além disso, Bárbara é artista.

Precisamos de duas letras sentenciais diferentes para simbolizar as sentenças 9 e 10. Nossa chave de simbolização pode ser:

S: Suzana é atleta.

B: Bárbara é artista.

A sentença 9 pode, então, ser simbolizada como 'S' e a sentença 10 como 'B'. A sentença 11 diz, aproximadamente, 'A e B'. Usaremos um outro conectivo da lógica para lidar com este 'e'. Vamos usar, para isso, o símbolo '$\wedge$', que chamamos na tabela da p. 31 de CONJUNCAO. Assim, simbolizaremos a sentença 11 como:

$$(S \wedge B)$$

Dizemos que 'S' e 'B' são os dois CONJUNTOS da conjunção '$(S \wedge B)$'.

Resumindo, simbolizamos as sentenças 9 a 11 acima como:

S: Suzana é atleta.
B: Bárbara é artista.
$(S \wedge B)$: Suzana é atleta e, além disso, Bárbara é artista.

Observe que não fizemos nenhuma tentativa de simbolizar a expressão 'além disso' na sentença 11. Expressões como 'além disso', 'ambos' e 'também' funcionam para chamar nossa atenção para o fato de que duas coisas estão sendo conjuntamente ditas. Talvez elas afetem a ênfase de uma frase, mas a ênfase é algo que em geral não interfere na validade ou não de um argumento e não é considerada na LVF.

Mais alguns exemplos ajudarão a esclarecer um pouco mais esse ponto:

12. Suzana é atleta e canhota.
13. Bárbara e Renata são ambas saxofonistas.
14. Embora Bárbara seja saxofonista, ela não é canhota.
15. Romeu é compreensivo, mas Bárbara é mais compreensiva do que ele.

A sentença 12 é obviamente uma conjunção. Ela diz duas coisas (sobre Suzana). Em português é permitido dizer as duas coisas mencionando o nome Suzana apenas uma vez. Como definimos acima a chave de simbolização

S: Suzana é atleta.

pode ser tentador pensar que devemos simbolizar a sentença 12 com algo parecido a 'S e canhota'. Mas isso seria um erro. 'Canhota' não é uma sentença completa do português. Não poderíamos simbolizar 'canhota' como uma letra sentencial. O que estamos buscando é algo como 'S e Suzana é canhota'. Portanto, precisamos adicionar outra letra sentencial à chave de simbolização. Utilizemos 'C' para simbolizar 'Suzana é canhota'. Agora a sentença inteira pode ser simbolizada como:

$$(S \wedge C)$$

A sentença 13 diz uma única coisa de duas pessoas diferentes, ou seja, atribui um predicado único a dois sujeitos. Diz tanto de Bárbara como de Renata que elas são saxofonistas, ainda que em português tenhamos usado a palavra "saxofonista" apenas uma vez. A sentença 13 pode claramente ser parafraseada como 'Bárbara é saxofonista e Renata é saxofonista'. Podemos então usar a seguinte chave

B_1: Bárbara é saxofonista.
R: Renata é saxofonista.

e simbolizar 13 na LVF como

$$(B_1 \wedge R)$$

A sentença 14 é um pouco mais complicada. A palavra "embora" estabelece um contraste entre a primeira parte da frase e a segunda parte. No entanto, a sentença nos diz que Bárbara é saxofonista e que ela não é canhota. Para fazer com que cada um dos conjuntos (sentenças que compõe uma conjunção) seja uma letra sentencial, precisamos substituir "ela" por "Bárbara". Portanto, podemos parafrasear a frase 14 como: 'Bárbara é saxofonista *e* Bárbara não é canhota'. O segundo conjunto contém uma negação, então parafraseando mais uma vez, chegamos a: 'Bárbara é saxofonista *e não é o caso que* Bárbara é canhota'. Como já propusemos a chave de que B_1 simboliza "Bárbara é saxofonista", então completamos nossa chave de simbolização com mais uma letra sentencial:

C_1: Bárbara é canhota.

Agora, finalmente, usamos a paráfrase acima para simbolizar a sentença 14 como a seguinte sentença da LVF:

$$(B_1 \wedge \neg C_1)$$

Observe que perdemos todos as nuances da sentença original em português nessa simbolização. Existe uma clara diferença de tom, ênfase, entre a sentença 'Embora Bárbara seja saxofonista, ela não é canhota' (a sentença 14) e 'Bárbara é saxofonista e não é o caso de que Bárbara é canhota' (a paráfrase que fizemos para simbolizá-la na LVF). A LVF não preserva (e não pode) preservar esse tipo nuance.

A sentença 15 levanta questões semelhantes. Existe um claro contraste entre o que é dito de Romeu com o que é dito de Bárbara, mas isso não é algo com o qual a LVF consiga lidar. Assim, podemos parafrasear 15 como 'Romeu é compreensivo *e* Bárbara é mais compreensiva que Romeu'. (Observe que mais uma vez substituímos, em nossa paráfrase, um pronome [ele] por um nome [Romeu].) Considere a seguinte chave de simbolização:

R_1: Romeu é compreensivo.
B_2: Bárbara é compreensiva.

Para simbolizar o primeiro conjunto da paráfrase acima, 'R_1' basta. Mas como devemos simbolizar o segundo conjunto? O que diz: 'Bárbara é mais compreensiva que Romeu'? Não tem como dizer que Bárbara é *mais* compreensiva que Romeu usando esta chave. Precisamos de uma nova letra sentencial para simbolizar 'Bárbara é mais compreensiva que Romeu'. Seja 'M_1' esta letra. Podemos agora simbolizar a sentença 15 como:

$$(R_1 \wedge M_1)$$

A regra básica para saber se usamos a conjunção ($\wedge$) na simbolização de uma sentença pode ser assim expressa:

> Uma sentença pode ser simbolizada como $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$ se puder ser parafraseada em português como '…e…' ou como '…, mas…', ou como 'embora…, …'.

Você pode estar se perguntando por que colocamos parênteses em volta das conjunções. A razão para isso ficará clara ao observarmos como a negação pode interagir com a conjunção. Considere:

16. Você não beberá ambos, refrigerante e suco.
17. Você não beberá refrigerante, mas beberá suco.

A sentença 16 pode ser parafraseada como 'Não é o caso que: você beberá refrigerante e você beberá suco'. Usando esta chave de simbolização

S_1: Você beberá refrigerante.
S_2: Você beberá suco.

podemos simbolizar 'você beberá refrigerante e você beberá suco' como '$(S_1 \wedge S_2)$'. Então, para simbolizar 16, nós simplesmente negamos esta sentença toda:

$$\neg(S_1 \wedge S_2)$$

A sentença 17 é uma conjunção: você *não* beberá refrigerante e você *beberá* suco. Dada a chave de simbolização recém proposta, simbolizamos 'Você não beberá refrigerante' como '$\neg S_1$' e 'Você beberá suco' como 'S_2. Então, a sentença 17 é simbolizada como:

$$(\neg S_1 \wedge S_2)$$

As sentenças 16 e 17 têm, em português, significados muito diferentes e por isso suas simbolizações têm que ser também diferentes. Em 16, o *âmbito* (ou *escopo*) da negação é toda a conjunção.

O posicionamento da negação '$\neg$' antes do símbolo de abre parênteses '(' em '$\neg(S_1 \wedge S_2)$' indica que toda a sentença que está entre parênteses está sendo negada. O âmbito da negação é a conjunção como um todo. Já em 17, o âmbito da negação é apenas o primeiro conjunto (a sentença S_1). Isso é indicado pelo posicionamento de '$\neg$' após o parêntese '(' em '$(\neg S_1 \wedge S_2)$'. O uso dos parênteses tem o propósito de distinguir situações como estas e ajudar a definir o escopo (ou âmbito) da negação.

5.3 Disjunção

Considere as seguintes sentenças:

18. Fátima vai jogar videogame ou ela vai assistir TV.
19. Fátima ou Omar vão jogar videogame.

Podemos, para estas sentenças, usar a seguinte chave de simbolização:

F: Fátima vai jogar videogame.
O: Omar vai jogar videogame.
T: Fátima vai assistir TV.

A sentença 18 diz, aproximadamente, que 'F ou T'. Usaremos um símbolo novo da LVF para simbolizar este 'ou'. É o símbolo '$\vee$' que na tabela da página 31 foi chamado de DISJUNCAO. A sentença 18 é, então, simbolizada como:

$$(F \vee T)$$

Além disso, dizemos que 'F' e 'T' são os DISJUNTOS da disjunção '$(F \vee T)$'.

A sentença 19 é apenas um pouco mais complicada. Há dois sujeitos (ou, como dizem os gramáticos, um sujeito composto) para os quais uma única predicação é feita. A seguinte paráfrase, no entanto, tem claramente o mesmo significado da sentença 19:

'Fátima vai jogar videogame ou Omar vai jogar videogame'. Podemos, então, simbolizá-la como:

$$(F \vee O)$$

A regra para saber se usamos a disjunção ($\vee$) na simbolização de uma sentença pode ser assim expressa:

> Uma sentença pode ser simbolizada como $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ se ela puder ser parafraseada por '…ou…'. Cada um dos disjuntos deve ser uma sentença.

Às vezes, em português, a palavra 'ou' é usada de uma maneira que exclui a possibilidade de que ambos os disjuntos sejam verdadeiros. Isso é chamado de OU EXCLUSIVO. Um caso claro de uso do ou exclusivo ocorre quando no cardápio de uma lanchonete você lê "todos os sanduíches vêm acompanhados de um refrigerante *ou* um suco". Você pode beber o refrigerante, pode beber o suco, mas se quiser beber *os dois*, terá que pagar a mais por isso.

Outras vezes, a palavra 'ou' permite a possibilidade de ambos os disjuntos serem verdadeiros. Este é provavelmente o caso da sentença 19, acima. Fátima pode jogar sozinha, Omar pode jogar sozinho, ou os dois podem jogar. A sentença 19 apenas diz que *pelo menos* um deles vai jogar videogame. Isso é chamado de OU INCLUSIVO. Na lógica, adotou-se a convenção de que o símbolo '$\vee$' da LVF sempre simboliza um *ou inclusivo*. Abaixo veremos como simbolizar um ou exclusivo na LVF usando os símbolos que já vimos '$\vee$', '$\wedge$' e '$\neg$'.

Vejamos como a negação interage com a disjunção. Considere:

20. Você não beberá refrigerante ou você não beberá suco.
21. Você não beberá nem refrigerante nem suco.
22. Você beberá refrigerante ou suco, mas não ambos.

Usando a mesma chave de simbolização apresentada anteriormente,

S_1: Você beberá refrigerante.
S_2: Você beberá suco.

a sentença 20 pode ser parafraseada da seguinte forma: '*Não é o caso de que* você beberá refrigerante ou *não é o caso de que* você beberá suco'. Para simbolizar isso na LVF precisamos da disjunção e da negação. 'Não é o caso de que você beberá refrigerante' é simbolizado por '$\neg S_1$'. 'Não é o caso de que você beberá suco' é simbolizado por '$\neg S_2$'. Portanto, a sentença 20 é simbolizada como:

$$(\neg S_1 \vee \neg S_2)$$

A sentença 21 também requer a negação para ser simbolizada. Ela pode ser parafraseada como: '*Não é o caso de que* você beberá refrigerante ou você beberá suco'. Como isso nega toda a disjunção, simbolizamos a sentença 21 como:[1]

$$\neg(S_1 \vee S_2)$$

A sentença 22 corresponde a uma explicitação clara e não ambígua de um *ou exclusivo.* Podemos dividi-la em duas partes. A primeira parte diz que você beberá refrigerante ou suco. Nós simbolizamos isso como '$(S_1 \vee S_2)$'. A segunda parte diz que você não beberá os dois. Podemos parafrasear isso como: "Não é o caso de que você beberá refrigerante e você beberá suco". Usando a negação e a conjunção, simbolizamos isso como '$\neg(S_1 \wedge S_2)$'. Agora só precisamos juntar as duas partes. Como vimos anteriormente, a palavra 'mas' usada para juntar as duas partes da sentença 22, geralmente pode ser simbolizada como '$\wedge$'. Então, simbolizamos a sentença 22 como:

$$((S_1 \vee S_2) \wedge \neg(S_1 \wedge S_2))$$

[1] Uma outra possibilidade aceitável para parafrasear 21, que talvez seja até mais natural, é a seguinte: '*Não é o caso de que* você beberá refrigerante **e** *não é o caso de que* você beberá suco'. Neste caso a simbolização da sentença utilizará a conjunção das negações de cada uma das subsentenças e será: '$(\neg S_1 \wedge \neg S_2)$'. Mais adiante veremos que estas duas simbolizações distintas da sentença 21 como '$\neg(S_1 \vee S_2)$' ou como '$(\neg S_1 \wedge \neg S_2)$' são, de uma perspectiva lógica, perfeitamente equivalentes na LVF.

Este último exemplo mostra algo importante. Embora o símbolo '$\lor$' da LVF sempre simbolize o *ou inclusivo*, o *ou exclusivo* pode também ser simbolizado na LVF. Nós apenas temos que usar alguns de nossos outros símbolos também.

5.4 Condicional

Considere as seguintes sentenças:

23. Se Oscar está em Caicó, então Oscar está no Rio Grande do Norte.
24. Oscar está no Rio Grande do Norte apenas se Oscar está em Caicó.

Vamos usar a seguinte chave de simbolização:

> C: Oscar está em Caicó.
> R: Oscar está no Rio Grande do Norte.

A sentença 23 tem aproximadamente esta forma: 'se C, então R'. Usaremos um símbolo novo, '$\rightarrow$', para simbolizar essa estrutura 'se..., então...'. Deste modo, simbolizamos a sentença 23 como:

$$(C \rightarrow R)$$

O conectivo '$\rightarrow$' é chamado de O CONDICIONAL. Na sentença condicional '$(C \rightarrow R)$', 'C' é chamado de ANTECEDENTE e 'R' é chamado de CONSEQUENTE.

A sentença 24 também é um condicional. Como a palavra "se" aparece na segunda metade da frase, pode ser tentador simbolizá-la da mesma maneira que a sentença 23, como '$(C \rightarrow R)$'. Mas isso seria um erro. Quando pensamos no significado destas duas sentenças, nossos conhecimentos de geografia garantem que 23 é verdadeira, mas 24 não é. Afinal, não há como Oscar estar em Caicó sem que ele esteja também no Rio Grande do Norte. E isso parece assegurar a verdade de 23. Por outro lado, reconhecemos a sentença 24 como falsa porque sabemos que se Oscar estiver em Natal, Mossoró ou Currais Novos, por exemplo, ele estará no Rio Grande do Norte sem estar em Caicó. Então não parece verdade que 'Oscar está no Rio Grande do Norte apenas se Oscar está em Caicó'. Portanto, como 23 é verdadeira e 24 é falsa, elas não dizem a mesma coisa e não podem, por isso, ser simbolizadas pela mesma sentença da LVF.

A sentença 24, na verdade, pode ser parafraseada como 'Se Oscar está no Rio Grande do Norte, então Oscar está em Caicó'. Podemos simbolizá-la, então, como:

$$(R \to C)$$

A regra para saber se usamos o condicional ($\to$) na simbolização de uma sentença pode então ser assim expressa:

> Uma sentença pode ser simbolizada como $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ se ela puder ser parafraseada em português como 'Se A, então B' ou como 'A apenas se B'.

De fato, muitas expressões em português podem ser representadas usando o condicional. Considere:

25. Para Oscar estar em Caicó, é necessário que Oscar esteja no Rio Grande do Norte.
26. Uma condição necessária para que Oscar esteja em Caicó é que ele esteja no Rio Grande do Norte.
27. Para que Oscar esteja no Rio Grande do Norte, é suficiente que ele esteja em Caicó.
28. Uma condição suficiente para que Oscar esteja no Rio Grande do Norte é que ele esteja em Caicó.

Quando pensamos com calma sobre o significado destas quatro sentenças, sobre o que cada uma delas afirma, vemos que todas elas significam o mesmo que 'Se Oscar está em Caicó, então Oscar está no Rio Grande do Norte'. Por isso todas elas podem ser simbolizadas como:

$$(C \to R)$$

É importante ter em mente que o conectivo '$\rightarrow$' diz apenas que, se o antecedente for verdadeiro, o consequente será verdadeiro. Ele não diz nada sobre uma possível conexão *causal* entre o antecedente e o consequente. De fato, o nosso uso dos condicionais na língua portuguesa é muito rico em informação e sutilezas que não cabem no conectivo '$\rightarrow$' da LVF. Portanto, muito está sendo perdido quando simbolizamos um condicional do português com '$\rightarrow$'. Voltaremos a estas questões mais adiante neste livro, nas Seções 10.3 e 12.5.

5.5 Bicondicional

Considere as sentenças:

29. Olavo é um asno apenas se ele for um mamífero.
30. Olavo é um asno se ele for um mamífero.
31. Olavo é um asno se e somente se ele for um mamífero.

Usaremos a seguinte chave de simbolização:

A_3: Olavo é um asno.
M_3: Olavo é um mamífero.

A sentença 29, conforme acabamos de ver na Seção anterior, pode ser simbolizada como:

$$(A_3 \rightarrow M_3)$$

A sentença 30, apesar de muito parecida, difere de 29 em um aspecto bastante importante: o sentido do condicional. Ela pode ser parafraseada como: "Se Olavo é um mamífero, então Olavo é um asno". Portanto, pode ser simbolizada por:

$$(M_3 \rightarrow A_3)$$

A sentença 31 diz algo mais forte que tanto 29 quanto 30. Ela pode ser parafraseada como "Olavo é um asno se Olavo for um mamífero, e Olavo é um asno apenas se Olavo for um mamífero".

Esta paráfrase nada mais é do que a conjunção das sentenças 29 e 30. Portanto, podemos simbolizá-la como:

$$((A_3 \to M_3) \land (M_3 \to A_3))$$

Nós chamamos uma sentença deste tipo de BICONDICIONAL, porque corresponde ao condicional em ambas as direções.

Poderíamos simbolizar todos os bicondicionais dessa maneira. Portanto, assim como não precisamos de um novo símbolo da LVF para lidar com o *ou exclusivo*, também não precisamos de um novo símbolo da LVF para lidar com os bicondicionais. Mas como o bicondicional ocorre com bastante frequência, usaremos o símbolo '$\leftrightarrow$' para ele. Podemos então simbolizar a sentença 31 como:

$$(A_3 \leftrightarrow M_3)$$

A expressão "se e somente se" é bastante usada em filosofia, matemática e lógica. Por uma questão de economia, ela é costumeiramente abreviada por 'sse'. Nós vamos seguir esta prática neste livro. Portanto, 'se' com apenas *um* 's' é o condicional. Mas 'sse' com *dois* 's's é o bicondicional. Diante disso, podemos apresentar a regra que indica se usamos o bicondicional ($\leftrightarrow$) na simbolização de uma sentença como:

> Uma sentença pode ser simbolizada como $(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})$ se ela puder ser parafraseada como 'A sse B'; isto é, como 'A se e somente se B'.

Condicionais que expressam bicondicionais e o princípio da caridade

Aqui vai um alerta. Apesar de bastante usada na filosofia e na matemática, a expressão 'se e somente se', que indica o bicondicional, é uma expressão 'técnica' que quase nunca é usada na linguagem falada ou mesmo em textos não acadêmicos. Quando foi a última vez que você ouviu alguém dizendo 'se e somente se' em uma conversa? O que acontece é que, nas conversas comuns, expressamos bicondicionais de um modo ‘relaxado’ através de sentenças condicionais. Ou seja, usamos a expressão ‘se..., então...’ onde, de acordo com a lógica, deveríamos usar ‘...se e somente se...’. Um exemplo deste ‘uso relaxado’ é o seguinte. Suponha que o pai diga à filha:

32. Se você não comer toda a verdura, então não ganhará sobremesa.

Aí a filha, interessada no sorvete que viu no congelador, come toda a verdura. Bem, conforme a interpretação lógica que vimos aqui, o pai poderia mesmo assim se recusar a dar sobremesa à filha, alegando que ele fez uma afirmação condicional e não bicondicional. Ao proferir a sentença 32 o pai se compromete com o que fará caso a filha *não* coma toda a verdura. A sentença diz apenas que se ela não comer toda a verdura, ela não ganhará sobremesa. Mas nada é dito sobre o que acontece se a filha come toda a verdura. No entanto, ao ouvir a sentença 32, a filha espera do pai não só o compromisso condicional que a sentença literalmente expressa, mas ela espera também o compromisso de que ‘ela não ganhará sobremesa *apenas se* não comer toda a verdura’. E como vimos na Seção anterior, este compromisso pode ser parafraseado na sentença

33. Se você não ganhar sobremesa, então você não comeu toda a verdura.

É importante notarmos que quando a filha ouve a sentença 32 e pressupõe que o pai também se compromete com a sentença 33, ela não está cometendo um erro lógico. A motivação mais plausível para o pai ter dito a sentença 32 para a filha é justamente a de convencê-la a comer toda a verdura. Ou seja, não ganhar sobremesa seria um castigo por não comer toda a verdura: a filha não ganharia a sobremesa *apenas se* não comesse toda a verdura; situação esta parafraseada na sentença 33. Então, quando levamos em conta as motivações do pai, vemos que também ele assume que sua afirmação de 32 o compromete adicionalmente com 33.

A filha teria razão em fazer pantim se o pai se recusasse a lhe dar a sobremesa, tendo ela comido toda a verdura. Portanto, no contexto informal em que a sentença 32 foi proferida, está claro que devemos entendê-la não como um condicional, mas como o bicondicional dado pela conjunção de 32 e 33.[2]

A moral da história aqui é que em muitos contextos de uso da linguagem nós utilizamos sentenças condicionais para fazer afirmações bicondicionais. A expressão 'se e somente se', que marca o bicondicional, é uma expressão técnica, um jargão lógico-matemático que não costuma aparecer nos usos não acadêmicos da linguagem. Quando, portanto, estamos interessados em fazer uma análise lógica de um diálogo, texto, discurso, ... temos que ter muito cuidado em perceber estes usos 'relaxados' de sentenças condicionais que fazem afirmações bicondicionais. É importante levar o contexto em consideração e aplicar o que costuma ser chamado de *princípio da caridade*. Segundo este princípio devemos simbolizar as sentenças da maneira mais próxima possível às intenções dos sujeitos envolvidos no diálogo ou texto, mesmo que para isso tenhamos que 'corrigir' ou completar algumas de suas formulações.

5.6 A menos que

Os cinco conectivos introduzidos até agora ('$\neg$', '$\wedge$', '$\vee$', '$\rightarrow$' e '$\leftrightarrow$') correspondem a todos os conectivos da LVF. Podemos, agora, usá-los em conjunto para simbolizar muitos tipos diferentes de sentenças. Um caso especialmente difícil é o de sentenças com as expressões sinônimas 'a menos que' e 'a não ser que'.

34. A não ser que você saia do sol, você terá uma insolação.
35. Você terá uma insolação a menos que você saia do sol.

[2] Não se preocupe muito se você ainda tem dúvidas sobre por que em uma análise estritamente lógica a afirmação do pai (a sentença 32) não o obriga a dar sobremesa à filha mesmo quando ela come toda a verdura. Mais adiante, com mais recursos, voltaremos a este ponto e esclareceremos a questão.

Estas duas sentenças são claramente equivalentes. Para simbolizá-las usaremos a seguinte chave:

S: Você sairá do sol.
I: Você terá uma insolação.

Ambas as sentenças significam que, se você não sair do sol, então você terá uma insolação. Com isso em mente, podemos simbolizá-las como:

$$(\neg S \rightarrow I)$$

Da mesma forma, as duas frases significam também que, se você não tem uma insolação, então deve ter saído do sol. Com isso em mente, podemos simbolizá-las como:

$$(\neg I \rightarrow S)$$

Além disso, ambas as sentenças também significam que você sairá do sol ou terá uma insolação. Então, também podemos simbolizá-las como:

$$(S \vee I)$$

Todas essas três simbolizações estão corretas. De fato, no Capítulo 12, veremos que todas essas três simbolizações são sentenças equivalentes na LVF. Vamos então, por economia, usar a terceira simbolização, que utiliza menos símbolos, na seguinte regra:

> Se uma sentença puder ser parafraseada como 'A não ser que A, B' ou por 'A menos que A, B', então ela pode ser simbolizada como '$(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$'.

Há, porém, uma pequena complicação também neste caso. 'A menos que' pode ser simbolizado tanto como condicional quanto como disjunção. Mas, como vimos acima, as pessoas às vezes usam a forma do condicional quando pretendem dizer o bicondicional. Além disso, vimos também que há dois tipos de disjunção, a exclusiva e a inclusiva. Diante disso, não é surpresa nenhuma o fato de que os falantes comuns do português muitas vezes utilizam as expressões ‘a menos que’ e ‘a não ser que’ de um modo ‘relaxado’, pretendendo fazer afirmações bicondicionais ou disjunções exclusivas. Suponha que uma pessoa diga: ‘Vou correr a menos que chova’. Ela provavelmente está querendo dizer algo como: “Vou correr se e somente se não chover” ou “Ou vou correr ou vai chover, mas não as duas coisas”. O primeiro caso é um bicondicional e o segundo uma disjunção exclusiva. Então, aqui também a moral da história é que temos que estar cientes destes usos ‘relaxados’ e aplicar o princípio da caridade em nossas simbolizações para que elas reflitam o melhor possível a intenção dos falantes, ainda que para isso tenhamos que ‘corrigir’ algumas de suas formulações.

Exercícios

A. Usando a chave a seguir, simbolize cada uma das 6 sentenças abaixo na LVF.

H: Essas criaturas são homens de terno.
C: Essas criaturas são chimpanzés.
G: Essas criaturas são gorilas.

1. Essas criaturas não são homens de terno.
2. Essas criaturas são homens de terno, ou não.
3. Essas criaturas são gorilas ou chimpanzés.
4. Essas criaturas não são gorilas nem chimpanzés.
5. Se essas criaturas são chimpanzés, então não são gorilas nem homens de terno.
6. A menos que essas criaturas sejam homens de terno, elas são chimpanzés ou gorilas.

B. Usando a chave a seguir, simbolize cada uma das 12 sentenças abaixo na LVF.

A: O Sr. Abel foi assassinado.

B: Foi a babá.
C: Foi o cozinheiro.
D: A Duquesa está mentindo.
E: A Sra. Elsa foi assassinada.
F: A arma do crime foi uma frigideira.

1. O Sr. Abel ou a Sra. Elsa foram assassinados.
2. Se o Sr. Abel foi assassinado, então foi o cozinheiro.
3. Se a Sra. Elsa foi assassinada, então não foi o cozinheiro.
4. Foi a babá ou a Duquesa está mentindo.
5. Foi o cozinheiro apenas se a Duquesa estiver mentindo.
6. Se a arma do crime foi uma frigideira, então o culpado deve ter sido o cozinheiro.
7. Se a arma do crime não foi uma frigideira, então o culpado foi o cozinheiro ou a babá.
8. O Sr. Abel foi assassinado se e somente se a Sra. Elsa não foi assassinada.
9. A Duquesa está mentindo, a menos que a vítima do assassinato tenha sido a Sra. Elsa.
10. Se o Sr. Abel foi assassinado, ele foi morto com uma frigideira.
11. Uma vez que foi o cozinheiro, não foi a babá.
12. É claro que a Duquesa está mentindo!

C. Usando a chave a seguir, simbolize cada uma das 12 sentenças abaixo na LVF.

E_1: Aline é eletricista.
E_2: Helena é eletricista.
B_1: Aline é bombeira.
B_2: Helena é bombeira.
S_1: Aline está satisfeita com sua carreira.
S_2: Helena está satisfeita com sua carreira.

1. Aline e Helena são eletricistas.
2. Se Aline é bombeira, então ela está satisfeita com sua carreira.

3. Aline é bombeira, a menos que seja eletricista.
4. Helena é uma eletricista insatisfeita.
5. Nem Aline nem Helena são eletricistas.
6. Tanto Aline quanto Helena são eletricistas, mas nenhuma delas está satisfeita com isso.
7. Helena está satisfeita apenas se ela for bombeira.
8. Se Aline não é eletricista, então Helena também não, mas se a primeira for, então a outra também é.
9. Aline está satisfeita com sua carreira, se e somente se Helena não estiver satisfeito com a dela.
10. Se Helena é eletricista e bombeira, então ela deve estar satisfeita com seu trabalho.
11. Não é possível que Helena seja ambos eletricista e bombeira.
12. Helena e Aline são ambas bombeiras se e somente se nenhuma delas é uma eletricista.

D. Usando a chave a seguir, simbolize cada uma das 9 sentenças abaixo na LVF.

J_1: John Coltrane tocava sax tenor.
J_2: John Coltrane tocava sax soprano.
J_3: John Coltrane tocava tuba.
M_1: Miles Davis tocava trompete.
M_2: Miles Davis tocava tuba.

1. John Coltrane tocava sax tenor e soprano.
2. Nem Miles Davis nem John Coltrane tocavam tuba.
3. John Coltrane não tocava ambos, sax tenor e tuba.
4. John Coltrane não tocava sax tenor, a menos que ele também tocasse sax soprano.
5. John Coltrane não tocava tuba, mas Miles Davis tocava.
6. Miles Davis tocava trompete apenas se ele também tocava tuba.
7. Se Miles Davis tocava trompete, John Coltrane tocava pelo menos um destes três instrumentos: sax tenor, sax soprano ou tuba.

8. Se John Coltrane tocava tuba, então Miles Davis não tocava trompete nem tuba.
9. Miles Davis e John Coltrane tocavam tuba se e somente se Coltrane não tocava sax tenor e Miles Davis não tocava trompete.

E. Proponha uma chave de simbolização e utilize-a para simbolizar cada uma das 6 sentenças abaixo na LVF.

1. Amália e Betina são espiãs.
2. Se Amália ou Betina são espiãs, então o código foi quebrado.
3. Se nem Amália nem Betina são espiãs, então o código permanece desconhecido.
4. A embaixada peruana ficará em polvorosa, a menos que alguém tenha quebrado o código.
5. O código foi quebrado ou não, mas a embaixada peruana ficará em polvorosa, independentemente.
6. Amália ou Betina é uma espiã, mas não ambas.

F. Proponha uma chave de simbolização e utilize-a para simbolizar cada uma das 5 sentenças abaixo na LVF.

1. Se não houver álcool gel na dispensa, então Celso sairá de casa na quarentena.
2. Celso sairá de casa na quarentena, a menos que haja álcool gel na dispensa.
3. Celso sairá de casa na quarentena ou não, mas há álcool gel na dispensa, independentemente.
4. Úrsula permanecerá calma se e somente se houver álcool gel na dispensa.
5. Se Celso sair de casa na quarentena, então Úrsula não permanecerá calma.

G. Para cada um dos 3 argumentos abaixo, identifique sua conclusão e suas premissas, proponha uma chave de simbolização e use-a para simbolizar todas as sentenças do argumento na LVF.

1. Se Danina toca piano de manhã, então Richard acorda irritadiço. Danina toca piano de manhã, a menos que esteja distraída. Portanto, se Richard não acorda irritadiço, Danina deve estar distraída.
2. Vai chover ou ventar forte na terça-feira. Se chover, Natália ficará triste. Se ventar forte, Natália ficará descabelada. Portanto, Natália ficará triste ou descabelada na terça-feira.
3. Se Zé se lembrou de ir fazer compras, então sua dispensa está cheia, mas sua casa não está arrumada. Se ele se esqueceu, então sua casa está arrumada, mas sua dispensa não está cheia. Portanto, a dispensa de Zé está cheia ou sua casa está arrumada, mas não ambos.

H. Para cada um dos três argumentos abaixo, identifique sua conclusão e suas premissas, proponha uma chave de simbolização e utilize-a para simbolizar o argumento da melhor maneira possível na LVF. Os trechos em *itálico* apenas ajudam a fornecer um contexto para a melhor interpretação do argumento e não precisam ser simbolizados.

1. Vai chover em breve. Eu sei porque minha perna está doendo, e minha perna dói se vai chover.
2. *O Homem-Aranha está tentando entender o plano malígno do Dr. Octopus.* Se o Dr. Octopus conseguir obter urânio, ele chantageará a cidade. Estou certo disso, porque se o Dr. Octopus conseguir obter urânio, ele poderá fazer uma bomba suja e, se ele puder fazer uma bomba suja, chantageará a cidade.
3. *Um analista ocidental está tentando prever as políticas do governo chinês.* Se o governo chinês não conseguir resolver a escassez de água em Pequim, ele terá que transferir sua capital. O governo chinês não quer transferir a capital. Portanto, ele tem que resolver a escassez de água. Mas a única maneira de resolver a escassez de água é desviar quase toda a água do rio Yangzi para o norte. Portanto, o governo chinês executará o projeto para desviar a água do sul para o norte.

I. Nós simbolizamos o *ou exclusivo* usando os conectivos '$\vee$', '$\wedge$' e '$\neg$'. Como você poderia simbolizar o *ou exclusivo* usando apenas dois conectivos? Existe alguma maneira de simbolizar o *ou exclusivo* usando apenas um conectivo?

CAPÍTULO 6

Sentenças da LVF

A expressão "as maçãs são vermelhas ou as jaboticabas são pretas" é uma sentença em português e a expressão "$(M \vee J)$" é uma sentença da LVF. Embora não tenhamos em geral dificuldades em identificar uma expressão como sendo ou não uma sentença do português, não há uma definição formal que esclareça completamente o que conta como sentença na língua portuguesa. Neste capítulo, no entanto, ofereceremos uma *definição* completa do que conta como uma sentença de LVF. E esse é um dos motivos pelos quais dizemos que uma linguagem formal como a LVF é mais precisa do que uma linguagem natural como o português.

6.1 Expressões

Vimos que há três tipos diferentes de símbolos na LVF:

Sentenças atômicas:	$A, B, C, \ldots, Z$
com subíndices, se necessário:	$A_1, B_1, Z_1, A_2, A_{25}, J_{375}, \ldots$
Conectivos:	$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
Parênteses:	(,)

Definimos uma EXPRESSAO DA LVF como qualquer sequência de símbolos da LVF. Pegue uma quantidade qualquer de símbolos da LVF e escreva-os, em qualquer ordem, e você terá uma expressão da LVF.

6.2 Sentenças

Obviamente, muitas expressões de LVF serão totalmente sem sentido. Nós precisamos saber quando uma expressão de LVF constitui uma *sentença.*

Letras sentenciais individuais tais como 'A' e 'G_{13}' devem, claramente, contar como sentenças. (Nós as chamaremos de sentenças *atomicas.*) Podemos formar sentenças adicionais a partir das sentenças atômicas usando os vários conectivos. Usando negação, podemos obter '$\neg A$' e '$\neg G_{13}$'. Usando conjunção, podemos obter '$(A \wedge G_{13})$', '$(G_{13} \wedge A)$', '$(A \wedge A)$' e '$(G_{13} \wedge G_{13})$'. Também poderíamos aplicar negação repetidamente para obter sentenças como '$\neg\neg A$', ou aplicar a negação junto com a conjunção para obter sentenças como '$\neg(A \wedge G_{13})$' e '$\neg(G_{13} \wedge \neg G_{13})$'. As combinações possíveis são infinitas, mesmo começando com apenas essas duas letras sentenciais, e há infinitas letras sentenciais. Portanto, não faz sentido tentar listar todas as sentenças uma por uma.

Em vez disso, descreveremos o processo pelo qual as sentenças podem ser *construídas.* Considere a negação: dada qualquer sentença $\mathcal{A}$ da LVF, $\neg\mathcal{A}$ é uma sentença da LVF. (Por que as fontes engraçadas? Trataremos disso na Seção 8.3.)

Podemos fazer o mesmo para cada um dos outros conectivos da LVF. Por exemplo, se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são sentenças da LVF, então $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$ é uma sentença da LVF. Fornecendo cláusulas como essa para todos os conectivos, chegamos à seguinte definição formal para uma SENTENCA DA LVF:

1. Toda letra sentencial é uma sentença.
2. Se $\mathcal{A}$ é uma sentença, então $\neg\mathcal{A}$ é uma sentença.
3. Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são sentenças, então $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$ é uma sentença.
4. Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são sentenças, então $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ é uma sentença.
5. Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são sentenças, então $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ é uma sentença.
6. Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são sentenças, então $(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})$ é uma sentença.
7. Nada além do estabelecido por essas cláusulas é uma sentença.

Definições como essa são chamadas *indutivas.* As definições indutivas começam com alguns elementos básicos especificáveis e, em seguida, apresentam regras que regulam a geração de novos elementos, combinando os já estabelecidos. Na definição de sentença da LVF acima, a cláusula básica é a 1; as cláusulas 2 a 6 correspondem às regras para a geração de novos elementos a partir dos já estabelecidos, e a cláusula 7 é o fechamento, que garante que nada além do que for assim gerado será uma sentença. Para dar a você uma ideia melhor do que é uma definição indutiva, vou definir indutivamente o que é ser *um ancestral meu.* A cláusula básica pode ser assim especificada:

- Meus pais são meus ancestrais.

a regra para geração de novos elementos e o fechamento são dados pelas seguintes cláusulas:

- Se x is meu acestral, então os pais de x são meus ancestrais.
- Nada além do estabelecido por estas cláusulas é meu ancestral.

Usando essa definição, podemos facilmente verificar se alguém é ou não meu ancestral: basta verificar se a pessoa é um dos pais de um dos pais de...um dos meus pais. O mesmo se aplica à nossa definição indutiva de sentenças de LVF. A definição indutiva permite não apenas construir sentenças complexas a partir de partes mais simples, mas permite também verificar se uma expressão qualquer é uma sentença, decompondo-a em partes mais simples. Se ao final chegarmos em letras sentenciais, então a expressão inicial era uma sentença.

Vejamos alguns exemplos.

Suponha que queiramos saber se

$$\neg\neg\neg D$$

é ou não uma sentença da LVF. Olhando para a segunda cláusula da definição, sabemos que '$\neg\neg\neg D$' será uma sentença *se* '$\neg\neg D$' for uma sentença. Então, precisamos agora perguntar se '$\neg\neg D$' é ou não uma sentença. Olhando novamente para a segunda cláusula da definição, sabemos que '$\neg\neg D$' será uma sentença *se* '$\neg D$' for. E, da mesma forma, '$\neg D$' será uma sentença *se* 'D' for uma sentença. Bem, 'D' é uma letra sentencial da LVF, então, sabemos que 'D' é uma sentença por causa da primeira cláusula da definição. Portanto, quando partimos de uma sentença composta qualquer, tal como '$\neg\neg\neg D$', e aplicamos a definição repetidamente, nós eventualmente chegaremos às letras sentenciais das quais a sentença é constituída.

Vejamos agora o seguinte exemplo:

$$\neg(P \land \neg(\neg Q \lor R))$$

A segunda cláusula da definição nos diz que esta é uma sentença se '$(P \land \neg(\neg Q \lor R))$' for, e a cláusula 3 nos diz que essa é uma sentença se *ambas* 'P' *e* '$\neg(\neg Q \lor R)$' forem sentenças. A primeira é uma letra sentencial e a segunda é uma sentença se '$(\neg Q \lor R)$' for uma sentença. E ela é. Pois de acordo com a quarta cláusula da definição '$(\neg Q \lor R)$' é uma sentença se "$\neg Q$" e 'R' são sentenças. E ambas são!

Cada sentença é harmoniosamente construída a partir de letras sentenciais. Quando estamos diante de uma *sentença* diferente de uma letra sentencial, vemos que sempre há um conectivo que é o *último* que foi introduzido na construção dessa sentença. Chamamos este conectivo de o CONECTIVO PRINCIPAL da sentença. No caso de '$\neg\neg\neg D$', por exemplo, o conectivo principal é o primeiro '$\neg$' (o mais à esquerda). No caso de '$(P \wedge \neg(\neg Q \vee R))$', o conectivo principal é o '$\wedge$'. Já no caso de '$((\neg E \vee F) \to \neg\neg G)$', o conectivo principal é '$\to$'.

O conectivo principal é sempre o envolvido por menos parênteses, ou seja, o mais externo com relação aos parênteses. Em geral conseguimos identificá-lo sem muita dificuldade apenas olhando para a sentença. Mas se você tiver dúvidas sobre qual é o conectivo principal de alguma sentença, o seguinte método pode ser usado:

- Se o primeiro símbolo da sentença for '$\neg$', ele é o conectivo principal.
- Caso contrário, percorra todos os símbolos da sentença da esquerda para a direita e faça a seguinte contagem: sempre que encontrar um símbolo de 'abre parênteses', ou seja, '(', adicione 1 à sua contagem. Sempre que encontrar um símbolo de 'fecha parênteses', ou seja ')', subtraia 1 de sua contagem. O conectivo principal de sua sentença será o primeiro conectivo diferente de '$\neg$' que ocorre na sentença no ponto em que a contagem for igual a 1.

(**Nota**: antes de aplicar este método, assegure-se de que a sentença esteja escrita com todos os seus parênteses. Não aplique este método em sentenças nas quais parentes foram omitidos ou substituídos através das convenções que veremos na próxima Seção!)

Considere, por exemplo, a sentença

$$((A \vee B) \wedge C))$$

Ela não começa com uma negação, então é preciso fazer a contagem dos parênteses para aplicar o método. Se marcarmos cada símbolo de parênteses com o número da contagem obtemos:

$$(^1(^2 A \vee B)^1 \wedge C)^0$$

Nesta sentença temos 2 conectivos. A disjunção '$\vee$' ocorre em um ponto no qual a contagem está em 2, então não é o conectivo principal. A conjunção '$\wedge$', por sua vez, é o primeiro concectivo que ocorre à direita do ponto em que a contagem está em 1. Então, de acordo com nosso método, '$\wedge$' é o conectivo principal. Já em

$$(A \vee (B \wedge C))$$

a marcação da contagem nos dá

$$(^1 A \vee (^2 B \wedge C)^1)^0$$

Aqui, o primeiro conectivo à direita do ponto em que a contagem está em 1 é '$\vee$' que será, por isso, o conectivo principal.

Isso pode à primeira vista parecer confuso, mas não é. Se uma sentença começa com uma negação, '$\neg$', esta negação inicial é o conectivo principal, porque ela é o último conectivo introduzido na construção da sentença (pela cláusula 2 da tabela acima). Quando a sentença não começa com uma negação, precisamos encontrar este último conectivo introduzido na construção da sentença. E é isso que a contagem faz. Os números nos parênteses apenas indicam explicitamente quão internos ou externos esses parênteses são. O conectivo que ocorre no ponto em que a contagem está em 1 será o mais externo, o envolvido por apenas um par de parênteses. Um conectivo que ocorra no ponto em que a contatem está em 3, por exemplo, é um conectivo envolvido por 3 pares de parênteses.

A estrutura indutiva das sentenças da LVF será importante quando considerarmos as circunstâncias sob as quais uma determinada sentença seria verdadeira ou falsa. Por exemplo, a sentença '$\neg\neg\neg D$' é verdadeira se e somente se a sentença '$\neg\neg D$' for falsa, e assim por diante, através da estrutura da sentença, até chegarmos aos componentes atômicos. Nós estudaremos detalhadamente este ponto mais adiante, nos capítulos da Parte III deste livro.

A estrutura indutiva das sentenças da LVF também nos permite dar uma definição formal da noção de *escopo* de uma negação (mencionado na Seção 5.2). O escopo de um '$\neg$' é a subsentença da qual '$\neg$' é o conectivo principal. Considere, por exemplo, a sentença:

$$(P \wedge (\neg(R \wedge B) \leftrightarrow Q))$$

que foi construída fazendo-se a conjunção de 'P' com '$(\neg(R \wedge B) \leftrightarrow Q)$'. Esta última sentença, por sua vez, foi construída colocando um bicondicional entre '$\neg(R \wedge B)$' e 'Q'. A primeira dessas duas sentenças—uma subsentença da sentença original—tem o '$\neg$' como seu conectivo principal. Portanto, o escopo desta negação é apenas '$\neg(R \wedge B)$'. De forma geral:

> O ESCOPO de um conectivo (em uma sentença) é a subsentença da qual esse conectivo é o conectivo principal.

6.3 Convenções sobre o uso de parênteses

A rigor, os parênteses em '$(Q \wedge R)$' são uma parte indispensável da sentença. Isto é assim porque podemos querer usar '$(Q \wedge R)$' como subsentença de uma sentença mais complexa. Por exemplo, podemos querer negar '$(Q \wedge R)$', obtendo '$\neg(Q \wedge R)$'. Se a sentença '$Q \wedge R$' estivesse assim, sem parênteses, e colocássemos uma negação na sua frente, obteríamos '$\neg Q \wedge R$'. E é mais natural ler isso como significando a mesma coisa que '$(\neg Q \wedge R)$'. Mas já vimos na Seção 5.2, que isso é muito diferente de '$\neg(Q \wedge R)$'.

Estritamente falando, então, '$Q \wedge R$' *não* é uma sentença. É apenas uma sequência de símbolos da LVF, ou seja, uma *expressão.*

No entanto, em muitas situações em que a LVF é utilizada, as pessoas são menos rigorosas sobre o uso dos parênteses. Existem algumas convenções que regulam a omissão e a substituição de alguns destes parênteses, que nós precisamos conhecer.

A mais comum delas é a omissão dos parênteses *mais externos* de uma sentença. Assim, muitas vezes nos permitimos escrever '$Q \wedge R$' em vez de '$(Q \wedge R)$'. No entanto, devemos nos lembrar de colocar de volta os parênteses quando quisermos utilizar esta sentença como parte de uma sentença mais complexa, tal como '$A \rightarrow (Q \wedge R)$'.

Segundo, pode ser um pouco difícil olhar para sentenças longas com muitos pares de parênteses aninhados. Para tornar as coisas um pouco mais fáceis para os olhos, nos permitiremos usar colchetes, '[', ']' e chaves, '{', '}' juntamente com os parênteses, '(' e ')'. Geralmente os parênteses mais internos são os arredondados, intermediariamente usamos colchetes, e as chaves reservamos para os mais externos. Entretanto, não há regras rígidas. A idéia é apenas facilitar a leitura. Neste sentido, não há qualquer diferença lógica entre a sentença

$$((((H \rightarrow I) \vee Z) \wedge (J \vee K)) \leftrightarrow (A \vee B))$$

e a sentença

$$\{[(H \rightarrow I) \vee Z] \wedge (J \vee K)\} \leftrightarrow (A \vee B)$$

A única diferença é que a segunda é um pouco mais fácil de ser lida.

Exercícios

A. Para cada uma das 8 expressões abaixo, decida (a) se ela é uma sentença da LVF, estritamente falando; (b) se é uma sentença da LVF quando permitimos as convenções sobre o uso de parênteses; (c) se ela for uma sentença apontada em (a) ou em (b), indique seu conectivo principal.

1. (A)
2. $J_{374} \vee \neg J_{374}$
3. $\neg\neg\neg\neg F$
4. $\neg \wedge S$
5. $(G \wedge \neg G)$
6. $(A \rightarrow (A \wedge \neg F)) \vee (D \leftrightarrow E)$
7. $[(Z \leftrightarrow S) \rightarrow W] \wedge [J \vee X]$
8. $(F \leftrightarrow \neg D \rightarrow J) \vee (C \wedge D)$

B. Existem sentenças da LVF que não contêm letras sentenciais? Explique sua resposta.
C. Qual é o escopo de cada conectivo na sentença abaixo?

$$\big[(H \rightarrow I) \vee (I \rightarrow H)\big] \wedge (J \vee K)$$

CAPÍTULO 7

Ambiguidade

Em português as sentenças podem ser AMBIGUAS, ou seja, podem ter mais de um significado. Existem muitas fontes de ambiguidade. Uma delas é a *ambiguidade lexical:* uma sentença pode conter palavras que têm mais de um significado. Por exemplo, 'banco' pode significar um móvel que serve como assento ou uma instituição financeira. Assim, posso dizer que 'estava no banco aqui perto', apontando para onde estava sentado ou para a instituição financeira no outro lado da rua. Dependendo da situação, um significado diferente de 'banco' é pretendido e, portanto, a sentença expressa diferentes significados.

Um tipo diferente é a *ambiguidade estrutural.* Isso ocorre quando uma sentença pode ser interpretada de maneiras diferentes e, dependendo da interpretação, um significado diferente é selecionado. Um exemplo famoso devido a Noam Chomsky é o seguinte:

> *Flying planes can be dangerous.*

Há uma leitura em que 'flying' (voando) é usado como um adjetivo que modifica 'planes' (aviões), resultando na afirmação de que aviões voando (*flying planes*) podem ser perigosos (*can be dangerous*). Em outra leitura, 'flying' funciona como o verbo pilotar, resultando na afirmação de que pilotar aviões (*flying planes*) pode ser perigoso (*can be dangerous*). No primeiro caso, você pode usar a frase para alertar alguém que está prestes a lançar um balão de ar quente. No segundo, para aconselhar alguém a não se tornar um piloto.

Quando a frase é pronunciada, geralmente apenas um significado é pretendido. É o contexto que determina qual dos significados possíveis de um enunciado deve ser usado, ou, às vezes, a própria entonação da fala (que partes da frase são enfatizadas, por exemplo). Frequentemente, é muito mais provável que uma determinada interpretação seja pretendida e, nesses casos, é até difícil perceber o sentido não intencional. Muitas vezes essa é a razão pela qual uma piada funciona, como neste exemplo de Groucho Marx:

> Certa manhã, atirei num elefante de pijama.
> Como ele vestiu meu pijama, eu não sei.

A ambiguidade está relacionada à vagueza, mas elas não são a mesma coisa. Um adjetivo, como 'rico' ou 'alto', é VAGO quando nem sempre é possível determinar se eles se aplicam ou não. Por exemplo, uma pessoa com 1,9m de altura é claramente alta, mas um prédio desse tamanho é minúsculo. Aqui, o contexto tem um papel a desempenhar na determinação de quais são os casos claros de aplicação e de não-aplicação do adjetivo ('alto para uma pessoa', 'alto para um jogador de basquete', 'alto para um edifício'). Mesmo quando o contexto é claro, no entanto, ainda haverá casos que se enquadram em uma faixa intermediária.

Em LVF, geralmente buscamos evitar ambiguidades. Tentaremos fazer com que nossas chaves de simbolização não usem palavras ambíguas ou que eliminem a ambiguidade quando a palavra usada tiver significados diferentes. Então, por exemplo, a chave de simbolização precisará de duas letras sentenciais diferentes para 'Ivo está trabalhando no banco (instituição financeira)' e 'Ivo está trabalhando no banco (de dados)'. A imprecisão é mais difícil de evitar. Uma vez que estipulamos que cada caso (e posteriormente, cada valoração) deve tornar cada sentença básica (ou letra sentencial) verdadeira ou falsa, sem meio-termo, não podemos acomodar casos limítrofes em LVF.

Uma característica importante das sentenças em LVF é que elas *não podem* ser estruturalmente ambíguas. Cada sentença em LVF pode ser lida de uma, e apenas uma, maneira. Essa característica da LVF é um ponto forte. Se uma frase em português for ambígua, a LVF pode nos ajudar a esclarecer quais são os diferentes significados. Embora sejamos bons em lidar com a ambiguidade na conversa do dia-a-dia, evitá-la pode às vezes ser extremamente importante. Nesse caso, a lógica pode ser aplicada de maneira útil: ajuda o filósofo a expressar seus pensamentos com clareza, os matemáticos a expor seus teoremas rigorosamente e os engenheiros de software a especificar sem ambiguidade as condições de laços (*loops*), as consultas a bancos de dados ou critérios de verificação.

Afirmar coisas sem ambiguidade também é de importância crucial na legislação. Nela, a ambiguidade pode, sem exagero, ser uma questão de vida ou morte. Aqui está um exemplo conhecido em que uma sentença de morte dependia da interpretação de uma ambiguidade na lei. Roger Casement (1864–1916) foi um diplomata britânico famoso por divulgar as violações dos direitos humanos no Congo e no Peru (motivo pelo qual foi nomeado cavaleiro em 1911). Ele também era um nacionalista irlandês. Entre 1914–1916, Casement viajou secretamente para a Alemanha, à época em guerra com a Grã-Bretanha, e tentou recrutar prisioneiros de guerra irlandeses para lutar contra a Grã-Bretanha e pela independência irlandesa. Ao retornar à Irlanda, ele foi capturado pelos britânicos e julgado por alta traição.

A lei sob a qual Casement foi julgado foi o *Ato de Traição de 1351*. Esse ato especifica o que conta como traição e, portanto, a acusação teve de estabelecer no julgamento que as ações de Casement atendiam aos critérios estabelecidos nele. A passagem relevante estipulava que alguém é culpado de traição:

> se um homem associa-se a inimigos do rei em seu reino, dando a eles ajuda e conforto no reino, ou em outro lugar.

A defesa de Casement girou em torno da última vírgula da sentença, que não está presente no texto original em francês da lei de 1351. Não foi questionada a 'associação aos inimigos do rei', mas a dúvida era se a associação aos inimigos do rei constituía traição apenas quando praticada no reino, ou também quando praticada no exterior. A defesa argumentou que a lei era ambígua. A ambiguidade alegada dependia de se 'ou em outro lugar' referia-se apenas a 'dar ajuda e conforto aos inimigos do rei' (a leitura natural sem a vírgula), ou a ambos 'associar-se aos inimigos do rei' e 'dar ajuda e conforto aos os inimigos do Rei' (a leitura natural com a vírgula). Embora a primeira interpretação possa parecer improvável, o argumento a seu favor acabou não deixando de ser convincente. Apesar disso, o tribunal decidiu que a passagem deveria ser lida com a vírgula, de modo que as trapalhadas de Casement na Alemanha foram consideradas traição e ele foi condenado à morte. O próprio Casement escreveu que foi 'enforcado por uma vírgula'.

Podemos usar LVF para simbolizar ambas as leituras da passagem e, assim, fornecer uma desambiguação. Primeiro, precisamos de uma chave de simbolização:

A: Casement associou-se aos inimigos do Rei no reino.
G: Casement deu ajuda e conforto aos inimigos do Rei no reino.
B: Casement associou-se aos inimigos do Rei no exterior.
H: Casement deu ajuda e conforto aos inimigos do Rei no exterior.

A interpretação de acordo com a qual o comportamento de Casement não é traição é esta:

$$A \vee (G \vee H)$$

Já a interpretação que o levou a ser executado pode ser simbolizada por:

$$(A \vee B) \vee (G \vee H)$$

Lembre-se de que no caso de Casement com que estamos lidando ele associou-se aos inimigos do Rei no exterior (B é verdade), mas não no reino, e ele não deu ajuda ou conforto aos inimigos do Rei dentro ou fora do reino (A, G e H são falsos).

Uma fonte comum de ambiguidade estrutural em português surge da falta de parênteses. Por exemplo, se eu disser 'Gosto de filmes que não sejam longos e enfadonhos', você provavelmente pensará que o que eu não gosto são filmes longos e enfadonhos. Uma interpretação menos provável, mas possível, é que eu gosto de filmes que são (a) não longos e (b) enfadonhos. A primeira leitura é mais provável porque, afinal, quem gosta de filmes chatos? Mas e quanto a 'gosto de pratos que não são doces e saborosos'?«obs» Aqui, a interpretação mais provável é que gosto de pratos saborosos (claro, eu poderia ter dito isso melhor, por exemplo, 'Gosto de pratos que não são doces, mas saborosos'). Ambiguidades semelhantes resultam da interação de 'e' com 'ou'. Por exemplo, suponha que eu lhe peça para me enviar a foto de um animal pequeno e perigoso ou furtivo. Um leopardo contaria? É furtivo, mas não pequeno. Portanto, depende se procuro pequenos animais perigosos ou furtivos (o leopardo não conta), ou se procuro um animal pequeno e perigoso ou um que seja furtivo (de qualquer tamanho).

Esses tipos de ambiguidades são chamados de *ambiguidades de escopo*, pois dependem de um conectivo estar ou não no escopo de outro. Por exemplo, a frase '*Vingadores: Ultimato* é um filme que não é longo e chato'«obs» é ambígua entre:

1. *Vingadores: Ultimato* não é ao mesmo tempo: longo e chato.
2. *Vingadores: Ultimato* é ao mesmo tempo: não longo e chato«obs».

A sentença 2 é certamente falsa, já que *Vingadores: Ultimato* tem mais de três horas de duração. Julgar que 1 é verdadeira, então, depende de decidir se o filme é chato ou não. Podemos usar a chave de simbolização:

C: *Vingadores: Ultimato* é chato.

L: *Vingadores: Ultimato* é longo.

A sentença 1 agora pode ser simbolizada como '$\neg(L \wedge C)$', enquanto 2 seria '$\neg L \wedge C$'. No primeiro caso, '$\wedge$' está no escopo de '$\neg$', no segundo caso '$\neg$' está no escopo de '$\wedge$'.

A sentença 'Tai Lung é pequeno e perigoso ou furtivo' é ambígua entre:

3. Tai Lung é pequeno e perigoso ou é furtivo.
4. Tai Lung é pequeno e é ou perigoso ou furtivo«obs».

Podemos usar a seguinte chave de simbolização:

R: Tai Lung é perigoso.
Q: Tai Lung é pequeno.
F: Tai Lung é furtivo.

A simbolização da sentença 3 é '$(Q \wedge R) \vee F$' e a da sentença 4 é '$Q \wedge (R \vee F)$'. Na primeira, $\wedge$está no escopo de $\vee$, e na segunda $\vee$está no escopo de $\wedge$.

Exercícios

A. As seguintes sentenças são ambíguas. Dê chaves de simbolização para cada uma e simbolize as diferentes leituras.

1. Haskell é observador de pássaros e gosta de observar grous.
2. O zoológico tem leões ou tigres e ursos.
3. A flor não é vermelha ou perfumada.

CAPÍTULO 8

Uso e menção

Temos, nesta Parte do livro, falado bastante *sobre* sentenças. Devemos, por isso, fazer uma pausa para explicar um ponto importante e bastante geral.

8.1 Convenções sobre uso de aspas

Considere as duas seguintes sentenças:

- Fátima Bezerra é a terceira mulher a governar o Rio Grande do Norte.
- A expressão 'Fátima Bezerra' é composta por duas letras maiúsculas e onze letras minúsculas.

Quando queremos falar sobre a governadora, nós *usamos* o nome dela. Quando queremos falar sobre o nome da governadora, nós *mencionamos* seu nome, o que é feito colocando-o entre aspas simples.

Há um ponto mais geral aqui. Quando queremos falar sobre coisas no mundo, apenas *usamos* as palavras. Mas às vezes queremos falar sobre as próprias palavras, e não sobre as coisas às quais elas se referem. Nestes casos nós não estamos usando as palavras, mas *mencionando*-as. Para não sermos ambíguos e para diminuir o risco de sermos mal entendidos, precisamos indicar (marcar de alguma forma) estes casos onde não estamos usando, mas mencionando as palavras. E para fazer isso, é necessária alguma convenção. A convenção largamente adotada entre filósofos e lógicos é a de que uma expressão entre *aspas simples* não está sendo usada, mas sim mencionada. Então esta frase:

- ‘Fátima Bezerra’ é a terceira mulher a governar o Rio Grande do Norte.

diz que uma certa *expressão* é a terceira mulher a governar o Rio Grande do Norte. E isso é claramente falso. A *pessoa* com este nome é a terceira mulher a governar o estado; não o próprio nome. Por outro lado, esta sentença:

- Fátima Bezerra é composta por duas letras maiúsculas e onze letras minúsculas.

também diz algo falso: Fátima Bezerra é uma mulher, feita de carne e osso, e não de letras. Um último exemplo:

- ‘‘Fátima Bezerra’’ é o nome de ‘Fátima Bezerra’.

No lado esquerdo da sentença temos, de acordo com nossa convenção, o nome de um nome. No lado direito, temos um nome. Bem, talvez esse tipo de sentença, com nomes de nomes, ocorra apenas nos livros de lógica, mas mesmo assim é uma sentença verdadeira.

Essas são apenas regras gerais para o uso de aspas simples, e você deve segui-las cuidadosamente, sempre! Para ficar claro, as aspas simples aqui não indicam o mesmo que as aspas duplas normalmente indicam em um romance: uma fala indireta, o discurso de um personagem. Não. As aspas simples, em nosso contexto aqui, indicam que você está deixando de falar sobre um objeto para falar sobre o nome desse objeto.

8.2 Linguagem objeto e metalinguagem

Essas convenções gerais sobre o uso de aspas são de particular importância para nós. Afinal, estamos descrevendo uma linguagem formal aqui, a LVF, e, portanto, muito frequentemente *mencionaremos* as expressões da LVF.

Quando falamos sobre uma linguagem, a linguagem *sobre a qual* estamos falando é chamada de LINGUAGEM OBJETO. E a linguagem *que usamos para falar sobre* a linguagem objeto é chamada de METALINGUAGEM.

A linguagem objeto que tem nos ocupado até aqui e também nas próximas Partes deste livro é a linguagem formal que estamos desenvolvendo: a LVF. Já a metalinguagem, a linguagem que estamos usando para falar da LVF, é o português. Bem, não exatamente o português de nossas conversas comuns, mas um *português aumentado*, que é suplementado por um vocabulário técnico adicional, que nos ajuda nesta tarefa.

Por exemplo, temos usado as letras maiúsculas como letras sentenciais da LVF:

$$A, B, C, Z, A_1, B_4, A_{25}, J_{375}, \ldots$$

Esta é uma lista de sentenças da linguagem objeto (LVF). As letras nesta lista não são sentenças do português. Portanto, não devemos dizer, por exemplo:

- D é uma letra sentencial da LVF.

Estamos, obviamente, tentando criar uma sentença em português que diga algo sobre a linguagem objeto (LVF), mas 'D' é uma sentença da LVF, e não parte do português. Portanto, a expressão acima é sem sentido. É como se tivéssemos dito algo como:

- Schnee ist weiß é uma sentença do alemão.

Mas o que de verdade estamos querendo dizer, neste caso, é:

- 'Schnee ist weiß' é uma sentença do alemão.

Da mesma forma, o que pretendíamos dizer acima era apenas:

- 'D' é uma letra sentencial da LVF.

O ponto geral é que, sempre que quisermos falar em português sobre alguma expressão específica da LVF, precisamos indicar que estamos *mencionando* a expressão, em vez de *usando*-a. Podemos empregar aspas simples ou adotar alguma convenção semelhante, tal como destacar a expressão em uma linha separada, centralizando-a horizontalmente na página. Como você já deve ter notado, neste livro estamos utilizando estas duas convenções. Então, quando, por exemplo, destacamos uma sentença, tal como

$$(A \land \neg A)$$

que está sem aspas, isolada na linha e centralizada, estamos mencionando-a, tanto quanto em '$(A \land \neg A)$', onde a sentença está entre aspas simples e acompanha o fluxo do texto. Estas duas maneiras de apresentar indicam que a sentença da LVF está sento mencionada, não usada. Estamos, nos dois casos, apenas nos referindo, através nossa metalinguagem, o português aumentado, a uma expressão da LVF.

8.3 Metavariáveis

Nós, no entanto, não queremos falar apenas sobre expressões *específicas* da LVF. Queremos também poder falar sobre *qualquer sentença arbitrária* da LVF. Nós, de fato, já fizemos isso na Seção 6.2, quando apresentamos a definição indutiva de sentença da LVF. Usamos as letras maiúsculas cursivas para fazer isso, a saber:

$$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \ldots$$

Diferentemente das letras sentenciais, essas letras não pertencem à LVF. Elas, na verdade, fazem parte da metalinguagem (o português aumentado) que usamos para falar sobre a as expressões da LVF. Neste caso, usamos as letras maiúsculas cursivas para nos referir genericamente a uma expressão *qualquer* da LVF. Por exemplo, a segunda cláusula da definição indutiva de sentença da LVF foi assim expressada:

2. Se $\mathcal{A}$ é uma sentença, então $\neg\mathcal{A}$ é uma sentença.

Nesta cláusula, '$\mathcal{A}$' se refere de modo genérico a uma expressão qualquer da LVF. Ela não é uma expressão específica da LVF, como 'A', mas uma váriável da metalinguagem (metavariável) que se refere genericamente a qualquer expressão da LVF, tal como

$$A, \quad B, \quad (A \to (Q \wedge R)), \quad \neg\neg(B_3 \to Z), \ \ldots$$

Se, no lugar da cláusula 2, tivéssemos usado a seguinte formulação:

- Se 'A' é uma sentença, então '$\neg A$' é uma sentença.

nós não poderíamos, com esta formulação, determinar se '$\neg B$' ou '$\neg A_7$' são sentenças, porque a cláusula seria específica e exclusiva para a letra sentencial A.

Fazendo uma analogia com a matemática, é como se as letras sentencias tais como 'A', 'D_3',... fossem os números, tais como 2, 17, ... e as metavariáveis tais como $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ... fossem as variáveis, tais como n, x, ... que podem assumir quaisquer valores entre os números. Para enfatizar:

> '$\mathcal{A}$' é um símbolo, que chamamos de METAVARIAVEL e que usamos para falar sobre qualquer expressão da LVF.
> 'A' é apenas uma letra sentencial específica da LVF. Nós incluímos as metavariáveis '$\mathcal{A}$', '$\mathcal{B}$', '$\mathcal{C}$',... ao português, para construir nossa metalinguagem, o *português aumentado*, que usamos para falar da LVF.

Mas este último exemplo suscita uma complicação adicional para nossas convenções sobre o uso das aspas. Nós não incluímos aspas na segunda cláusula de nossa definição indutiva. Deveríamos ter feito isso?

O problema é que a expressão no lado direito daquela cláusula não é uma sentença do português, nem do português aumentado com as metavariáveis, pois contém o símbolo '$\neg$'. Poderíamos, então, tentar reformular a cláusula como:

2′. Se $\mathcal{A}$ é uma sentença, então '$\neg\mathcal{A}$' é uma sentença.

Mas esta reformulação também não é boa: '$\neg\mathcal{A}$' não é uma sentença da LVF, pois '$\mathcal{A}$' é um símbolo da metalinguagem, do português aumentado, e não um símbolo da LVF.

O que realmente queremos dizer ali é algo como:

2″. Se $\mathcal{A}$ é uma sentença, então o resultado da concatenação do símbolo '$\neg$' com a sentença $\mathcal{A}$ é uma sentença.

Esta formulação é impecável, mas exageradamente eloquente e pouco econômica. Podemos, no entanto, evitar esta falta de economia criando nossas próprias convenções. Podemos, perfeitamente, estipular que uma expressão como '$\neg\mathcal{A}$' deva ser entendida como uma abreviação para a expressão:

> o resultado da concatenação do símbolo '$\neg$' com a sentença $\mathcal{A}$

e, da mesma forma, expressões como '$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$' e '$(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$' também são convencionalmente tomadas como abreviações para as expressões que afirmam explicitamente as concatenações que elas indicam.

8.4 Convenções para representação de argumentos

Um dos nossos principais objetivos para o uso da LVF é estudar argumentos. Este será o foco das Partes III e VI do livro. Em português, cada premissa de um argumento é geralmente expressa por uma sentença individual e a conclusão por outra sentença. Da mesma forma que podemos simbolizar sentenças do português na LVF, podemos também simbolizar argumentos em português usando a LVF. Assim, poderíamos, por exemplo, perguntar se o argumento cujas premissas são as sentenças da LVF 'A' e '$A \to C$' e cuja conclusão é 'C' é válido. No entanto, escrever tudo isso, sempre, é bem pouco econômico. Então, em vez disso, proporemos mais uma convenção para ampliar um pouco mais nossa metalinguagem:

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n \therefore \mathcal{C}$$

será uma abreviação para:

> o argumento com as premissas $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ e a conclusão $\mathcal{C}$

Para manter o texto mais limpo e evitar confusões desnecessárias, não exigiremos aspas nesta representação de argumentos. (Note que '$\therefore$' é um símbolo de nossa *metalinguagem*, o português aumentado, e não um novo símbolo de LVF.

PARTE III

Tabelas de verdade

CAPÍTULO 9

Tabelas de verdade características

Qualquer sentença da LVF é composta por letras sentenciais, possivelmente combinadas pelos conectivos sentenciais. O valor de verdade de uma sentença composta depende apenas do valor de verdade das letras sentenciais que a compõem. Para sabermos o valor de verdade de '$(D \wedge E)$', por exemplo, basta sabermos o valor de verdade de 'D' e 'E'; exatamente do mesmo modo que saber o valor numérico de '$x + y$' depende apenas de saber os valores numéricos de 'x' e 'y'.

No Capítulo 5 nós apresentamos os cinco conectivos da LVF: '$\neg$', '$\wedge$', '$\vee$', '$\rightarrow$', '$\leftrightarrow$'. O que precisamos fazer agora é explicar qual é o tipo de operação que cada um deles faz com os valores de verdade. Por conveniência, abreviaremos 'Verdadeiro' por 'V' e 'Falso' por 'F'. Mas, que fique bem claro, os dois valores de verdade que nos interessam são o Verdadeiro (a verdade) e o Falso (a falsidade). Os valores de verdade não são *letras*!

Negação. Para qualquer sentença $\mathcal{A}$: Se $\mathcal{A}$ for verdadeira, então $\neg\mathcal{A}$ é falsa e se $\mathcal{A}$ for falsa, então $\neg\mathcal{A}$ é verdadeira. Essa regra pode ser expressa na seguinte *tabela de verdade característica* para a negação:

$\mathcal{A}$	$\neg\mathcal{A}$
V	F
F	V

Conjunção. Para quaisquer sentenças $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, a sentença $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ é verdadeira se e somente se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ forem ambas verdadeiras. Podemos expressar esta regra na seguinte tabela da verdade característica para conjunção:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Observe que a conjunção é uma operação *simétrica*. Ou seja, o valor de verdade para $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ sempre é o mesmo que o valor de verdade para $\mathcal{B} \wedge \mathcal{A}$.

Disjunção. Lembre-se de que '$\vee$' sempre representa o ou inclusivo. Portanto, para quaisquer sentenças $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, a sentença $\mathcal{A}\vee\mathcal{B}$ é verdadeira se e somente se $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ forem verdadeiros. Podemos expressar isso na seguinte tabela da verdade característica para disjunção:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Como a conjunção, a disjunção também é simétrica. $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ sempre tem o mesmo valor de verdade que $\mathcal{B} \wedge \mathcal{A}$.

Condicional. Temos que admitir, sem meias palavras, que os condicionais são uma bagunça na LVF. Exatamente quão bagunçados os condicionais da LVF são, é uma questão *filosoficamente* controversa. Discutiremos algumas de suas sutilezas nas Seções 10.3 e 12.5. Por enquanto, vamos estipular o seguinte: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ será uma sentença falsa se e somente se $\mathcal{A}$ for verdadeira e $\mathcal{B}$ for falsa. Podemos expressar esta regra através da seguinte tabela de verdade característica para o condicional.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

O condicional, diferentemente da conjunção e disjunção, é um operador *assimétrico*. Você não pode trocar o antecedente pelo consequente sem alterar o significado da sentença, porque $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ tem uma tabela de verdade muito diferente de $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$.

Apesar de estranha, a estipulação dada pela tabela acima não é de todo arbitrária. Um modo de entendermos isso é pensarmos o seguinte: quem sustenta que 'Se A então B', ou seja '$(A \rightarrow B)$' é uma sentença verdadeira, está assumindo um único compromisso: o de que 'B' tem que ser verdadeira sempre que 'A' for verdadeira. Se, por acaso, 'A' for falsa, nenhum compromisso sobre a verdade ou falsidade de 'B' é assumido. Por exemplo, se a professora diz a uma de suas alunas que se ela tiver mais de dez faltas, então ela será reprovada, '$(D \rightarrow R)$', o único compromisso que a professora está assumindo é que mais de dez faltas reprova a aluna. Ao tomar esta sentença condicional como verdadeira, a professora não está dizendo nada sobre o que acontece à aluna caso ela não tenha mais do que dez faltas. Ou seja, se o antecedente do condicional 'D' for falso (a aluna não tem mais de dez faltas), a aluna tanto pode ser aprovada como reprovada, dependendo de seu desempenho na disciplina. E nem a aprovação nem a reprovação da aluna falsificam a afirmação condicional da professora. Então, a única situação que falsifica a sentença condicional é quando seu antecedente é verdadeiro e seu consequente falso (segunda linha da tabela). Em todas as outras situações (outras três linhas da tabela) a afirmação condicional pode ser sustentada sem qualquer quebra de compromisso e, por isso, deve ser considerada verdadeira.

Bicondicional. Dado que um bicondicional deve ser o mesmo que a conjunção das duas direções de um condicional, sua tabela de verdade característica deve ser:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Sem surpresa, o bicondicional é simétrico.

CAPÍTULO 10

Conectivos verofuncionais

10.1 A ideia da verofuncionalidade

Vamos introduzir uma ideia importante.

> Um conectivo é VEROFUNCIONAL (também chamado de FUNCAO DE VERDADE) se o valor de verdade de uma sentença em que esse conectivo é o conectivo principal for determinado exclusivamente pelos valores de verdade das sentenças que a constituem.

Todos os conectivos da LVF são realmente verofuncionais (funções de verdade). O valor de verdade de uma negação é determinado exclusivamente pelo valor de verdade da sentença não negada. O valor de verdade de uma conjunção é determinado exclusivamente pelo valor de verdade de ambos os conjuntos. O valor de verdade de uma disjunção é determinado exclusivamente pelo valor de verdade de ambos os disjuntos, e assim por diante. Para determinar o valor de verdade de qualquer sentença LVF, precisamos apenas conhecer o valor de verdade de suas partes componentes.

A LVF é, então, a lógica das funções de verdade, e é este fato que seu nome indica: *LVF = lógica verofuncional.*

Em inúmeras linguagens, há conectivos que não são verofuncionais. Em português, por exemplo, podemos formar uma nova sentença a partir de qualquer sentença mais simples, prefixando-a com 'É necessariamente o caso que…'. Mas o valor de verdade desta nova sentença não é determinado apenas pelo valor de verdade da sentença original. Considere, por exemplo, duas sentenças verdadeiras:

1. $2 + 2 = 4$
2. Luiz Gonzaga e Humberto Teixeira compuseram Asa Branca

Enquanto é necessariamente o caso que $2+2 = 4$, obviamente não é *necessariamente* o caso que Luiz Gonzaga e Humberto Teixeira compuseram Asa Branca. Luiz Gonzaga poderia nunca ter conhecido Humberto Teixeira, Asa Branca poderia nunca ter sido composta, ou muitas outras possibilidades. Portanto, 'é necessariamente o caso que…' é um conectivo do português, mas não é uma função de verdade. Não é um conectivo *verofuncional.*

10.2 Simbolização *versus* Tradução

Todos os conectivos da LVF são funções de verdade. Mais do que isso: eles realmente não fazem *nada além de* um mapeamento entre os valores de verdade.

Quando nós simbolizamos uma sentença ou argumento na LVF, ignoramos tudo que *extrapola* a contribuição que os valores de verdade de um componente podem dar ao valor de verdade do todo. Existem sutilezas em nossas afirmações comuns que ultrapassam em muito seus meros valores de verdade. Sarcasmo; lirismo; conotações maliciosas; ênfase; ironia; essas são partes importantes do discurso cotidiano, mas nada disso é capturado pela LVF. Conforme observado no Capítulo 5, a LVF não pode capturar as diferenças sutis entre, por exemplo, as seguintes sentenças em português:

1. Mila é professora de lógica e Mila é uma pessoa legal.
2. Embora Mila seja uma professora de lógica, Mila é uma pessoa legal.
3. Mila é uma professora de lógica, apesar de ser uma pessoa legal.
4. Mila é uma pessoa legal, mas também uma professora de lógica.
5. Mila, não obstante a ser uma professora de lógica, é uma pessoa legal.

Todas essas sentenças são simbolizadas com a mesma sentença da LVF, talvez '$P \wedge L$'.

Nós temos dito que usamos as sentenças da LVF para *simbolizar* sentenças em português. Muitos outros livros preferem dizer que as sentenças do português são *traduzidas* para a LVF. No entanto, uma boa tradução deve preservar certas facetas do significado e, como acabamos de salientar, a LVF simplesmente não consegue fazer isso. É por isso que falaremos de *simbolização* das sentenças em português, em vez de *tradução*.[1]

Isso afeta o modo como devemos entender as nossas chaves de simbolização. Considere a seguinte chave de simbolização:

P: Mila é uma professora de lógica.
L: Mila é uma pessoa legal.

Outros livros didáticos entenderão isso como uma estipulação de que a sentença 'L' da LVF deve *significar* que Mila é uma professora de lógica, e 'N' deve *significar* que Mila é uma pessoa legal. No entanto, a LVF não possui nenhum recurso para lidar com significados de letras sentenciais. A chave de simbolização acima está fazendo nada mais nem menos do que estipular que a sentença 'P' deve ter o mesmo valor de verdade que a sentença

[1] Um outro termo empregado por filósofos e lógicos com este sentido de simbolização que se contrapõe à ideia de tradução é: *arregimentação*.

do português 'Mila é uma professora de lógica' (qualquer que seja este valor) e que a sentença 'L' deve ter o mesmo valor de verdade que 'Mila é uma pessoa legal' (qualquer que seja ele).

> Ao consideramos que uma sentença da LVF apenas *simboliza* uma sentença em português, estamos, com isso, nada mais que estipulando que a sentença da LVF deve ter o mesmo valor de verdade que a sentença em português.

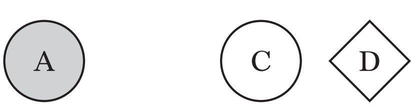
10.3 Condicionais indicativos *versus* condicionais subjuntivos

Vamos esclarecer um pouco melhor a limitação da LVF que restringe seus conectivos a funções de verdade, olhando um pouco mais atentamente para o caso das sentenças condicionais. Quando introduzimos a tabela de verdade característica para o condicional material, no Capítulo 9, reconhecemos sua estranheza e procuramos justificá-la com um exemplo. Vamos, agora, aprofundar um pouco mais aquela justificativa, seguindo as indicações de Dorothy Edgington.[2]

Suponha que Lara tenha desenhado algumas formas em um pedaço de papel e tenha pintado algumas delas. Eu não vi o que ela fez, mas, mesmo assim, faço a seguinte afirmação:

> Se alguma forma é cinza, então esta forma é também circular.

Suponha que Lara tenha feito os seguintes desenhos:

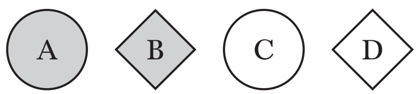


[2]Dorothy Edgington, 'Conditionals', 2006, em *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (http://plato.stanford.edu/entries/conditionals/).

Nesse caso, minha afirmação é certamente verdadeira. As formas C e D não são cinza e por isso não se constituem em *contraexemplos* à minha afirmação. A forma A *é* cinza, mas felizmente também é circular. Portanto, minha afirmação não tem contraexemplos. Deve, por isso, ser verdadeira. Isso significa que cada uma das seguintes *instâncias* da minha afirmação também deve ser verdadeira:

- Se A é cinza, então é circular (antecedente V, consequente V)
- Se C é cinza, então é circular (antecedente F, consequente V)
- Se D é cinza, então é circular (antecedente F, consequente F)

No entanto, suponha que Lara tivesse desenhado uma forma a mais:



neste caso, podemos ver que não é verdade que “se alguma forma é cinza, então esta forma também é circular”. A figura B corresponde a um contraexemplo para a minha afirmação, que seria, por isso, falsa. Portanto, a seguinte instância de minha afirmação tem que ser falsa:

- Se B é cinza, então é circular (antecedente V, consequente F)

Agora, lembre-se de que todos os conectivos da LVF são verofuncionais. Isso significa que os valores de verdade do antecedente e consequente devem determinar exclusivamente o valor de verdade do condicional como um todo. Assim, a partir dos valores de verdade das quatro instâncias de minha afirmação—que nos fornecem todas as combinações possíveis para a verdade e falsidade de antecedente e consequente—obtemos a tabela da verdade para o condicional material. As instâncias relacionadas às figuras A, C e D nos dão as linhas em que o condicional é verdadeiro, e a instância relacionada à figura B nos dá a linha em que o condicional é falso.

O que essa explicação mostra é que o ‘→’ da LVF é o *melhor* que uma interpretação verofuncional do condicional pode nos dar. Dito de outra forma, *é o melhor condicional que a LVF pode* *fornecer.* Mas será que o '$\rightarrow$' da LVF é bom como um substituto dos condicionais que usamos na linguagem cotidiana? Considere as duas sentenças seguintes:

1. Se Fernando Haddad tivesse vencido a eleição de 2018, ele teria sido o 38º presidente do Brasil.
2. Se Fernando Haddad tivesse vencido a eleição de 2018, ele teria sido o 99º presidente do Brasil.

Uma rápida pesquisa na internet sobre as eleições de 2018 e sobre os presidentes do Brasil nos mostra claramente que a sentença 1 é verdadeira e a sentença 2 é falsa. No entanto, ambas são sentenças condicionais (têm a forma 'se... então...') e, de acordo com os fatos que realmente ocorreram, as indicações dos antecedentes e dos consequentes das duas sentenças, quando consideradas isoladamente, são todas falsas. Ou seja, Fernando Haddad não venceu as eleições de 2018 (os dois antecedentes, vistos isoladamente, são falsos), e ele não foi nem o 38º nem o 99º presidente do Brasil (os dois consequentes, vistos isoladamente, são falsos). Portanto, o valor de verdade das sentenças 1 e 2 acima não são determinados exclusivamente pelos valores de verdade de suas partes (antecedentes e consequentes), porque valores idênticos aos antecedentes e consequentes (Falso e Falso) levaram a valores de verdade distintos nas sentenças. A primeira é verdadeira e a segunda é falsa. Nenhuma tabela de verdade jamais conseguirá apontar a diferença entre o valor de verdade de 1 e 2. Isso mostra que os condicionais usados nas sentenças 1 e 2 não são verofuncionais. Não são funções de verdade e, por isso, não podem ser adequadamente simbolizados na LVF.

Esta é uma lição de cautela e modéstia. Não assuma, levianamente, que você sempre consegue simbolizar adequadamente as sentenças condicionais do português 'se..., então...' com o '$\rightarrow$' da LVF, porque em muitos casos você simplesmente não conseguirá.

O ponto crucial é que as sentenças 1 e 2 empregam condicionais *subjuntivos*, em vez de *indicativos.* Eles nos solicitam que imaginemos algo contrário aos fatos—Fernando Haddad perdeu a eleição de 2018—e depois nos pedem para avaliar o que *teria* acontecido nesse caso. Tais considerações simplesmente não podem ser abordadas com o '$\rightarrow$'.

Falaremos mais sobre as dificuldades com condicionais na Seção 12.5. Por enquanto é suficiente lembrarmos da observação de que '$\rightarrow$' é o único candidato a um condicional verofuncional da TFL; no entanto, muitas sentenças condicionais em português não serão representadas adequadamente por '$\rightarrow$'. A LVF é uma linguagem intrinsecamente limitada.

CAPÍTULO 11

Tabelas de verdade completas

Até agora, consideramos atribuir valores de verdade às sentenças LVF apenas indiretamente. Dissemos, por exemplo, que uma sentença LVF como '*C*' deve ter o mesmo valor de verdade que a sentença em português 'A praia de Copacabana fica no Rio de Janeiro' (qualquer que seja esse valor de verdade). Mas também podemos atribuir valores de verdade *diretamente* às letras sentenciais da LVF. Podemos simplesmente estipular que '*C*' deve ser verdadeira, ou estipular que deve ser falsa.

> Uma VALORACAO é qualquer atribuição de valores de verdade a um grupo particular de sentenças da LVF.

O poder das tabelas de verdade consiste no seguinte: dado um certo conjunto de letras sentenciais, cada linha de uma tabela de verdade representa uma valoração possível para este conjunto de letras sentenciais. A tabela da verdade completa representa todas valorações possíveis para estas letras sentenciais; assim, a tabela verdade nos fornece um meio de calcular os valores de verdade de sentenças complexas, em cada uma das valorações possíveis. Isso é mais fácil de entender através de um exemplo.

11.1 Exemplo de uma tabela de verdade

Considere a sentença:

$$(H \wedge I) \rightarrow H$$

Existem quatro maneiras possíveis de atribuir Verdadeiro e Falso às letras sentenciais 'H' e 'I' que ocorrem nesta sentença—ou seja, existem quatro valorações possíveis para este conjunto de duas letras sentenicias—que podemos representar da seguinte maneira:

H	I	$(H \wedge I) \rightarrow H$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Para calcular o valor de verdade da sentença completa '$(H \wedge I) \rightarrow H$', primeiro copiamos os valores de verdade das letras sentenciais (lado esquerdo do traço vertical da tabela abaixo), de cada linha, e os escrevemos abaixo das letras sentenciais na sentença (lado direito do traço vertical da tabela abaixo):

H	I	$(H$	$\wedge$	$I)$	$\rightarrow$	H
V	V	V		V		V
V	F	V		F		V
F	V	F		V		F
F	F	F		F		F

Agora considere a subsentença '$(H \wedge I)$'. Ela é uma conjunção, $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$, com '$H$' como $\mathcal{A}$ e 'I' como $\mathcal{B}$. A tabela de verdade característica para conjunção, que vimos no Capítulo 9, fornece as condições de verdade para *qualquer* sentença no formato $(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B})$, qualquer que sejam as sentenças $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. Aquela tabela característica apenas indica o fato de que uma conjunção é verdadeira se ambos os conjuntos (as subsentenças da conjunção) forem verdadeiros. Nesse caso, nossos conjuntos são apenas 'H' e 'I'. E ambos são verdadeiros na (e somente na) primeira linha da tabela de verdade. Então, usando este fato, podemos preencher o valor de verdade desta conjunção nas quatro linhas.

		$\mathcal{A}$	$\wedge$	$\mathcal{B}$		
H	I	$(H$	$\wedge$	$I)$	$\to$	H
V	V	V	**V**	V		V
V	F	V	**F**	F		V
F	V	F	**F**	V		F
F	F	F	**F**	F		F

Agora, a sentença completa que nos interessa aqui é um condicional $\mathcal{A}\to\mathcal{B}$, com '$(H\wedge I)$' como $\mathcal{A}$ e com 'H' como $\mathcal{B}$. Então, para preencher nossa tabela, usamos a tabela de verdade característica do condicional, que estabelece que um condicional é falso apenas quando seu antecedente é verdadeiro e seu consequente é falso. Por exemplo, na primeira linha de preenchimento '$(H\wedge I)$' e 'H' são ambas verdadeiras. Então, de acordo com a tabela característica, o condicional é verdadeiro neste caso, e colocamos um 'V' na primeira linha, abaixo do símbolo do condicional. Fazemos o mesmo procedimento nas outras três linhas e obtemos o seguinte:

			$\mathcal{A}$		$\to$	$\mathcal{B}$
H	I	$(H$	$\wedge$	$I)$	$\to$	H
V	V		V		**V**	V
V	F		F		**V**	V
F	V		F		**V**	F
F	F		F		**V**	F

O condicional é o conectivo principal da sentença, portanto, a coluna de 'V's abaixo do condicional nos diz que a sentença

'$(H \wedge I) \rightarrow H$' é verdadeira em todos os casos possíveis para os valores de verdade de 'H' e 'I'. Como consideramos todas as quatro valorações possíveis para o par 'H' e 'I', podemos dizer que '$(H \wedge I) \rightarrow H$' é verdadeira em todas as valorações.

Neste exemplo, não repetimos todas as inscrições de 'V' e 'F' em todas as colunas de cada tabela que apresentamos. Porém, quando de fato fazemos tabelas de verdade no papel, é impraticável apagar colunas inteiras ou reescrever a tabela inteira em cada etapa. Embora fique mais poluída (cheia de 'V's e 'F's), esta tabela de verdade quando feita, de modo completo, sem apagar nada, fica da seguinte maneira:

H	I	$(H$	$\wedge$	$I)$	$\rightarrow$	H
V	V	V	V	V	**V**	V
V	F	V	F	F	**V**	V
F	V	F	F	V	**V**	F
F	F	F	F	F	**V**	F

A maioria das inscrições de 'V' e 'F' abaixo da sentença (nas colunas do lado direito do traço vertical) está ali apenas para fins de contabilidade. Elas representam os passos intermediários na construção da tabela. A coluna que mais importa é a coluna abaixo do *conectivo principal* da sentença, pois ela indica o valor de verdade da sentença completa em cada valoração. Nós enfatizamos isso, colocando esta coluna em negrito. Quando você trabalhar nas suas tabelas da verdade, enfatize-as da mesma forma (talvez sublinhando, mudando a cor,...).

11.2 Construindo tabelas de verdade completas

Uma TABELA DE VERDADE COMPLETA para uma sentença $\mathcal{A}$ tem uma linha para cada atribuição possível de Verdadeiro ou Falso para as letras sentencias presentes na sentença. Cada linha da tabela corresponde a uma *valoração* das letras sentencias de $\mathcal{A}$, e uma tabela de verdade completa possuirá, portanto, uma linha para cada uma destas valorações.

Então o tamanho (a quantidade de linhas) de uma tabela de verdade completa depende do número de letras sentenciais diferentes na tabela. Uma sentença que contém apenas uma letra sentencial requer apenas duas linhas, como na tabela de verdade característica para negação. E isso é verdade mesmo que a mesma letra seja repetida várias vezes, como na sentença:

$$[(C \leftrightarrow C) \rightarrow C] \wedge \neg(C \rightarrow C)$$

Sua tabela de verdade completa requer apenas duas linhas, porque existem apenas duas possibilidades: 'C' pode ser verdadeira ou falsa. A tabela de verdade para esta sentença fica assim:

C	$[(C \leftrightarrow C) \rightarrow C] \wedge \neg(C \rightarrow C)$
V	V V V V V **F** F V V V
F	F V F F F **F** F F V F

Observando a coluna abaixo do operador lógico principal, vemos que a sentença é falsa nas duas linhas da tabela; ou seja, a sentença é falsa, independentemente de 'C' ser verdadeira ou falsa. A sentença é falsa em todas as valorações.

Uma sentença que contenha duas letras sentenciais requer quatro linhas para uma tabela de verdade completa, como nas tabelas de verdade características para nossos conectivos binários e como na tabela de verdade completa para '$(H \wedge I) \rightarrow H$'.

Uma sentença $\mathcal{A}$ que contenha três letras sentenciais requer oito linhas para sua tabela completa:

M	N	P	$M \wedge (N \vee P)$
V	V	V	V **V** V V V
V	V	F	V **V** V V F
V	F	V	V **V** F V V
V	F	F	V **F** F F F
F	V	V	F **F** V V V
F	V	F	F **F** V V F
F	F	V	F **F** F V V
F	F	F	F **F** F F F

Através desta tabela sabemos que a sentença '$M \wedge (N \vee P)$' pode ser verdadeira ou falsa, dependendo dos valores de verdade de 'M', 'N' e 'P'. A segunda linha, por exemplo, nos mostra, que quando 'M' e 'N' são verdadeiras e 'P' é falsa, a sentença '$M \wedge (N \vee P)$' é verdadeira. Já a oitava linha nos mostra quer quando 'M', 'N' e 'P' são todas falsas, a sentença completa também é falsa.

Uma tabela de verdade completa para uma sentença com quatro letras sentenciais diferentes requer 16 linhas. Cinco letras, 32 linhas. Seis letras, 64 linhas. E assim por diante. Para ser perfeitamente geral: se uma tabela verdade completa tiver n letras sentenciais diferentes, ela deverá ter 2^n linhas.

Para preencher as colunas abaixo das letras sentenciais de uma tabela de verdade completa, que indicam as diversas valorações (a parte do lado esquerdo do traço vertical da tabela), comece com a letra sentencial mais à direita e preencha as linhas de sua coluna com valores alternados 'V' e 'F', até completar o número total de linhas. Na próxima coluna à esquerda, preencha-a de duas em duas linhas, alternando entre dois 'V's, depois dois 'F's, até completar o número total de linhas. Para a terceira letra sentencial, preencha sua coluna com quatro 'T's seguidos de quatro 'F's. Isso gera uma tabela de verdade de 8 linhas como a acima. Para uma tabela de verdade de 16 linhas, a próxima coluna de letras sentenciais deve ter oito 'T's seguidos de oito 'F's. Para uma tabela de 32 linhas, a próxima coluna teria 16 'T's seguidos por 16' F's e assim por diante.

Seguindo este procedimento, uma tabela para uma sentença como

$$(A \wedge B) \leftrightarrow (C \vee \neg D)$$

com 4 letras sentenciais, terá

$$2^4 = 16$$

linhas, cujo preenchimento das colunas das valorações nos daria:

A	B	C	D	$(A \wedge B) \leftrightarrow (C \vee \neg D)$
V	V	V	V	
V	V	V	F	
V	V	F	V	
V	V	F	F	
V	F	V	V	
V	F	V	F	
V	F	F	V	
V	F	F	F	
F	V	V	V	
F	V	V	F	
F	V	F	V	
F	V	F	F	
F	F	V	V	
F	F	V	F	
F	F	F	V	
F	F	F	F	

Bem, aproveite a ocasião e preencha todos os valores deta tabela de verdade!

11.3 Mais sobre os parênteses

Considere as duas seguintes sentenças:

$$((A \wedge B) \wedge C)$$
$$(A \wedge (B \wedge C))$$

Elas são verofuncionalmente equivalentes. Ou seja, é impossível que tenham valores de verdade diferentes. Suas tabelas de verdade são idênticas. Para mesmos valores de verdade de 'A', 'B' e 'C', as duas sentenças terão exatamente os mesmos valores de verdade. São ambas verdadeiras apenas no caso de suas três letras sentenciais serem todas verdadeiras e são falsas em todos os outros casos. Como os valores de verdade são tudo o que importa na LVF (veja o Capítulo 10), não faz muita diferença diferenciar uma da outra. Apesar disso, não devemos simplesmente descartar os parênteses nessas sentenças. A expressão

$$A \wedge B \wedge C$$

é ambígua entre as duas sentenças acima e não deve ser usada. A mesma observação vale para as disjunções. As seguintes sentenças são logicamente equivalentes:

$$((A \vee B) \vee C)$$
$$(A \vee (B \vee C))$$

Mas não devemos, por isso, escrever simplesmente:

$$A \vee B \vee C$$

De fato, é uma especificidade das tabelas de verdade características de $\vee$ e $\wedge$ que garante que quaisquer duas conjunções (ou disjunções) das mesmas sentenças sejam verofuncionalmente equivalentes, independentemente de como os parênteses estejam dispostos. No entanto, *isto é válido apenas para conjunções e disjunções.* As duas sentenças seguintes, por exemplo, possuem tabelas de verdade *diferentes* e não são, por isso, equivalentes.

$$((A \rightarrow B) \rightarrow C)$$
$$(A \rightarrow (B \rightarrow C))$$

Então, se escrevêssemos:

$$A \rightarrow B \rightarrow C$$

isto seria perigosamente ambíguo. Não usar parênteses neste caso seria desastroso. Da mesma forma as sentenças abaixo também têm tabelas de verdade diferentes:

$$((A \vee B) \wedge C)$$
$$(A \vee (B \wedge C))$$

Então, se escrevêssemos:

$$A \vee B \wedge C$$

isto seria perigosamente ambíguo. A moral da estória é: *nunca omita os parênteses* (exceto os mais externos).

Exercícios

A. Faça as tabelas de verdade completas para cada uma das seguintes 9 sentenças:

1. $A \rightarrow A$
2. $C \rightarrow \neg C$
3. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow \neg(A \leftrightarrow \neg B)$
4. $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$
5. $(A \wedge B) \rightarrow (B \vee A)$
6. $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
7. $\big[(A \wedge B) \wedge \neg(A \wedge B)\big] \wedge C$
8. $[(A \wedge B) \wedge C] \rightarrow B$
9. $\neg\big[(C \vee A) \vee B\big]$

B. Verifique se as afirmações sobre equivalência que acabamos de fazer na Seção 11.3 estão de fato corretas. Ou seja, mostre que:

1. '$((A \wedge B) \wedge C)$' e '$(A \wedge (B \wedge C))$' têm tabelas de verdade idênticas.
2. '$((A \vee B) \vee C)$' e '$(A \vee (B \vee C))$' têm tabelas de verdade idênticas.

3. '$((A \vee B) \wedge C)$' e '$(A \vee (B \wedge C))$' têm tabelas de verdade diferentes.
4. '$((A \to B) \to C)$' e '$(A \to (B \to C))$' têm tabelas de verdade diferentes.

Verifique também se:

5. '$((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C)$' e '$(A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C))$' têm tabelas de verdade idênticas ou diferentes.

C. Escreva tabelas de verdade completas para as cinco sentenças a seguir e indique a coluna que representa os possíveis valores de verdade da sentença completa.

1. $\neg(S \leftrightarrow (P \to S))$
2. $\neg[(X \wedge Y) \vee (X \vee Y)]$
3. $(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \leftrightarrow \neg A)$
4. $[C \leftrightarrow (D \vee E)] \wedge \neg C$
5. $\neg(G \wedge (B \wedge H)) \leftrightarrow (G \vee (B \vee H))$

D. Escreva tabelas de verdade completas para as cinco sentenças a seguir e indique a coluna que representa os possíveis valores de verdade da sentença completa.

1. $(D \wedge \neg D) \to G$
2. $(\neg P \vee \neg M) \leftrightarrow M$
3. $\neg\neg(\neg A \wedge \neg B)$
4. $[(D \wedge R) \to I] \to \neg(D \vee R)$
5. $\neg[(D \leftrightarrow O) \leftrightarrow A] \to (\neg D \wedge O)$

Para praticar mais, você pode construir tabelas de verdade para todas as sentenças e argumentos nos exercícios dos capítulos anteriores.

CAPÍTULO 12

Conceitos semânticos

No Capítulo anterior, introduzimos a ideia de valoração e mostramos como determinar o valor de verdade de qualquer sentença da LVF, em qualquer valoração, usando as tabelas de verdade. Neste Capítulo, apresentaremos alguns conceitos importantes em lógica e mostraremos como usar tabelas de verdade para testar quando eles se aplicam ou não.

Este é um capítulo muito importante, o mais importante sobre a LVF. Além das definições dos conceitos e dos métodos sobre como verificá-los através das tabelas de verdade, apresentaremos também muitos esclarecimentos fundamentais sobre a lógica enquanto disciplina, sobre suas possibilidades e limites de aplicação. Leia com calma e anote suas dúvidas para discuti-las com os monitores e o professor.

12.1 Tautologias e contradições

No Capítulo 3, introduzimos as noções gerais de *verdade necessária* e *falsidade necessária*. Estas duas noções têm representantes mais específicas na LVF. Comecemos com um representante para a noção de verdade necessária.

> Uma sentença $\mathcal{A}$ é uma TAUTOLOGIA se e somente se ela for verdadeira em todas as valorações.

Podemos usar as tabelas de verdade para determinar se uma sentença é uma tautologia ou não. Se a sentença for verdadeira em todas as linhas de sua tabela de verdade completa, então ela é verdadeira em todas as valorações e, portanto, é uma tautologia. A sentença

$$(H \land I) \to H$$

apresentada como exemplo no Capítulo 11, é uma tautologia, porque sua tabela de verdade completa tem 'V' em todas as linhas:

H	I	$(H \land I) \to H$
V	V	V V V **V** V
V	F	V F F **V** V
F	V	F F V **V** F
F	F	F F F **V** F

A noção de tautologia é apenas um *caso especial* na LVF da noção geral de verdade necessária. Isso porque existem algumas verdades necessárias que não podem ser simbolizadas adequadamente na LVF. Um exemplo é

$$2 + 2 = 4$$

Esta afirmação é *necessariamente* verdadeira. Sua falsidade não faz sentido, é impossível. No entanto, quando tentamos simbolizá-la na LVF, o melhor que conseguimos fazer é atribuir-lhe uma letra sentencial. Mas nenhuma letra sentencial sozinha é uma tautologia. Entretanto, mesmo havendo muitas verdades necessárias como esta, cujas simbolizações na LVF não são tautologias, quando uma simbolização aceitável na LVF de alguma sentença em português for uma tautologia, podemos ter confiança que essa sentença em português expressa uma verdade necessária. Ou seja, as tautologias representam um subgrupo das verdades necessárias: algumas verdades necessárias não são tautologias, mas todas as tautologias são verdades necessárias.

De modo semelhante, temos também um representante na LVF para a noção de falsidade necessária:

> Uma sentença $\mathcal{A}$ é uma CONTRADICAO (na LVF) se e somente se ela for falsa em todas as valorações.

Aqui também podemos usar as tabelas de verdade para determinar se uma sentença é uma contradição ou não. Se a sentença for falsa em todas as linhas de sua tabela de verdade completa, então ela é falsa em todas as valorações e, portanto, é uma contradição. A sentença

$$[(C \leftrightarrow C) \rightarrow C] \wedge \neg(C \rightarrow C)$$

apresentada como exemplo no Capítulo 11, é uma contradição, porque sua tabela de verdade completa tem 'F' em todas as linhas:

C	$[(C$	$\leftrightarrow$	$C)$	$\rightarrow$	$C]$	$\wedge$	$\neg$	$(C$	$\rightarrow$	$C)$
V	V	V	V	V	V	**F**	F	V	V	V
F	F	V	F	F	F	**F**	F	F	V	F

12.2 Equivalência

Eis aqui uma noção bastante útil:

> $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são sentenças EQUIVALENTES (na LVF) se e somente se, em todas as valorações, seus valores de verdade são idênticos, ou seja, se e somente se não há valoração na qual o valor de verdade de $\mathcal{A}$ seja distinto do valor de verdade de $\mathcal{B}$.

Essa noção já foi utilizada por nós na Seção 11.3, quando dissemos que as sentenças '$(A \wedge B) \wedge C$' e '$A \wedge (B \wedge C)$' são equivalentes. Novamente, é fácil testar a equivalência usando tabelas de verdade. Considere as sentenças

$$\neg(P \vee Q) \qquad \text{e} \qquad \neg P \wedge \neg Q$$

Será que elas são equivalentes? Para descobrir, construímos uma tabela de verdade.

P	Q	$\neg\,(P \vee Q)$	$\neg\,P \wedge \neg\,Q$
V	V	**F** V V V	F V **F** F V
V	F	**F** V V F	F V **F** V F
F	V	**F** F V V	V F **F** F V
F	F	**V** F F F	V F **V** V F

Repare nas colunas dos conectivos principais (destacadas em negrito): a negação, na primeira sentença, e a conjunção, na segunda. Nas três primeiras linhas, ambas são falsas. Na linha final, ambas são verdadeiras. Como em cada linha os valores são os mesmos, as duas sentenças são equivalentes.[1]

12.3 Satisfação

No Capítulo 3, dissemos que as sentenças de um grupo são conjuntamente possíveis se for possível que todas elas sejam conjuntmente verdadeiras (verdadeiras ao mesmo tempo, na mesma

[1] Um nome mais preciso para o que estamos chamando aqui simplesmente de equivalência seria 'equivalência na LVF' ou 'LVF-equivalência', porque corresponde à equivalência entre sentenças capaz de ser detectada pela LVF. Linguagens lógicas diferentes apontarão diferentes sentenças como equivalentes. Estudaremos mais adiante neste livro a LPO, uma linguagem lógica mais poderosa que a LVF, que reconhece equivalências que a LVF não consegue reconhecer. Estas noções de equivalência cujas definições são dependentes de linguagens lógicas específicas são genericamente chamadas de 'equivalências lógicas'. Ou seja, quando se diz que as sentenças de um grupo são todas *equivalentes* ou *logicamente equivalentes*, deve estar subentendida uma linguagem lógica. No nosso caso, por enquanto, é a LVF. Apesar destas variações, todas as noções de 'equivalência lógica' são derivadas da noção geral de *equivalência necessária*, que não depende de qualquer sistema lógico e que apresentamos ao final do Capítulo 3.

circunstância). Também para esta noção podemos oferecer um representante na LVF:

> As sentenças $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ são CONJUNTAMENTE SATISFATORIAS (na LVF) se e somente se há alguma valoração na qual todas elas são verdadeiras.

Derivativamente, podemos definir que as sentenças de um grupo são CONJUNTAMENTE INSATISFATORIAS se não houver nenhuma valoração na qual todas elas sejam verdadeiras. Novamente, é fácil testar a satisfação e a insatisfação conjuntas usando tabelas de verdade. Por exemplo, a tabela de verdade abaixo mostra que as sentenças

$$P \vee Q \qquad \text{e} \qquad \neg P \vee \neg Q$$

são conjuntamente satisfatórias, porque há valorações (a segunda e a terceira linhas) nas quais ambas são verdadeiras.

P	Q	$P \vee Q$	$\neg P \vee \neg Q$
V	V	V **V** V	F V **F** F V
V	F	V **V** F	F V **V** V F
F	V	F **V** V	V F **V** F V
F	F	F **F** F	V F **V** V F

Já na tabela seguinte, podemos ver que as sentenças

$$A \wedge B \qquad \text{e} \qquad \neg A \wedge B$$

são conjuntamente insatisfatórias pois em nenhuma linha da tabela as sentenças são ambas verdadeiras.

A	B	$A \wedge B$	$\neg A \wedge B$
V	V	V **V** V	F V **F** V
V	F	V **F** F	F V **F** F
F	V	F **F** V	V F **V** V
F	F	F **F** F	V F **F** F

12.4 Sustentação e validade

A ideia a seguir está intimamente ligada à noção de satisfação conjunta:

> As sentenças $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ SUSTENTAM (na LVF) a sentença $\mathcal{C}$ se não há valoração na qual $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ são todas verdadeiras e $\mathcal{C}$ é falsa.

Novamente, não é difícil verificar a sustentação com uma tabela de verdade. Vamos, a título de exemplo, verificar se

$$\neg L \to (J \lor L) \quad \text{e} \quad \neg L \qquad \text{sustentam} \qquad J$$

Para fazer isso, basta fazer uma tabela de verdade completa para estas três sentenças e verificar se há alguma valoração (ou seja, alguma linha da tabela) em que '$\neg L \to (J \lor L)$' e '$\neg L$' são ambas verdadeiras e 'J' é falsa. Se houver tal linha na tabela, então '$\neg L \to (J \lor L)$' e '$\neg L$' ***não sustentam*** 'J'. Caso contrário, quando não há uma tal valoração, '$\neg L \to (J \lor L)$' e '$\neg L$' ***sustentam*** 'J'. Vejamos:

J	L	$\neg L \to (J \lor L)$	$\neg L$	J
T	T	F T **T** T T T	**F** T	**T**
T	F	T F **T** T T F	**T** F	**T**
F	T	F T **T** F T T	**F** T	**F**
F	F	T F **F** F F F	**T** F	**F**

A única linha na qual '$\neg L \to (J \lor L)$' e '$\neg L$' são ambas verdadeiras é a segunda linha, e nessa linha 'J' também é verdadeira. Portanto, de acordo com nossa definição, '$\neg L \to (J \lor L)$' e '$\neg L$' sustentam 'J'.

A seguinte observação é de extrema importância:

> Se $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ sustentam $\mathcal{C}$ na LVF, então o argumento $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n \therefore \mathcal{C}$ é válido.

Aqui está a explicação. Conforme vimos na Seção 2.2, um argumento é válido quando ele não tem contraexemplo, ou seja, quando não há situação na qual suas premissas sejam todas verdadeiras e sua conclusão seja falsa. A ideia geral, então, é a seguinte: as situações são cenários hipotéticos, são possibilidades em que os fatos podem ocorrer. Estes cenários hipotéticos correspondem a diferentes versões possíveis para os fatos. Cada um deles é uma estória diferente que utilizamos como fonte de informação para dizer de cada sentença se ela é verdadeira ou falsa. Por causa disso, qualquer valoração liga-se a alguma situação que a gera; e valorações diferentes têm que ter sido geradas por situações diferentes. Então, se houvesse um contraexemplo que invalidasse o argumento $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n \therefore C$, a situação que o caracteriza geraria uma valoração na qual $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ seriam todas verdadeiras e C seria falsa e, portanto, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ não sustentariam C. Por isso, quando $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ sustentam C e não há tal valoração, não pode haver também situação que a gere e, por isso, o argumento não tem contraexemplo e é válido.

Como este é um ponto crucial, talvez o ponto mais importante de toda a lógica, vamos avançar com calma aqui, examinando-o mais detidamente. Você pode, com razão, estar se perguntando: como é que podemos garantir que um contraexemplo para um argumento gera uma valoração na qual suas premissas não sustentam sua conclusão? Um exemplo nos ajudará a entender melhor. Considere o segundo argumento que apresentamos na Seção 2.2:

Se foi o motorista, então não foi a babá.
Não foi a babá.
$\therefore$ Foi o motorista.

Este argumento não é válido. Eis um contraexemplo:

- A expressão ‘foi’ refere-se ao assassinato do patrão, dono e morador da mansão. O assassino foi o mordomo, e ele trabalhou sozinho, sem cúmplices.

De acordo com este contraexemplo, as duas premissas do argumento são verdadeiras, pois como o assassino trabalhou sozinho, se foi o motorista, não pode ter sido a babá. Logo, a primeira premissa é verdadeira. Além disso, como o assassino foi o mordomo, e ele agiu sozinho, então não foi mesmo a babá, e, portanto, a segunda premissa também é verdadeira. A conclusão, por sua vez, é falsa, porque no contraexemplo o assassino foi o mordomo, não o motorista.

Então, na situação descrita no contraexemplo, as premissas são todas verdadeiras e a conclusão é falsa. Logo, o argumento é inválido. Vamos agora simbolizar este argumento de acordo com a seguinte chave de simbolização:

M: Foi o motorista
B: Foi a babá

Com esta chave nosso argumento simbolizado na LVF fica:

$$M \rightarrow \neg B$$
$$\neg B$$
$$\therefore\ M$$

O ponto crucial é o seguinte: se utilizarmos a situação do contraexemplo como o critério (a estória que é fonte de informação) para atribuir os valores de verdade para as letras sentenciais do argumento, nós obteremos uma valoração na qual as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa.

Vejamos. De acordo com nosso contraexemplo e chave de simbolização, 'M' e 'B' são ambas falsas, já que no contraexemplo o assassino foi o mordomo, não a babá, nem o motorista. Então o nosso contraexemplo está gerando uma valoração em que as duas letras sentenciais do argumento são falsas. Podemos agora construir a tabela de verdade completa das sentenças de nosso argumento e analisar o que acontece nesta valoração:

M	B	$M \rightarrow \neg B$	$\neg B$	M
V	V	V **F** F V	**F** V	**V**
V	F	V **V** V F	**V** F	**V**
F	V	F **V** F V	**F** V	**F**
F	F	F **V** V F	**V** F	**F**

Repare que a valoração gerada pelo contraexemplo, na qual as duas letras sentenciais 'M' e 'B' são falsas, corresponde à última linha de nossa tabela. Repare também que exatamente nesta valoração (linha) as duas premissas do argumento são verdadeiras e sua conclusão é falsa. Ou seja, exatamente esta linha nos mostra que as premissas não sustentam a conclusão.

A ideia central aqui é que as situações, os cenários hipotéticos, funcionam como uma interpretação (uma estória) que usamos como fonte de informação para atribuir valores de verdade às letras sentenciais dos argumentos. O que este caso ilustra é que quando a situação é um contraexemplo que invalida o argumento, então ela nos dará uma valoração (uma distribuição de valores de verdade para as letras sentenciais do argumento) na qual as premissas são todas verdadeiras, mas a conclusão é falsa. Esta valoração garante, portanto, que as premissas não sustentam a conclusão do argumento.

É por isso que podemos dizer, como fizemos no quadro acima, que se as premissas de um argumento sustentam sua conclusão, então o argumento é válido. Quando as premissas sustentam a conclusão, sabemos, pela definição de sustentação, que não existe valoração na qual suas premissas são verdadeiras e sua conclusão é falsa. Mas se não existe tal valoração, não pode haver nenhuma situação que a gere, ou seja, o argumento não tem contraexemplo. E se um argumento não tem contraexemplo, ele é válido!

Em resumo, a noção de sustentação é um representante na LVF da noção de validade. Ela nos dá uma maneira de usar a LVF para testar a validade de (alguns) argumentos em português. Primeiro nós os simbolizamos na LVF e em seguida usamos as tabelas de verdade para testar se suas premissas, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ sustentam sua conclusão C. Se elas sustentam, então podemos confiar que o argumento é válido.[2]

---

[2] O termo original em inglês para a noção que denominamos por 'sustentação' é *entailment*, que costuma ser traduzido ao português como 'implicação' ou 'acarretamento'. Ou seja, quando nós dizemos neste livro que $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$

12.5 Alcance e limites da LVF

Atingimos, na Seção anterior, um marco importante para os objetivos da lógica enquanto disciplina: um teste para a validade de argumentos! É fundamentalmente para fazer testes como este que estudamos lógica. Estudamos lógica para saber distinguir os bons dos maus argumentos, e o teste de validade via tabelas de verdade, que aprendemos na Seção anterior, corresponde a uma das respostas que a lógica pode nos dar. É essencial, portanto, entendermos *o alcance* e também *os limites* desta nossa primeira conquista.

Um aspecto básico das limitações não só da LVF, mas da lógica como um todo, é que ela é um método indireto. Não conseguimos, com a LVF, testar diretamente a validade dos argumentos originais em português. Conseguimos apenas testar a validade de suas simbolizações. Então os resultados de nossos testes lógicos serão tão confiáveis quanto as simbolizações forem aceitáveis como substitutos fiéis para os argumentos originais. No exemplo da Seção anterior, não testamos diretamente a validade do argumento

> Se foi o motorista, então não foi a babá.

---

sustentam C, a maioria dos outros livros diriam que $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ *implicam* (ou *acarretam*) C. O termo 'implicação', no entanto, é ambíguo e confunde a relação entre premissas e conclusão em um argumento válido, com a relação entre antecedente e consequente dada pelo operador condicional da LVF, '$\rightarrow$', que muitas vezes é chamado de 'implicação material' ou mesmo apenas de 'implicação'. Mas esta confusão é um equívoco. A relação entre premissas e conclusão de um argumento válido é diferente da relação entre antecedente e consequente de um condicional verdadeiro, conforme veremos mais detalhadamente na Seção 12.7. Já o termo 'acarretamento' pode sugerir que há uma conexão causal entre as premissas e a conclusão de um argumento válido, que as premissas levam a ou produzem a conclusão. Mas isso também é um equívoco. Não é preciso que haja qualquer relação causal ou de produção entre as premissas e a conclusão de um argumento para que ele seja válido. Para evitar estas más interpretações, preferimos usar o termo pouco comum 'sustentação'. É importante, no entanto, que você saiba que aquilo que estamos chamando de 'sustentação', outros livros chamam de 'acarretamento' ou 'implicação (estrita)'.

Não foi a babá.
$\therefore$ Foi o motorista.

O que testamos foi a validade do argumento

$$M \rightarrow \neg B$$
$$\neg B$$
$$\therefore M$$

Este ponto é fundamental. Quando afirmamos, como fizemos no segundo box da Seção anterior, que se $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ sustentam C na LVF, então o argumento $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n \therefore C$ é válido; estamos nos referindo à validade do argumento simbolizado, não à validade do argumento original em português.

Vimos, através da tabela de verdade, que as premissas deste argumento não sustentam sua conclusão, porque na valoração em quem 'M' e 'B' são ambas falsas (última linha da tabela), as premissas são verdadeiras, mas a conclusão é falsa. A LVF não vai além disso. Sua avaliação não atinge o argumento original; limita-se ao argumento simbolizado. Precisamos de uma chave de simbolização, tal como

M: Foi o motorista
B: Foi a babá

para ligar o argumento original ao argumento simbolizado, que é o único tipo de argumento que a LVF consegue avaliar. O teste da validade do argumento simbolizado, então, só será um bom teste de validade para o argumento original se a simbolização for aceitável, se não for problemática. Ou seja, a avaliação que a LVF pode fazer de um argumento em português será tão boa quanto o argumento simbolizado for um bom substituto para o argumento original. Neste exemplo, o argumento simbolizado é um bom substituto. Dada a chave de simbolização proposta, as mais variadas situações (cenários hipotéticos) que pudermos imaginar para o argumento original vão se ligar a valorações nas quais os valores de verdade das sentenças do argumento simbolizado coincidem com os valores de verdade das sentenças originais dados pelas situações. Quando há sincronia entre as valorações do argumento simbolizado e as situações para o argumento original, nós podemos confiar amplamente nas avaliações feitas através da LVF. Ela será um instrumento útil, poderoso, simples e extremamente confiável para a avaliação de argumentos.

No entanto, em muitos casos não conseguiremos uma simbolização na LVF que seja um substituto à altura do argumento original. Veremos, em muitos casos, que haverá uma assincronia entre os valores de verdade das sentenças originais nas diversas situações e os valores de verdade das sentenças simbolizadas nas diversas valorações. A ligação entre situações e valorações não será perfeita. Nestes casos, a LVF não será um bom instrumento para avaliar o argumento. Ilustraremos esses limites com alguns exemplos.

Considere, em primeiro lugar, o seguinte argumento:

1. Olga tem quatro patas. Logo Olga tem mais de duas patas.

Para simbolizar esse argumento na LVF precisamos de duas letras sentenciais diferentes—talvez 'Q' e 'D'—a primeira para a premissa e a outra para a conclusão. É óbvio que 'Q' não sustenta 'D', para ver isso, basta considerarmos a valoração em que 'Q' é verdadeira e 'D' é falsa. No entanto, o argumento original em português é claramente válido. Não é possível que a premissa seja verdadeira (Olga tenha quatro patas) e a conclusão falsa (Olga não tenha mais de duas patas). Há, então, uma clara discrepância entre as situações (cenários hipotéticos) e as valorações, pois a valoração em que 'Q' é verdadeira e 'D' é falsa não corresponde a nenhum cenário concebível.

Considere agora esta segunda sentença:

2. João não é careca nem não-careca.

Ao simbolizar esta sentença na LVF obteríamos algo como

$$\neg C \wedge \neg\neg C$$

Esta sentença é uma contradição (verifique isso fazendo uma tabela de verdade para a sentença; você verá que ela não é verdadeira em nenhuma linha). Porém, a sentença 2 não parece uma falsidade necessária; após afirmá-la poderíamos acrescentar que 'João está no limite da calvície. Tem cabelo ralo. Seria injusto classificá-lo tanto como careca quanto como não careca.' Aqui também há uma discrepância entre as situações e as valorações. Não há valoração na qual a simbolização de 2 é verdadeira, mas há sim um cenário hipotético concebível no qual 2 é verdadeira.

Em terceiro lugar, considere a seguinte sentença:

3. Não é o caso que se deus existe, então ela atende a preces que pedem o mal.[3]

Considere agora a seguinte chave de simbolização:

D: deus existe.
M: deus atende preces que pedem o mal.

Com esta chave, a simbolização mais natural na LVF da sentença 3 seria:

$$\neg(D \rightarrow M)$$

Acontece que '$\neg(D \rightarrow M)$' sustenta 'D' (novamente, verifique isso com uma tabela de verdade). Ou seja, o argumento

$\neg(D \rightarrow M)$
$\therefore\ D$

é um argumento válido. Mas, por outro lado, o argumento correspondente em português

Não é o caso que se deus existe, então ela atende a preces que pedem o mal.
∴ Deus existe.

[3] Sim, estou me referindo a deus com letra minúscula e no gênero feminino. Por que não?

não parece de modo algum um argumento válido.

Afinal de contas, até mesmo um ateu pode aceitar a sentença 3 sem se contradizer. Você, por exemplo, certamente não acredita mais na existência do Papai Noel, eu espero. Mas mesmo sem acreditar que Papai Noel existe, você sabe que em todas as descrições desta figura fictícia, ele se veste de vermelho na noite de natal. Logo, a afirmação "não é o caso que se o Papai Noel existe, então ele se veste de azul na noite de natal" parece perfeitamente aceitável, mesmo para você, que não acredita em Papai Noel. Porém, com a seguinte chave de simbolização

D: Papai Noel existe.
M: Papai Noel se veste de azul na noite de natal.

O mesmo argumento da LVF acima que parecia provar a existência de deus, agora parece provar a existência do Papai Noel. Mudando engenhosamente a chave de simbolização, você pode usar este argumento para provar a existência de qualquer coisa que você queira. Bem, isso não pode estar certo. Ainda que o caso da existência de deus esteja sob permanente discussão, o de Papai Noel não está. Ele não existe.

Temos aqui um caso de assincronia entre a simbolização na LVF e o que o argumento em português afirma. Conseguimos conceber um contraexemplo para o argumento em português, uma situação na qual a premissa é verdadeira e conclusão é falsa, mas esta situação não tem lugar nas valorações possíveis da versão simbolizada do argumento, porque na simbolização a premissa sustenta a conclusão.

Como a simbolização da sentença 3 como '$\neg(D \rightarrow M)$' parece irresistível, uma lição que este exemplo nos dá é que talvez a própria sentença 3 não esteja bem formulada em português. Ou seja, talvez o que queiramos expressar com ela seja melhor dito com outra sentença, tal como

4. Se deus existe, então ela não atende a preces que pedem o mal.

Com a mesma chave, a simbolização da sentença 4 fica:

$$D \rightarrow \neg M$$

E agora a simbolização nos dá o argumento

$$\begin{array}{ll} & D \rightarrow \neg M \\ \therefore & D \end{array}$$

que não é válido, porque a premissa não sustenta a conclusão (outra vez, verifique isso com uma tabela de verdade), o que parece solucionar o quebra-cabeças. Não conseguimos mais provar a existência de deus apenas por aceitar a sentença 4.

No entanto, outros problemas surgem. Os dois argumentos a seguir são válidos (verifique isso também!):

$$\begin{array}{ll} & \neg D \\ \therefore & D \rightarrow \neg M \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ll} & \neg D \\ \therefore & D \rightarrow M \end{array}$$

E o que eles dizem é que se os ateístas têm razão, se deus não existe, então ela tanto atende quanto não atende a preces que pedem o mal. Qualquer condicional cujo antecedente é a suposição da existência de deus

$$(D \rightarrow \ldots)$$

é sustentado pela afirmação de sua não existência

$$\neg D$$

Como qualquer condicional que tem antecedente falso é verdadeiro, independentemente do que diz o consequente, nós não conseguiremos especificar as características de nada que não existe, porque tudo que dissermos será verdadeiro. Mas isso também não pode estar certo. Papai Noel não existe, mas o fato de que ele não existe não nos autoriza a afirmar qualquer coisa sobre ele. Por exemplo, o fato de que Papai Noel não existe não nos autoriza a afirmar que se ele existisse ele usaria azul na noite de natal. Não! Sabemos que se o Papai Noel que as crianças acreditam existisse, ele usaria vermelho.

De maneiras diferentes, os exemplos vistos nesta Seção destacam algumas das limitações de utilizar uma linguagem como a LVF, que é restrita a conectivos verofuncionais (especificáveis via tabelas de verdade características). Por outro lado, esses limites da LVF suscitam algumas questões filosóficas interessantes. O caso da calvície (ou não) de João levanta a questão geral sobre qual deve ser a lógica dos discursos com termos *vagos*, tais como careca, jovem, rica, bonito,... O caso da ateísta levanta a questão de como lidar com os (assim chamados) *paradoxos da implicação material*. Parte do objetivo deste livro é equipar vocês com as ferramentas para explorar essas questões de *lógica filosófica*. Mas temos que aprender a andar antes de conseguirmos correr; precisamos nos tornar proficientes no uso da LVF, antes que possamos discutir adequadamente seus limites e considerar outras alternativas.

12.6 A roleta dupla

A noção de sustentação é uma das mais importantes da lógica e será muito usada neste livro. Facilitará nosso estudo se introduzirmos um símbolo para abreviá-la. Uma afirmação como 'as sentenças da LVF $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots$ e $\mathcal{A}_n$ sustentam $\mathcal{C}$', será abreviada por:

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n \vDash \mathcal{C}$$

Chamaremos o símbolo '$\vDash$' de *roleta dupla*, pois ele parece uma roleta ou catraca de ônibus, com uma barra dupla.

Que fique claro: '$\vDash$' não é um símbolo da LVF. É um símbolo da nossa metalinguagem, o português aumentado (vale a pena reler e relembrar a diferença entre a linguagem objeto e a metalinguagem apresentada no Capítulo 8). Então o arranjo simbólico abaixo é uma afirmação em nossa metalinguagem (o português aumentado):

- $P, P \to Q \vDash Q$

e representa apenas uma abreviação da seguinte sentença do português:

- As sentenças da LVF 'P' e '$P \to Q$' sustentam 'Q'

Observe que não há limite para o número de sentenças da LVF que podem ser mencionadas à esquerda do símbolo '$\vDash$'. De fato, podemos até considerar o caso limite:

$$\vDash \mathcal{C}$$

Para entendermos o que isto quer dizer, basta aplicarmos a definição de sustentação. De acordo com nossa definição, apresentada na Seção 12.4, quando afirmamos, por exemplo, '$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \vDash \mathcal{C}$', estamos dizendo que não há valoração na qual todas as sentenças do lado esquerdo de '$\vDash$' são verdadeiras e $\mathcal{C}$ é falsa. Então, usando o mesmo princípio, quando dizemos '$\vDash \mathcal{C}$', como não há qualquer sentença do lado esquerdo de '$\vDash$', isto significa simplesmente que $\mathcal{C}$ não é falsa em nenhuma valoração. Em outras palavras, '$\vDash \mathcal{C}$' corresponde à afirmação de que $\mathcal{C}$ é verdadeira em todas as valorações. Em outras palavras ainda, corresponde a dizer que $\mathcal{C}$ é uma tautologia. Se raciocinarmos de modo similar, veremos que:

$$\mathcal{A} \vDash$$

diz exatamente que $\mathcal{A}$ é uma contradição (reveja as definições de tautologia e contradição na Seção 12.1).

12.7 Sustenta '$\vDash$' *versus* Implica '$\to$'

Vamos agora comparar a noção de sustentação, '$\vDash$', com o conectivo condicional da LVF, '$\to$'. Uma primeira e importantíssima diferença entre '$\vDash$' e '$\to$' é que:

‘$\rightarrow$’ é um conectivo que faz parte da LVF (a linguagem objeto)

‘$\vDash$’ é um símbolo da metalinguagem (o português aumentado)

De fato, quando ‘$\rightarrow$’ está entre duas sentenças da LVF, o resultado é uma sentença da LVF mais longa. Já quando usamos ‘$\vDash$’, o que formamos é uma sentença do português aumentado (metalinguagem) que *menciona* as sentenças LVF ao seu redor.

Mas há, também, um aspecto que aproxima estas noções. Com base no que já sabemos sobre ‘$\vDash$’ e ‘$\rightarrow$’ podemos fazer as seguintes observações.

Observação 1: $\mathcal{A} \vDash \mathcal{C}$ se e somente se não há valoração de letras sentencias na qual $\mathcal{A}$ é verdadeira e $\mathcal{C}$ é falsa.

Observação 2: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ é uma tautologia se e somente se em nenhuma valoração de letras sentencias, $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ é falsa.

Dado que uma sentença condicional é falsa apenas quando seu antecedente é verdadeiro e seu consquente é falso, podemos reescrever a observação 2.

Observação 3: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ é uma tautologia se e somente se não há valoração de letras sentencias na qual $\mathcal{A}$ é verdadeira e $\mathcal{C}$ é falsa.

Combinando as observações 1 e 3, vemos que

$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ é uma tautologia se e somente se $\mathcal{A} \vDash \mathcal{C}$

Isso, de fato, indica uma aproximação entre ‘$\vDash$’ e ‘$\rightarrow$’. Mas esta aproximação de modo algum iguala as duas noções. Há diferenças fundamentais entre elas. Um exemplo nos ajudará aqui. Considere a seguinte sentença:

5. Se é domingo e Mariana está viva, então Mariana vai à praia.

Considere também a seguinte chave de simbolização:

D: É domingo.
V: Mariana está viva.
P: Mariana vai à praia.

Com esta chave, a simbolização de 5 na LVF fica:

6. $(D \wedge V) \rightarrow P$

Podemos dizer que afirmar 6 significa o mesmo que dizer que o mundo real corresponde a uma situação que gera uma valoração na qual '$(D \wedge V) \rightarrow P$' é *verdadeira*. Ou seja, na valoração gerada pelo mundo real não ocorre que '$D \wedge V$' é verdadeira e 'P' é falsa. Isso, dada nossa chave de simbolização, significa que no mundo real não acontece jamais de ser domingo e Mariana estar viva, mas ela não ir à praia. A *verdade* de 6 significa que Mariana é extremamente sistemática em suas idas à Praia, que Mariana jamais deixou e, enquanto viver, jamais deixará de ir à Praia aos domingos. Chova ou faça sol. Esta é uma afirmação bastante forte sobre Mariana, mas enquanto aceitarmos a simbolização proposta, é exatamente isso que significa dizer que a sentença original 5 é *verdadeira*.

Por outro lado, afirmar '$D \wedge V$' $\vDash$ 'P' (ou seja, que '$D \wedge V$' sustenta 'P') significa algo muito mais forte ainda que isso. Significa o mesmo que dizer que não apenas na valoração gerada pelo mundo real, mas em nenhuma valoração '$D \wedge V$' é verdadeira e 'P' é falsa. Ou seja, significa o mesmo que dizer que '$(D \wedge V) \rightarrow P$' é uma tautologia. Isso, dada nossa chave de simbolização, significa que em todas as alternativas concebíveis ao mundo real, em todos os cenários hipotéticos imagináveis, não acontece jamais de ser domingo e Mariana estar viva, mas ela não ir à praia. Esta não é apenas uma afirmação bastante forte sobre Mariana, é uma afirmação bastante forte sobre como o mundo pode ser. Enquanto aceitarmos a simbolização proposta, afirmar '$D \wedge V$' $\vDash$ 'P' é afirmar que o mundo não pode ser de um modo tal que Mariana, estando viva, não vá a praia em um domingo.

E isso significa afirmar que a sentença original 5 é uma *verdade necessária* (ver definição na Seção 3.2): é verdadeira em todas as situações; é impossível que não seja verdadeira.

Então, dada uma simbolização aceitável, esta outra diferença fundamental entre '$\vDash$' e '$\rightarrow$' pode ser assim resumida em termos mais gerais:

> Afirmar $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ é comprometer-se com a *verdade* da sentença que $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ simboliza.
>
> Afirmar $\mathcal{A} \vDash \mathcal{C}$ é comprometer-se com a *necessidade* da sentença que $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ simboliza.

Estes dois compromissos são bastantes diferentes. Quem afirma $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ está dizendo que *o mundo real* é tal que jamais ocorre $\mathcal{A}$ sem que também ocorra $\mathcal{C}$. Quem afirma $\mathcal{A} \vDash \mathcal{C}$ está dizendo que não só o mundo real, mas *qualquer alternativa concebível ao mundo real* é tal que jamais ocorre $\mathcal{A}$ sem que também ocorra $\mathcal{C}$. Em nosso exemplo '$(D \wedge V) \rightarrow P$' *pode ser* uma afirmação verdadeira, desde que Mariana seja mesmo alguém que jamais falhou e jamais falhará em ir à praia aos Domingos. No entanto, '$(D \wedge V) \rightarrow P$' *não pode ser* uma verdade necessária. Porque mesmo se esta sentença for verdadeira, os passeios dominicais de Mariana não parecem ser algo que delimite as possibilidades do mundo. Conseguimos imaginar que o mundo poderia ser (ou ter sido) diferente, de modo que '$(D \wedge V) \rightarrow P$' fosse falsa. Mariana, por algum motivo qualquer, poderia simplesmente não ter ido à praia em algum domingo. Esta situação gera uma valoração na qual '$D \wedge V$' é verdadeira, mas 'P' é falsa.

Para finalizar. Comprometer-se com a verdade de uma sentença é comprometer-se com o fato específico que ela afirma, que pode ser verificado no mundo real. A lógica, a metafísica e a filosofia em geral pouco nos ajudam nesta verificação. Melhor contar aqui com a ciência, nossos sentidos, o jornalismo, até a internet, se tivermos cuidado. Por outro lado, comprometer-se com a necessidade de uma sentença é comprometer-se com algo que não se pode verificar no mundo real, é comprometer-se com certas características gerais que limitam e constrangem todas as alternativas concebíveis para o mundo real. Para este tipo de verificação, a ciência, nossos sentidos, o jornalismo e a internet pouco nos ajudarão. Aqui, sim, a lógica, a metafísica e a filosofia em geral serão os únicos instrumentos de que dispomos.

Exercícios

A. Examine as tabelas de verdade que você fez como resposta ao Exercício 11 **A** e determine quais sentenças são tautologias, quais são contradições e quais são contingências (ou seja, nem tautologias, nem contradições).

B. Use tabelas de verdade para determinar se as sentenças de cada um dos quatro itens abaixo são conjuntamente satisfatórias ou conjuntamente insatisfatórias:

1. $A \rightarrow A$, $\neg A \rightarrow \neg A$, $A \wedge A$, $A \vee A$
2. $A \vee B$, $A \rightarrow C$, $B \rightarrow C$
3. $B \wedge (C \vee A)$, $A \rightarrow B$, $\neg(B \vee C)$
4. $A \leftrightarrow (B \vee C)$, $C \rightarrow \neg A$, $A \rightarrow \neg B$

C. Use tabelas de verdade para determinar se cada um dos cinco argumentos abaixo é válido ou inválido.

1. $A \rightarrow A \therefore A$
2. $A \rightarrow (A \wedge \neg A) \therefore \neg A$
3. $A \vee (B \rightarrow A) \therefore \neg A \rightarrow \neg B$
4. $A \vee B, B \vee C, \neg A \therefore B \wedge C$
5. $(B \wedge A) \rightarrow C, (C \wedge A) \rightarrow B \therefore (C \wedge B) \rightarrow A$

D. Para cada uma das seis sentenças abaixo, determine se ela é uma tautologia, uma contradição ou uma sentença contingente, usando, em cada caso, uma tabela de verdade completa.

1. $\neg B \wedge B$
2. $\neg D \vee D$
3. $(A \wedge B) \vee (B \wedge A)$
4. $\neg[A \rightarrow (B \rightarrow A)]$
5. $A \leftrightarrow [A \rightarrow (B \wedge \neg B)]$
6. $[(A \wedge B) \leftrightarrow B] \rightarrow (A \rightarrow B)$

E. Determine, para cada um dos cinco pares de sentença abaixo, se as sentenças do par são ou não são logicamente equivalentes, usando, para isso, tabelas de verdade completas.

1. A e $\neg A$
2. $A \wedge \neg A$ e $\neg B \leftrightarrow B$
3. $[(A \vee B) \vee C]$ e $[A \vee (B \vee C)]$
4. $A \vee (B \wedge C)$ e $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
5. $[A \wedge (A \vee B)] \rightarrow B$ e $A \rightarrow B$

F. Determine, para cada um dos cinco pares de sentença abaixo, se as sentenças do par são ou não são logicamente equivalentes, usando, para isso, tabelas de verdade completas.

1. $A \rightarrow A$ e $A \leftrightarrow A$
2. $\neg(A \rightarrow B)$ e $\neg A \rightarrow \neg B$
3. $A \vee B$ e $\neg A \rightarrow B$
4. $(A \rightarrow B) \rightarrow C$ e $A \rightarrow (B \rightarrow C)$
5. $A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$ e $A \wedge (B \wedge C)$

G. Determine se as sentenças de cada uma das cinco coleções abaixo são conjuntamente satisfatórias ou conjuntamente insatisfatórias, usando, em cada caso, uma tabela de verdade completa.

1. $A \wedge \neg B$, $\neg(A \rightarrow B)$, $B \rightarrow A$
2. $A \vee B$, $A \rightarrow \neg A$, $B \rightarrow \neg B$
3. $\neg(\neg A \vee B)$, $A \rightarrow \neg C$, $A \rightarrow (B \rightarrow C)$
4. $A \rightarrow B$, $A \wedge \neg B$
5. $A \rightarrow (B \rightarrow C)$, $(A \rightarrow B) \rightarrow C$, $A \rightarrow C$

H. Determine se as sentenças de cada uma das cinco coleções abaixo são conjuntamente satisfatórias ou conjuntamente insatisfatórias, usando, em cada caso, uma tabela de verdade completa.

1. $\neg B$, $A \to B$, A
2. $\neg(A \lor B)$, $A \leftrightarrow B$, $B \to A$
3. $A \lor B$, $\neg B$, $\neg B \to \neg A$
4. $A \leftrightarrow B$, $\neg B \lor \neg A$, $A \to B$
5. $(A \lor B) \lor C$, $\neg A \lor \neg B$, $\neg C \lor \neg B$

I. Determine se cada um dos quatro argumentos abaixo é válido ou inválido, usando, em cada caso, uma tabela de verdade completa.

1. $A \to B, B \therefore A$
2. $A \leftrightarrow B, B \leftrightarrow C \therefore A \leftrightarrow C$
3. $A \to B, A \to C \therefore B \to C$
4. $A \to B, B \to A \therefore A \leftrightarrow B$

J. Determine se cada um dos cinco argumentos abaixo é válido ou inválido, usando, em cada caso, uma tabela de verdade completa.

1. $A \lor \big[A \to (A \leftrightarrow A)\big] \therefore A$
2. $A \lor B, B \lor C, \neg B \therefore A \land C$
3. $A \to B, \neg A \therefore \neg B$
4. $A, B \therefore \neg(A \to \neg B)$
5. $\neg(A \land B), A \lor B, A \leftrightarrow B \therefore C$

K. Responda cada uma das sete perguntas abaixo e justifique todas as suas respostas.

1. Suponha que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sejam logicamente equivalentes. O que esta suposição nos diz a respeito de se $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ é uma tautologia, uma contradição ou uma contingência?
2. Suponha que $(\mathcal{A} \land \mathcal{B}) \to \mathcal{C}$ não seja nem uma tautologia, nem uma contradição. O que esta suposição nos diz a respeito da validade ou não de $\mathcal{A}, \mathcal{B} \therefore \mathcal{C}$?

3. Suponha que $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sejam conjuntamente insatisfatórias. O que esta suposição nos diz a respeito de se $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$ é uma tautologia, uma contradição ou uma contingência?
4. Suponha que $\mathcal{A}$ seja uma contradição. O que esta suposição nos diz a respeito de $\mathcal{A}, \mathcal{B} \vDash \mathcal{C}$? $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sustentam $\mathcal{C}$ ou não?
5. Suponha que $\mathcal{C}$ seja uma tautologia. O que esta suposição nos diz a respeito de $\mathcal{A}, \mathcal{B} \vDash \mathcal{C}$? $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sustentam $\mathcal{C}$ ou não?
6. Suponha que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sejam logicamente equivalentes. O que esta suposição nos diz a respeito de se $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ é uma tautologia, uma contradição ou uma contingência?
7. Suponha que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ *não* sejam logicamente equivalentes. O que esta suposição nos diz a respeito de se $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ é uma tautologia, uma contradição ou uma contingência?

L. Considere o seguinte princípio:

- Assuma que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sejam logicamente equivalentes. Suponha que um argumento contenha $\mathcal{A}$ (ou como uma premissa ou como a conclusão). A validade do argumento não é afetada quando substituímos $\mathcal{A}$ por $\mathcal{B}$.

Este princípio está correto? Explique sua resposta.

CAPÍTULO 13

Atalhos nas tabelas de verdade

Com a prática, produzir tabelas de verdade se tornará uma atividade simples para você. Ao fazer os exercícios do capítulo anterior você deve ter notado que, apesar de ser trabalhoso e um pouco monótono, preencher tabelas de verdade não é uma atividade assim tão difícil. É uma espécie de contabilidade lógica. Muito mais difícil do que preencher tabelas de verdade é produzir boas simbolizações e refletir sobre a adequação ou não das simbolizações com relação aos argumentos originais. Vamos, neste capítulo e no próximo, facilitar um pouco mais as coisas com as tabelas de verdade, fornecendo alguns atalhos permitidos em seu preenchimento.

13.1 Trabalhando com tabelas de verdade

Você descobrirá rapidamente que não precisa copiar o valor de verdade de cada letra sentencial. Você pode simplesmente consultá-los nas colunas do lado esquerdo do traço vertical. Por exemplo:

P	Q	$(P \vee Q) \leftrightarrow \neg\, P$
V	V	V V V **F** F V
V	F	V V F **F** F V
F	V	F V V **V** V F
F	F	F F F **F** V F

A tabela acima, quando não reescrevemos os valores de verdade abaixo das letras sentenciais do lado direito do traço vertical, pode ser preenchida, de modo mais abreviado, como:

P	Q	$(P \vee Q) \leftrightarrow \neg\, P$
V	V	V **F** F
V	F	V **F** F
F	V	V **V** V
F	F	F **F** V

Você também sabe com certeza que para uma disjunção ser verdadeiras, basta que um de seus disjuntos seja verdadeiro. Portanto, se em uma certa linha da tabela de verdade você encontrar um disjunto verdadeiro, não há necessidade de calcular o valor de verdade do outro disjunto para saber que a disjunção é verdadeira naquela linha.

O conectivo principal da sentença da tabela de verdade abaixo é uma disjunção. Um dos disjuntos é apenas uma negação e o outro uma sentença bem mais complexa. Pouparemos trabalho se preenchermos a coluna do disjunto mais simples primeiro. Fazendo isso, só precisaremos calcular os valores de verdade do disjunto mais complexo nas linhas em que o disjunto mais simples tem valor falso. Veja:

P	Q	$(\neg\, P \vee \neg\, Q) \vee \neg\, P$
V	V	F F F **F** F
V	F	F V V **V** F
F	V	– **V** V
F	F	– **V** V

Apenas para registrar, colocaremos um traço '–' na coluna do conectivo principal da sentença ou subsentença que não precisa ser calculada.

Eis outro atalho. Você também sabe com certeza que para uma conjunção ser falsa, basta que um dos conjuntos seja falso. Portanto, se você encontrar um conjunto falso, não há necessidade de descobrir o valor de verdade do outro conjunto. Assim, também com as conjunções você pode poupar trabalho se calcular os valores de verdade dos conjuntos mais simples, conforme o exemplo abaixo ilustra:

P	Q	$\neg$	$(P$	$\wedge$	$\neg Q)$	$\wedge$	$\neg$	P
V	V	–				**F**	F	
V	F	–				**F**	F	
F	V	V		F		**V**	V	
F	F	V		F		**V**	V	

O condicional também tem atalhos semelhantes. Duas possibilidades distintas garantem a verdade do condicional: quando o consequente é verdadeiro sabemos que o condicional é verdadeiro; e quando o antecedente é falso, sabemos também que o condicional é verdadeiro. Então, também com as sentenças condicionais, pouparemos trabalho se preenchermos primeiro a coluna da sub-sentença mais simples. Os dois exemplos abaixo ilustram as duas possibilidades de atalho para o condicional:

P	Q	$((P$	$\rightarrow$	$Q)$	$\rightarrow$	$P)$	$\rightarrow$	P
V	V				–		**V**	
V	F				–		**V**	
F	V		V		F		**V**	
F	F		V		F		**V**	

e

P	Q	P	$\rightarrow$	$((Q$	$\rightarrow$	$P)$	$\rightarrow$	$Q)$
V	V		**V**		–		V	
V	F		**F**		V		F	
F	V		**V**				–	
F	F		**V**				–	

Repare que '$((P \to Q) \to P) \to P$' é uma tautologia. Ela, de fato, é um exemplo da *Lei de Peirce*, assim chamada em homenagem ao filósofo e lógico a Charles Sanders Peirce.

13.2 Testando a validade ou sustentação

Quando usamos tabelas verdadeiras para testar a validade ou sustentação, nossa tarefa é procurar as linhas *ruins*, aquelas que indicam que as premissas *não* sustentam a conclusão: ou seja, linhas onde as premissas são todas verdadeiras e a conclusão é falsa. Repare que:

- Qualquer linha em que a conclusão seja verdadeira não será uma linha ruim.
- Qualquer linha em que alguma premissa seja falsa não será uma linha ruim.

Se levarmos isso em consideração, podemos economizar muito trabalho. Sempre que encontrarmos uma linha onde a conclusão é verdadeira, não precisamos avaliar mais nada nessa linha: saberemos que essa linha definitivamente não é ruim. Da mesma forma, sempre que encontrarmos uma linha onde alguma premissa é falsa, não precisamos avaliar mais nada nessa linha. Aqui também a estratégia é sempre preencher as colunas das sentenças mais simples antes das mais complicadas.

Com isso em mente, considere como poderíamos testar a validade do seguinte argumento:

$$\neg L \to (J \lor L), \neg L \therefore J$$

A *primeira* coisa que devemos fazer é avaliar a conclusão. Afinal ela é a sentença mais simples: apenas uma letra sentencial. Qualquer linha na qual a conclusão é *verdadeira* não é uma linha ruim, e, por isso, não precisaremos calcular mais nada nesta linha. Após este primeiro estágio nossa tabela fica:

J	L	$\neg L \to (J \vee L)$	$\neg L$	J
V	V	–	–	V
V	F	–	–	V
F	V			F
F	F			F

onde os traços indicam os valores com os quais não precisamos mais nos preocupar, já que as linhas em que ocorrem não são ruins, e não precisamos calcular mais nada nestas linhas. Os espaços em branco indicam que os valores que, por ora, precisamos continuar investigando.

A premissa mais simples e fácil de avaliar é a segunda, então continuamos nossa tabela preenchendo a coluna da segunda premissa, nas linhas não marcadas com pontos (que ainda não foram descartadas).

J	L	$\neg L \to (J \vee L)$	$\neg L$	J
V	V	–	–	V
V	F	–	–	V
F	V	–	F	F
F	F		V	F

Observe que podemos descartar também a terceira linha: ela não será uma linha ruim porque (pelo menos) uma das premissas é falsa nesta linha. Por fim, concluímos a tabela verdade calculando o valor da primeira premissa apenas na última linha, que ainda não foi descartada.

J	L	$\neg L \to (J \vee L)$	$\neg L$	J
V	V	–	–	V
V	F	–	–	V
F	V	–	F	F
F	F	V **F** F	V	F

A tabela de verdade não tem linhas ruins, portanto as premissas sustentam a conclusão e o argumento é válido.

Vamos fazer mais um exemplo e verificar se o seguinte argumento é válido

$$A \vee B, \neg(A \wedge C), \neg(B \wedge \neg D) \therefore (\neg C \vee D)$$

No primeiro estágio, calculamos o valor de verdade da conclusão. Como se trata de uma disjunção, ela será verdadeira sempre que qualquer disjunto for verdadeiro, então aceleramos um pouco as coisas ali, calculando o valor de verdade de '$\neg C$' apenas nas linhas em que 'D é falso. Feito isso, podemos então ignorar a maioria das linhas, exceto as poucas nas quais a conclusão é falsa.

A	B	C	D	$A \vee B$	$\neg(A \wedge C)$	$\neg(B \wedge \neg D)$	$(\neg C$	$\vee D)$
V	V	V	V	–	–	–		**V**
V	V	V	F				F	**F**
V	V	F	V	–	–	–		**V**
V	V	F	F	–	–	–	V	**V**
V	F	V	V	–	–	–		**V**
V	F	V	F				F	**F**
V	F	F	V	–	–	–		**V**
V	F	F	F	–	–	–	V	**V**
F	V	V	V	–	–	–		**V**
F	V	V	F				F	**F**
F	V	F	V	–	–	–		**V**
F	V	F	F	–	–	–	V	**V**
F	F	V	V	–	–	–		**V**
F	F	V	F				F	**F**
F	F	F	V	–	–	–		**V**
F	F	F	F	–	–	–	V	**V**

Devemos agora avaliar as premissas, começando pela mais simples, usando atalhos sempre que pudermos:

A	B	C	D	$A \vee B$	$\neg\,(A \wedge C)$	$\neg(B \wedge \neg\, D)$	$(\neg C \vee D)$
V	V	V	V	–	–	–	**V**
V	V	V	F	**V**	**F** V	–	F **F**
V	V	F	V	–	–	–	**V**
V	V	F	F	–	–	–	V **V**
V	F	V	V	–	–	–	**V**
V	F	V	F	**V**	**F** V	–	F **F**
V	F	F	V	–	–	–	**V**
V	F	F	F	–	–	–	V **V**
F	V	V	V	–	–	–	**V**
F	V	V	F	**V**	**V** F	**F** V V	F **F**
F	V	F	V	–	–	–	**V**
F	V	F	F	–	–	–	V **V**
F	F	V	V	–	–	–	**V**
F	F	V	F	**F**	–	–	F **F**
F	F	F	V	–	–	–	**V**
F	F	F	F	–	–	–	V **V**

Podemos ver na tabela que o argumento é válido. Ela não tem linha ruim, em que todas as premissas verdadeiras e a conclusão falsa. Mesmo com a maioria dos valores não preenchidos, tudo o que é necessário para vermos este fato está na tabela. Examine-a com calma e certifique-se disso. Nossos atalhos nos ajudaram a poupar *muito* trabalho. Se tivéssemos preenchido toda a tabela, teríamos escrito 256 'V's ou 'F's. Como usamos atalhos, escrevemos apenas 37.

Exercícios

A. Usando atalhos, determine se cada uma das nove sentenças abaixo é uma tautologia, uma contradição ou uma contingência.

1. $\neg B \wedge B$
2. $\neg D \vee D$
3. $(A \wedge B) \vee (B \wedge A)$
4. $\neg[A \rightarrow (B \rightarrow A)]$

5. $A \leftrightarrow [A \rightarrow (B \wedge \neg B)]$
6. $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow A$
7. $A \rightarrow (B \vee C)$
8. $(A \wedge \neg A) \rightarrow (B \vee C)$
9. $(B \wedge D) \leftrightarrow [A \leftrightarrow (A \vee C)]$

CAPÍTULO 14

Tabelas de verdade parciais

Nem sempre precisamos das informações de todas as linhas de uma tabela da verdade. Às vezes, apenas uma ou duas linhas bastam.

Tautologia. Para mostrar que uma sentença é uma tautologia, precisamos mostrar que ela é verdadeira em todas as valorações. Ou seja, precisamos saber que ela é verdadeira em todas as linhas da tabela de verdade. Então, mesmo que usemos os atalhos aprendidos no Capítulo anterior, para mostrar que uma sentença é uma tautologia precisamos de uma tabela de verdade completa, com o conectivo principal da sentença preenchido em todas as linhas.

Entretanto, para mostrar que uma sentença *não* é uma tautologia, basta uma linha na qual a sentença seja falsa. Ou seja, não precisamos fazer uma tabela de verdade completa para mostrar que uma sentença não é uma tautologia. Podemos fazer isso com uma *tabela de verdade parcial.*

Suponha que queiramos mostrar que a sentença

$$(U \wedge T) \rightarrow (S \wedge W)$$

não é uma tautologia. Montamos, para isso, uma TABELA DE VERDADE PARCIAL:

S	T	U	W	$(U$	$\wedge$	$T)$	$\rightarrow$	$(S$	$\wedge$	$W)$

A tabela completa teria 16 linhas, já que a sentença tem 4 letras sentenciais. Mas deixamos espaço para apenas uma linha, pois uma linha em que a sentença seja falsa é suficiente para mostrar que ela não é uma tautologia. Como o que nos interessa é uma linha na qual a sentença seja falsa, preenchemos com um 'F' a coluna do conectivo principal da sentença:

S	T	U	W	$(U$	$\wedge$	$T)$	$\rightarrow$	$(S$	$\wedge$	$W)$
							F			

O que precisamos fazer agora é encontrar uma valoração na qual a sentença é mesmo falsa; ou seja, encontrar valores de verdade para as 4 letras sentencias (S, T, U e W) para os quais a sentença '$(U \wedge T) \rightarrow (S \wedge W)$' é falsa. Como o conectivo principal da sentença é um condicional, e um condicional é falso sempre que seu antecedente for verdadeiro e seu consequente for falso, preenchemos isso na tabela:

S	T	U	W	$(U$	$\wedge$	$T)$	$\rightarrow$	$(S$	$\wedge$	$W)$
					V		**F**		F	

Para que o '$(U \wedge T)$' seja verdadeira,'U' e 'T' devem ser ambos verdadeiros. Então, também preenchemos isso na tabela:

S	T	U	W	$(U$	$\wedge$	$T)$	$\rightarrow$	$(S$	$\wedge$	$W)$
	V	V		V	V	V	**F**		F	

Agora, apenas precisamos tornar '$(S \wedge W)$' falsa. Para fazer isso, pelo menos um entre 'S' e 'W' deve ser falso. Podemos tornar ambos 'S' e 'W' falsos, se quisermos; ou apenas o primeiro, ou apenas o segundo. Tanto faz. Tudo o que importa é que a sentença completa seja falsa nessa linha. Esta multiplicidade de opções apenas indica que a sentença é falsa em mais de uma linha da tabela de verdade completa. Então, escolhendo arbitrariamente uma dessas três opções, concluímos assim a tabela:

S	T	U	W	$(U \wedge T) \rightarrow (S \wedge W)$
F	V	V	F	V V V **F** F F F

O que obtivemos foi uma tabela de verdade parcial que mostra que '$(U \wedge T) \rightarrow (S \wedge W)$' não é uma tautologia. Em outras palavras, mostramos que existe uma valoração na qual '$(U \wedge T) \rightarrow (S \wedge W)$' é falsa. Esta valoração está explicitada na única linha da tabela que foi preenchida, e é caracterizada pelos seguintes valores de verdade das letras sentenciais: 'S' é falsa, 'T' é verdadeira, 'U' é verdadeira e 'W' é falsa.

Contradição. Mostrar que algo é uma contradição requer uma tabela de verdade completa: precisamos mostrar que não há valoração na qual a sentença é verdadeira; isto é, precisamos mostrar que a sentença é falsa em todas as linhas da tabela de verdade.

No entanto, para mostrar que uma sentença ***não*** é uma contradição, tudo o que precisamos fazer é encontrar uma valoração na qual a sentença é verdadeira. E para fazer isso, uma única linha de uma tabela de verdade é suficiente. Vamos ilustrar isso com a mesma sentença do exemplo anterior.

S	T	U	W	$(U \wedge T) \rightarrow (S \wedge W)$
				V

Esta é uma sentença condicional (seu conectivo principal é um condicional) e sabemos que um condicional é verdadeiro tanto se seu antecedente for falso, quanto se seu consequente for verdadeiro. Temos duas opções para trabalhar. Escolhemos arbitrariamente a primeira: vamos fazer o antecedente deste condicional

'$(U \wedge T)$' falso. Como o antecedente é uma conjunção, basta que tenha um conjunto falso, para que seja falsa. Também de modo arbitrário, sem qualquer motivo específico, vamos tornar 'U' falsa. Fazendo isso, podemos atribuir qualquer valor de verdade às outras letras que a sentença completa será falsa. Então completamos a tabela assim:

S	T	U	W	$(U \wedge T) \rightarrow (S \wedge W)$
F	V	F	F	F F V **V** F F F

Esta tabela parcial mostra que a sentença '$(U \wedge T) \rightarrow (S \wedge W)$' não é uma contradição porque ela mostra que na valoração em que 'S' é falsa, 'T' é verdadeira, 'U' é falsa e 'W' é falsa, a sentença condicional é verdadeira.

Equivalência. Para mostrar que duas sentenças são equivalentes, devemos mostrar que as sentenças têm o mesmo valor de verdade em todas as valorações. Isso requer uma tabela de verdade completa, com todas as linhas.

Mas para mostrar que duas sentenças *não* são equivalentes, precisamos apenas mostrar que existe uma valoração na qual elas têm valores de verdade diferentes. Isso requer uma tabela de verdade parcial de uma linha apenas. Para fazer isso aplicamos estes mesmos procedimentos para construir uma tabela parcial de uma linha, na qual uma das sentenças é verdadeira e a outra é falsa.

Consistência. Para mostrar que algumas sentenças são conjuntamente satisfatórias, devemos mostrar que existe uma valoração em que todas as sentenças são verdadeiras. Uma tabela de verdade parcial com uma única linha é suficiente para fazer isso.

Já para mostrar que algumas sentenças são conjuntamente insatisfatórias, devemos mostrar que não há valoração em que todas as sentenças sejam verdadeiras. Para isso, uma tabela parcial não basta. Precisamos de uma tabela completa, com todas as linhas para ver que em cada linha da tabela pelo menos uma das sentenças é falsa.

Validade. Para mostrar que um argumento é válido (ou que suas premissas sustentam a conclusão), devemos mostrar que não há valoração na qual todas as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa. Isso requer uma tabela de verdade completa, porque temos que mostrar que isso não ocorre em nenhuma linha da tabela.

No entanto, para mostrar que um argumento é *inválido* (ou que suas premissas não sustentam a conclusão), devemos mostrar que existe uma valoração na qual todas as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa. Uma tabela de verdade parcial com apenas uma linha será suficiente para isso. Basta que nesta linha as premissas sejam todas verdadeiras e a conclusão seja falsa.

Veja abaixo um resumo sobre que tipo de tabela de verdade é necessária nos diversos testes:

Teste	**Sim**	**Não**
A sentença é tautologia?	completa	uma linha
A sentença é contradição?	completa	uma linha
A sentença é contingente?	duas linhas	completa
As sentenças são equivalentes?	completa	uma linha
As sentenças são cojuntamente satisfatórias?	uma linha	completa
O argumento válido?	completa	uma linha
As premissas sustentam a conclusão?	completa	uma linha

Exercícios

A. Use tabelas de verdade completas ou parciais (conforme o que for apropriado) para determinar se as sentenças de cada um dos oito pares abaixo são ou não logicamente equivalentes:

1. A, $\neg A$
2. A, $A \vee A$
3. $A \rightarrow A$, $A \leftrightarrow A$

4. $A \vee \neg B$, $A \rightarrow B$
5. $A \wedge \neg A$, $\neg B \leftrightarrow B$
6. $\neg(A \wedge B)$, $\neg A \vee \neg B$
7. $\neg(A \rightarrow B)$, $\neg A \rightarrow \neg B$
8. $(A \rightarrow B)$, $(\neg B \rightarrow \neg A)$

B. Use tabelas de verdade completas ou parciais (conforme o que for apropriado) para determinar se as sentenças de cada um dos seis grupos abaixo são ou não conjuntamente satisfatórias:

1. $A \wedge B$, $C \rightarrow \neg B$, C
2. $A \rightarrow B$, $B \rightarrow C$, A, $\neg C$
3. $A \vee B$, $B \vee C$, $C \rightarrow \neg A$
4. A, B, C, $\neg D$, $\neg E$, F
5. $A \wedge (B \vee C)$, $\neg(A \wedge C)$, $\neg(B \wedge C)$
6. $A \rightarrow B$, $B \rightarrow C$, $\neg(A \rightarrow C)$

C. Use tabelas de verdade completas ou parciais (conforme o que for apropriado) para determinar se cada um dos cinco argumentos abaixo é válido ou inválido:

1. $A \vee \big[A \rightarrow (A \leftrightarrow A)\big] \therefore A$
2. $A \leftrightarrow \neg(B \leftrightarrow A) \therefore A$
3. $A \rightarrow B, B \therefore A$
4. $A \vee B, B \vee C, \neg B \therefore A \wedge C$
5. $A \leftrightarrow B, B \leftrightarrow C \therefore A \leftrightarrow C$

D. Para cada uma das dez sentenças abaixo, decida se ela é uma tautologia, uma contradição ou uma sentença contingente. Justifique sua resposta em cada caso com uma tabela de verdade completa ou, quando for apropriado, parcial.

1. $A \rightarrow \neg A$
2. $A \rightarrow (A \wedge (A \vee B))$
3. $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (B \rightarrow A)$
4. $A \rightarrow \neg(A \wedge (A \vee B))$
5. $\neg B \rightarrow [(\neg A \wedge A) \vee B]$

6. $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
7. $[(A \wedge B) \wedge C] \rightarrow B$
8. $\neg\big[(C \vee A) \vee B\big]$
9. $\big[(A \wedge B) \wedge \neg(A \wedge B)\big] \wedge C$
10. $(A \wedge B)] \rightarrow [(A \wedge C) \vee (B \wedge D)]$

E. Para cada uma das dez sentenças abaixo, decida se ela é uma tautologia, uma contradição ou uma sentença contingente. Justifique sua resposta em cada caso com uma tabela de verdade completa ou, quando for apropriado, parcial.

1. $\neg(A \vee A)$
2. $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$
3. $[(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow A$
4. $\neg[(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)]$
5. $(A \wedge B) \vee (A \vee B)$
6. $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow A$
7. $A \rightarrow (B \vee C)$
8. $(A \wedge \neg A) \rightarrow (B \vee C)$
9. $(B \wedge D) \leftrightarrow [A \leftrightarrow (A \vee C)]$
10. $\neg[(A \rightarrow B) \vee (C \rightarrow D)]$

F. Use tabelas de verdade completas ou parciais (conforme o que for apropriado) para decidir se as sentenças de cada um dos nove pares abaixo são ou não logicamente equivalentes:

1. A and $A \vee A$
2. A and $A \wedge A$
3. $A \vee \neg B$ and $A \rightarrow B$
4. $(A \rightarrow B)$ and $(\neg B \rightarrow \neg A)$
5. $\neg(A \wedge B)$ and $\neg A \vee \neg B$
6. $((U \rightarrow (X \vee X)) \vee U)$ and $\neg(X \wedge (X \wedge U))$
7. $((C \wedge (N \leftrightarrow C)) \leftrightarrow C)$ and $(\neg\neg\neg N \rightarrow C)$
8. $[(A \vee B) \wedge C]$ and $[A \vee (B \wedge C)]$

9. $((L \wedge C) \wedge I)$ and $L \vee C$

G. Use tabelas de verdade completas ou parciais (conforme o que for apropriado) para decidir se as sentenças de cada um dos dez grupos abaixo são ou não conjuntamente satisfatórias:

1. $A \to A$, $\neg A \to \neg A$, $A \wedge A$, $A \vee A$
2. $A \to \neg A$, $\neg A \to A$
3. $A \vee B$, $A \to C$, $B \to C$
4. $A \vee B$, $A \to C$, $B \to C$, $\neg C$
5. $B \wedge (C \vee A)$, $A \to B$, $\neg(B \vee C)$
6. $(A \leftrightarrow B) \to B$, $B \to \neg(A \leftrightarrow B)$, $A \vee B$
7. $A \leftrightarrow (B \vee C)$, $C \to \neg A$, $A \to \neg B$
8. $A \leftrightarrow B$, $\neg B \vee \neg A$, $A \to B$
9. $A \leftrightarrow B$, $A \to C$, $B \to D$, $\neg(C \vee D)$
10. $\neg(A \wedge \neg B)$, $B \to \neg A$, $\neg B$

H. Para cada um dos dez argumentos abaixo, decida se ele é válido ou inválido. Use tabelas de verdade completas ou parciais (conforme o que for apropriado) para justificar sua resposta em cada caso:

1. $A \to (A \wedge \neg A) \therefore \neg A$
2. $A \vee B$, $A \to B$, $B \to A \therefore A \leftrightarrow B$
3. $A \vee (B \to A) \therefore \neg A \to \neg B$
4. $A \vee B$, $A \to B$, $B \to A \therefore A \wedge B$
5. $(B \wedge A) \to C$, $(C \wedge A) \to B \therefore (C \wedge B) \to A$
6. $\neg(\neg A \vee \neg B)$, $A \to \neg C \therefore A \to (B \to C)$
7. $A \wedge (B \to C)$, $\neg C \wedge (\neg B \to \neg A) \therefore C \wedge \neg C$
8. $A \wedge B$, $\neg A \to \neg C$, $B \to \neg D \therefore A \vee B$
9. $A \to B \therefore (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
10. $\neg A \to B, \neg B \to C, \neg C \to A \therefore \neg A \to (\neg B \vee \neg C)$

I. Para cada um dos cinco argumentos abaixo, decida se ele é válido ou inválido. Use tabelas de verdade completas ou parciais (conforme o que for apropriado) para justificar sua resposta em cada caso:

1. $A \leftrightarrow \neg(B \leftrightarrow A) \therefore A$
2. $A \vee B, B \vee C, \neg A \therefore B \wedge C$
3. $A \rightarrow C, E \rightarrow (D \vee B), B \rightarrow \neg D \therefore (A \vee C) \vee (B \rightarrow (E \wedge D))$
4. $A \vee B, C \rightarrow A, C \rightarrow B \therefore A \rightarrow (B \rightarrow C)$
5. $A \rightarrow B, \neg B \vee A \therefore A \leftrightarrow B$

PARTE IV

Lógica de primeira ordem

CAPÍTULO 15

Elementos fundamentais da LPO

15.1 A necessidade de 'olhar dentro' das sentenças

Considere o seguinte argumento, que é obviamente válido em português:

Samir é um lógico.
Todos os lógicos usam chapéus ridículos.
$\therefore$ Samir usa chapéus ridículos.

Repare que todas as sentenças deste argumento são atômicas, ou seja, não são compostas por sentenças mais simples ligadas por conectivos verofuncionais. Por isso qualquer chave de simbolização para o argumento na LVF seria semelhante a esta:

L: Samir é um lógico.
T: Todos os lógicos usam chapéus ridículos.

R: Samir usa chapéus ridículos.

Sob esta chave nosso argumento fica simplesmente:

$$L, T \therefore R$$

Esse argumento é *inválido* na LVF, mas o argumento original em português é claramente válido.

Temos um problema aqui. O argumento em português é válido porque não tem contraexemplo, já que em todo cenário hipotético (situação concebível) em que é verdade que todos os lógicos usam chapéus ridículos e Samir é um lógico, também será verdade que Samir usa chapéus ridículos. Mas há uma valoração na qual 'L' e 'T' são verdadeiras e 'R' é falsa e, portanto, o argumento simbolizado não é válido. Temos então uma valoração que nenhuma situação concebível é capaz de gerar. Isso demonstra que há uma assincronia (uma discrepância) entre as situações às quais as sentenças do argumento original em português podem estar se referindo e as valorações do argumento simbolizado na LVF.

Acontece que não cometemos nenhum erro de simbolização. Esta é a melhor simbolização na LVF que podemos oferecer a este argumento. Qualquer outra chave de simbolização aceitável na LVF diferiria desta apenas nas letras sentenciais utilizadas. O argumento simbolizado continuaria inválido em qualquer uma delas. Este fato, conforme vimos na Seção 12.5, é um indício de que este argumento está além dos limites da LVF e vai requerer uma nova linguagem, com mais recursos, para que possa ser adequadamente simbolizado.

A sentença 'Todos os lógicos usam chapéus ridículos' é uma sentença sobre lógicos e seu gosto peculiar por chapéus. Ela tem uma estrutura formal interna que reflete e expressa a relação de qualquer lógico com o tipo de chapéu que ele usa. Muitas outras sentenças, tais como 'Todos os filósofos adoram repolho', ou 'Todos os seres humanos são mortais', têm esta mesma estrutura formal que reflete um tipo de relação semelhante de qualquer filósofo com seu gosto por repolho e de qualquer ser humano com sua mortalidade. No entanto, todas estas sentenças são atômicas e por isso são todas simbolizadas na LVF por letras sentenciais isoladas. Mas nenhuma letra sentencial tem estrutura. E, sem estrutura, nenhuma letra sentencial conseguirá expressar esta relação entre ser um lógico e usar chapéus ridículos, ou ser um filósofo e adorar repolho.

Para simbolizar adequadamente argumentos como este, precisamos de uma linguagem nova que nos possibilite olhar dentro das sentenças e decompor as letras sentenciais em partes, de modo que possamos levar em consideração a estrutura formal interna das sentenças. Teremos que desenvolver uma nova linguagem lógica que nos permita *dividir o átomo*. Vamos chamar essa linguagem nova de *lógica de primeira ordem* ou *LPO*.

Os detalhes da LPO serão explicados ao longo de vários capítulos desta e da próxima parte deste livro; mas, antes de entrarmos nos detalhes, vejamos uma breve descrição das ideias básicas e das três "partículas subatômicas" nas quais o átomo (a letra sentencial) será dividido.

Em primeiro lugar, a LPO terá *nomes*. Eles serão indicados por letras minúsculas em itálico. Por exemplo, podemos usar 'b' para representar Beto e 'k' para representar Kaline.

Em segundo lugar, a LPO terá *predicados*. Em português os predicados são expressões como

'_____ é um cachorro'
'_____ é uma advogada'

Estas expressões não são sentenças completas. Para fazer um predicado tornar-se uma sentença completa é preciso preencher sua lacuna (com algum sujeito). Precisamos dizer algo como

"<u>Beto</u> é um cachorro"
"<u>Kaline</u> é uma advogada"

Na LPO, indicaremos predicados com letras maiúsculas em itálico. Por exemplo, podemos usar o predicado da LPO 'C' para simbolizar o predicado do português '_____ é um cachorro'. E então, a expressão

$$C(b)$$

será uma sentença da LPO, que simboliza a sentença em português

'Beto é um cachorro'

Da mesma forma, podemos fazer o predicado 'A' da LPO simbolizar o predicado do português '_____ é uma advogada'. Neste caso a expressão

$$A(k)$$

simbolizará a sentença do português

'Kaline é uma advogada'

Em terceiro lugar, a LPO terá *quantificadores*. Por exemplo, '$\exists$' transmitirá aproximadamente a ideia de 'Há pelo menos um …'. Portanto, podemos simbolizar a sentença do português

'existe um cachorro'

com a sentença da LPO

$$\exists x\, C(x)$$

que leríamos em voz alta como 'existe pelo menos uma coisa, x, de tal forma que x é um cachorro'.

Essa é apenas uma ideia geral. A LPO é significativamente mais complexa e sutil que a LVF e, por isso, vamos começar agora a estudá-la lentamente.

15.2 Nomes

Em português, um *termo singular* é uma palavra ou frase que se refere a uma pessoa, lugar ou coisa *específicos*. A palavra 'cachorro', por exemplo, não é um termo singular, porque existem muitos cachorros e a palavra 'cachorro' não se refere especificamente a nenhum deles. Já a palavra 'Beto' é termo singular, porque se refere a um vira-lata específico. Da mesma forma, a expressão 'o cachorro de Felipe' também é um termo singular, porque se refere a este mesmo pequeno vira-lata específico.

Os *nomes próprios* são um tipo particularmente importante de termo singular. Eles são expressões que selecionam indivíduos sem descrevê-los. O nome 'Emília' é um nome próprio; e o nome, por si só, não diz nada sobre Emília. Certamente, alguns nomes são tradicionalmente dados a meninos e outros são tradicionalmente dados a meninas. Quando 'Ivani' é usado como um termo singular, você pode achar que se refere a uma mulher. Mas você pode estar cometendo um erro. 'Ivani' pode ser nome de um homem, pode nem ser o nome de uma pessoa, mas de um gato, ou de uma gata, ou uma tartaruga.

Na LPO, os NOMES são letras minúsculas de 'a' a 'r'. Podemos adicionar índices numéricos se quisermos usar a mesma letra para nomes diferentes. Aqui estão alguns termos singulares distintos da LPO:

$$a,\ b,\ c, \ldots, r,\ a_1,\ f_{32},\ j_{390},\ m_{12}$$

Os nomes da LPO devem ser entendidos de modo similar aos nomes próprios em português, com uma única diferença. 'José da Silva', por exemplo, é um nome próprio, mas existem muitas pessoas com esse mesmo nome. Nós convivemos com esse tipo de ambiguidade em português, permitindo que o contexto individualize cada um dos vários 'José da Silva'. Na LPO esta ambiguidade não é tolerada. Um nome não pode se referir a mais de uma coisa, mas apenas a uma *única* coisa. (Apesar disso, é sim permitido que uma única coisa tenha mais de um nome diferente.)

Como na LVF, utilizaremos chaves de simbolização também na LPO. Um primeiro elemento, então, que nossas chaves de simbolização da LPO devem conter são os nomes. Vamos utilizá-las para relacionar nomes da LPO com termos singulares (nomes próprios e descrições) do português. Uma chave de simbolização da LPO pode, por exemplo, apresentar a seguinte conexão entre nomes próprios do português e nomes da LPO:

e: Emília
g: Glória
m: Marcelo

15.3 Predicados

Os predicados mais simples são propriedades de indivíduos. São coisas que você pode dizer sobre um objeto. Aqui estão alguns exemplos de predicados em português:

_____ é um cachorro
_____ estudou filosofia na UFRN
Um raio caiu em _____

Em geral, você pode pensar nos predicados como as coisas que se combinam com os termos singulares para formar sentenças completas. Ou seja, ao combinar o predicado '_____ é um cachorro' com o termo singular 'Beto', obtemos a sentença completa 'Beto é um cachorro'. Por outro lado, você pode começar com as sentenças e criar predicados a partir delas, removendo termos singulares. Considere, por exemplo, a sentença 'Viviane pegou emprestado o carro da família de Nelson'. Ao remover um termo singular desta sentença, podemos obter qualquer um dos três predicados diferentes abaixo:

_____ pegou emprestado o carro da família de Nelson
Viviane pegou emprestado _____ de Nelson
Viviane pegou emprestado o carro da família de _____

Os PREDICADOS na LPO são letras maiúsculas de A a Z, com ou sem índices numéricos. Podemos apresentar uma chave de simbolização para predicados assim:

$B(x)$: _____$_x$ está bravo
$A(x)$: _____$_x$ está alegre

(Por que colocamos 'x's como índices das lacunas? Não se preocupe com isso agora. Nos dedicaremos a este ponto no Capítulo 17.)

Se combinarmos isso com a chave de simbolização para nomes que apresentamos na Seção anterior obtemos

$B(x)$: _____$_x$ está bravo
$A(x)$: _____$_x$ está alegre
e: Emília
g: Glória
m: Marcelo

e podemos começar a simbolizar na LPO algumas sentenças do português que usam esses nomes e predicados. Por exemplo, considere as seguintes sentenças:

1. Emília está brava.
2. Glória e Marcelo estão bravos.
3. Se Emília está brava, então Glória e Marcelo também estão.

A sentença 1 é imediatamente simbolizada por:

$$B(e)$$

A sentença 2 é uma conjunção de duas sentenças mais simples. As sentenças simples podem ser simbolizadas respectivamente por '$B(g)$' e '$B(m)$'. Então nós utilizamos aqui os recursos da LVF e simbolizamos a sentença inteira por

$$B(g) \land B(m)$$

Isso ilustra um ponto importante: a LPO possui todos os conectivos verofuncionais da LVF.

A sentença 3 é um condicional, cujo antecedente é a sentença 1 e cujo consequente é a sentença 2. Então, podemos simbolizá-la como:

$$B(e) \to (B(g) \land B(m))$$

15.4 Quantificadores

Estamos agora prontos para introduzir os quantificadores. Considere estas sentenças:

4. Todos estão alegres.
5. Alguém está bravo.

Pode parecer tentador simbolizar a sentença 4 como:

$$A(e) \wedge A(g) \wedge A(m)$$

No entanto, isso diria apenas que Emília, Glória e Marcelo estão alegres. Mas não é isso exatamente o que queremos dizer com a sentença 4. Queremos dizer que *todos* estão alegres, mesmo aqueles a quem não demos nome. Para fazer isso, utilizaremos o símbolo '$\forall$', que é chamado de QUANTIFICADOR UNIVERSAL.

Um quantificador deve ser seguido sempre por uma VARIAVEL. Na LPO, as variáveis são as letras minúsculas de 's' a 'z', em itálico, com ou sem índices numéricos. Podemos, assim, simbolizar a sentença 4 como:

$$\forall x\, A(x)$$

A variável 'x' funciona como um tipo de marca que reserva um lugar. A expressão '$\forall x$' grosso modo significa que você pode escolher qualquer coisa e colocá-la como 'x'. A expressão que a segue, '$A(x)$', indica, desta coisa que você escolheu, que ela está alegre.

Deve-se ressaltar que não há qualquer razão especial para usarmos 'x' em vez de alguma outra variável. As sentenças '$\forall x\, A(x)$', '$\forall y\, A(y)$', '$\forall z\, A(z)$' e '$\forall x_5 A(x_5)$' usam variáveis diferentes, mas todas são simbolizações logicamente equivalentes da sentença 4.

Para simbolizar a sentença 5, introduzimos mais um símbolo novo: o QUANTIFICADOR EXISTENCIAL, '$\exists$'. Assim como o quantificador universal, o quantificador existencial também requer uma variável. A sentença 5 pode ser simbolizada por:

$$\exists x\, B(x)$$

Enquanto '$\forall x\, B(x)$' deve ser lida como 'para todo x, x está bravo', '$\exists x\, B(x)$' deve ser lida como 'existe algo, x, tal que x está bravo'. Aqui também a variável serve apenas para reservar um espaço; poderíamos facilmente simbolizar a sentença 5 por '$\exists z\, B(z)$', '$\exists w_{256}\, B(w_{256})$', ou com qualquer outra variável.

Mais alguns exemplos ajudarão. Considere estas outras sentenças:

6. Ninguém está bravo.
7. Há alguém que não está alegre.
8. Nem todos estão alegres.

A sentença 6 pode ser parafraseada como: 'Não é o caso de que alguém está bravo'. Podemos então simbolizá-la usando a negação e um quantificador existencial:

$$\neg\exists x\, B(x)$$

Mas a sentença 6 também pode ser parafraseada (de um jeito um pouco menos comum, mas também aceitável em português) como: 'Todos não estão bravos'. Com base nesta paráfrase ela pode também ser simbolizada usando a negação e um quantificador universal:

$$\forall x\, \neg B(x)$$

Ambas são simbolizações aceitáveis. De fato, conforme ficará claro mais adiante, em geral, $\forall x\, \neg\mathscr{A}$ é logicamente equivalente a $\neg\exists x\, \mathscr{A}$. (Observe que voltamos aqui à prática, explicada no Capítulo 8, de usar '$\mathscr{A}$' como meta-variável.) A escolha sobre simbolizar uma sentença como 6 de uma maneira ou da outra depende do que soa mais natural em alguns contextos e não representa muito mais do que uma mera questão de gosto.

A sentença 7 é parafraseada mais naturalmente como: 'Há algum x, de tal forma que x não está alegre'. E isso, por sua vez, se torna:

$$\exists x\, \neg A(x)$$

Certamente, poderíamos igualmente tê-la simbolizado por:

$$\neg\forall x\, A(x)$$

que, naturalmente, leríamos como 'não é o caso de que todos estejam alegres'. E essa também seria uma simbolização perfeitamente adequada da sentença 8. Ou seja, de modo coerente com o que mencionamos no parágrafo anterior, 7 e 8 são sentenças equivalentes.

15.5 Domínios

Dada a chave de simbolização que estamos usando, '$\forall x\, A(x)$' simboliza 'Todos estão alegres'. Mas quem está incluído neste *todos*? Em português, quando usamos sentenças como esta, geralmente não queremos dizer com elas todos que estão atualmente vivos. Certamente também não queremos dizer todos que já estiveram vivos ou que um dia viverão. Normalmente, queremos dizer algo mais modesto, tal como: todos nesta sala, ou todos que atualmente fazem o curso de dança contemporânea da professora Rita, ou todas as filhas de dona Arlete, ou algo do gênero.

Para eliminar essa ambiguidade, precisaremos especificar um DOMINIO. O domínio é a coleção das coisas sobre as quais estamos falando; e por isso é também chamado de *domínio do discurso*. Assim, se quisermos falar sobre as pessoas em Caicó, definimos nosso domínio como as pessoas em Caicó. Anotamos o domínio no início da chave de simbolização, assim:

domínio: as pessoas em Caicó

O alcance dos quantificadores fica, então, limitado ao domínio estabelecido. Para expressar isso costuma-se dizer que os quantificadores *variam sobre* o domínio. Dado, então, o domínio especificado na chave acima, '$\forall x$' deve ser lido, aproximadamente, como 'Toda pessoa em Caicó é tal que ...' e '$\exists x$' deve ser lido aproximadamente como 'alguma pessoa em Caicó é tal que ...'.

Na LPO, o domínio nunca será vazio, deve sempre incluir pelo menos uma coisa. Além disso, nós, em português, normalmente podemos concluir 'alguém está bravo' a partir de 'Glória está brava'. Se transferirmos isso para a LPO, devemos ser capazes de deduzir '$\exists x\, B(x)$' a partir de '$B(g)$'. Bem, para que estas inferências sejam legítimas, cada nome deve ligar-se a uma coisa que esteja no domínio. Se, por exemplo, quisermos nomear pessoas em outros lugares além de Caicó, precisamos ampliar o domínio para incluir essas pessoas.

> Um domínio deve ter *pelo menos* um membro. Um nome deve ligar-se a *exatamente* um membro do domínio, mas um membro do domínio pode ter um nome, muitos nomes ou nenhum nome.

Domínios com apenas um membro podem produzir alguns resultados estranhos. Considere a seguinte chave de simbolização:

domínio: a Torre Eiffel
$P(x)$: $\underline{\qquad}_x$ está em Paris.

Dada esta chave, a maneira mais natural de parafrasear a sentença '$\forall x\, P(x)$' em português é como: 'Tudo está em Paris'. No entanto, dada a peculiaridade do domínio de nossa chave de simbolização, isso seria enganoso. Porque o que queremos dizer é que tudo *no domínio* está em Paris. Mas nosso domínio contém apenas a Torre Eiffel. Portanto, com essa chave de simbolização, $\forall x\, P(x)$ significa o mesmo que a sentença 'a Torre Eiffel está em Paris' e por isso deveria ser dessa forma parafraseada em português.

Termos sem referência

Na LPO, cada nome refere-se a exatamente um membro do domínio. Isso significa que um nome não pode referir-se a mais de uma coisa (afinal, um nome é um termo *singular*). Isso significa também que um nome não pode não se referir a nenhum membro do domínio. Todo nome tem que referir-se a *algo*. Este fato relaciona-se a um problema filosófico clássico: o chamado problema dos termos sem referência.

Os filósofos medievais costumavam usar sentenças sobre a *Quimera* para exemplificar esse problema. A Quimera é um monstro mitológico com cabeça de leão, corpo de cabra e rabo de dragão. A Quimera não existe realmente, é uma ficção, um mito. Considere, então, estas duas sentenças:

9. A Quimera está brava.
10. A Quimera não está brava.

É tentador simplesmente definir um nome da LPO para significar 'Quimera'. Poderíamos obter assim a seguinte chave de simbolização:

domínio:	seres na terra
q:	Quimera
$B(x)$:	$\_\_\_\_\__x$ está brava

Com esta chave, poderíamos, então, simbolizar a sentença 9 como:

$$B(q)$$

e a sentença 10 como:

$$\neg B(q)$$

Problemas surgem quando nos perguntamos se essas sentenças são verdadeiras ou falsas.

Uma opção é dizer que a sentença 9 não é verdadeira, porque não há nenhuma Quimera. Mas se a sentença 9 for falsa porque se refere a algo inexistente, então a sentença 10 deve, pelo mesmo motivo, ser falsa também. No entanto, isso significaria que $B(q)$ e $\neg B(q)$ seriam ambas falsas. Mas dadas as condições de verdade da negação, este não pode ser o caso. Sabemos que se $\mathcal{A}$ é falsa, então $\neg\mathcal{A}$ deveria ser verdadeira.

O que, então, devemos fazer? Como resolver este problema? Uma outra opção é dizer que a sentença 9 é *sem sentido*, porque fala sobre uma coisa que não existe. Mas o sentido de uma expressão não deveria depender da existência das coisas referidas na sentença. Por exemplo, quando um ateu e um crente discutem sobre a existência de deus, ambos entendem o sentido das afirmações sobre as características de deus (onipotência, onisciência,...) e é justamente porque entende o sentido das descrições sobre deus que o ateu afirma que ele não existe. Ele acha que não deve haver um ser com tais características.

Além disso, se uma sentença só tem sentido quando seus termos têm referência, '$B(q)$' seria uma expressão significativa na LPO em algumas interpretações (ou seja, com algumas chaves de interpretação), mas não seria significativa em outras. Isso, no entanto, tornaria nossa linguagem formal refém de interpretações (chaves de simbolização) particulares. Mas uma vez que nós estamos interessados na forma lógica, nós queremos considerar a força lógica de uma sentença como '$B(q)$' de modo independente de qualquer interpretação específica. Se '$B(q)$' às vezes fosse significativa e às vezes sem sentido, não poderíamos fazer isso.

Esse é o *problema dos termos sem referência.* Trataremos dele mais tarde (no Capítulo 19, p. 204.) Por ora vamos resolver este problema simplesmente proibindo termos sem referência e *exigindo* que cada nome da LPO designe a algo no domínio. Então, se quisermos simbolizar argumentos sobre criaturas mitológicas, devemos definir um domínio que as inclua. Essa opção é importante se quisermos considerar a lógica de estórias ficcionais. Podemos simbolizar uma sentença como 'Sherlock Holmes morava na rua Baker, número 221B', desde que aceitemos incluir personagens fictícios como Sherlock Holmes em nosso domínio.

CAPÍTULO 16

Sentenças com um quantificador

Já temos à nossa disposição todas as peças da LPO. Simbolizar sentenças mais complicadas será apenas uma questão de saber qual o caminho certo para combinar predicados, nomes, quantificadores e conectivos. Fazer isso de modo competente é uma arte e, como todas as artes, só a adquiriremos com bastante prática.

16.1 Sentenças quantificacionais comuns

Considere as seguintes sentenças:

1. Todas as moedas no meu bolso são de 50 centavos.
2. Alguma moeda sobre a mesa é de 10 centavos.
3. Nem todas as moedas sobre a mesa são de 10 centavos.
4. Nenhuma moeda em meu bolso é de 10 centavos.

Para fornecer uma chave de simbolização, precisamos especificar um domínio. Como estamos falando de moedas no meu bolso e na mesa, o domínio deve conter pelo menos todas essas moedas. Como não estamos falando de nada além de moedas, façamos o domínio ser todas moedas. Como não estamos falando de moedas específicas, não precisamos de nomes. Então aqui está a nossa chave de simbolização:

domínio:	todas as moedas
$B(x)$:	$\_\_\_\_\__x$ está no meu bolso
$M(x)$:	$\_\_\_\_\__x$ está sobre a mesa
$C(x)$:	$\_\_\_\_\__x$ é uma moeda de 50 centavos
$D(x)$:	$\_\_\_\_\__x$ é uma moeda de 10 centavos

A sentença 1 é mais naturalmente simbolizada usando um quantificador universal. O quantificador universal diz algo sobre tudo no domínio, não apenas sobre as moedas no meu bolso. Por isso, a sentença 1 pode ser parafraseada como 'para qualquer moeda, *se* essa moeda estiver no meu bolso, *então* é uma moeda de 50 centavos'. Portanto, podemos simbolizá-la como:

$$\forall x(B(x) \rightarrow C(x))$$

Como a sentença 1 é sobre moedas que estão no meu bolso *e* que são de 50 centavos, poderíamos ficar tentados a simbolizá-la usando uma conjunção. No entanto, a sentença '$\forall x(B(x) \wedge C(x))$' seria uma simbolização para a sentença 'todas as moedas estão no meu bolso e são de 50 centavos'. Isso, claramente, tem um significado muito diferente do significado da sentença 1. Podemos, então, estabelecer que:

> Uma sentença pode ser simbolizada como $\forall x(\mathcal{F}(x) \rightarrow \mathcal{G}(x))$ se ela puder ser parafraseada em português como 'todo F é G'.

A sentença 2 é mais naturalmente simbolizada usando um quantificador existencial. Ela pode ser parafraseada como 'há alguma moeda que está sobre a mesa e que é uma moeda de dez centavos'. Portanto, podemos simbolizá-la como:

$$\exists x(M(x) \wedge D(x))$$

Observe que com o quantificador universal nós tivemos que utilizar um condicional, mas com o quantificador existencial nós utilizamos uma conjunção. Suponha que, em vez disso, tivéssemos simbolizado a sentença 2 como '$\exists x(M(x) \rightarrow D(x))$'. Isso significaria que existe algum objeto no domínio para o qual '$(M(x) \rightarrow D(x))$' é verdadeiro. E lembre-se de que, na LVF, $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é logicamente equivalente a $\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$. Essa equivalência também será válida na LPO. Portanto, '$\exists x(M(x) \rightarrow D(x))$' será verdadeira se houver algum objeto no domínio tal que '$(\neg M(x) \vee D(x))$' for verdadeira para esse objeto. Ou seja, '$\exists x(M(x) \rightarrow D(x))$' é verdadeira se alguma moeda não estiver sobre a mesa *ou* for uma moeda de dez centavos. Claro que há uma moeda que não está sobre a mesa: há moedas em muitos outros lugares. Portanto, é *muito fácil* que '$\exists x(M(x) \rightarrow D(x))$' seja verdadeira. Um condicional geralmente será o conectivo natural a ser usado com um quantificador universal, ao passo que um condicional no escopo de um quantificador existencial tende a dizer algo muito fraco. Como regra geral, não coloque condicionais no escopo dos quantificadores existenciais, a menos que você tenha certeza de que precisa de um.

> Uma sentença pode ser simbolizada como $\exists x(\mathcal{F}(x) \wedge \mathcal{G}(x))$ se puder ser parafraseada em português como 'algum F é G'.

A sentença 3 pode ser parafraseada como: 'Não é o caso de que todas as moedas sobre a mesa são moedas de dez centavos'. Portanto, podemos simbolizá-la por:

$$\neg\forall x(M(x) \rightarrow D(x))$$

Mas você também pode olhar para a sentença 3 e parafraseala como 'Alguma moeda sobre a mesa não é uma moeda de 10 centavos'. Você, então, a simbolizaria como:

$$\exists x(M(x) \wedge \neg D(x))$$

Embora talvez isso ainda não seja óbvio para você, essas duas sentenças são logicamente equivalentes. (Isso se deve à equivalência lógica entre $\neg\forall x\,\mathcal{A}$ e $\exists x\neg\mathcal{A}$, mencionada no Capítulo 15, junto com a equivalência entre $\neg(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ e $(\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B})$.)

A sentença 4 pode ser parafraseada como: 'Não é o caso de que há alguma moeda de 10 centavos no meu bolso'. Isso pode ser simbolizado por:

$$\neg\exists x(B(x) \wedge D(x))$$

Mas a sentença 4 também pode ser parafraseada como: 'Qualquer coisa no meu bolso não é uma moeda de dez centavos' e, em seguida, pode ser simbolizada por:

$$\forall x(B(x) \rightarrow \neg D(x))$$

Novamente, as duas simbolizações são logicamente equivalentes; ambas são simbolizações corretas da sentença 4.

16.2 Predicados vazios

No Capítulo 15, enfatizamos que um nome deve selecionar exatamente um objeto no domínio. No entanto, um predicado não precisa se aplicar a nada no domínio. Um predicado que não se aplica a nada no domínio é chamado de PREDICADO VAZIO.

Suponha que estejamos interessados em simbolizar as duas sentenças seguintes:

5. Todo macaco conhece a linguagem de sinais.
6. Algum macaco conhece a linguagem de sinais.

Podemos propor a seguinte a chave de simbolização para essas sentenças:

domínio: os animais
$M(x)$: ______$_x$ é um macaco.
$L(x)$: ______$_x$ conhece a linguagem de sinais.

A sentença 5 pode agora ser simbolizada por:

$$\forall x(M(x) \rightarrow L(x))$$

E a sentença 6 por:

$$\exists x(M(x) \wedge L(x))$$

Pode ser tentador pensar que a sentença 5 *sustenta* a sentença 6. Ou seja, poderíamos pensar que é impossível que todo macaco conheça a linguagem de sinais, sem que também ocorra que algum macaco conheça a linguagem de sinais. Mas isso seria um erro. É possível que a sentença '$\forall x(M(x) \rightarrow L(x))$' seja verdadeira mesmo quando a sentença '$\exists x(M(x) \wedge L(x))$' é falsa.

Como isso pode ser possível? A explicação surge quando avaliamos a verdade ou falsidade destas sentenças assumindo como hipótese uma situação em que *macacos não existem.* Se não houvesse macacos (no domínio), então '$\forall x(M(x) \rightarrow L(x))$' seria *vacuamente* verdadeira: sem macacos no domínio, você não consegue 'pegar' um macaco que não conhece a linguagem dos sinais: qualquer que seja o elemento do domínio no lugar de x, '$M(x)$' será falsa e, portanto, $(M(x) \rightarrow L(x))$ será verdadeira. Por outro lado, sob esta mesma hipótese de não haver macacos (no domínio), a sentença '$\exists x(M(x) \wedge L(x))$' seria falsa.

Então '$\forall x(M(x) \rightarrow L(x))$' não sustenta '$\exists x(M(x) \wedge L(x))$' e usamos este mesmo raciocínio para concluir que a sentença 5 não sustenta a sentença 6.

Mais um exemplo nos ajudará aqui. Considere a seguinte extensão para a chave de simbolização acima:

domínio: os animais
$M(x)$: ______$_x$ é um macaco.
$L(x)$: ______$_x$ conhece a linguagem de sinais.

$G(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é uma geladeira.

Agora considere a sentença '$\forall x(G(x) \to M(x))$', que é uma simbolização de 'toda geladeira é um macaco'. Dada nossa chave de simbolização, essa sentença é verdadeira; o que é um tanto contraintuitivo, já que nós (presumivelmente) não queremos dizer que há um monte de geladeiras macacos. É importante lembrar, porém, que '$\forall x(G(x) \to M(x))$' é verdadeira se e somente se qualquer membro do domínio que é uma geladeira for também um macaco. Como o domínio é de *animais* apenas, não há geladeiras no domínio. Novamente, então, a sentença é *vacuamente* verdadeira: não conseguimos encontrar nenhum elemento do domínio que é uma geladeira, mas não é um macaco.

Se você realmente tivesse interesse em considerar a sentença 'Toda geladeira é um macaco', o mais sensato, provavelmente, seria incluir utensílios de cozinha no domínio. Assim, o predicado 'G' não seria vazio e a sentença '$\forall x(G(x) \to M(x))$' seria falsa.[1]

> Quando $\mathcal{F}$ for um predicado vazio, qualquer sentença com a forma $\forall x(\mathcal{F}(x) \to \ldots)$ será vacuamente verdadeira.

[1] É justamente porque nós admitimos a possibilidade de conceber predicados vazios, que não são satisfeitos por nada, que admitimos também, como consequência disso, a convenção de que uma sentença como 'todo unicórnio tem apenas um chifre' é verdadeira (no mundo real). Ela é verdadeira simplesmente porque não existem unicórnios e, portanto, nada que existe será um contraexemplo para a sentença, ou seja, nada que existe será um unicórnio que não tenha apenas um chifre. Mas as coisas nem sempre foram assim. Quando Aristóteles propôs seu sistema lógico, ele não admitia a hipótese de predicados vazios e, por isso, nenhuma sentença era vacuamente verdadeira. Como consequência disso, na Lógica Silogística de Aristóteles (sobre a qual, mais adiante neste livro, falaremos um pouco), a sentença 5 sustenta a sentença 6. Esta característica da lógica aristotélica que é divergente da LPO é chamada de *importação existêncial*.

16.3 Escolhendo um domínio

A simbolização apropriada na LPO de uma sentença originalmente em português dependerá da chave de simbolização. Escolher uma chave não é uma tarefa trivial. Suponha que queiramos simbolizar a seguinte sentença:

7. Toda rosa tem um espinho.

Podemos começar nossa chave de simbolização propondo que:

$R(x)$: $\underline{\hspace{3em}}_x$ é uma rosa
$E(x)$: $\underline{\hspace{3em}}_x$ tem um espinho

É tentador dizer que a sentença 7 *deve* ser simbolizada como '$\forall x(R(x) \rightarrow E(x))$', mas dizer isso antes de escolher um domínio pode nos levar ao erro. Se o domínio escolhido contiver todas as rosas, essa seria uma boa simbolização. No entanto, se o domínio for, por exemplo, apenas as *coisas na minha mesa da cozinha*, então a simbolização '$\forall x(R(x) \rightarrow E(x))$' não faz mais do que apenas se aproximar de cobrir a afirmação de que toda rosa na minha mesa da cozinha tem um espinho. Porque se não houver rosas na minha mesa da cozinha, a sentença simbolizada na LPO torna-se trivialmente verdadeira. E, na maioria das vezes, não é isso que queremos. Para simbolizar adequadamente a sentença 7 de modo a evitar resultados contraintuitivos, precisamos incluir todas as rosas no domínio, o que nos deixa com duas opções distintas.

Uma alternativa é restringir o domínio para incluir todas as rosas e *nada além* de rosas. Então a sentença 7 pode, se quisermos, ser simbolizada simplesmente como:

$$\forall x\, E(x)$$

Esta sentença é verdadeira se tudo no domínio tiver um espinho; como o domínio contém apenas as rosas, a sentença será verdadeira se toda rosa tem um espinho, o que a torna uma boa simbolização de 7. Ao restringir o domínio, conseguimos uma simbolização bastante econômica na LPO de nossa sentença em português. Portanto, essa abordagem pode nos poupar trabalho, se todas as sentenças que precisamos simbolizar forem sobre rosas.

A segunda opção é permitir que o domínio contenha outras coisas além de rosas: jabuticabeiras, ratos, enxadas, o que quisermos. Nós certamente precisaremos de um domínio mais abrangente se, além de 7, precisarmos simbolizar também sentenças como:

8. Todo boia-fria trabalha cantando músicas tristes.

Nosso domínio agora precisa incluir todas as rosas (para conseguirmos simbolizar adequadamente a sentença 7) e todos os boias-frias (para conseguirmos simbolizar adequadamente a sentença 8). Deste modo, podemos oferecer a seguinte chave de simbolização:

domínio: pessoas e plantas
$B(x)$: $\_\_\_\_\__{x}$ é boia-fria
$T(x)$: $\_\_\_\_\__{x}$ trabalha cantando músicas tristes
$R(x)$: $\_\_\_\_\__{x}$ é uma rosa
$E(x)$: $\_\_\_\_\__{x}$ tem um espinho

Agora não podemos mais simbolizar a sentença 7 como '$\forall x\, E(x)$', pois, dado nosso domínio mais abrangente, esta sentença é uma simbolização para 'toda pessoa ou planta tem um espinho'. A sentença 7 deve, então, ser simbolizada como:

$$\forall x(R(x) \to E(x))$$

De modo similar, a sentença 8 deve ser simbolizada por:

$$\forall x(B(x) \to T(x))$$

16.4 A utilidade das paráfrases

Ao simbolizar sentenças em português na LPO, é importante entender a estrutura das sentenças que você deseja simbolizar. O que importa é a simbolização final na LPO. Às vezes, você conseguirá fazer isso de modo direto, passando de uma sentença no português para uma sentença na LPO sem qualquer passo intermediário. Outras vezes, no entanto, você precisará fazer uma ou mais paráfrases intermediárias da sentença original, até conseguir descobrir qual sua melhor simbolização na LPO. Cada paráfrase sucessiva é um passo que aproxima a sentença original de algo que você consiga simbolizar na LPO de modo fácil e direto.

Para os exemplos a seguir, usaremos esta chave de simbolização:

domínio:	pessoas
$S(x)$:	$\_\_\_\_\__x$ é sanfoneiro.
$P(x)$:	$\_\_\_\_\__x$ é popular.
d:	Dominguinhos

Considere agora estas sentenças:

9. Se Dominguinhos é sanfoneiro, então é popular.
10. Se uma pessoa é um sanfoneiro, então é popular.

A mesma expressão aparece como consequente dos condicionais nas sentenças 9 e 10: '. . . é popular'. Apesar disso, essa expressão significa coisas muito diferentes em cada caso. Para deixar isso claro, muitas vezes ajuda parafrasear as sentenças originais, de modo a eliminar os pronomes ou preencher as sentenças com as expressões elípticas, que não estão escritas, mas fazem parte da sentença.

A sentença 9 pode ser parafraseada como: 'Se Dominguinhos é um sanfoneiro, então *Dominguinhos* é popular'. E esta paráfrase pode ser simbolizada como:

$$S(d) \to P(d)$$

A sentença 10, diferentemente, deve ser parafraseada como: 'Se uma pessoa é um sanfoneiro, então *essa pessoa* é popular'. Esta frase não é sobre uma pessoa específica, por isso precisamos de uma variável. Então, como um segundo passo intermediário, podemos parafraseá-la como: 'Para qualquer pessoa x, se x é um sanfoneiro, então x é popular'. Isso agora pode ser simbolizado, de um modo bastante direto, como:

$$\forall x(S(x) \rightarrow P(x))$$

Repare que esta é a mesma sentença da LPO que teríamos usado para simbolizar 'Todo mundo que é sanfoneiro é popular'. Se você pensar bem, notará que esta sentença em português é verdadeira se e somente se a sentença 10 for verdadeira.

Considere, agora, estas outras sentenças:

11. Se alguém é um sanfoneiro, então Dominguinhos é popular.
12. Se alguém é um sanfoneiro, então também é popular.

As mesmas palavras aparecem como o antecedente nas sentenças 11 e 12: 'Se alguém é um sanfoneiro...'. Novamente não é simples perceber as diferentes simbolizações que estas mesmas palavras requerem em cada caso. Mais uma vez, fazer paráfrases nos ajudará nesta tarefa.

A sentença 11 pode ser parafraseada como: 'Se há pelo menos um sanfoneiro, então Dominguinhos é popular'. Esta paráfrase deixa claro que se trata de um condicional cujo antecedente é uma expressão quantificada existencialmente. Sua simbolização, então, terá um condicional como conectivo principal:

$$\exists x S(x) \rightarrow P(d)$$

A sentença 12, por sua vez, pode ser parafraseada como: 'Para toda pessoa x, se x for um sanfoneiro, então x é popular'. Ou, em português mais natural, pode ser parafraseada por 'Todos os sanfoneiros são populares'. E deve, portanto, ser simbolizada como:

$$\forall x(S(x) \rightarrow P(x))$$

exatamente como a sentença 10.

A moral da história é que as palavras em português 'algum' e 'alguém' devem ser tipicamente simbolizadas usando quantificadores, e, apesar de quase sempre o quantificador existencial ser o mais adequado, em alguns casos ele não será. Há usos destas palavras, tal como o exemplificado na sentença 12, nos quais elas devem ser simbolizadas com o quantificador universal. Sempre que você estiver em dúvida sobre como simbolizar e qual quantificador utilizar, tanto em casos como estes, quanto em outros, faça paráfrases intermediárias que utilizem palavras diferentes e tenham estruturas internas mais próximas da de sentenças cuja simbolização na LPO você não tem dúvidas.

16.5 O âmbito dos quantificadores

Continuando com nosso exemplo, suponha que queremos simbolizar estas duas frases:

13. Se qualquer pessoa é sanfoneira, então Larissa é sanfoneira.
14. Qualquer pessoa é de tal modo que, se for sanfoneira, então Larissa é sanfoneira.

Para simbolizar essas sentenças, temos que adicionar um nome na LPO para Larissa. Nossa chave fica então:

domínio: pessoas
$S(x)$: _____$_x$ é um(a) sanfoneiro(a).
$P(x)$: _____$_x$ é popular.
d: Dominguinhos
l: Larissa

A sentença 13 é um condicional, cujo antecedente é 'qualquer pessoa é sanfoneira'; portanto, vamos simbolizá-la como:

$$\forall x\, S(x) \rightarrow S(l)$$

Essa sentença é *necessariamente* verdadeira: se *qualquer pessoa* for realmente um sanfoneiro, escolha a pessoa que você quiser—por exemplo Larissa—e ela será uma sanfoneira.

A sentença 14, por outro lado, pode ser parafraseada como 'toda pessoa x é tal que, se x for sanfoneiro, então Larissa é uma sanfoneira'. Isso é simbolizado por:

$$\forall x(S(x) \to S(l))$$

Esta sentença é falsa; Dominguinhos é sanfoneiro. Então, '$S(d)$' é verdadeira. Mas suponha que Larissa não seja uma sanfoneira (digamos que ela seja é uma zabumbeira), então '$S(l)$' é falsa. Logo, '$S(d) \to S(l)$' será falsa e, por causa disso, '$\forall x(S(x) \to S(l))$' também será falsa.

Em resumo, as sentenças

$$\forall x S(x) \to S(l)$$
$$\forall x(S(x) \to S(l))$$

são muito diferentes uma da outra. A primeira é necessariamente verdadeira e a segunda é falsa. Podemos explicar esta diferença em termos do *âmbito* (ou *escopo*) do quantificador. O âmbito de uma quantificação é muito parecido com o âmbito da negação, que estudamos na LVF. Nos ajudará aqui se relembrarmos brevemente como funciona o escopo da negação.

Na sentença

$$\neg S(d) \to S(l)$$

o escopo de '$\neg$' é apenas o antecedente do condicional. Estamos dizendo algo como: se '$S(d)$' é falsa, então '$S(l)$' é verdadeira. Da mesma forma, na sentença

$$\forall x S(x) \to S(l)$$

o escopo de '$\forall x$' é apenas o antecedente do condicional. Estamos dizendo algo como: se '$S(x)$' é verdadeira para *todo mundo*, então '$S(l)$' também é verdadeira.

Já na sentença

$$\neg(S(d) \to S(l))$$

o escopo de '$\neg$' é a sentença inteira. Estamos dizendo algo como: '$(S(d) \to S(l))$' é falsa. Da mesma forma, na sentença

$$\forall x(S(x) \to S(l))$$

o escopo de '$\forall x$' é a sentença inteira. Estamos dizendo algo como: '$(S(x) \to S(l))$' é verdadeira para *todo mundo*.

Como você pode notar, tanto para a negação quanto para os quantificadores, o modo que temos na LPO para indicar o âmbito é através da utilização dos parênteses. A moral da história é, então, bastante simples. Com os quantificadores (mas não só com eles) tome sempre bastante cuidado com uso de parênteses e a delimitação do escopo, de modo a obter a simbolização mais fiel possível.

16.6 Predicados ambíguos

Suponha que queiramos apenas simbolizar esta sentença:

15. Ana é uma cirurgiã habilidosa.

Considere que nosso domínio são as pessoas. Considere também que $H(x)$ signifique 'x é um cirurgião habilidoso' e que a signifique Ana. A sentença 15 é, então, simbolizada simplesmente como:

$$H(a)$$

Suponha agora que queiramos simbolizar todo este argumento:

> O hospital contratará apenas um cirurgião habilidoso. Todos os cirurgiões são gananciosos. Bruno é cirurgião, mas não é habilidoso. Portanto, Bruno é ganancioso, mas o hospital não o contratará.

Precisamos distinguir ser um *cirurgião habilidoso* de ser meramente um *cirurgião*. Podemos, então, definir a seguinte chave de simbolização:

domínio: pessoas
$G(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é ganancioso(a).
$T(x)$: O hospital contratará $\_\_\_\_\__x$.
$C(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é um(a) cirurgiã(o).
$H(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é habilidoso(a).
b: Bruno

Nosso argumento pode agora ser assim simbolizado:

$$\forall x\big[\neg(C(x) \wedge H(x)) \rightarrow \neg T(x)\big]$$
$$\forall x(C(x) \rightarrow G(x))$$
$$C(b) \wedge \neg H(b)$$
$$\therefore\; G(b) \wedge \neg T(b)$$

Reflita com calma nesta simbolização e veja como ela formaliza adequadamente o argumento, de acordo com a chave de simbolização proposta.

Suponha, em seguida, que queiramos simbolizar o argumento abaixo:

> Carol é uma cirurgiã habilidosa e é uma tenista. Portanto, Carol é uma tenista habilidosa.

Assumindo a chave de simbolização do argumento anterior, podemos adicionar um predicado (faça '$J(x)$' significar 'x é uma tenista') e um nome (seja 'c' o nome de Carol na LPO). Este argumento pode, então, ser simbolizado por:

$$(C(c) \wedge H(c)) \wedge J(c)$$
$$\therefore\; J(c) \wedge H(c)$$

Essa simbolização, no entanto, é desastrosa! Ela pega um argumento em português muito ruim, claramente inválido, e o simboliza como um argumento válido na LPO. O problema é que ser *habilidoso como cirurgião* é bem diferente de ser *habilidoso como* *tenista*. Para simbolizar corretamente esse argumento precisaremos de dois predicados diferentes para 'habilidoso', um para cada tipo distinto de habilidade que estamos considerando. Se fizermos '$H_1(x)$' significar 'x é habilidoso como cirurgião' e '$H_2(x)$' significar 'x é habilidoso como tenista', então poderemos simbolizar este último argumento como:

$$\begin{array}{ll} & (C(c) \land H_1(c)) \land J(c) \\ \therefore & J(c) \land H_2(c) \end{array}$$

Esta nova simbolização é um argumento inválido, exatamente como o argumento original em português que ele simboliza.

Problemas semelhantes a este podem surgir com predicados como *bom*, *ruim*, *grande*, *pequeno*, *rápido* entre muitos outros. Assim como cirurgiões e tenistas habilidosos têm habilidades diferentes, cachorros grandes, formigas grandes e problemas grandes são grandes de maneiras diferentes. Estes predicados são ambíguos em português. Em cada um destes exemplos usamos uma mesma palavra para indicar coisas diferentes. Em português, no entanto, na maioria das vezes convivemos bem com esta ambiguidade, e de modo intuitivo, sem nem pensar muito sobre o assunto. Nós conseguimos separar bem as muitas noções diferentes que uma mesma palavra (como habilidoso) significa. Mas sendo a LPO uma linguagem formal, ela não pode depender de nossa intuição. Tudo precisa estar claramente especificado nos elementos das sentenças, e, por isso, em um mesmo contexto não poderemos utilizar o mesmo predicado para noções diferentes. Cada sentido diferente de uma noção ambígua em português precisa ser simbolizado por um predicado diferente na LPO.

A moral desses exemplos é que é preciso ter cuidado ao simbolizar tais predicados, de modo que quando mais de um sentido de um predicado ambíguo ocorre em um dado contexto, estes sentidos diferentes devem ser formalizados na LPO por predicados diferentes. Foi isso que fizemos ao separar a noção de 'ser habilidoso' em duas. Habilidoso como cirurgião (H_1) e habilidoso como tenista (H_2).

Mas podemos ainda nos perguntar: não seria suficiente ter um único predicado que significa, por exemplo, 'x é um cirurgião habilidoso', em vez de dois predicados, um para 'x é habilidoso' e outro para 'x é um cirurgião'? A resposta é: em algumas situações, sim; mas em outras, não. A sentença 15 mostra que às vezes não precisamos distinguir entre cirurgiões habilidosos e outros cirurgiões. Mas se quisermos simbolizar, por exemplo, 'Ana e Marcelo são cirurgiões. Ela é habilidosa, jé ele, nem tanto', separar em dois predicados, um para 'ser um cirurgião' e outro para 'ser habilidoso' parece a melhor escolha.

Uma outra pergunta importante é: devemos sempre distinguir, em nossas simbolizações, as diferentes as acepções vinculadas a uma mesma palavra, tal como habilidoso, bom, ruim ou grande? A resposta é não. O argumento sobre Bruno exemplificado acima mostra que nos contextos em que apenas uma das acepções do predicado ambíguo está sendo utilizada, não precisamos indicar nenhuma separação especial. Se você estiver simbolizando um argumento que trata apenas de cães, não há problema em definir um predicado que significa 'x é grande' sem maiores especificações. Mas se o domínio incluir cães e ratos, no entanto, é provavelmente melhor especificar mais detalhadamente o significado do predicado como, por exemplo, 'x é grande para um cão'.

Exercícios

A. Abaixo estão as quinze figuras da famosa **Lógica Silogística**, proposta por Aristóteles na Grécia antiga, com os nomes que cada figura recebeu dos lógicos medievais. Cada uma destas 'figuras', veremos mais adiante neste livro, é um argumento válido na LPO:

1. **Barbara**. Todo G é F. Todo H é G. Portanto: Todo H é F
2. **Celarent**. Nenhum G é F. Todo H é G. Portanto: Nenhum H é F
3. **Ferio**. Nenhum G é F. Algum H é G. Portanto: Algum H não é F
4. **Darii**. Todo G é F. Algum H é G. Portanto: Algum H é F.
5. **Camestres**. Todo F é G. Nenhum H é G. Portanto: Nenhum H é F.

6. **Cesare**. Nenhum F é G. Todo H é G. Portanto: Nenhum H é F.
7. **Baroko**. Todo F é G. Algum H não é G. Portanto: Algum H não é F.
8. **Festino**. Nenhum F é G. Algum H é G. Portanto: Algum H não é F.
9. **Datisi**. Todo G é F. Algum G é H. Portanto: Algum H é F.
10. **Disamis**. Algum G é F. Todo G é H. Portanto: Algum H é F.
11. **Ferison**. Nenhum G é F. Algum G é H. Portanto: Algum H não é F.
12. **Bokardo**. Algum G não é F. Todo G é H. Portanto: Algum H não é F.
13. **Camenes**. Todo F é G. Nenhum G é H Portanto: Nenhum H é F.
14. **Dimaris**. Algum F é G. Todo G é H. Portanto: Algum H é F.
15. **Fresison**. Nenhum F é G. Algum G é H. Portanto: Algum H não é F.

Simbolize cada um destes quinze argumentos na LPO.

B. Com a chave de simbolização abaixo, simbolize na LPO cada uma das quatro sentenças seguintes:

domínio: pessoas
$C(x)$: $\_\_\_\_\__x$ sabe a combinação do cofre
$E(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é um(a) espiã(o)
$V(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é vegetariano(a)
h: Horácio
i: Ingrid

1. Nem Horácio nem Ingrid são vegetarianos.
2. Nenhum espião sabe a combinação do cofre.
3. Ninguém sabe a combinação do cofre, a menos que Ingrid saiba.
4. Horácio é um espião, mas nenhum vegetariano é espião.

C. Com a chave de simbolização abaixo, simbolize na LPO cada uma das oito sentenças seguintes:

domínio: os animais
$J(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é um(a) jacaré.
$M(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é um(a) macaco(a).
$R(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é um réptil.
$Z(x)$: $\_\_\_\_\__x$ mora no zoológico.
a: Amadeu
b: Bela

c: Clara

1. Amadeu, Bela e Clara moram no zoológico.
2. Bela é um réptil, mas não um jacaré.
3. Alguns répteis vivem no zoológico.
4. Todo jacaré é um réptil.
5. Qualquer animal que vive no zoológico é um macaco ou um jacaré.
6. Existem répteis que não são jacarés.
7. Se algum animal é um réptil, então Amadeu é.
8. Se algum animal é um jacaré, então também é um réptil.

D. Para cada um dos seis argumentos abaixo, proponha uma chave de simbolização e simbolize-o na LPO.

1. Samir é um lógico. Todos os lógicos usam chapéus ridículos. Logo Samir usa chapéus ridículos.
2. Nada na minha mesa escapa à minha atenção. Há um computador na minha mesa. Logo, há um computador que não escapa à minha atenção.
3. Todos os meus sonhos são em preto e branco. Os programas de TV antigos são em preto e branco. Portanto, alguns dos meus sonhos são antigos programas de TV.
4. Nem Holmes nem Watson já estiveram na Austrália. Uma pessoa só pode ter visto um canguru se já esteve na Austrália ou se foi em um zoológico. Embora Watson não tenha visto um canguru, Holmes viu. Portanto, Holmes foi a um zoológico.
5. Ninguém consegue voar apenas com a força do pensamento. Ninguém pode observar o futuro em uma bola de cristal. Portanto, quem consegue voar apenas com a força do pensamento pode observar o futuro em uma bola de cristal.
6. Todos os bebês são ilógicos. Ninguém que é ilógico consegue escapar de um jacaré. Boris é um bebê. Portanto, Boris não consegue escapar de um jacaré.

CAPÍTULO 17

Relações e quantificação múltipla

Todas as sentenças que consideramos até agora requeriam um único quantificador e continham apenas predicados simples, unários, com lugar para uma única variável. Mas a LPO fica muito mais poderosa quando utilizamos predicados com lugar para muitas variáveis em sentenças com múltiplos quantificadores. As inovadoras ideias gerais e o primeiro desenvolvimento sistemático da LPO foram propostos Gottlob Frege, em 1879; mas Charles S. Peirce também merece créditos por suas contribuições.

17.1 Relações: predicados com muitos lugares

Todos os predicados que consideramos até agora dizem respeito a propriedades que os objetos possam ter. Esses predicados têm uma única lacuna que precisa ser preenchida para gerar uma sentença completa. Por causa disso eles são chamados de PREDICADOS DE UM LUGAR ou simplesmente PREDICADOS.

No entanto, outros predicados dizem respeito a *relações* entre duas ou mais coisas. Aqui estão alguns exemplos de predicados relacionais em português:

> _____ ama _____
> _____ está à esquerda de _____
> _____ está em dívida com _____

Estes são PREDICADOS DE DOIS LUGARES, também chamados de RELACOES BINARIAS. Para formar uma sentença completa a partir deles, precisamos preencher com um termo singular cada uma de suas duas lacunas. Nós também podemos começar com uma sentença em português que contenha muitos termos singulares e remover dois deles; como resultado obteremos predicados de dois lugares. Considere a sentença:

> Viviane pegou emprestado o carro da família de Nelson.

Ao excluir dois termos singulares desta sentença, podemos obter qualquer um dos três predicados de dois lugares diferentes listados abaixo:

> Viviane pegou emprestado _____ de _____
> _____ pegou emprestado o carro da família de _____
> _____ pegou emprestado _____ de Nelson

e se removermos todos os três termos singulares das sentenças, obtemos um PREDICADO DE TRES LUGARES ou RELACAO TERNARIA:

> _____ pegou emprestado _____ de _____

Não há, na verdade, qualquer limite máximo para o número de lugares que os predicados podem conter.

Há, no entanto, um problema com o exposto acima. Usamos o mesmo símbolo, '_____', para indicar todas as lacunas formadas pela exclusão de algum termo singular de uma sentença. No entanto (como Frege enfatizou), essas lacunas são *diferentes* umas das outras. Considere a relação binária:

_____ ama _____

Se a preenchermos com um mesmo termo individual, digamos, 'Guto', obteremos uma sentença, mas se a preenchermos com termos individuais diferentes, digamos, 'Guto' e 'Nico', obteremos uma sentença diferente. E se colocarmos estes mesmos termos, mas em outra ordem, obteremos uma terceira sentença diferente. Cada uma das sentenças abaixo, por exemplo, tem um significado bastante diferente do das outras:

Guto ama Guto
Guto ama Nico
Nico ama Guto
Nico ama Nico

Ou seja, para conseguir expressar na LPO a distinção de sentenças como essas nós precisamos identificar as lacunas dos predicados, de modo a poder acompanhar como eles são preenchidos.

Vamos, então, usar variáveis para rotular as lacunas das relações e fazer esta identificação. A convenção que adotaremos nesta rotulagem será melhor explicada através de um exemplo. Suponha que queiramos simbolizar as seguintes sentenças:

1. Guto ama Nico.
2. Nico se ama.
3. Guto ama Nico, mas não o contrário.
4. Guto é amado por Nico.

Vamos começar propondo a seguinte chave de simbolização:

domínio: pessoas
n: Nico

g: Guto
$A(x, y)$: $\_\_\_\_\__x$ ama $\_\_\_\_\__y$

A sentença 1 pode agora ser simbolizada como:

$$A(g, n)$$

A sentença 2 pode ser parafraseada como 'Nico ama Nico'; e pode agora ser simbolizada por:

$$A(n, n)$$

A sentença 3 é uma conjunção. Podemos parafraseá-la como 'Guto ama Nico, e Nico não ama Guto'. Podemos, agora, simbolizá-la como:

$$A(g, n) \wedge \neg A(n, g)$$

A sentença 4 pode ser parafraseada por 'Nico ama Guto'. E pode, então, ser simbolizado por:

$$A(n, g)$$

É fato que esta paráfrase despreza a diferença de tom entre voz ativa e voz passiva; mas essas nuances de tom são todas, sempre, perdidas na LPO. O tom em que uma sentença é proferida, em geral, não costuma interferir em sua verdade ou falsidade, nem tampouco na validade ou invalidade dos argumentos que envolvem tal sentença.

Este último exemplo, no entanto, destaca algo importante. Suponha que adicionemos à nossa chave de simbolização a seguinte relação:

$C(x, y)$: $\_\_\_\_\__y$ ama $\_\_\_\_\__x$

Estamos usando aqui a mesma palavra em português ('ama') que usamos em nossa chave de simbolização para '$A(x, y)$'. No entanto, repare que trocamos a ordem das *lacunas*. Olhe atentamente para os índices dos traços que indicam as lacunas dos dois casos abaixo:

$A(x, y)$: $\_\_\_\_\__x$ ama $\_\_\_\_\__y$
$C(x, y)$: $\_\_\_\_\__y$ ama $\_\_\_\_\__x$

Isso significa que *ambas*, '$C(g, n)$' e '$A(n, g)$', simbolizam a sentença 'Nico ama Guto'. Da mesma forma, '$C(n, g)$' e '$A(g, n)$' *ambas* simbolizam 'Guto ama Nico'. Como, infelizmente, o amor pode não ser correspondido, essas são afirmações muito diferentes.

A moral é simples. Quando lidamos com relações, ou seja, predicados com mais de um lugar, precisamos prestar muita atenção à ordem dos lugares.

17.2 A ordem dos quantificadores

Considere a sentença 'todo mundo ama alguém'. Esta é uma sentença ambígua. Ela pode ter qualquer um dos seguintes dois significados:

5. Para cada pessoa x, há alguma pessoa que x ama.
6. Há uma pessoa específica que todas as pessoas amam.

A sentença 5 pode ser simbolizada por:

$$\forall x \exists y\, A(x, y)$$

E isso seria verdade em um triângulo amoroso. Por exemplo, suponha que nosso domínio do discurso esteja restrito a Guto, Nico e Zeca. Suponha também que Guto ama Nico, mas não ama Zeca, que Nico ama Zeca, mas não ama Guto, e que Zeca ama Guto, mas não ama Nico. Então, nesta situação, a a sentença 5 é verdadeira, porque cada um dos três indivíduos do domínio ama alguém.

A sentença 6 pode ser simbolizada por

$$\exists y \forall x\, A(x, y)$$

E isto *não* é verdade na situação descrita por nosso triângulo amoroso. Para que esta sentença fosse verdadeira, precisaria haver pelo menos uma pessoa que todos amassem, o que não é o caso na situação de nosso exemplo (porque Guto não é amado por Nico, que não é amado por Zeca, que não é amado por Guto).

O objetivo deste exemplo é ilustrar que a ordem dos quantificadores é muito importante. Repare que a única diferença entre as simbolizações das sentenças 5 e 6 é a ordem dos quantificadores. De fato, confundir a ordem correta dos quantificadores corresponde à conhecida *falácia de mudanca de quantificador.* Vejamos um exemplo que aparece com frequência, em diferentes formas, na literatura filosófica:

Para toda pessoa, há alguma verdade que ela é incapaz de reconhecer. $(\forall\exists)$

$\therefore$ Há alguma verdade que todos são incapazes de reconhecer. $(\exists\forall)$

Este argumento é obviamente inválido, ele é tão ruim quanto:

Para todo mundo, há um dia que é seu aniversário. $(\forall\exists)$

$\therefore$ Há um dia que é aniversário de todo mundo. $(\exists\forall)$

Novamente a moral da história é simples: tome muito cuidado com a ordem dos quantificadores.

17.3 Alguns atalhos para a simbolização

Uma vez que temos a possibilidade de múltiplos quantificadores e predicados de muitos lugares, a simbolização na LPO pode rapidamente se tornar um pouco complicada. Ao tentar simbolizar uma sentença complexa, recomendamos que você utilize alguns atalhos. Como sempre, essa ideia é melhor ilustrada através de exemplos. Considere a seguinte chave de simbolização:

domínio: pessoas e cachorros
$C(x)$: $\_\_\_\__x$ é um cachorro
$A(x, y)$: $\_\_\_\__x$ é amigo de $\_\_\_\__y$
$D(x, y)$: $\_\_\_\__x$ é dono de $\_\_\_\__y$

g: Geraldo

Vamos agora tentar simbolizar as seguintes sentenças:

7. Geraldo é dono de cachorro.
8. Alguém tem cachorro.
9. Todos os amigos de Geraldo têm cachorros.
10. Qualquer dono de cachorro é amigo de um dono de cachorro.
11. Todo amigo de dono de cachorro é dono de algum cachorro de um amigo.

A sentença 7 pode ser parafraseada como: 'Existe algum cachorro que Geraldo é dono'. Isso pode ser simbolizado por:

$$\exists x(C(x) \land D(g, x))$$

A sentença 8, em um primeiro passo, pode obviamente ser parafraseada como

Alguém é dono de cachorro

e, em seguida, ser novamente parafraseada como

Existe algum y tal que y é dono de cachorro.

Podemos, então, reescrever isso como

$\exists y$(y é dono de cachorro).

Repare que, nessa expressão, o fragmento 'y é dono de cachorro' é muito parecido com a sentença 7, com a diferença de que ele não é especificamente sobre Geraldo, mas sobre algum 'y'. Então, simbolizando este fragmento de modo semelhante à simbolização da sentença 7 podemos, finalmente, simbolizar a sentença 8 como:

$$\exists y \exists x(C(x) \land D(y, x))$$

Vamos, neste ponto, fazer uma pausa para esclarecer o sentido que a palavra 'atalho' tem no título desta Seção. No processo passo-a-passo de simbolização da sentença 8, escrevemos a expressão '$\exists y$(y é dono de cachorro)'. É importante termos clareza de que essa expressão não é uma sentença da LPO, também não é uma sentença do português, nem tampouco é uma sentença de nossa metalinguagem (o português aumentado—veja Seção 8.2—pois não a estamos utilizando para falar sobre as sentenças da LPO). Ela é uma mistura escrita parte na LPO (('$\exists$', 'y')) e parte em português ('é dono de um cachorro'). Ela é apenas um *atalho* que visa facilitar o caminho entre a sentença original em português e sua simbolização na LPO. Você deve considerá-la como um rascunho, parecida com aquelas anotações que fazemos apenas para nós mesmos, que nos ajudam a lembrar de algo, como os rabiscos que às vezes escrevemos ou desenhamos nas margens de um livro, quando estamos concentrados tentando entender e resolver algum problema difícil.

A sentença 9 pode ser parafraseada como:

Todo mundo que é amigo de Geraldo é dono de cachorro.

Usando nossa tática de tomar atalhos, podemos escrever

$$\forall x\big[A(x,g) \rightarrow x \text{ é dono de cachorro}\big]$$

O fragmento que ainda falta ser simbolizado, 'x é dono de cachorro', é, como no caso anterior, similar estruturalmente à sentença 7. No entanto, seria um erro simbolizá-lo de modo exatamente idêntico ao caso anterior e simplesmente escrever

$$\forall x\big[A(x,g) \rightarrow \exists x(C(x) \land D(x,x))\big]$$

pois se fizermos isso, teremos aqui um *choque de variáveis.* O escopo do quantificador universal, '$\forall x$', é a sentença condicional inteira (o antecedente e o consequente) portanto, o 'x' em '$C(x)$' deve ser governado pelo '$\forall x$' do início da sentença. Mas '$C(x)$' também está no escopo do quantificador existencial '$\exists x$' e, portanto, o 'x' em '$C(x)$' também deve ser governado pelo quantificador existencial. Isso gera confusão e ambiguidade intoleráveis na

LPO. Afinal, o 'x' em '$C(x)$' está ligado ao '$\forall x$' ou ao '$\exists x$'? Uma mesma variável não pode servir a dois quantificadores diferentes.

Então, para continuar nossa simbolização, devemos escolher uma variável diferente para o nosso quantificador existencial. O que queremos obter é algo como:

$$\forall x\big[A(x,g) \to \exists z(C(z) \land D(x,z))\big]$$

E esta, sim, é uma simbolização adequada da sentença 9.

A sentença 10 pode ser parafraseada como

> Para qualquer x que seja um dono de cachorro, existe um dono de cachorro de quem x é amigo'.

Usando, mais uma vez, nossa tática de fazer atalhos, isso se torna:

$$\forall x\big[x \text{ é dono de cachorro} \to \exists y(y \text{ é dono de cachorro} \land A(x,y))\big]$$

E, a partir daqui, o caso é o mesmo que nos exemplos anteriores. Precisamos completar as duas partes em português com sentenças da LPO similares à sentença 7. Desse modo fica um pouco mais fácil obter a (complexa) simbolização:

$$\forall x\big[\exists z(C(z) \land D(x,z)) \to \exists y\big(\exists z(C(z) \land D(y,z)) \land A(x,y)\big)\big]$$

Observe que usamos a mesma letra, 'z', em dois quantificadores diferentes, um '$\exists z$' no antecedente do condicional e outro '$\exists z$' no consequente do condicional. Será que não estamos novamente aqui provocando um choque de quantificadores? Se examinarmos atentamente a sentença, veremos que não. Mesmo tendo usado a mesma variável para dois quantificadores diferentes, na mesma sentença, não há qualquer conflito aqui, porque os escopos (âmbitos) destes dois quantificadores existenciais estão bem separados e não se misturam. Ou seja, dado qualquer predicado específico presente na sentença completa, no qual a variável 'z' ocorre, tal como '$D(x,z)$' ou as duas ocorrências de '$C(z)$', sempre sabemos a qual dos dois quantificadores '$\exists z$' cada ocorrência da variável ‘z’ está ligada.

$$\forall x\Big[\overbrace{\overbrace{\exists z(C(z) \land D(x,z))}^{\text{escopo do 1º ‘}\exists z\text{’}} \to \overbrace{\exists y(\overbrace{\exists z(C(z) \land D(y,z))}^{\text{escopo do 2º ‘}\exists z\text{’}} \land A(x,y))}^{\text{escopo de ‘}\exists y\text{’}}}^{\text{escopo de ‘}\forall x\text{’}}\Big]$$

Isso mostra que nenhuma variável está sendo forçada a servir a dois senhores (quantificadores) simultaneamente!

A sentença 11 é ainda mais complicada. Nós primeiro a parafraseamos como

> Para qualquer x que seja amigo de um dono de cachorro, x é dono de um cachorro do qual um amigo de x também é dono.

E usamos nossa tática de atalhos para transformá-la em:

$$\begin{aligned}&\forall x\big[x \text{ é amigo de um dono de cachorro} \to\\ &\qquad x \text{ é dono de um cachorro do qual um amigo de } x \text{ também é dono}\big]\end{aligned}$$

Podemos, agora, quebrar esta sentença um pouco mais, dando a cada parte em português um atalho próprio, transformando-a em:

$$\begin{aligned}&\forall x\big[\exists y(A(x,y) \land y \text{ é dono de cachorro}) \to\\ &\qquad\qquad \exists w(C(w) \land D(x,w) \land \text{um amigo de } x \text{ é dono de } w)\big]\end{aligned}$$

Com mais um passo, eliminamos todas as partes em português e obtemos, finalmente a simbolização da sentença 11:

$$\begin{aligned}&\forall x\big[\exists y(A(x,y) \land \exists z(C(z) \land D(y,z))) \to\\ &\qquad\qquad\qquad \exists w(C(w) \land D(x,w) \land \exists v(A(v,x) \land D(v,w)))\big]\end{aligned}$$

Esta sentença da LPO é extremamente complexa. Tanto que nem coube em uma única linha. Ela exemplifica bem como sentenças do português com aparência singela, como a sentença 11, podem esconder uma alta complexidade de significado. A simbolização na LPO nos ajuda a reconhecer esta complexidade e a resolver possíveis ambiguidades da sentença original. Nós jamais conseguiríamos simbolizá-la sem utilizar esta tática de vários passos de atalho. Sugiro que você releia com calma todas as simbolizações feitas nesta Seção e, em caso de dúvidas, consulte os monitores e o professor.

17.4 Quantificadores escondidos

A lógica pode, com frequência, nos ajudar a esclarecer o significado de afirmações em português, especialmente quando seus quantificadores são deixados implícitos ou sua ordem é ambígua ou pouco clara. A clareza de expressão e pensamento proporcionada pela aprendizagem da LPO pode oferecer uma grande vantagem em sua capacidade argumentativa. A seguinte discussão é um ótimo exemplo disso. Ela se deu entre a filósofa política britânica Mary Astell (1666–1731) e seu contemporâneo, o teólogo William Nicholls. No Discurso IV: O Dever das Esposas para seus Maridos, publicado no livro *The Duty of Inferiors towards their Superiors, in Five Practical Discourses* (Londres, 1701)[1], de autoria de Nicholls, ele argumentou que as mulheres são naturalmente inferiores aos homens. Astell escreveu a resposta transcrita abaixo no prefácio da 3ª edição de seu tratado *Some Reflections upon Marriage, Occadsion'd by Duke and Duchess of Mazarine's Case; which is also considered*:[2]

> É verdade, por falta de conhecimento, e daquele gênio superior que os homens alegam possuir enquanto homens, ela [Astell] ignorava a *inferioridade natural* de nosso sexo, a qual nossos mestres apresentam

[1] O Dever dos Inferiores para com seus Superiores, em Cinco Discursos Práticos.

[2] Algumas Reflexões sobre o Casamento, Propiciadas pelo Episódio do Duque e Duquesa de Mazarine; que também é abordado.

como uma verdade fundamental autoevidente. Ela não viu nada na razão das coisas para considerá-la [a inferioridade das mulheres frente aos homens] um princípio ou uma conclusão, mas muito ao contrário; defender isso neste reinado seria no mínimo insubordinação, se não for traição.

Pois se pela superioridade natural de seu sexo, eles querem dizer que *todo* homem é por natureza superior a *toda* mulher, que é o significado óbvio e o que deve ser fixado, caso queiram fazer sentido, seria um pecado a *qualquer* mulher ter domínio sobre *qualquer* homem, e a majestosa Rainha não deveria comandar, mas obedecer ao seu criado, porque nenhuma lei civil pode suplantar ou modificar a lei da natureza; de modo que se tal fosse o domínio dos homens, a *lei sálica*[3], injusta como sempre foi considerada pelos *homens ingleses*, deveria valer por toda a terra, e os mais gloriosos reinos, *o inglês, o dinamarquês, o espanhol* e outros, seriam perversas violações da lei da natureza!

Se eles querem dizer que *alguns* homens são superiores a *algumas* mulheres, isso não é uma grande descoberta; tivessem eles virado a mesa poderiam ter percebido que *algumas* mulheres são superiores a *alguns* homens. Ou tivessem eles a gentileza de recordar de seus juramentos de lealdade e supremacia, eles saberiam que *uma* mulher é superior a *todos* os homens nessas nações, caso contrário eles teriam tido muito pouco propósito em seus juramentos.[4] E não se deve supor que sua razão e religião permitiriam que prestassem juramentos contrários às leis da natureza e à razão das coisas.[5]

---

[3] A lei sálica era o direito comum usado na França que proibia a passagem da coroa para herdeiras mulheres.

[4] Em 1706, a Inglaterra era governada pela Rainha Ana.

[5] Mary Astell, *Reflections upon Marriage*, 1706 Prefácio, iii - iv, e Mary Astell, *Political Writings*, ed. Patricia Springborg, Cambridge University Press, 1996,

Vamos simbolizar as diferentes interpretações que Astell oferece para a alegação de Nicholls de que os homens são superiores às mulheres. A interpretação mais óbvia é que todo homem é superior a toda mulher, isto é,

$$\forall x(H(x) \to \forall y(M(y) \to S(x, y)))$$

outra interpretação é que alguns homens são superiores a algumas mulheres,

$$\exists x(H(x) \wedge \exists y(M(y) \wedge S(x, y))).$$

Esta última é uma afirmação verdadeira, mas a seguinte afirmação também é

$$\exists y(M(y) \wedge \exists x(H(x) \wedge S(y, x)))$$

(algumas mulheres são superiores a alguns homens), de modo que "não seria uma grande descoberta". De fato, uma vez que a rainha é superior a todos seus súditos, é mesmo verdade que uma mulher é superior a todo homem, ou seja,

$$\exists y(M(y) \wedge \forall x(H(x) \to S(y, x))).$$

Mas isso é incompatível com o "significado óbvio" da alegação de Nicholls, que é a primeira interpretação. Portanto, o que Nicholls afirma equivale a uma traição contra a rainha!

Exercícios

A. Utilize a seguinte chave de simbolização para simbolizar na LPO cada uma das quinze sentenças abaixo.

domínio: todos os animais
$J(x)$: $\_\_\_\_\_\__x$ é um jacaré
$M(x)$: $\_\_\_\_\_\__x$ é um macaco

---

pp. 9–10.

$R(x)$: _____$_x$ é um réptil
$Z(x)$: _____$_x$ vive no zoológico
$A(x, y)$: _____$_x$ ama _____$_y$
a: Amadeu
b: Bela
c: Clara

1. Amadeu, Bela e Clara vivem no zoológico.
2. Bela é um réptil, mas não um jacaré.
3. Se Clara ama Bela, então Bela é um macaco.
4. Se Bela e Clara são jacarés, então Amos ama os dois.
5. Alguns répteis vivem no zoológico.
6. Todo jacaré é um réptil.
7. Qualquer animal que vive no zoológico é um macaco ou um jacaré.
8. Existem répteis que não são jacarés.
9. Clara ama um réptil.
10. Bela ama todos os macacos que vivem no zoológico.
11. Todos os macacos amados por Amadeu o amam.
12. Se algum animal é um réptil, então Amadeu também é.
13. Se algum animal é um jacaré, então é um réptil.
14. Todo macaco que Clara ama também é amado por Amadeu.
15. Há um macaco que ama Bela, mas infelizmente Bela não retribui esse amor.

B. Utilize a seguinte chave de simbolização para simbolizar na LPO cada uma das dezesseis sentenças abaixo.

domínio: all animals
$C(x)$: _____$_x$ é um cachorro
$S(x)$: _____$_x$ gosta de filmes de samurai
$L(x, y)$: _____$_x$ é maior que _____$_y$
r: Rayane
h: Sueli
d: Daisy

1. Rayane é uma cadela que gosta de filmes de samurai.
2. Rayane, Sueli e Daisy são todas cadelas.
3. Sueli é maior que Rayane, mas Daisy é maior que Sueli.
4. Todos os cães gostam de filmes de samurai.
5. Apenas cachorros gostam de filmes de samurai.
6. Há um cachorro maior que Sueli.
7. Se houver um cachorro maior que Daisy, então há um cachorro maior que Sueli.
8. Nenhum animal que gosta de filmes de samurai é maior que Sueli.
9. Nenhum cachorro é maior que Daisy.
10. Qualquer animal que não goste de filmes de samurai é maior que Rayane.
11. Há um animal cujo tamanho entre o de Rayane e o de Sueli.
12. Não há cachorro com tamanho entre o de Rayane e o de Sueli.
13. Nenhum cachorro é maior que ele próprio.
14. Todo cachorro é maior que algum cachorro.
15. Há um animal menor que qualquer cachorro.
16. Se existe um animal maior que qualquer cachorro, esse animal não gosta de filmes de samurai.

C. Utilize a seguinte chave de simbolização para simbolizar na LPO cada uma das dez sentenças abaixo.

domínio: doces
$C(x)$: $\_\_\_\_\__x$ contém chocolate.
$M(x)$: $\_\_\_\_\__x$ contém caramelo.
$A(x)$: $\_\_\_\_\__x$ contém açúcar.
$B(x)$: Berenice já provou $\_\_\_\_\__x$.
$G(x, y)$: $\_\_\_\_\__x$ é mais gostoso que $\_\_\_\_\__y$.

1. Berenice nunca provou nenhum doce.
2. O caramelo é sempre feito com açúcar.
3. Alguns doces não contêm açúcar.
4. O chocolate é o doce mais gostoso.

5. Nenhum doce é mais gostoso que ele próprio.
6. Berenice nunca provou chocolate sem açúcar.
7. Berenice já provou caramelo e chocolate, mas nunca juntos.
8. Berenice nunca provou nada mais gostoso que caramelo sem açúcar.
9. Qualquer doce com chocolate é mais gostoso do que qualquer doce sem.
10. Qualquer doce com chocolate e caramelo é mais gostoso do que qualquer doce sem os dois.

D. Utilize a seguinte chave de simbolização para simbolizar na LPO cada uma das nove sentenças abaixo.

domínio: pessoas e comidas em uma festa
$F(x)$: $\_\_\_\_\__x$ já acabou
$M(x)$: $\_\_\_\_\__x$ está na mesa.
$C(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é comida.
$P(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é uma pessoa.
$G(x, y)$: $\_\_\_\_\__x$ gosta de $\_\_\_\_\__y$.
e: Eduarda
f: Francisca
g: o cuscuz

1. Toda a comida está na mesa.
2. Se o cuscuz não acabou, então está na mesa.
3. Todo mundo gosta do cuscuz.
4. Se alguém gosta do cuscuz, então Eduarda gosta.
5. Francisca só gosta das comidas que já acabaram.
6. Francisca não gosta de ninguém e ninguém gosta de Francisca.
7. Eduarda gosta de todos que gostam do cuscuz.
8. Eduarda gosta de todos que gostam das pessoas que ela gosta.
9. Se há uma pessoa na mesa, então toda a comida já acabou.

E. Utilize a seguinte chave de simbolização para simbolizar na LPO cada uma das doze sentenças abaixo.

domínio: pessoas
$D(x)$: $\_\_\_\_\__x$ dança forró.
$M(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é mulher.
$H(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é homem.
$F(x, y)$: $\_\_\_\_\__x$ é filho(a) de $\_\_\_\_\__y$.
$I(x, y)$: $\_\_\_\_\__x$ é irmã(o) de $\_\_\_\_\__y$.
e: Emerson
j: Jane
p: Patrick

1. Todos os filhos de Patrick dançam forró.
2. Jane é filha de Patrick.
3. Patrick tem uma filha.
4. Jane é filha única.
5. Todos os filhos homens de Patrick dançam forró.
6. Patrick não tem filhos homens.
7. Jane é sobrinha de Emerson.
8. Patrick é irmão de Emerson.
9. Os irmãos de Patrick não têm filhos.
10. Jane é tia.
11. Todo mundo que dança forró tem um irmão que também dança.
12. Toda mulher que dança forró é filha de alguém que dança forró.

CAPÍTULO 18

Identidade

Considere a sentença e chave de simbolização seguintes:

1. Paulo deve dinheiro a todos.

domínio: pessoas
$D(x, y)$: _____$_x$ deve dinheiro a _____$_y$
p: Paulo

Como restringimos nosso domínio às pessoas, não precisamos de um predicado específico para identificar as pessoas. Podemos, então, simbolizar a sentença 1 como '$\forall x\, D(p, x)$'. Mas isso tem uma consequência bem estranha. Esta simbolização só será uma sentença verdadeira se Paulo deve dinheiro a *todos* os elementos do domínio, *incluindo ele próprio*. Ou seja, esta formalização só é uma sentença verdadeira se Paulo deve dinheiro a si mesmo!

Talvez quiséssemos dizer:

2. Paulo deve dinheiro a todos *os outros*.
3. Paulo deve dinheiro a todos *que não sejam* Paulo.
4. Paulo deve dinheiro a todos *exceto* o próprio Paulo.

Mas ainda não sabemos bem como lidar com as palavras em itálico. Podemos adicionar um novo símbolo à LPO, de modo a dotá-la de uma abordagem sistemática para casos como este.

18.1 Adicionando a identidade

O símbolo '=' é um predicado de dois lugares, ou seja, uma relação binária. Ele será incluído na LPO e terá uma interpretação única, inalterável por qualquer chave de simbolização. Como já estamos acostumados com este símbolo na matemática, sua notação seguirá o padrão da matemática: colocaremos o predicado de identidade entre os dois termos que ele relaciona, e não à esquerda, como fazemos com os demais predicados e relações. A seguinte chave de simbolização explicita tanto a notação especial, como o significado único da identidade na LPO:

$x = y$: $\_\_\_\_\__x$ e $\_\_\_\_\__y$ são o mesmo objeto.

Isso não significa *apenas* que os objetos em questão são indistinguíveis um do outro, ou que o que quer que seja verdadeiro dizer de um deles, também é verdadeiro quando dito do outro. Significa, além disso, que os objetos em questão são, na verdade, *o mesmo* objeto. Na LPO ser idêntico *não é* ser 'igualzinho'; ser idêntico *é ser o mesmo*, é ter a mesma identidade.

Suponha, agora, que queremos simbolizar a seguinte sentença:

5. Paulo é o Dr. Ferreira.

Vamos adicionar mais um nome à nossa chave de simbolização:

f: Dr. Ferreira

A sentença 5 pode agora ser simbolizada simplesmente como

$$p = f$$

que significa precisamente que os nomes 'p' e 'f' são nomes do mesmo objeto.

Com este novo recurso adicionado à LPO, podemos agora lidar com as sentenças 2–4. Todas elas podem ser parafraseadas como 'Paulo deve dinheiro a todo mundo que não é Paulo'. Parafraseando mais uma vez, obtemos: 'Para todo x, se x não é Paulo, então Paulo deve dinheiro a x'. Utilizando nosso novo símbolo para a identidade, podemos simbolizar isso como:

$$\forall x(\neg x = p \rightarrow D(p, x))$$

Esta última sentença contém a expressão '$\neg x = p$', que pode parecer um pouco estranha, porque o símbolo que vem imediatamente após o '$\neg$' é uma variável, e não um predicado. Mas isso não é um problema. Estamos simplesmente negando a expressão '$x = p$'. A expressão '$\neg x = p$' também poderia ser escrita como '$\neg(x = p)$'. Vamos, no entanto, na maioria das vezes, omitir estes parênteses.

Além das sentenças que usam as expressões 'outro(s)', 'diferente', 'o próprio', 'exceto', a identidade também será útil para simbolizar algumas sentenças com as expressões 'além de', 'apenas', 'somente' e 'só'. Considere os seguintes exemplos:

6. Ninguém além de Paulo deve dinheiro a Hasina.
7. Apenas Paulo deve dinheiro a Hasina.
8. Somente Paulo deve dinheiro a Hasina.
9. Só Paulo deve dinheiro a Hasina.

Seja 'h' um nome para Hasina na LPO. Todas estas sentenças podem igualmente ser parafraseadas como 'Ninguém diferente de Paulo deve dinheiro a Hasina', que, por sua vez, pode ser simbolizada por:

$$\neg\exists x(\neg x = p \wedge D(x, h))$$

Alternativamente, as sentenças 6–9 podem também ser parafraseadas como 'Para todo x, se x deve dinheiro a Hasina, então x é Paulo'. E podem, então, ser simbolizadas como:

$$\forall x(D(x, h) \rightarrow x = p)$$

Há, no entanto, uma sutileza aqui. Você acha que quando afirmamos qualquer uma das sentenças 6–9 acima estamos assumindo que Paulo deve dinheiro a Hasina? Parece óbivio que sim! Todas elas afirmam que Paulo deve dinheiro à Hasina e acrescentam a isto o fato de que ninguém mais deve dinheiro à Hasina. Então, ao afirmar qualquer uma destas sentenças nos comprometemos com a afirmação de que Paulo deve dinheiro a Hasina. Agora pense um pouco sobre as duas alternativas de simbolização que propusemos para estas sentenças. Se ninguém no domínio deve dinheiro a Hasina, elas serão verdadeiras ou falsas? Ambas serão verdadeiras.[1] É o velho 'problema' das sentenças vacuamente verdadeiras (mencionado na Seção 16.2) mostrando novamente suas garras. Estas sentenças simbolizadas são (vacuamente) verdadeiras quando ninguém do domínio deve dinheiro a Hasina. Então, ao afirmá-las, não nos comprometemos com a afirmação de que Paulo deve dinheiro a Hasina. Por causa disso, as duas simbolizações corretas das sentenças 6–9 devem ser:

$$D(p, h) \wedge \neg\exists x(\neg x = p \wedge D(x, h))$$

$$D(p, h) \wedge \forall x(D(x, h) \rightarrow x = p)$$

ou, alternativamente:

$$\exists y D(y, h) \wedge \neg\exists x(\neg x = p \wedge D(x, h))$$

$$\exists y D(y, h) \wedge \forall x(D(x, h) \rightarrow x = p)$$

[1] Só na próxima Parte do livro veremos em todos os detalhes a explicação de por que estas sentenças são verdadeiras quando ninguém deve dinheiro a Hasina, ou seja, quando nenhum elemento 'x' do domínio satisfaz '$D(x, h)$'. Então não se preocupe muito com isso agora. Mas, caso você esteja curioso, a ideia geral é a seguinte. Quando nenhum elemento 'x' do domínio satisfaz '$D(x, h)$', então '$D(x, h)$' será falsa para qualquer valor de 'x'. Então a conjunção '$(\neg x = p \wedge D(x, h))$' também será falsa, porque tem um conjunto falso, e a formalização com o existencial, '$\neg\exists x(\neg x = p \wedge D(x, h))$', será verdadeira, já que está negando uma falsidade. A formalização com o universal também é verdadeira porque o condicional '$(D(x, h) \rightarrow x = p)$' será verdadeiro, já que, para qualquer valor de 'x', o antecedente é falso; e, portanto, '$\forall x(D(x, h) \rightarrow x = p)$' será verdadeira.

Incluir a identidade na LPO significa tratá-la como um conceito lógico, tanto quanto o são a negação, o condicional, os quantificadores e demais conectivos. Ao pertencer à LPO, sua interpretação fica fixada e não pode variar. Ou seja, a linha da chave de simbolização especificada anteriormente e o significado que definimos para a identidade ficam implícitos e fixos em toda chave de simbolização, seja ela qual for. Não incluir a identidade na LPO, por sua vez, não nos retira a possibilidade de simbolizar adequadamente as sentenças acima. Poderíamos propor um predicado para a identidade e simbolizar essas sentenças. A diferença é que não seríamos obrigados a adotar o significado único da identidade, definido na LPO. A ideia aqui é que domínios muito diferentes poderiam requerer identidades ligeiramente diferentes. Não há consenso sobre se a identidade é ou não parte da lógica, nem mesmo da própria LPO. Há um vibrante debate acadêmico sobre esta questão com interessantes argumentos dos dois lados. Neste livro optamos por incluir a identidade como parte da LPO.

18.2 Há pelo menos. . .

Também podemos usar a identidade para dizer quantas coisas de um tipo específico existem. Considere, por exemplo, as seguintes sentenças:

10. Há pelo menos um caju.
11. Há pelo menos dois cajus.
12. Existem pelo menos três cajus.

Usaremos a seguinte chave de simbolização

domínio: coisas em minha geladeira
$C(x)$: $\underline{\qquad}_x$ é um caju

A sentença 10 não requer a identidade. Ela pode ser adequadamente simbolizada por

$$\exists x\, C(x)$$

que diz que há (ou existe) um caju; talvez muitos, mas pelo menos um.

Influenciados pela sentença 10, poderíamos ficar tentados a simbolizar a sentença 11 de modo similar, sem identidade, talvez como

$$\exists x \exists y (C(x) \wedge C(y))$$

que diz, aproximadamente, que há um caju x no domínio e um caju y no domínio. Mas não há nada nesta simbolização que impeça que y e x sejam ***o mesmo*** caju. Então, em uma situação na qual há apenas um caju em minha geladeira, esta sentença será verdadeira. Para dizermos que há pelo menos dois cajus, precisamos da identidade para termos certeza de que x e y são cajus ***diferentes***. A simbolização da sentença 11, abaixo, faz isso ao explicitar que os dois cajus que existem não são idênticos:

$$\exists x \exists y ((C(x) \wedge C(y)) \wedge \neg x = y)$$

A sentença 12 exige três cajus diferentes. Então precisaremos usar três quantificadores existenciais e garantir que cada um deles designe um caju diferente dos designados pelos outros dois. Podemos fazer isso assim:

$$\exists x \exists y \exists z [((C(x) \wedge C(y)) \wedge C(z)) \wedge ((\neg x = y \wedge \neg y = z) \wedge \neg x = z)]$$

Observe que ***não*** basta usar '$\neg x = y \wedge \neg y = z$' para dizer que x, y e z são todos diferentes. Pois esta seria uma afirmação verdadeira mesmo quando $x = z$.[2] Em geral, para dizer que $x_1, \ldots, x_n$ são todos diferentes entre si, precisamos de uma conjunção de $\neg x_i = x_j$ para cada par i e j diferentes.

18.3 Há no máximo...

Considere agora as seguintes sentenças:

13. Há no máximo um caju.

[2] Quando, por exemplo, $x = z = 1$ e $y = 2$ é verdade que '$\neg x = y \wedge \neg y = z$'.

14. Existem no máximo dois cajus.

Uma primeira observação que a matemática elementar nos ajuda a perceber é que afirmar que 'Há no máximo *n*' corresponde exatamente a negar que 'Há pelo menos $(n + 1)$'. Portanto, a sentença 13 pode ser parafraseada como: 'Não é o caso de que há pelo menos *dois* cajus', que é exatamente a negação da sentença 11:

$$\neg\exists x\exists y[(C(x) \land C(y)) \land \neg x = y]$$

Mas também podemos abordar a sentença 13 de outra maneira. Afirmar que há no máximo dois cajus no domínio pode ser entendido da seguinte maneira: se você aponta para um objeto, e ele é um caju, aí você faz isso de novo, aponta para um objeto, e ele também é um caju, então você certamente apontou para o mesmo objeto nas duas vezes (há no máximo um caju). Com isso em mente, podemos simbolizar a sentença 13 como:

$$\forall x\forall y\big[(C(x) \land C(y)) \rightarrow x = y\big]$$

Conforme veremos em detalhes na próxima Parte do livro, estas duas simbolizações são logicamente equivalentes.

De maneira semelhante, a sentença 14 pode ser abordada dessas duas maneiras equivalentes. Ela pode ser parafraseada como: 'Não é o caso de que há *três* ou mais cajus distintos', e, portanto, pode ser simbolizada como:

$$\neg\exists x\exists y\exists z[((C(x) \land C(y)) \land C(z)) \land ((\neg x = y \land \neg y = z) \land \neg x = z)]$$

Alternativamente, podemos interpretar a sentença 14 como afirmando que se você repete três vezes o procedimento de apontar para um caju, você certamente terá apontado para um mesmo caju mais de uma vez (há no máximo dois). Portanto:

$$\forall x\forall y\forall z\big[((C(x) \land C(y)) \land C(z)) \rightarrow ((x = y \lor x = z) \lor y = z)\big]$$

18.4 Há exatamente...

Podemos agora considerar declarações de quantidades precisas, como:

15. Há exatamente um caju.
16. Existem exatamente dois cajus.
17. Há precisamente três cajus.

A sentença 15 pode ser parafraseada como 'Há *pelo menos* um caju e há *no máximo* um caju', que corresponde à conjunção das sentenças 10 e 13. Então, podemos simbolizá-la como:

$$\exists x C(x) \land \forall x \forall y\big[(C(x) \land C(y)) \to x = y\big]$$

Mas talvez seja mais simples parafrasear a sentença 15 como: 'Há uma coisa x que é um caju e qualquer coisa que for um caju é o próprio x'. Pensado desta forma, podemos simbolizá-la como:

$$\exists x\big[C(x) \land \forall y(C(y) \to x = y)\big]$$

Semelhantemente, a sentença 16 pode ser parafraseada como: 'Há *pelo menos* dois e *no máximo* dois cajus'. Assim, podemos simbolizá-la como:

$$\begin{aligned}&\exists x \exists y((C(x) \land C(y)) \land \neg x = y) \land \\ &\qquad \forall x \forall y \forall z\big[((C(x) \land C(y)) \land C(z)) \to ((x = y \lor x = z) \lor y = z)\big]\end{aligned}$$

Mais eficiente, porém, é parafrasear a sentença 16 como "Há pelo menos dois cajus distintos e todos os cajus são um desses dois". Podemos, então, simbolizá-la como:

$$\exists x \exists y\big[((C(x) \land C(y)) \land \neg x = y) \land \forall z(C(z) \to (x = z \lor y = z)\big]$$

Considere, por fim, as seguintes sentenças:

18. Há exatamente duas coisas.
19. Existem exatamente dois objetos.

Poderíamos ficar tentados a adicionar um predicado à nossa chave para simbolizar a o predicado do português '_____ é uma coisa' ou '_____ é um objeto'. Mas isso é desnecessário. A não ser que estejamos fazendo sofisticadas distinções metafísicas, palavras como 'coisa', 'objeto' ou 'entidade' não separam o joio do trigo: elas se aplicam trivialmente a tudo, ou seja, aplicam-se trivialmente a todas as coisas. Portanto, podemos simbolizar essas duas sentenças como:

$$\exists x \exists y \big[\neg x = y \land \forall z(x = z \lor y = z)\big]$$

Exercícios

A. Explique, com suas palavras, por quê:

- '$\exists x \forall y(C(y) \leftrightarrow x = y)$' é uma boa simbolização de 'há exatamente um caju'.
- '$\exists x \exists y\big[\neg x = y \land \forall z(C(z) \leftrightarrow (x = z \lor y = z))\big]$' é uma boa simbolização de 'há exatamente dois cajus'.

CAPÍTULO 19

Descrições definidas

Considere as seguintes sentenças

1. Nivaldo é o traidor.
2. O traidor estudou na UFRN.
3. O traidor é o delegado.

Estas três sentenças contém a expressão

‘o traidor’

que, em todas elas, tem a função de se referir a um certo indivíduo *único* do domíno, através de uma descrição que o define (ser o traidor). A sentença 3 tem ainda uma outra expressão do mesmo tipo:

‘o delegado’

Estas expressões são chamadas de *descrições definidas* e devem ser contrastadas com descrições *indefinidas*, tal como a expressão

‘um traidor’

que na sentença 'Nivaldo é *um* traidor', por exemplo, não tem a função de se referir a um indivíduo único, mas apenas indica uma propriedade de um indivíduo. 'Nivaldo' é um nome e se refere a um indivíduo, e 'um traidor' apenas indica uma propriedade de Nivaldo. Diferentemente, as descrições definidas usam uma certa propriedade (ser traidor) que supostamente é satisfeita por um único indivíduo do domínio (ser *o único* traidor) para designar este indivíduo.

As descrições definidas devem também ser contrastadas com os *termos genéricos*. Na sentença 'A baleia é um mamífero', por exemplo, a expressão

'a baleia'

é gramaticalmente semelhante a 'o traidor', das sentenças 1–3 acima. No entanto, ela claramente não se refere a um indivíduo único. Seria inapropriado perguntar, neste caso, *qual* baleia. A questão que nos interessa aqui é: como simbolizar descrições definidas na LPO?

19.1 Tratando descrições definidas como termos

Uma opção seria simbolizar descrições definidas através de nomes novos. Esta, provavelmente, não seria uma boa ideia. Considere, por exemplo, a seguinte chave de simbolização:

domínio: pessoas
$U(x)$: $\_\_\_\_\__x$ estudou na UFRN
t: o traidor

Poderíamos, com ela, simbolizar a sentença 2 acima como:

$$U(t)$$

Mas esta simbolização diz apenas que a pessoa (indivíduo do domínio) com o nome 't' estudou na UFRN. A propriedade que

't' tem, de ser 'um traidor', que até está indicada na chave, perde-se nesta simbolização. Na LPO os nomes apenas apontam para indivíduos do domínio, não lhes atribuem qualquer propriedade. Para fazer isso precisamos de um predicado.

Uma opção melhor, então, seria acrescentar um novo símbolo ('$\imath$' por exemplo) à LPO e utilizá-lo junto com um predicado para simbolizar uma descrição definida. Vamos então reformular nossa chave de simbolização para visualizar esta alternativa:

domínio: pessoas
$T(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é um traidor
$D(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é um delegado
$U(x)$: $\_\_\_\_\__x$ estudou na UFRN
n: Nivaldo

Com nosso novo símbolo e esta nova chave, a descrição definida 'o traidor' seria simbolizada por:

$$\imath x\, T(x)$$

que lemos como:

$$\text{`o } x \text{ tal que } T(x)\text{'}$$

De um modo geral, qualquer descrição definida da forma 'o $\mathcal{A}$' poderia ser formalizada como $\imath x\, \mathcal{A}(x)$. Não se engane com a aparência desta expressão. Apesar da aparência semelhante com as sentenças quantificadas $\forall x\, \mathcal{A}(x)$ e $\exists x\, \mathcal{A}(x)$, a expressão $\imath x\, \mathcal{A}(x)$ não é uma sentença. Por exemplo, '$\forall x\, T(x)$' é verdadeira se todos os indivíduos do domínio são traidores e falsa, caso contrário. Entretanto, não cabe perguntarmos se '$\imath x\, T(x)$' é verdadeira ou falsa. '$\imath x\, T(x)$' é uma expressão que se comporta como os nomes. Sua função é designar (apontar) um indivíduo específico do domíno, o único indivíduo que é um traidor. Assim, dada nossa chave, simbolizaríamos a sentença 1 acima, 'Nivaldo é o traidor', como:

$$n = \imath x\, T(x)$$

Já a sentença 2, 'O traidor estudou na UFRN', seria simbolizada por:

$$U(\imath x\, T(x))$$

E, finalmente, a sentença 3, 'O traidor é o delegado', ficaria:

$$\imath x\, T(x) = \imath x\, D(x)$$

Apesar desta estratégia resolver o problema, ela, ao requerer um símbolo novo, inclui uma complicação extra à LPO. Seria interessante se conseguíssemos lidar com descrições definidas sem a necessidade de adicionar nenhum símbolo novo à LPO. De fato, talvez consigamos fazer isso.

19.2 A análise de Russell

Bertrand Russell ofereceu uma análise das descrições definidas. Em poucas palavras, ele observou que, sempre que dizemos 'o F', nosso objetivo é apontar para a *única* coisa que é F no domínio do discurso apropriado e dizer algo deste indivíduo: que ele é um G, por exemplo. Ou seja, atribuímos um predicado (ser um G) ao único indivíduo que é 'F'. Levando em consideração estes elementos, Russell analisou a noção de descrição definida da seguinte maneira:[1]

o F é G	**se e somente se**	há pelo menos um F, **e**
		há no máximo um F, **e**
		todo F é G

Observe que uma característica muito importante dessa análise é que o artigo definido *'o'* não aparece no lado direito da equivalência. Ou seja, dada uma sentença que contém uma descrição

[1] Bertrand Russell, 'On Denoting', 1905, *Mind 14*, pp. 479–493; também em Russell, *Introduction to Mathematical Philosophy*, 1919, Londres: Allen e Unwin, cap. 16.

definida (a sentença 'o F é G'), a análise de Russell é, na verdade, a proposta de uma *paráfrase* para esta sentença (a conjunção no lado direito do 'se e somente se') na qual não há qualquer descrição definida e que, por isso, pode ser simbolizada com os recursos que já dispomos na LPO. Em outras palavras, Russell está propondo que afirmar que 'o F é G é o mesmo que afirmar que 'Há pelo menos um e no máximo um F, e que este F é G.

Alguém poderia, então, objetar, dizendo que quando afirmamos, por exemplo, que 'a mesa é marrom', nossa afirmação não implica, como Russell parece sugerir, que há uma e apenas uma mesa no universo. Mas esta não seria uma objeção muito forte. Restringindo o domínio do discurso ao contexto adequado, esta preocupação desaparece. Se o domínio se restringe ao que está no meu campo de visão, posso dizer perfeitamente que 'a mesa é marrom' sem implicar com isso que a mesa de minha cozinha é a única mesa do universo.

Se aceitarmos a análise de Russell, podemos simbolizar sentenças com a forma

'o F é G'

usando as estratégias para quantificação numérica que vimos nas Seções 18.2–18.4. Podemos lidar com os três conjuntos (as três partes) da conjunção do lado direito da análise de Russell da seguinte maneira:

- há pelo menos um F: $\exists w F(w)$
- há no máximo um F: $\forall x \forall y((F(x) \land F(y)) \rightarrow x = y)$
- todo F é G: $\forall z(F(z) \rightarrow G(z))$

A sentença 'o F é G' pode, então, ser simbolizada por:

$$\left[\exists w F(w) \land \forall x \forall y((F(x) \land F(y)) \rightarrow x = y)\right] \land \forall z(F(z) \rightarrow G(z))$$

Podemos, inclusive, expressar o mesmo ponto com um pouco mais de clareza, ao reconhecermos que os dois primeiros conjuntos equivalem à afirmação de que há *exatamente* um F, e que o terceiro conjunto nos diz que esse objeto é G. Assim, de modo equivalente, uma sentença com a forma 'o F é G' pode ser simbolizada, de acordo com a análise de Russell, como:

$$\exists x\big[(F(x) \wedge \forall y(F(y) \to x = y)) \wedge G(x)\big]$$

E se quisermos ser ainda mais econômicos, podemos usar a forma reduzida da quantificação numérica descrita no Exercício 17.A (p. 203) que usa o conectivo bicondicional, e simbolizar uma sentença da forma 'o F é G' como:

$$\exists x\big[\forall y(F(y) \leftrightarrow x = y) \wedge G(x)\big]$$

Com isso, podemos agora simbolizar as sentenças 1–3 do início deste Capítulo sem a necessidade de nenhum operador sofisticado novo, tal como o '$\imath$' proposto na Seção anterior.

A sentença 1 (Nivaldo é o traidor) tem a forma exata do exemplo que acabamos de considerar. Então nós a simbolizamos por:

$$\exists x\big[(T(x) \wedge \forall y(T(y) \to x = y)) \wedge x = n\big]$$

Ou, do modo mais econômico, como:

$$\exists x\big[\forall y(T(y) \leftrightarrow x = y) \wedge x = n\big]$$

A sentença 2 (o traidor estudou na UFRN) também tem a mesma forma e, do modo mais econômico, é simbolizada como:

$$\exists x\big[\forall y(T(y) \leftrightarrow x = y) \wedge U(x)\big]$$

A sentença 3 (o traidor é o delegado) é um pouco mais complicada, porque envolve duas descrições definidas. Mas, através da análise de Russell, ela pode ser parafraseada por 'há exatamente um traidor, x, e há exatamente um delegado, y, e $x = y$'. Então, também do modo mais econômico, podemos simbolizá-la como:

$$\exists x \exists y\big[(\forall z(T(z) \leftrightarrow x = z) \wedge \forall w(D(w) \leftrightarrow y = w)) \wedge x = y\big]$$

Observe que garantimos que a expressão '$x = y$' se encontra no âmbito dos dois quantificadores existenciais!

19.3 Descrições definidas vazias

Uma das características interessantes da análise de Russell é que ela nos permite lidar com descrições definidas *vazias* com precisão. Suponha que uma amiga lhe diga em tom confidencial:

4. O atual rei da França é careca.

A expressão 'o atual rei da França' é uma descrição definida nesta sentença. Ela tem a função de designar, através de uma descrição, um indivíduo específico, que supostamente é careca. Acontece que a França, em nossos dias, é uma república, e por isso não tem nenhum rei. Ou seja, a descrição definida na afirmação de sua amiga é vazia, ela não designa ninguém. Não há nenhum indivíduo que a satisfaça. Como tratar uma tal descrição? E as sentenças nas quais descrições vazias como esta ocorrem? São verdadeiras ou falsas? Parece óbvio que sua amiga está enganada ou mentindo. Então também parece natural considerar a sentença 4 como sendo falsa. Mas suponha agora que sua amiga lhe diga que estava brincando, e afirme:

5. O atual rei da França *não é* careca.

Parece que ela está agora, com a sentença 5, negando o que havia anteriormente afirmado com a sentença 4. Então a sentença 5 deveria ser verdadeira, já que 4 é uma sentença falsa. Mas como 5 pode ser verdadeira se não há um rei da França? Qual seria o fundamento para sua verdade?

A análise de Russell resolve de um modo bastante elegante esse problema. De acordo com ela, uma paráfrase aceitável para a sentença 4 é: 'há um e apenas um x que é o atual rei da França e x é careca'. Considere, agora a seguinte chave de simbolização:

domínio: pessoas
$R(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é o atual rei da França
$C(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é careca.

Com esta chave e a paráfrase fornecida pela análise de Russel, a sentença 4 pode então ser simbolizada como:

$$\exists x\big[(R(x) \land \forall y(R(y) \to x = y)) \land C(x)\big]$$

Esta sentença, conforme veremos mais detalhadamente na próxima Parte do livro, é uma sentença falsa, uma vez que seu primeiro conjunto, '$R(x)$', é falso para qualquer elemento do domínio (ninguém é o atual rei da França). De modo análogo, a sentença 5 pode ser parafraseada por 'há um e apenas um x que é o atual rei da França e x ***não é*** careca', que por sua vez é simbolizada por:

$$\exists x\big[(R(x) \land \forall y(R(y) \to x = y)) \land \neg C(x)\big]$$

E esta sentença, assim como a anterior, também será falsa, dado que '$R(x)$' é falso para todo elemento do domínio.

A análise de Russell nos ajuda a perceber que não há qualquer problema no fato de que tanto 4 quanto 5 sejam ambas falsas, porque, apesar das aparências, uma sentença não é a negação da outra. A sentença 5 nega apenas um dos conjuntos que compõem a sentença 4 e ambas são falsas simplesmente porque nenhum elemento do domínio é rei da França.

A sentença 5 faz o que os lógicos convencionaram chamar de *negação interna* da sentença 4. Por outro lado, uma sentença que nega toda a sentença 4 e que deveria ser verdadeira, já que 4 é falsa, seira:

6. Não é o caso que o atual rei da França é careca

sua simbolização de acordo com nossa chave seria:

$$\neg\exists x\big[(R(x) \land \forall y(R(y) \to x = y)) \land C(x)\big]$$

Então é a sentença 6 e não a 5, que corresponde à negação da sentença 4. Para distingui-la da negação interna, nos contextos em que esta diferenciação é relevante, convencionou-se chamar esta negação de *negação externa*. A análise de Russell nos ajuda a resolver os supostos problemas das descrições definidas vazias e mostra de modo cristalino a diferença entre negação interna e externa.

19.4 A adequação da análise de Russell

Quão boa é a análise das descrições definidas proposta por Russell? Essa questão gerou toda uma literatura filosófica, com muito material e ramificações em diversas áreas. Nós aqui nos restringiremos a apenas duas observações.

A primeira delas se concentra no tratamento que Russell propõe para descrições definidas vazias. Conforme vimos, de acordo com sua análise, quando não há Fs, ou mesmo quando há mais de um F, tanto 'o F é G' quanto 'o F não é G' são falsas. Peter Strawson sugeriu que tais sentenças não deveriam ser consideradas falsas.[2] Em vez disso, o que ocorre é que ambas falham igualmente em atender uma pressuposição que faz parte de seus significados: a pressuposição de que há um e apenas um indivíduo do domínio que satisfaz F. De acordo com Strawson, quem profere qualquer uma destas duas sentenças não está *afirmando* que existe um e apenas um F, está *pressupondo* isso. A única afirmação (ou declaração) que a sentença 'o F é G' faz é a de que este pressuposto único F é um G. Para que esta declaração seja um evento comunicativo bem sucedido, a pressuposição de que existe um e apenas um F tem que ser satisfeita. Quando ela não é satisfeita, ou porque não há qualquer F, ou porque há mais de um, o proferimento de 'o F é G' ou de 'o F não é G' é uma comunicação *mal sucedida* e por isso não deveria ser considerada *nem* como verdadeira, *nem* como falsa.

Se concordarmos com Strawson, precisaremos revisar nossa lógica. Pois, conforme veremos na próxima Parte do livro, assim como na LVF, na LPO também existem apenas dois valores de verdade (o Verdadeiro e o Falso), e toda sentença tem que ter um desses dois valores, não havendo qualquer outra alternativa.

[2] P.F. Strawson, 'On Referring', 1950, *Mind 59*, pp. 320–34.

Mas é possível, também, discordarmos de Strawson. Ele está apelando para algumas intuições linguísticas, mas não está claro que elas sejam muito robustas. Onde fica, exatamente, a fronteira entre o que uma sentença *diz* e o que ela *pressupõe*? Qual o fundamento e a justificativa para uma tal distinção?

Keith Donnellan levantou um segundo tipo de preocupação que, de um modo bem geral, vem à tona quando consideramos um caso de identidade equivocada.[3] Imagine a seguinte cena. Dois homens estão em uma esquina: um homem extremamente alto bebendo em uma lata de cerveja; e um homem bem mais baixo bebendo em uma lata de refrigerante. Ao vê-los, Manuela afirma com espanto:

7. O homem bebendo cerveja é gigantesco!

De acordo com a análise de Russell tal sentença pode ser parafraseada por:

7′. Há exatamente um homem bebendo cerveja [na esquina] e qualquer um que esteja bebendo cerveja [na esquina] é gigantesco.

Agora suponha que o homem muito alto esteja, na verdade, bebendo refrigerante, que foi colocado dentro de uma lata de cerveja; enquanto que o homem bem mais baixo esteja, na verdade, bebendo cerveja que foi colocada dentro de uma lata de refrigerante. Então, de acordo com a análise de Russell, Manuela disse uma sentença falsa. Porque há, de fato, exatamente um homem bebendo cerveja na esquina, mas ele não é gigantesco.

Mas será que Manuela disse mesmo uma sentença falsa? Parece claro que Manuela usou a descrição definida ‘o homem bebendo cerveja’ para designar uma pessoa específica, e dizer algo desta pessoa. Se você estivesse ao lado de Manuela, vendo a

[3] Keith Donnellan, ‘Reference and Definite Descriptions’, 1966, *Philosophical Review* 77, pp. 281–304.

mesma cena que ela viu, e, como ela, não soubesse que os conteúdos das latas estavam trocados, você também entenderia a descrição definida que ela usou (o homem bebendo cerveja) como designando o homem alto e, por isso, concordaria que a sentença que ela disse é verdadeira.

Entretanto, segundo a análise de Russell, a descrição que ela usou designa uma pessoa diferente, o homem bem mais baixo, porque, na verdade, é ele que está bebendo cerveja, e não o homem alto. Mas se a descrição definida usada por Manuela designa o homem mais baixo, então o que ela disse é uma falsidade. O ponto aqui é que, segundo Donnellan, quando Manuela diz a sentença 7, ela não está *afirmando* que o homem alto está bebendo cerveja, ela está *pressupondo* isso. Esta pressuposição nos ajuda a identificar um certo indivíduo e, feita esta identificação, a única *afirmação* feita é que este indivíduo é gigantesco. Então, para todos que compartilham da mesma pressuposição, a sentença 7 será verdadeira.

A controvérsia aqui, então, é sobre o modo como designamos as coisas através da linguagem. Ou seja, é uma controvérsia sobre se Manuela disse uma sentença falsa sobre o homem mais baixo, conforme a análise de Russell sugere, ou se ela disse uma sentença verdadeira sobre o homem mais alto, conforme Donnellan sugere. Se, por um lado, o ponto que Donnellan defende é bastante interessante, por outro lado, os defensores da análise de Russell talvez consigam sair deste embaraço se explicarem por que as intenções de Manuela e sua comunicação bem sucedida (com você) se afastam da verdade. Elas se afastam da verdade porque se baseiam em crenças falsas de Manuela e sua, sobre o que os homens estão bebendo. Tivesse Manuela e você crenças corretas sobre o que os homens estão bebendo, não haveria qualquer discrepância entre a análise de Russell e as intuições de Donnellan sobre o modo como designamos indivíduos com a linguagem.

A questão, no entanto, é controversa e tem muitos desdobramentos.[4] Ir além nos levaria a águas filosóficas profundas, o que não é nada mal, mas neste momento nos distrairia de nosso objetivo principal aqui de aprender lógica formal. Então, por ora, enquanto estivermos ocupados com a LPO, seguiremos a análise de Russell das descrições definidas. Ela certamente é uma análise defensável, além de ser o melhor que podemos oferecer, sem a exigência de uma revisão significativa da lógica.

Exercícios

A. Utilize a seguinte chave de simbolização para simbolizar na LPO cada uma das sete sentenças abaixo.

domínio: pessoas
$S(x)$: $\_\_\_\_\__x$ sabe a combinação do cofre.
$E(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é uma espiã.
$V(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é vegetariana.
$C(x, y)$: $\_\_\_\_\__x$ confia em $\_\_\_\_\__y$.
h: Hortênsia
i: Isadora

1. Hortênsia confia em um vegetariano.
2. Todo mundo que confia em Isadora, confia em uma vegetariana.
3. Todo mundo que confia em Isadora confia em alguém que confia em um vegetariano.
4. Apenas Isadora sabe a combinação do cofre.
5. Isadora confia em Hortência, e em mais ninguém.
6. A pessoa que sabe a combinação do cofre é vegetariana.
7. A pessoa que sabe a combinação do cofre não é um espião.

B. Utilize a seguinte chave de simbolização para simbolizar na LPO cada uma das doze sentenças abaixo.

[4] Se você estiver interessado no debate pode consultar o artigo 'Speaker Reference and Semantic Reference' de Saul Kripke, publicado em in French et al (eds.), *Contemporary Perspectives in the Philosophy of Language*, Minneapolis: University of Minnesota Press, 1977, pp. 6-27.

domínio: cartas de um baralho típico
$R(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é uma carta preta.
$P(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é uma carta de paus.
$D(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é um dois.
$V(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é um valete.
$M(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é um homem com o machado.
$C(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é caolho.
$J(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é um curinga.

1. Todas as cartas de paus são pretas.
2. Não há curingas.
3. Há pelo menos duas cartas de paus.
4. Há pelo menos dois valetes caolhos.[5]
5. Há no máximo dois valetes caolhos.
6. Há dois valetes pretos.
7. Há quatro dois.
8. O dois de paus é uma carta preta.
9. Os valetes caolhos e o homem com o machado são curingas.[6]
10. Se o dois de paus for um curinga, então há exatamente um curinga.
11. O homem com o machado não é um valete.
12. O dois de paus não é o homem com o machado.

C. Utilize a seguinte chave de simbolização para simbolizar na LPO cada uma das oito sentenças abaixo.

domínio: animais no mundo
$E(x)$: $\_\_\_\_\__x$ está no pasto da fazenda Estrela.
$C(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é um cavalo.

---

[5] Um valete caolho é um valete de copas ou de espadas. Se você reparar bem no baralho, verá que estes valetes são desenhados de perfil. Só um olho deles aparece desenhado. Enquanto os outros dois valetes, de paus e de ouros, são desenhados de frente, com os dois olhos.

[6] O homem com o machado é o rei de ouros, porque no desenho do baralho, se você reparar bem, verá que ele é o único rei que segura um machado. Os outros seguram espadas.

$P(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é Pégasus.
$A(x)$: $\_\_\_\_\__x$ tem asas.

1. Há pelo menos três cavalos no mundo.
2. Há pelo menos três animais no mundo.
3. Há mais de um cavalo no pasto da fazenda Estrela.
4. Há três cavalos no pasto da fazenda Estrela.
5. Há uma única criatura alada no pasto da fazenda Estrela; quaisquer outras criaturas nesse pasto não têm asas.
6. O animal que é Pégasus é um cavalo alado.
7. O animal no pasto da fazenda Estrela não é um cavalo.
8. O cavalo no pasto da fazenda estrela, não tem asas.

D. Neste capítulo, nós simbolizamos 'Nivaldo é o traidor' por

$$\exists x(T(x) \land \forall y(T(y) \to x = y) \land x = n)$$

Duas outras simbolizações igualmente boas são:

- $T(n) \land \forall y(T(y) \to n = y)$
- $\forall y(T(y) \leftrightarrow y = n)$

Explique por que estas sentenças também são boas simbolizações de 'Nivaldo é o traidor'.

CAPÍTULO 20

Sentenças da LPO

Agora que já aprendemos como simbolizar sentenças do português na LPO, finalmente chegou a hora de definir rigorosamente a noção de uma *sentença* da LPO.

20.1 Expressões

Existem seis tipos de símbolos na LPO:

Predicados e Relações $A, B, C, \ldots, Z$,
ou com subíndices, quando necessário $A_1, B_1, Z_1, A_2, A_{25}, J_{375}, \ldots$

Nomes $a, b, c, \ldots, r$,
ou com subíndices, quando necessário $a_1, b_{224}, h_7, m_{32}, \ldots$

Variáveis s, t, u, v, w, x, y, z,
ou com subíndices, quando necessário $x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots$

Conectivos $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

Parênteses (,)

Quantificadores $\forall, \exists$

Definimos uma EXPRESSAO DA LPO como qualquer sequência de símbolos da LPO. Se você pegar quaisquer dos símbolos da LPO e escrevê-los sequencialmente, em qualquer ordem, você terá uma expressão.

20.2 Termos e fórmulas

No capítulo 6, passamos direto da apresentação do vocabulário da LVF para a definição de sentença. Na LPO, no entanto, teremos que passar por um estágio intermediário: a noção de uma FORMULA. A ideia intuitiva é que uma fórmula seja qualquer expressão que possa ser transformada em uma sentença pela adição de quantificadores à sua esquerda. Mas vamos com calma. Chegaremos lá passo a passo. Antes de definirmos fórmulas, precisamos de definir o que é um termo e o que é uma fórmula atômica.

Começamos definindo a noção de termo.

> Um TERMO é qualquer nome ou qualquer variável.

Aqui estão alguns termos:

$$a,\ b,\ x,\ x_1,\ x_2,\ y,\ y_{254},\ z$$

Em seguida, precisamos definir fórmulas atômicas.

> 1. Qualquer letra sentencial é uma fórmula atômica.
> 2. Se $\mathcal{R}$ é um predicado de n lugares e $\sqcup_1, \sqcup_2, \ldots, \sqcup_n$ são termos, então $\mathcal{R}(\sqcup_1, \sqcup_2, \ldots, \sqcup_n)$ é uma fórmula atômica.
> 3. Se $\sqcup_1$ e $\sqcup_2$ são termos, então $\sqcup_1 = \sqcup_2$ é uma fórmula atômica.
> 4. Nada mais é uma fórmula atômica.

Repare que no item 1 do quadro acima consideramos as letras sentenciais (da LVF) como fórmulas atômicas da LPO; ao final de nossa definição veremos que toda sentença LVF também será uma sentença da LPO.

O uso de metavariáveis em letras cursivas no quadro acima ($\mathcal{R}$ e $\sqcup$) segue as convenções estabelecidas no Capítulo 8. Portanto, '$\mathcal{R}$' não é, ela própria, um predicado da LPO. '$\mathcal{R}$' é um símbolo da nossa metalinguagem (o português aumentado) que usamos para falar sobre um predicado qualquer, não especificado, da LPO. Da mesma forma, '$\sqcup_1$' não é um termo, mas um símbolo da metalinguagem que usamos para falar sobre um termo qualquer da LPO.

Considere 'F' um predicado de um lugar, 'G' um predicado de três lugares (relação ternária) e 'S' um predicado de seis lugares. As seguintes expressões são exemplos de fórmulas atômicas:

D	$F(a)$
$x = a$	$G(x, a, y)$
$a = b$	$G(a, a, a)$
$F(x)$	$S(x_1, x_2, a, b, y, x_1)$

Agora que já sabemos o que é uma fórmula atômica, podemos oferecer cláusulas que definem recursivamente as fórmulas em geral. As primeiras cláusulas são exatamente idênticas às da LVF.

1. Toda fórmula atômica é uma fórmula.
2. Se $\mathcal{A}$ é uma fórmula, então $\neg\mathcal{A}$ é uma fórmula.
3. Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são fórmulas, então $(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B})$ é uma fórmula.
4. Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são fórmulas, então $(\mathcal{A}\vee\mathcal{B})$ é uma fórmula.
5. Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são fórmulas, então $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ é uma fórmula.
6. Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são fórmulas, então $(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})$ é uma fórmula.
7. Se $\mathcal{A}$ é uma fórmula e § é uma variável, então $\forall§\,\mathcal{A}$ é uma fórmula.
8. Se $\mathcal{A}$ é uma fórmula e § é uma variável, então $\exists§\,\mathcal{A}$ é uma fórmula.
9. Nada mais é uma fórmula.

Supondo novamente que 'F' é um predicado de um lugar, que 'G' é uma relação ternária e 'S' um predicado de seis lugares, temos abaixo alguns exemplos de fórmulas que podem ser criadas através das cláusulas da definição acima:

$$
\begin{aligned}
&F(x)\\
&G(a, y, z)\\
&S(y, z, y, a, y, x)\\
(G(a, y, z) \to\ &S(y, z, y, a, y, x))\\
\forall z(G(a, y, z) \to\ &S(y, z, y, a, y, x))\\
F(x) \wedge \forall z(G(a, y, z) \to\ &S(y, z, y, a, y, x))\\
\exists y(F(x) \wedge \forall z(G(a, y, z) \to\ &S(y, z, y, a, y, x)))\\
\forall x\exists y(F(x) \wedge \forall z(G(a, y, z) \to\ &S(y, z, y, a, y, x)))
\end{aligned}
$$

Podemos, agora, oferecer uma definição formal de escopo (ou âmbito), que incorpora a definição de escopo de um quantificador. Aqui seguimos o caso da LVF, com a observação de que a noção de operador lógico principal corresponde ao acréscimo dos quantificadores à noção de conectivo principal definida no Capítulo 6.

> O OPERADOR LOGICO PRINCIPAL de uma fórmula corresponde ao último operador introduzido, quando se considera a construção da fórmula através das nove cláusulas recursivas do quadro acima.
>
> O ESCOPO ou AMBITO de um operador lógico em uma fórmula é a subfórmula para a qual esse operador é o operador lógico principal.

Abaixo uma ilustração gráfica do escopo dos quantifidadores da última fórmula apresentada no exemplo anterior:

$$\overbrace{\forall x\, \overbrace{\exists y\big[(F(x) \land \overbrace{\forall z(G(a, y, z) \to S(y, z, y, a, y, x))}^{\text{escopo de `}\forall z\text{'}}\big]}^{\text{escopo de `}\exists y\text{'}}}^{\text{escopo de `}\forall x\text{'}}$$

20.3 Sentenças

É importante lembrarmos que o objetivo principal da lógica é avaliar se os argumentos são válidos ou não. E os argumentos são compostos por sentenças declarativas: sentenças que podem ser verdadeiras ou falsas (asserções). Entretanto, muitas fórmulas não são asserções. Considere a seguinte chave de simbolização:

domínio: pessoas
$A(x, y)$: $\_\_\_\_\__x$ ama $\_\_\_\_\__y$
b: Boris

Considere, agora, a fórmula atômica '$A(z, z)$'. Como todas as fórmulas atômicas são fórmulas, '$A(z, z)$' é uma fórmula. Mas será que ela é uma asserção? Uma sentença que pode ser verdadeira ou falsa? Você pode pensar que ela será verdadeira caso a pessoa nomeada por 'z' ame a si mesma, da mesma maneira que '$A(b, b)$' é verdadeira caso Boris ame a si mesmo. No entanto, 'z' não é nome de ninguém, 'z' é uma variável. E, por isso, nenhuma asserção é feita com '$A(z, z)$'.

Quando, no entanto, colocamos um quantificador existencial, por exemplo, à esquerda de '$A(z, z)$', resultando em '$\exists z A(z, z)$', a fórmula obtida é uma asserção que será verdadeira se alguém amar a si próprio. Da mesma forma, com um quantificador universal obteríamos '$\forall z A(z, z)$', que é verdadeira se todos amam a si mesmos. O ponto é que sempre que há variáveis em nossas fórmulas, precisamos de algum quantificador para indicar como lidar com aquela variável.

Vamos tornar esta ideia mais precisa.

> Uma ocorrência de uma variável § é uma OCORRENCIA LIGADA se está dentro do escopo de $\forall$§ ou de $\exists$§.
>
> Qualquer ocorrência de variável que não seja ligada, é uma OCORRENCIA LIVRE.

Considere, por exemplo, a seguinte fórmula:

$$\forall x(E(x) \lor D(y)) \to \exists z(E(x) \to L(z, x))$$

O âmbito do quantificador universal '$\forall x$' é '$\forall x(E(x) \lor D(y))$', portanto, a primeira ocorrência de 'x' é ligada por '$\forall x$'. No entanto, a segunda e a terceira ocorrências de 'x' (em '$E(x)$' e em '$L(z, x)$') são livres. Da mesma forma, a única ocorrência de 'y' é livre. O escopo do quantificador existencial '$\exists z$' é '$(E(x) \to L(z, x))$', portanto a ocorrência de 'z' é ligada.

Podemos agora, finalmente, completar a nossa definição de sentença da LPO.

Uma SENTENCA da LPO é qualquer fórmula que não contém ocorrências livres de variáveis.

20.4 Convenções sobre parênteses

Adotaremos na LPO as mesmas convenções sobre o uso de parênteses que adotamos na LVF (veja o Capítulo 6 e a Seção 11.3):

- podemos omitir os parênteses mais externos das fórmulas.
- podemos usar colchetes, '[' e ']', no lugar de parênteses, para aumentar a legibilidade das fórmulas.

Exercícios

A. Em cada uma das seis fórmulas abaixo, para todas as variáveis, identifique as ocorrências livres e ligadas.

1. $\exists x\, L(x, y) \wedge \forall y\, L(y, x)$
2. $\forall x\, A(x) \wedge B(x)$
3. $\forall x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x)$
4. $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \wedge \forall y(C(x) \wedge D(y))$
5. $\forall x \exists y[R(x, y) \rightarrow (J(z) \wedge K(x))] \vee R(y, x)$
6. $\forall x_1(C(x_2) \leftrightarrow L(x_2, x_1)) \wedge \exists x_2\, L(x_3, x_2)$

B. Dentre as seis fórmulas do exercício acima, apenas uma é uma sentença. Qual? E por quê?

PARTE V

Interpretações

CAPÍTULO 21

Extensionalidade

A lógica verofuncional (LVF) recebeu este nome porque todos os seus conectivos são verofuncionais, ou seja, são funções de verdade. Dizer que um conecitvo da LVF, a conjunção ($\wedge$) por exemplo, é uma função de verdade, é dizer algo análogo ao que os matemáticos dizem quando afirmam que a adição (+) é uma função numérica. A adição é uma função numérica porque ela leva números em números através de uma operação. Por exemplo, em '2+3', a adição (+) toma dois números como argumentos (o 2 e o 3) e através de uma operação os leva a um número (o 5) que é o resultado da adição de 2 com 3. Suponha agora que 'A' é verdadeira e 'B' é falsa. A conjunção '$A \wedge B$' faz algo análogo ao exemplo da adição. Ela toma dois valores de verdade como argumentos, o 'V' (de A) e o 'F' (de B) e os leva a um valor de verdade, o 'F', que é o resultado da conjunção '$A \wedge B$'.

Assim, tudo que conseguimos fazer com a lógica verofuncional (LVF) é mapear sentenças em valores de verdade específicos. Nós podemos fazer isso *diretamente*, quando, por exemplo, estipulamos que a sentença 'P' é verdadeira. Mas nós também podemos (e é isso o que em geral fazemos) mapear sentenças a valores de verdade de modo *indireto*, através de chaves de simbolização, tais como:

> P: O Forte dos Reis Magos situa-se em Natal.

Conforme vimos no capítulo 10, uma chave de simbolização como esta deve ser entendida como nos dizendo que:

- A sentença 'P' da LVF deve assumir o mesmo valor de verdade que a sentença em português 'O Forte dos Reis Magos situa-se em Natal', qualquer que seja esse valor de verdade.

O ponto que queremos enfatizar é que a LVF não consegue lidar com diferenças de significado que vão além de meras diferenças no valor da verdade.

21.1 Simbolizar *versus* traduzir

A LPO também tem algumas limitações semelhantes. É bem verdade que ela vai além dos meros valores da verdade das sentenças, pois nos permite dividir sentenças em termos, predicados e expressões quantificadoras. E isso nos permite considerar o que é *verdadeiro* sobre um objeto em particular, ou sobre alguns objetos, ou sobre todos os objetos. Mas não conseguimos fazer nada a mais do que isso.

Quando fornecemos uma chave de simbolização para alguns predicados da LPO, tais como:

> $L(x)$: $\underline{\qquad}_x$ é um professor de lógica que torce para o Alecrim.

não estamos dizendo com isso que o predicado da LPO tem o mesmo *significado* do predicado em português. Estamos simplesmente estipulando algo como o seguinte:

- '$L(x)$' e '$\underline{\qquad}_x$ é um professor de lógica que torce para o Alecrim' devem ser *verdadeiros* exatamente das mesmas coisas.

Assim, em particular:

- '$L(x)$' deve ser verdadeiro de todas e apenas as coisas que são professores de lógica que torcem para o Alecrim, sejam elas quais forem.

E isto é uma estipulação indireta da verdade de '$L(x)$'. De modo alternativo, podemos também estipular diretamente de quais objetos um predicado deve ser verdadeiro. Por exemplo, podemos estipular que '$L(x)$' seja verdadeiro para Daniel Durante e para mais ninguém. Por acaso, Daniel Durante é a única pessoa do universo que ensina lógica e torce para o Alecrim e, portanto, esta estipulação direta teria o mesmo efeito que a estipulação indireta dada pela chave de simbolização. Observe, no entanto, que os predicados em português:

'_____ é Daniel Durante'
'_____ é um professor de lógica que torce para o Alecrim'

têm significados muito diferentes!

O ponto aqui é que a LPO não nos fornece nenhum recurso para lidar com nuances de significado. O único modo no qual dois predicados da LPO podem ser distintos um do outro é sendo verdadeiros de coisas diferentes. As coisas das quais um predicado é verdadeiro são conhecidas como a EXTENSAO desse predicado. Nós dizemos que a LPO é uma LINGUAGEM EXTENSIONAL porque ela reduz os predicados a suas extensões. Ou seja, não conseguimos, com a LPO, exprimir as diferenças de significado entre predicados que tenham a mesma extensão.

Apenas para fixar este ponto importante, vejamos mais um exemplo. Considere a seguinte chave de simbolização:

domínio: seres vivos
$R(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é um animal racional
$P(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é um primata com polegar opositor

Os dois predicados têm claramente significados diferentes em português. Ser um animal racional é ser um animal dotado de certa capacidade intelectual, e ser um primata com polegar opositor é ser um animal com o esqueleto dotado de certa característica morfológica. No entanto, considerando o domínio dos seres vivos, estes dois predicados são verdadeiros exatamente dos mesmos indivíduos: os seres humanos. Eles têm, portanto, a mesma extensão. No domínio dos seres vivos, suas simbolizações na LPO '$R(x)$' e '$P(x)$' não captam esta variação de significado e são equivalentes. A LPO é extensional porque ela não enxerga os significados (instensões) dos predicados, apenas suas extensões e, por isso, no domínio dos seres vivos, identifica '$R(x)$' e '$P(x)$'.

É por esse motivo que dizemos que as sentenças da LPO apenas *simbolizam* sentenças do português. É duvidoso que haja *traduções* do português para a LPO, pois as traduções deveriam preservar significados, e não apenas extensões.

21.2 Mais uma palavra sobre extensões

Podemos estipular diretamente as coisas das quais os predicados são verdadeiros: sua extensão. E nossas estipulações podem ser tão arbitrárias quanto desejarmos. Por exemplo, poderíamos estipular que '$H(x)$' deve ser verdadeiro para exatamente os seguintes objetos e nada mais:

Zila Mamede
o número π
todas as cordas Sol de violão já fabricadas

Estes objetos listados não têm nada em comum. Mas isso não importa. A lógica não se importa com o que nos parece como "natural" ou "semelhante". Munidos com esta interpretação de '$H(x)$', suponha que agora adicionamos os seguintes nomes à nossa chave de simbolização:

m: Zila Mamede
d: Dilma Rousseff

p: o número π

Então, '$H(m)$' e '$H(p)$' serão ambas verdadeiras, nesta interpretação, mas '$H(d)$' será falsa, já que Dilma Rousseff não estava entre os objetos estipulados para a extensão do predicado.

21.3 Relações

A noção de extensão de predicados de um lugar não é muito difícil de entender, mas as coisas ficam um pouco mais confusas quando lidamos com predicados de muitos lugares, ou seja, com relações. Considere a seguinte chave de simbolização:

$A(x, y)$: $\underline{\quad\quad}_x$ ama $\underline{\quad\quad}_y$

Dado o que dissemos anteriormente, essa chave de simbolização deve ser lida como dizendo:

- '$A(x, y)$' e '$\underline{\quad\quad}_x$ ama $\underline{\quad\quad}_y$' devem ser verdadeiras exatamente das mesmas coisas.

Assim, em particular:

- '$A(x, y)$' deve ser verdadeira de x e y (nesta ordem) se e somente se x ama y.[1]

É importante insistirmos na ordem aqui, pois o amor - notoriamente - nem sempre é recíproco.

Essa é uma estipulação indireta dos pares de coisas ⟨x,y⟩ sobre as quais é verdadeiro afirmar '$A(x, y)$'. Mas como seria uma estipulação direta? Não podemos *simplesmente* listar os objetos para os quais queremos estipular que '$A(x, y)$' se aplica; pois não saberíamos, de cada um deles, se ele ama ou se é amado e nem

[1] Observe que 'x' e 'y' à direita aqui são símbolos da nossa metalinguagem (o português aumentado) e estão sendo *utilizados*. Por isso estão sem aspas. Por outro lado, 'x' e 'y' em '$A(x, y)$' são símbolos da LPO e estão sendo *mencionados*. Por isso estão entre aspas simples. Confira o Capítulo 8, p. 76.

quem ele ama ou por quem é amado. Nossa estipulação direta precisa registrar explicitamente tudo isso.

Para fazer isso, no lugar de uma lista simples de objetos, a extensão de relações binárias (predicados de dois lugares) como '$A(x, y)$' será estipulada através de uma lista de pares de objetos ⟨x,y⟩, onde a ordem do par é importante. Podemos, portanto, estipular por exemplo, que '$B(x, y)$' seja verdadeiro dos seguintes pares de objetos e nada mais:

⟨Lenin, Marx⟩
⟨Maria Bonita, Lampião⟩
⟨Lampião, Maria Bonita⟩

Aqui, os colchetes em ângulo ('⟨' e '⟩') delimitando os pares servem para indicar que a ordem importa. Suponha que agora adicionemos as seguintes estipulações de nomes:

l: Lenin
m: Marx
b: Maria Bonita
p: Lampião

Com estes nomes,

$$B(l, m)$$

será verdadeira, pois o par

⟨Lenin, Marx⟩

faz parte da nossa lista explícita da extensão de '$B(x, y)$'. Por outro lado,

$$B(m, l)$$

será falsa, pois

⟨Marx, Lenin⟩

não está em nossa lista. Já

$$B(b, p) \quad \text{e} \quad B(p, b)$$

serão ambas verdadeiras, pois tanto ⟨Maria Bonita, Lampião⟩ quanto ⟨Lampião, Maria Bonita⟩ estão na nossa lista explícita da extensão de '$B(x, y)$'.

Não é difícil tornar estas ideias precisas com algumas ferramentas matemáticas da *teoria dos conjuntos*. Nós, no entanto, não abordaremos a teoria dos conjuntos neste livro. Apesar de descritas de um modo informal, as ideias de extensão e de par ordenado devem estar claras.

21.4 A semântica da identidade

A identidade é um predicado de dois lugares especial da LPO. Nós o escrevemos um pouco diferente das outras relações binárias:

$$\text{`}x = y\text{'} \quad \text{em vez de} \quad \text{`}I(x, y)\text{'}$$

Mais importante que isso, porém, é que a interpretação semântica da identidade é fixa, não depende, como os outros predicados, de chaves de simbolização, nem de estipulações explícitas.

Se dois nomes se referirem ao mesmo objeto, trocar um nome por outro não altera o valor de verdade de nenhuma sentença. Portanto, se, por exemplo, 'a' e 'b' nomearem o mesmo objeto, todas as sentenças abaixo serão verdadeiras:

$$A(a) \leftrightarrow A(b)$$
$$B(a) \leftrightarrow B(b)$$
$$R(a, a) \leftrightarrow R(b, b)$$
$$R(a, a) \leftrightarrow R(a, b)$$
$$R(c, a) \leftrightarrow R(c, b)$$
$$\forall x\, R(x, a) \leftrightarrow \forall x\, R(x, b)$$

O que acabamos de dizer é conhecido como o *princípio da indiscernibilidade dos idênticos*, que afirma, em resumo, que se 'a' e 'b' são o mesmo objeto, então qualquer coisa que seja verdadeiro afirmar de um deles também será verdadeira quando afirmada do outro:

Se $a = b$ **então** qualquer afirmação verdadeira sobre a
também será verdadeira quando afirmada de b
e
qualquer afirmação verdadeira sobre b
também será verdadeira quando afirmada de a

Este é um princípio incontroverso e reflete com precisão um importante aspecto da identidade. Alguns filósofos, no entanto, defendem também o princípio inverso desse. Eles defendem que se 'a' e 'b' nomeiam objetos tais que qualquer coisa que seja verdadeira quando afirmada sobre um deles também é verdadeira quando afirmada sobre o outro, então a e b nomeiam o mesmo objeto ('$a = b$'):

Se qualquer afirmação verdadeira sobre a
também é verdadeira quando afirmada de b
e
qualquer afirmação verdadeira sobre b
também é verdadeira quando afirmada de a **então** $a = b$

Este segundo princípio é conhecido como ***princípio da identidade dos indiscerníveis*** e é uma afirmação filosófica mais controversa do que o seu inverso, o princípio da indiscernibilidade dos idênticos. Ou seja, é incontroverso que o que é idêntico é também (e por causa disso) indiscernível, indistinguível. Mas não é incontroverso que o que é indiscernível seja também, e por causa disso, idêntico. Por esse motivo, conforme ficará claro mais adiante, a interpretação semântica da identidade na LPO contemplará o princípio da indiscernibilidade dos idênticos (este princípio será válido na LPO), mas não contemplará o princípio da identidade dos indiscerníveis (que não será um princípio válido na LPO).

Talvez você esteja com razão se perguntando por que o princípio da identidade dos indiscerníveis é controverso. Afinal, parece plausível aceitar que aquilo que não se pode distinguir deva mesmo ser idêntico. O ponto da controvérsia é que a distinguibilidade dos objetos é algo que depende de *nós*, da *nossa linguagem*, de *nossos conceitos*, ao passo que a identidade dos objetos não parece depender de nós, mas apenas dos próprios objetos. A ideia é que pode ocorrer de, por exemplo, não termos linguagem nem conceitos refinados o suficiente para conseguir distinguir certos objetos que nos aparecem indistinguíveis mas que são, na realidade, distintos. O seguinte exemplo é um tanto artificial, mas nos ajuda a entender como nossa linguagem pode ser inadequada para perceber certas distinções. Considere a seguinte interpretação (chave de simbolização):

domínio: Bertrand Russell, Bruno Vaz
a: Bertrand Russell
b: Bruno Vaz

- Para todo predicado primitivo que considerarmos, esse predicado não é verdadeiro de *nenhum* elemento do domínio.

Suponha que 'A' seja um predicado de um lugar. Dada nossa interpretação, '$A(a)$' e '$A(b)$' são ambas falsas. Afinal, estipulamos que os elementos do domínio não satisfazem nenhum predicado que quisermos considerar. Mas como '$A(a)$' e '$A(b)$' são ambas falsas, então '$A(a) \leftrightarrow A(b)$' é verdadeira. Da mesma forma, seja 'R' um predicado de dois lugares. Então '$R(a, a)$' será falsa, e também '$R(a, b)$'. Logo, '$R(a, a) \leftrightarrow R(a, b)$' será verdadeira. Bem, você já deve ter notado que, dada nossa interpretação, se não usarmos a identidade, não vamos conseguir distinguir aquilo que 'a' nomeia (Bertrand Russell) do que 'b' nomeia (Bruno Vaz). Porque o que quer que dissermos de 'a' será equivalente à mesma sentença dita de 'b'. No entanto, Bruno Vaz e Bertrand Russell não são a mesma pessoa.

21.5 Interpretações

Na LVF definimos uma VALORACAO como qualquer atribuição de verdade e falsidade às letras sentenciais. Na LPO, vamos definir uma INTERPRETACAO como consistindo dos seguintes elementos:

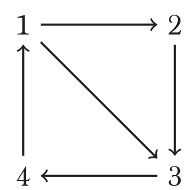
- a especificação de um domínio;
- a definição de um valor de verdade para cada letra sentencial que considerarmos;
- a atribuição de exatamente um objeto no domínio para cada nome que considerarmos;
- para cada predicado de um lugar que considerarmos, uma especificação das coisas do domínio para as quais o predicado deve ser verdadeiro (sua extensão);
- para cada predicado de n lugares que considerarmos, uma especificação das sequências ordenadas de n coisas do domínio $\langle c_1, \ldots, c_n \rangle$ para as quais o predicado deve ser verdadeiro (sua extensão).

Dados estes elementos, as chaves de simbolização que consideramos na Parte IV nos proporcionam uma maneira muito conveniente de apresentar uma interpretação. E nós continuaremos a usá-las ao longo desta Parte. Sendo um pouco mais precisos aqui, podemos dizer que uma *interpretação é exatamente uma chave de simbolização* que contempla todos estes elementos acima.[2] No entanto, às vezes também é conveniente apresentar uma interpretação *diagramaticamente.*

Suponha que queiramos considerar apenas um predicado de dois lugares, '$R(x, y)$'. Nós podemos representá-lo traçando setas, cada uma ligando dois objetos, e estipular que a extensão de

[2] Alguns destes elementos podem ficar de fora de algumas interpretações caso o contexto de sua utilização não os exija. Por exemplo, não há necessidade de uma interpretação ter letras sentenciais, se não simbolizarmos nenhuma sentença com letras sentenciais. Da mesma forma, se nenhum indivíduo do domínio do discurso tem nome, os nomes podem ficar de fora de uma interpretação; ou se não estamos interessados em relações, mas apenas em predicados de um lugar, então as relações também podem ficar de fora.

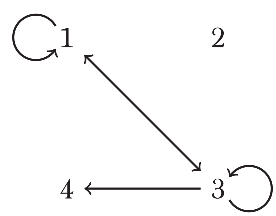
'$R(x, y)$' deve conter $\langle a, b\rangle$ (ou seja, que '$R(a, b)$' é verdadeira) apenas se há uma seta partindo de a e chegando em b. Como exemplo, podemos oferecer:



Este diagrama é adequado para caracterizar uma interpretação cujo domínio são os números de 1 a 4 e que tem uma única relação binária '$R(x, y)$', que é verdadeira dos seguintes pares:

$$\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle$$

Da mesma forma, podemos oferecer:



para uma interpretação com o mesmo domínio, e com uma relação binária '$R(x, y)$' cuja extensão é dada pelos seguintes pares:

$$\langle 1, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 3, 3\rangle$$

Se quisermos, podemos tornar nossos diagramas mais complexos. Por exemplo, podemos adicionar nomes como rótulos para objetos específicos. Da mesma forma, para simbolizar a extensão de um predicado de um lugar, podemos simplesmente desenhar um anel em torno de alguns objetos específicos e estipular que os objetos assim circundados (e somente eles) satisfazem o predicado em questão.

CAPÍTULO 22

A verdade na LPO

Não custa nada relembrar aqui que o objetivo principal do estudo da lógica é avaliar argumentos, separando os válidos dos inválidos. E também não custa nada relembrar que um argumento é válido quando suas premissas justificam sua conclusão, ou seja, quando não é possível haver uma situação em que suas premissas sejam todas verdadeiras, mas sua conclusão seja falsa. Então, antes de sermos capazes de avaliar argumentos na LPO, precisamos ser capazes de ligar as sentenças da LPO a situações em que poderemos avaliar se elas são verdadeiras ou falsas.

Na LVF, esta ponte que nos possibilita interpretar sentenças simbolizadas em situações nas quais elas serão verdadeiras ou falsas é dada pelas chaves de simbolização, juntamente com as valorações. Através de uma chave de simbolização, a verdade ou falsidade das sentenças em português nas diversas situações transforma-se na verdade ou falsidade das sentenças simbolizadas na LVF nas diversas valorações. Uma chave de simbolização liga situações distintas a valorações distintas que correspondem às diversas linhas das tabelas de verdade, nas quais as sentenças da LPO são verdadeiras ou falsas. E a consideração dos valores de verdade das sentenças em todas as valorações possíveis, feita nas tabelas de verdade, nos possibilita avaliar a validade dos argumentos.[1]

No caso da LPO, esta ponte entre as sentenças simbolizadas e as situações é feita pela noção de interpretação, introduzida na Seção 21.5, p. 235. Vimos ali que uma interpretação é uma chave de simbolização composta por:

- um domínio do discurso;
- uma atribuição (direta ou indireta) de valores de verdade para cada letra sentencial;
- a definição de uma referência, no domínio, para cada nome;
- a definição (dierta ou indireta) de uma extensão para cada predicado e relação.

Uma chave de simbolização com todos esses componentes constitui uma interpretação e nos fornece tudo o que precisamos para decidir se uma sentença qualquer da LPO é verdadeira ou falsa. Entender como utilizar interpretações para classificar as sentenças da LPO como verdadeiras ou falsas é o primeiro passo para conseguirmos avaliar argumentos na LPO, e será nossa tarefa neste capítulo.

Sabemos, do Capítulo 20, que existem três tipos de sentenças na LPO:

▹ sentenças atômicas:

  - $C(b)$
  - $A(r, j)$
  - Q

▹ sentenças cujo operador principal é um conectivo sentencial:

  - $C(b) \wedge Q$

[1] Se quiser relembrar os detalhes deste processo na LVF, releia a Seção 12.4, p. 110.

- $A(r, j) \to \forall x\, C(x)$
- $\neg Q$

▹ sentenças cujo operador principal é um quantificador:

- $\exists x\, C(x)$
- $\forall x(A(x, j) \to C(x))$
- $\exists x \exists y(A(x, y) \land A(y, x))$

Temos que explicar como atribuir valores de verdade para cada um destes tipos de sentenças.

A explicação que daremos aqui é completamente geral e vale para qualquer interpretação. No entanto, para facilitar a compreensão, usaremos a seguinte interpretação como exemplo privilegiado:

domínio:	todas as pessoas (vivas ou mortas) nascidas antes do ano 2020
a:	Aristóteles
b:	Simona Talma
C:	Simona Talma é uma artista potiguar [2]
D:	é F (uma sentença falsa)[3]
$F(x)$:	$\_\_\_\_\__x$ é filósofo
$R(x, y)$:	$\_\_\_\_\__x$ nasceu antes que $\_\_\_\_\__y$

Esta interpretação será o nosso caso de estudo nas Seções seguintes.

22.1 Sentenças atômicas

Existem três tipos de sentenças atômicas na LPO, as letras sentenciais, tais como 'C' e 'D', os predicados seguidos de nomes,

[2] Poderíamos aqui ter criado um predicado tal como '$P(x)$' para '$\_\_\_\_\__x$ é uma artista portiguar' e simbolizar 'Simona Talma é uma artista potiguar' como '$P(b)$'. Não fizemos isso porque queremos que a interpretação de nosso exemplo tenha também uma letra sentencial 'C' que, tal como na LVF, tem exatamente o mesmo valor de verdade que a sentença 'Simona Talma é uma artista potiguar'.

[3] Aqui estamos apenas indicando diretamente, sem nenhuma sentença em português intermediária, que a letra sentencial 'D' é uma sentença falsa.

tais como '$F(a)$' e '$F(b)$', e as relações n-árias seguidas de n-uplas ordenadas de nomes, tais como '$R(a, b)$' e '$R(b, a)$'. Precisamos, então, entender como as interpretações atribuem valores de verdade para cada um desses três tipos de sentenças atômicas.

No caso das letras sentenciais, isso é uma operação imediata idêntica ao que fazíamos na LVF. A interpretação estabelece direta ou indiretamente se a letra sentencial é verdadeira ou falsa. Em nosso exemplo

$$\text{`}C' \quad \text{é} \quad \text{verdadeira}$$

porque Simona Talma é mesmo uma artista potiguar. A interpretação nos dá aqui uma especificação indireta através da sentença em português 'Simona Talma é uma artista potiguar'. A letra sentencial terá o mesmo valor de verdade desta sentença.

Por outro lado,

$$\text{`}D' \quad \text{é} \quad \text{falsa}$$

porque a interpretação estabelece diretamente este fato, sem qualquer sentença intermediária.

Quando a sentença atômica é constituída por um predicado seguido de um nome, tal como '$F(a)$', ela será verdadeira apenas no caso em que o indivíduo que 'a' nomeia esteja na extensão do predicado '$F(x)$'. Em nossa interpretação, a extensão de '$F(x)$' é dada indiretamente pelo predicado '$\_\_\_\__x$ é filósofo'. Então,

$$\text{`}F(a)\text{'} \quad \text{é} \quad \text{verdadeira}$$

já que 'a' nomeia Aristóteles e Aristóteles é um filósofo. De modo semelhante,

$$\text{`}F(b)\text{'} \quad \text{é} \quad \text{falsa}$$

porque 'b' nomeia Simona Talma, que não é uma filósofa.

Por fim, se a sentença atômica for uma relação seguida de uma sequência ordenada de nomes, tal como '$R(a, b)$', ela será verdadeira apenas se o par ordenado dos indivíduos nomeados por 'a' e 'b', $\langle$Aristóteles, Simona Talma$\rangle$, estiver na extensão do predicado '$R(x, y)$'. Em nossa interpretação esta extensão é definida indiretamente através da relação

'$\_\_\_\_\__x$ nasceu antes que $\_\_\_\_\__y$'.

Como Aristóteles nasceu antes de Simona Talma, então o par $\langle$Aristóteles, Simona Talma$\rangle$ está na extensão de '$R(x, y)$' e

'$R(a, b)$' é verdadeira

Da mesma forma, podemos facilmente verificar que

'$R(a, a)$' é falsa

porque Aristóteles não nasceu antes que Aristóteles.

Lidar com sentenças atômicas é, portanto, muito intuitivo. As letras sentencias são tratadas exatamente do mesmo modo que na LVF e quando $\mathcal{R}$ é um predicado n-lugares e $\dashv_1, \dashv_2, \ldots, \dashv_n$ são nomes, temos:

> $\mathcal{R}(\dashv_1, \dashv_2, \ldots, \dashv_n)$ é verdadeira em uma interpretação
> **se e somente se**
> $\mathcal{R}$ é verdadeira dos objetos nomeados por $\dashv_1, \dashv_2, \ldots, \dashv_n$ na interpretação (considerados nesta ordem)

Lembre-se, porém, de que existe um tipo especial de sentença atômica: dois nomes conectados por um sinal de identidade constituem uma sentença atômica. Esse tipo de sentença atômica também é fácil de lidar. Sejam $\dashv$ e $\lfloor$ nomes quaisquer,

> $\dashv = \lfloor$ é verdadeira em uma interpretação
> **se e somente se**
> $\dashv$ e $\lfloor$ são nomes do mesmo objeto nesta interpretação

Portanto, em nossa interpretação,

'$a = b$' é falsa

porque Aristóteles e Simona Talma não são a mesma pessoa.

22.2 Conectivos sentenciais

Vimos no Capítulo 20 que as sentenças da LPO podem ser criadas a partir de sentenças mais simples, usando os conectivos verofuncionais da LVF. As regras que governam a atribuição de verdade ou falsidade a sentenças deste tipo na LPO são *exatamente* as mesmas da LVF. Aqui estão elas:

$\mathcal{A} \land \mathcal{B}$ é verdadeira em uma interpretação
se e somente se
$\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são ambas verdadeiras nesta interpretação

$\mathcal{A} \lor \mathcal{B}$ é verdadeira em uma interpretação
se e somente se
$\mathcal{A}$ é verdadeira ou $\mathcal{B}$ é verdadeira nesta interpretação

$\neg\mathcal{A}$ é verdadeira em uma interpretação
se e somente se
$\mathcal{A}$ é falsa nesta interpretação

$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é verdadeira em uma interpretação
se e somente se
$\mathcal{A}$ é falsa ou $\mathcal{B}$ é verdadeira nesta interpretação

$\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ é verdadeira em uma interpretação
se e somente se
$\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ têm o mesmo valor de verdade nesta interpretação

Estas definições nos dão, de um modo diferente, exatamente a mesma informação que as tabelas de verdade características dos conectivos, que vimos no Capítulo 9, p. 84. Alguns exemplos nos ajudarão aqui. A ideia é aplicar as definições do quadro acima à nossa interpretação exemplo (p. 239) para decidir o valor de verdade das sentenças:

- '$a = a \land F(a)$' é verdadeira
  porque tanto '$a = a$' quanto '$F(a)$' são verdadeiras

- '$R(a, b) \land F(b)$' é falsa
  porque ainda que '$R(a, b)$' seja verdadeira, '$F(b)$' é falsa

- '$a = b \lor F(a)$' é verdadeira
  porque ainda que '$a = b$' seja falsa, '$F(a)$' é verdadeira

- '$\neg a = b$' é verdadeira
  porque '$a = b$' é falsa

- '$F(a) \land \neg(a = b \land R(a, b))$' é verdadeira
  porque '$F(a)$' é verdadeira e '$a = b$' é falsa

Antes de prosseguir, certifique-se de ter compreendido todos esses exemplos. Simplesmente aplicamos, em cada caso, a definição correspondente do quadro acima (p. 242).

22.3 Quando o operador principal é um quantificador

Até aqui viemos bem, mas ainda não tratamos do aspecto que representa a principal novidade introduzida na LPO: as sentenças cujo operador principal é um *quantificador*. Veremos que expressar as condições de verdade deste tipo de sentenças é um pouco mais complicado do que parece à primeira vista. A ideia geral até que é simples e já foi mencionada de passagem em capítulos anteriores:

- $\forall x \mathcal{A}(x)$ é verdadeira **se e somente se**
  $\mathcal{A}(x)$ for verdadeira *de todos* os elementos do domínio.

- $\exists x \mathcal{B}(x)$ é verdadeira **se e somente se**
  $\mathcal{B}(x)$ for verdadeira *de algum* elemento do domínio.

A dificuldade maior não é esta ideia geral, mas a especificação de sua definição precisa.

Vamos aqui nos aproximar pouco a pouco da definição. Começaremos com algumas propostas ingênuas e vamos corrigindo-as até, eventualmente, chegarmos à definição correta. Uma primeira proposta é a seguinte: se, como vimos, '$\forall x\, F(x)$' deve ser verdadeira se e somente se '$F(x)$' é verdadeira para tudo no domínio, então poderíamos simplesmente considerar que uma sentença universal é verdadeira quando a extensão do predicado que a segue compreende todo o domínio do discurso.

Esta idéia funciona quando o que vem após o quantificador inicial é um predicado, como em '$\forall x\, F(x)$'. Mas, infelizmente, essa ideia não é geral o suficiente para especificar as condições de verdade de sentenças onde o que segue o quantificador inicial não é um predicado, mas outra expressão quantificada, tal como ocorre em:

$$\forall x \exists y\, L(x, y)$$

Não conseguimos aplicar esta ideia aqui, porque o que segue o quantificador não é um predicado, mas a expressão quantificada '$\exists y\, L(x, y)$'. E as interpretações não têm cláusulas que indicam se '$\exists y\, L(x, y)$' é verdadeira de tudo no domínio. As cláusulas das intepretações especificam apenas a referência de nomes e a extensão de predicados e relações.

Para tentar corrigir isso poderíamos então sugerir que '$\forall x \exists y\, L(x, y)$' deve ser verdadeira em uma interpretação se e somente se $\exists y\, L(\dashv, y)$ for verdadeira para *todo* nome $\dashv$ da interpretação. E, de modo similar, diríamos que $\exists y\, L(\dashv, y)$ é verdadeira se e somente se $L(\dashv, \lfloor)$ for verdadeira para *algum* nome $\lfloor$. Então, juntando estes dois passos, '$\forall x \exists y\, L(x, y)$' seria verdadeira em uma interpretação se e somente se $L(\dashv, \lfloor)$ for verdadeira para *todo* nome $\dashv$ e *algum* nome $\lfloor$ presentes na interpretação.

Infelizmente, isso também não funciona. Para entender por que, basta observar que na interpretação de nossos exemplos (p. 239), apenas duas pessoas têm nome, mas o domínio comporta todas as pessoas nascidas antes do ano 2020.

Uma terceira ideia, então, é a seguinte. Mesmo que uma interpretação não tenha nomes para *todos* os indivíduos do domínio, ela poderia ter. Ou seja, podemos estender uma interpretação qualquer, de modo a que todos os elementos do domínio tenham nomes. Antes de prosseguir com a definição, vejamos alguns exemplos de como isso pode funcionar.

Em nossa interpretação privilegiada (p. 239) '$\exists x\, R(b, x)$' deve ser verdadeira. Afinal, certamente há no domínio alguém que nasceu depois que Simona Talma. Dani Cruz (uma outra artista potiguar) é uma dessas pessoas. De fato, se estendermos temporariamente nossa interpretação adicionando o nome 'c' para se referir a Dani Cruz, então '$R(b, c)$' será verdadeira nessa interpretação estendida. E este fato certamente deve ser suficiente para assegurar que '$\exists x\, R(b, x)$' é verdadeira na nossa interpretação original, já que ele indica que há pelo menos uma pessoa no domínio (Dani Cruz) que nasceu depois de Simona Talma.

Na nossa interpretação, '$\exists x(F(x) \land R(x, a))$' também deve ser verdadeira. Afinal, no domínio, certamente há alguém que foi filósofo e nasceu antes de Aristóteles. Sócrates é uma dessas pessoas. De fato, se estendermos nossa interpretação, com um novo nome, 'd', que denota Sócrates, então '$F(d) \land R(d, a)$' será verdadeira nessa interpretação estendida. Novamente, isso certamente é suficiente como garantia de que '$\exists x(F(x) \land R(x, a))$' é verdadeira na interpretação original (não estendida), já que isso indica que há pelo menos uma pessoa no domínio (Sócrates) que é filósofo e nasceu antes de Aristóteles.

Já a sentença '$\forall x \exists y\, R(x, y)$' deve ser falsa em nossa interpretação. Afinal, certamente há uma última pessoa que nasceu antes do ano 2020 começar. Não sabemos quem é esta pessoa, mas podemos, mesmo assim, estender a interpretação para que um nome novo, 'e', denote exatamente esta pessoa. E fazendo isso, qualquer que seja o indivíduo do domínio ao qual um outro nome novo 'f' se refira, a sentença '$R(e, f)$' seria falsa. De fato, não importa *quem* seja a referência do nome 'f', sabemos que '$R(e, f)$' será falsa, já que 'e' denota a última pessoa nascida em 2019. Esse fato é certamente suficiente para garantir que '$\exists y\, R(e, y)$' é falsa na interpretação estendida. E isso, por sua vez, é certamente suficiente como garantia de que '$\forall x \exists y\, R(x, y)$' é falsa na nossa interpretação original.

Se você entendeu esses três exemplos, ótimo. É isso que importa. O que temos que fazer, agora, é fornecer uma definição precisa dessas ideias, que exprima as condições de verdade para sentenças quantificadas. Para isso precisamos de mais notação em nossa metalinguagem. A expressão:

$$\mathcal{A}(\S)$$

será usada para denotar na metalinguagem uma fórmula que contenha pelo menos uma ocorrência livre da variável §. Ou seja, há uma ou mais ocorrências de § em $\mathcal{A}$ que estão fora do escopo de qualquer '$\forall x$' e '$\exists x$' em $\mathcal{A}$. Seja $\rfloor$ um nome. A expressão:

$$\mathcal{A}(\rfloor)$$

será usada para denotar na metalinguagem a fórmula obtida quando substituímos por $\rfloor$ *todas* as ocorrências livres de § em $\mathcal{A}$. A fórmula resultante, $\mathcal{A}(\rfloor)$, é chamada de INSTANCIA DE SUBSTITUICAO de $\forall\S\mathcal{A}$ e $\exists\S\mathcal{A}$. Além disso, $\rfloor$ é chamado de NOME DE INSTANCIACAO.

Vejamos um exemplo. Considere a sentença da LPO:

$$\forall y\exists x(R(y,x) \leftrightarrow F(x))$$

A notação recém introduzida nos permite usar a expressão

$$\forall\dagger\mathcal{A}(\dagger)$$

para nos referirmos a esta sentença de um modo genérico em nossa metalinguagem. Quando fazemos isso, a expressão

$$\mathcal{A}(\dagger)$$

refere-se genericamente a

$$\exists x(R(y,x) \leftrightarrow F(x))$$

que é uma fórmula com uma ocorrência livre da variável 'y'. Se substituímos esta ocorrência livre de 'y' por um nome, digamos, 'e', obtemos a sentença:

$$\exists x(R(e, x) \leftrightarrow F(x))$$

Esta sentença nada mais é do que uma instância de substituição de

$$\forall y \exists x(R(y, x) \leftrightarrow F(x))$$

onde 'e' é o nome de instanciação, e 'y' é a variável instanciada.

Seja I o nome de uma interpretação que estejamos considerando. I inclui uma especificação de quais nomes correspondem a quais objetos no domínio. Considere um objeto qualquer do domínio, digamos, d, e um nome $\rfloor$ que não esteja sendo usado em I. Usaremos a notação

$$\mathrm{I}[d/\rfloor]$$

para nos referirmos à interpretação que é igual a I, com um acréscimo: $\mathrm{I}[d/\rfloor]$ atribui o nome $\rfloor$ ao objeto d. Então podemos dizer que d SATISFAZ a fórmula $\mathcal{A}(\S)$ na interpretação I se e somente se $\mathcal{A}(\rfloor)$ é verdadeira em $\mathrm{I}[d/\rfloor]$. (Quando d satisfaz $\mathcal{A}(\S)$, nós dizemos também que $\mathcal{A}(\S)$ é *verdadeira de d*.

> A interpretação $\mathrm{I}[d/\rfloor]$ é igual à interpretação I, com o acréscimo de que atribui o nome $\rfloor$ ao objeto d.
>
> Um objeto d SATISFAZ $\mathcal{A}(\S)$ na interpretação I **se e somente se** $\mathcal{A}(\rfloor)$ é verdadeira em $\mathrm{I}[d/\rfloor]$.

Assim, por exemplo, dizemos que:

- Sócrates satisfaz a fórmula '$F(x)$'

pois:

- $F(c)$ é verdadeira na interpretação I[Sócrates/c]

ou seja, $F(c)$ é verdadeira na interpretação que obtemos de nossa interpretação original I (p.239) quando acrescentamos a indicação de que o nome 'c' se refere a Sócrates:

domínio:	todas as pessoas (vivas ou mortas) nascidas antes do ano 2020
a:	Aristóteles
b:	Simona Talma
c:	Sócrates
C:	Simona Talma é uma artista potiguar
D:	é F (uma sentença falsa)
$F(x)$:	$\underline{\qquad}_{x}$ é filósofo
$R(x, y)$:	$\underline{\qquad}_{x}$ nasceu antes que $\underline{\qquad}_{y}$

Tendo ampliado nossa metalinguagem com estas notações, podemos finalmente definir as condições de verdade de sentenças da LPO cujo operador principal é um quantificador. A ideia aproximada é a seguinte. A sentença $\forall\S\mathscr{A}(\S)$ será verdadeira em I se e somente se, para qualquer objeto d no domínio, $\mathscr{A}(\rfloor)$ é verdadeira em $\mathrm{I}[d/\rfloor]$. Ou seja, $\forall\S\mathscr{A}(\S)$ será verdadeira se e somente se $\mathscr{A}(\rfloor)$ for verdadeira, independentemente de qual objeto (no domínio) tenha sido nomeado por $\rfloor$. Em outras palavras, $\forall\S\mathscr{A}(\S)$ é verdadeira apenas quando todos os objetos no domínio satisfazem $\mathscr{A}(\S)$.

Similarmente, a sentença $\exists\S\mathscr{A}(\S)$ será verdadeira se e somente se houver *algum* objeto no domínio que satisfaça $\mathscr{A}(\S)$. Ou seja, $\exists\S\mathscr{A}(\S)$ é verdadeira em I se e somente se $\mathscr{A}(\rfloor)$ é verdadeira em $\mathrm{I}[d/\rfloor]$ para pelo menos um objeto d.

> $\forall\S\mathscr{A}(\S)$ é verdadeira em uma interpretação **se e somente se** todo objeto no domínio satisfiaz $\mathscr{A}(\S)$.
>
> $\exists\S\mathscr{A}(\S)$ é verdadeira em uma interpretação **se e somente se** pelo menos um objeto no domínio satisfaz $\mathscr{A}(\S)$.

Para ficar claro: tudo o que estamos fazendo aqui é formalizar (de um modo bastante preciso) a ideia intuitiva de que para que uma sentença quantifidada universalmente seja verdadeira, todos os objetos do domínio precisam satisfazê-la; e para que uma sentença quantificada existencialmente seja verdadeira, basta que um objeto do domínio a satisfaça.

Finalmente, vale notar que o conceito de um objeto satisfazer uma fórmula com uma variável livre também pode ser estendido a fórmulas com mais de uma variável livre. Por exemplo, se tivermos uma fórmula $\mathcal{A}(\S, \dagger)$ com duas variáveis livres § e †, podemos dizer que um par de objetos $\langle a, b\rangle$ satisfaz $\mathcal{A}(\S, \dagger)$ se e somente se $\mathcal{A}(\rfloor, \lceil)$ for verdadeira na interpretação estendida por dois nomes $\rfloor$ e $\lceil$, onde $\rfloor$ é o nome de a e $\lceil$ é o nome de b. Assim, por exemplo, $\langle$Sócrates, Platão$\rangle$ satisfaz $R(x, y)$, pois, já que Sócrates nasceu antes de Platão, $R(c, d)$ é verdadeiro na interpretação:

domínio: todas as pessoas (vivas ou mortas) nascidas antes do ano 2020
a: Aristóteles
b: Simona Talma
c: Sócrates
d: Platão
C: Simona Talma é uma artista potiguar
D: é F (uma sentença falsa)
$F(x)$: $\underline{\hspace{3em}}_x$ é filósofo
$R(x, y)$: $\underline{\hspace{3em}}_x$ nasceu antes que $\underline{\hspace{3em}}_y$

Para fórmulas atômicas, tais como $F(x)$ e $R(x, y)$, os objetos ou sequências de objetos que as satisfazem são exatamente a extensão dos predicados que as constituem. Mas a noção de satisfação também se aplica a fórmulas não atômicas. A fórmula $F(x) \land R(x, b)$, por exemplo, é satisfeita por todos os filósofos que nasceram antes de Simona Talma. A ideia de satisfação aplica-se até mesmo a fórmulas envolvendo quantificadores. Por exemplo, $F(x) \land \neg\exists y(F(y) \land R(y, x))$ é satisfeita por todos os filósofos para os quais nenhum filósofo nasceu antes deles—em outras palavras, o primeiro filósofo, e apenas ele, satisfaz esta fórmula.

Exercícios

A. Considere a seguinte interpretação:

- O domínio compreende apenas Benedita e Clayton
- '$A(x)$' é verdadeira para ambos, tanto Benedita quanto Clayton
- '$B(x)$' é verdadeira apenas para Benedita
- '$N(x)$' não é verdadeira nem para Benedita nem para Clayton
- 'c' refere-se a Clayton

Para cada uma das nove sentenças seguintes, determine se ela é verdadeira ou falsa nesta interpretação.

1. $B(c)$
2. $A(c) \leftrightarrow \neg N(c)$
3. $N(c) \rightarrow (A(c) \lor B(c))$
4. $\forall x\, A(x)$
5. $\forall x \neg B(x)$
6. $\exists x(A(x) \land B(x))$
7. $\exists x(A(x) \rightarrow N(x))$
8. $\forall x(N(x) \lor \neg N(x))$
9. $\exists x\, B(x) \rightarrow \forall x\, A(x)$

B. Considere a seguinte interpretação:

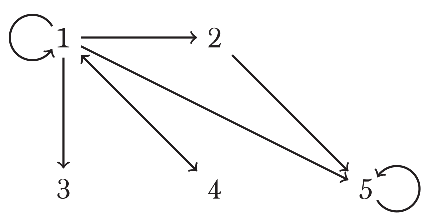
- O domínio compreende apenas Leila, Cora e Ênio
- '$G(x)$' é verdadeira de Leila, de Cora e de Ênio
- '$H(x)$' é verdadeira apenas de Cora
- '$M(x)$' é verdadeira apenas de Leila e Ênio
- 'c' refere-se a Cora
- 'e' refere-se a Ênio

Para cada uma das quinze sentenças seguintes, determine se ela é verdadeira ou falsa nesta interpretação.

1. $H(c)$
2. $H(e)$
3. $M(c) \lor M(e)$
4. $G(c) \lor \neg G(c)$

5. $M(c) \to G(c)$
6. $\exists x\, H(x)$
7. $\forall x\, H(x)$
8. $\exists x\, \neg M(x)$
9. $\exists x(H(x) \land G(x))$
10. $\exists x(M(x) \land G(x))$
11. $\forall x(H(x) \lor M(x))$
12. $\exists x\, H(x) \land \exists x\, M(x)$
13. $\forall x(H(x) \leftrightarrow \neg M(x))$
14. $\exists x\, G(x) \land \exists x \neg G(x)$
15. $\forall x \exists y(G(x) \land H(y))$

C. Conforme as convenções introduzidas no final do Capítulo 21 (p. 235), o diagrama abaixo especifica uma interpretação cujo domínio é o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e que tem uma única relação binária $R(x, y)$, cuja extensão é dada pelas setas do diagrama:



Para cada uma das doze sentenças seguintes, determine se ela é verdadeira ou falsa nesta interpretação.

1. $\exists x\, R(x, x)$
2. $\forall x\, R(x, x)$
3. $\exists x \forall y\, R(x, y)$
4. $\exists x \forall y\, R(y, x)$
5. $\forall x \forall y \forall z((R(x, y) \land R(y, z)) \to R(x, z))$
6. $\forall x \forall y \forall z((R(x, y) \land R(x, z)) \to R(y, z))$
7. $\exists x \forall y\, \neg R(x, y)$
8. $\forall x(\exists y\, R(x, y) \to \exists y\, R(y, x))$
9. $\exists x \exists y(\neg x = y \land R(x, y) \land R(y, x))$
10. $\exists x \forall y(R(x, y) \leftrightarrow x = y)$

11. $\exists x \forall y (R(y, x) \leftrightarrow x = y)$
12. $\exists x \exists y (\neg x = y \land R(x, y) \land \forall z (R(z, x) \leftrightarrow y = z))$

CAPÍTULO 23
Conceitos semânticos

Oferecer uma definição precisa de sentença verdadeira na LPO foi um pouco complicado, mas agora que terminamos, podemos definir várias noções lógicas importantes. Elas serão muito parecidas com as definições que oferecemos para a LVF. No entanto, lembre-se de que agora elas se referem a *interpretações*, e não mais a valorações.

Continuaremos a usar o símbolo '$\vDash$' na LPO da mesma forma que o utilizamos na LVF. Assim:

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n \vDash \mathcal{C}$$

significa que não há interpretação na qual $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, …, $\mathcal{A}_n$ sejam todas verdadeiras e $\mathcal{C}$ seja falsa. Consequentemente,

$$\vDash \mathcal{A}$$

significa que $\mathcal{A}$ é verdadeira em todas as interpretações, ou seja, que é impossível que $\mathcal{A}$ seja falsa.

As outras noções lógicas que vimos, também têm definições correspondentes na LPO. Aqui estão elas:

- Uma sentença $\mathcal{A}$ é uma VALIDADE na LPO se e somente se $\mathcal{A}$ for verdadeira em todas as interpretações; ou seja, se

$$\vDash \mathcal{A}$$

- $\mathcal{A}$ é uma CONTRADICAO na LPO se e somente se $\mathcal{A}$ for falsa em todas as interpretações; ou seja, se

$$\vDash \neg\mathcal{A}$$

- $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots \mathcal{A}_n \ \therefore\ \mathcal{C}$ é um argumento VALIDO NA LPO se e somente se não houver interpretação em que todas as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa; ou seja, se

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots \mathcal{A}_n \vDash \mathcal{C}$$

- Um argumento $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots \mathcal{A}_n \ \therefore\ \mathcal{C}$ é INVALIDO NA LPO se e somente se ele não é válido, ou seja, quando há alguma interpretação na qual todas as suas premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa. Denotamos isso por:

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots \mathcal{A}_n \nvDash \mathcal{C}$$

- Duas sentenças da LPO $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são EQUIVALENTES se e somente se em toda interpretação na qual uma é verdadeira, a outra também é; ou seja, se

$$\mathcal{A} \vDash \mathcal{B} \quad \text{e} \quad \mathcal{B} \vDash \mathcal{A}$$

- As sentenças $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, ..., $\mathcal{A}_n$ são CONJUNTAMENTE SATISFATORIAS na LPO se e somente se há alguma interpretação na qual todas são verdadeiras. Eles são CONJUNTAMENTE INSATISFATORIAS se não houver tal interpretação.

CAPÍTULO 24

Utilizando as interpretações

24.1 Validades e contradições

Suponha que queremos mostrar que

$$\exists x\, A(x, x) \to B(d)$$

não é uma validade. Conforme a definição vista no capítulo anterior, temos que mostrar que esta sentença não é verdadeira em todas as interpretações; isto é, que ela é falsa em alguma interpretação. Então será suficiente fornecermos uma única interpretação na qual a sentença seja falsa.

Para que '$\exists x\, A(x, x) \to B(d)$' seja falsa, o antecedente do condicional ('$\exists x\, A(x, x)$') deve ser verdadeiro, e o consequente ('$B(d)$') deve ser falso. Para construir uma interpretação na qual isso ocorra, começamos especificando um domínio. Manter o domínio pequeno facilita a especificação da extensão dos predicados; portanto, começaremos com um domínio com apenas um indivíduo. Digamos, então, que o único indivíduo de nosso domínio seja a cidade de Fortaleza.

domínio: Fortaleza

Nossa sentença tem um nome, 'd', que precisa nomear algo no domínio. Então nossa única opção é definir que:

d: Fortaleza

Lembre-se de que queremos que '$\exists x\, A(x, x)$' seja verdadeira; portanto, queremos que algum indivíduo do domínio relacione-se consigo mesmo através de 'A'. Podemos então propor a seguinte extensão para a relação 'A':

$A(x, y)$: $\_\_\_\_\__x$ está no mesmo país que $\_\_\_\_\__y$

Agora, '$A(d, d)$' é claramente verdadeira, portanto, '$\exists x\, A(x, x)$' também é. Mas nós também queremos que '$B(d)$' seja falsa; portanto, o indivíduo nomeado por 'd' não deve estar na extensão de 'B'. Podemos simplesmente propor que:

$B(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é a capital do Rio Grande do Norte

Construímos uma interpretação em que '$\exists x\, A(x, x)$' é verdadeira, mas '$B(d)$' é falsa. Logo, nesta interpretação '$\exists x\, A(x, x) \rightarrow B(d)$' é falsa e portanto não é uma validade.

Com a mesma facilidade podemos mostrar que '$\exists x A(x, x) \rightarrow B(d)$' não é uma contradição. Precisamos apenas especificar uma interpretação na qual '$\exists x A(x, x) \rightarrow B(d)$' seja verdadeira; ou seja, uma interpretação na qual '$\exists x\, A(x, x)$' é falsa ou '$B(d)$' é verdadeira. Aqui está uma:

domínio: Fortaleza
d: Fortaleza
$A(x, y)$: $\_\_\_\_\__x$ está no mesmo país que $\_\_\_\_\__y$
$B(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é a capital do Ceará

Isso mostra que existe uma interpretação na qual '$\exists x A(x, x) \rightarrow B(d)$' é verdadeira, e portanto, não é uma contradição.

Para mostrar que $\mathcal{A}$ **não é uma validade**, basta apresentar uma interpretação em que $\mathcal{A}$ seja falsa.

Para mostrar que $\mathcal{A}$ **não é uma contradição**, basta apresentar uma interpretação em que $\mathcal{A}$ seja verdadeira.

24.2 Equivalência lógica

Suponha que queiramos mostrar que

$$\forall x\, S(x) \quad \text{e} \quad \exists x\, S(x)$$

não são logicamente equivalentes. Precisamos construir uma interpretação na qual as duas sentenças tenham valores de verdade diferentes. Queremos que uma das sentenças seja verdadeira e o outra falsa. Começamos especificando um domínio e, novamente, o menor possível, para facilitar as coisas. Vamos, no entanto, precisar de pelo menos dois objetos. (Se o domínio tiver um único objeto as sentenças terão o mesmo valor de verdade. Para perceber por que, proponha algumas interpretações com domínios de um único indivíduo e veja o que ocorre com o valor de verdade das duas sentenças.) Considere, então, o seguinte domínio:

domínio: Jackson do Pandeiro, Luiz Gonzaga

Podemos fazer '$\exists x\, S(x)$' ser verdadeira incluindo um dos indivíduos do domínio na extensão de 'S', e podemos fazer '$\forall x\, S(x)$' ser falsa, deixando um dos indivíduos do domínio fora da extensão de 'S'. Considere então:

$S(x)$: $\underline{\qquad}_x$ toca pandeiro

Agora '$\exists x\, S(x)$' é verdadeira, porque Jackson do Pandeiro satisfaz '$S(x)$'. De modo mais preciso, se estendermos nossa interpretação fazendo 'c' nomear Jackson do Pandeiro, '$S(c)$' torna-se uma sentença verdadeira nessa interpretação estendida. Portanto, '$\exists x\, S(x)$' é verdadeira na interpretação original. Da mesma forma, '$\forall x\, S(x)$' é falsa, porque Luiz Gonzaga não satisfaz '$S(x)$'. Mais precisamente, estender a interpretação fazendo o nome 'd' se referir a Luiz Gonzaga, torna a sentença '$S(d)$' falsa nessa interpretação estendida, já que Luiz Gonzaga não toca pandeiro. Portanto, '$\forall x\, S(x)$' é falso na interpretação original. Então a interpretação original que propusemos

domínio: Jackson do Pandeiro, Luiz Gonzaga
$S(x)$: $\underline{\quad\quad}_x$ toca pandeiro

comprova que '$\exists x\, S(x)$' e '$\forall x\, S(x)$' não são logicamente equivalentes, já que a primeira sentença é verdadeira e a segunda é falsa nessa interpretação.

> Para mostrar que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ não são logicamente equivalentes, basta encontrar uma interpretação em que uma sentença é verdadeira e a outra é falsa.

24.3 Validade, sustentação e satisfação

Para testar a validade, a sustentação ou a satisfação, normalmente precisamos produzir interpretações capazes de determinam o valor de verdade de várias sentenças. Considere o seguinte argumento na LPO:

$$\begin{array}{ll} & \exists x(G(x) \to G(a)) \\ \therefore & \exists x\, G(x) \to G(a) \end{array}$$

Para mostrar que este argumento é inválido, precisamos encontrar uma interpretação na qual a premissa seja verdadeira, mas a conclusão seja falsa. A conclusão é um condicional; portanto, ela será falsa quando seu antecedente for verdadeiro e o consequente falso. Claramente, nosso domínio deve conter dois objetos, um que esteja na extensão de 'G' e um que não esteja. Vamos tentar:

domínio: Karl Marx, Pelé
$G(x)$: $\underline{\quad\quad}_x$ é co-autor de 'O Manifesto Comunista'

a: Pelé

Nesta interpretação a sentença '$G(a)$' é claramente falsa. Afinal, Pelé foi o maior jogador de futebol que já houve, e não escreveu nenhum manifesto. Já Karl Marx é reconhecidamente um dos autores de 'O Manifesto Comunista', juntamente com Friedrich Engels. Então, '$\exists x\, G(x)$' é verdadeira nessa interpretação. Portanto, como '$\exists x\, G(x)$' é verdadeira e '$G(a)$' é falsa, a conclusão de nosso argumento, '$\exists x\, G(x) \rightarrow G(a)$' é uma sentença falsa, conforme requerido.

Será que a premissa é verdadeira? Sim! Observe que '$G(a) \rightarrow G(a)$' é verdadeira. (De fato, '$G(a) \rightarrow G(a)$' é uma validade, verdadeira em qualquer interpretação) Então, certamente '$\exists x(G(x) \rightarrow G(a))$' é verdadeira. Temos, portanto, uma interpretação na qual a premissa do argumento é verdadeira e a conclusão é falsa. Logo o argumento é inválido.

Observe que nossa interpretação mostra também que

'$\exists x(G(x) \rightarrow G(a))$' ***não*** sustenta '$\exists x\, G(x) \rightarrow G(a)$'

já que nela a primeira sentenças é verdadeira e a segunda é falsa. Nossa interpretação também mostra que as sentenças abaixo são conjuntamente satisfatórias, já ambas são verdadeiras nela

$$\exists x(G(x) \rightarrow G(a)) \quad \text{e} \quad \neg(\exists x\, G(x) \rightarrow G(a))$$

Vejamos mais um exemplo. Considere:

$\forall x \exists y\, L(x, y)$
$\therefore\ \exists y \forall x\, L(x, y)$

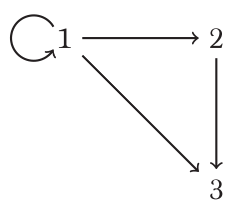
Novamente, queremos mostrar que este argumento é inválido. E fazemos isso propondo uma interpretação onde a premissa é verdadeira, mas a conclusão é falsa. Aqui está uma sugestão:

domínio: todas as pessoas casadas
$L(x, y)$: $\underline{\quad\quad}_x$ é casado(a) com $\underline{\quad\quad}_y$

A premissa é claramente verdadeira nessa interpretação. Qualquer pessoa no domínio é casada com alguma pessoa, que, por ser casada, também está no domínio. Logo, ‘$\forall x \exists y\, L(x, y)$’ é verdadeira. Por outro lado, a conclusão, ‘$\exists y \forall x\, L(x, y)$’, é claramente falsa, pois sua verdade exigiria que houvesse uma única pessoa que fosse casada com todas as outras pessoas no domínio, inclusive com ela mesma. Portanto, o argumento tem premissa verdadeira e conclusão falsa nesta interpretação e, por isso, é inválido.

Como no exemplo anterior, podemos observar ainda, como consequência imediata, que as sentenças ‘$\forall x \exists y\, L(x, y)$’ e ‘$\neg\exists y \forall x\, L(x, y)$’ são conjuntamente satisfatórias e que ‘$\forall x \exists y\, L(x, y)$’ não sustenta ‘$\exists y \forall x\, L(x, y)$’.

Para o nosso terceiro exemplo, vamos misturar as coisas um pouco. Na Seção 21.5, p. 235, descrevemos como apresentar algumas interpretações usando diagramas. Por exemplo:



De acordo com as convenções ali apresentadas, o domínio dessa interpretação são os três primeiros números inteiros positivos, e a extensão de ‘$R(x, y)$’ é dada pelas setas do diagrama. Ou seja, ‘$R(x, y)$’ é verdadeira para $\langle x, y\rangle$ apenas caso haja uma seta partindo de **x** e chegando em **y** em nosso diagrama. Aqui estão algumas sentenças verdadeiras nesta interpretação:

- ‘$\forall x \exists y\, R(y, x)$’
- ‘$\exists x \forall y\, R(x, y)$’ — 1 é uma testemunha
- ‘$\exists x \forall y(R(y, x) \leftrightarrow x = y)$’ — 1 é uma testemunha
- ‘$\exists x \exists y \exists z((\neg y = z \land R(x, y)) \land R(z, x))$’ — 2 é uma testemunha
- ‘$\exists x \forall y\, \neg R(x, y)$’ — 3 é uma testemunha
- ‘$\exists x(\exists y\, R(y, x) \land \neg\exists y\, R(x, y))$’ — 3 é uma testemunha

Examíne-as com cuidado e certifieque-se de entender por que elas são todas verdadeiras na interpretação descrita pelo diagrama acima.[1]

Isso também mostra que essas seis sentenças são conjuntamente satisfatórias. Podemos, então, usar esta observação para gerar argumentos *inválidos*, tais como:

$$\begin{array}{rl} & \forall x \exists y\, R(y, x) \\ & \exists x \forall y\, R(x, y) \\ \therefore & \forall x \exists y\, R(x, y)^{2} \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rl} & \exists x \forall y\, R(x, y) \\ & \exists x \forall y \neg R(x, y) \\ \therefore & \neg \exists x \exists y \exists z (\neg y = z \land (R(x, y) \land R(z, x))) \end{array}$$

> Ao apresentar uma interpretação em que $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ são todas verdadeiras e onde C é falsa, nós mostramos que:
>
> - o argumento $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n \therefore C$ é inválido.
> - $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ não sustentam C.
> - $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n, \neg C$ são conjuntamente satisfatórias.

Uma interpretação que refuta uma proposta, ou seja, que mostra que um argumento *não* é válido, ou que uma sentença *não* é uma validade (logicamente necessária), ou que um conjunto de

[1] À direita de cada sentença existencial está indicada uma *testemunha*, um elemento do domínio que satisfaz a fórmula existêncialmente quantificada. Ou seja, cada uma destas sentenças é do tipo $\exists x \mathcal{A}(x)$ e cada testemunha indicada corresponde a um indivíduo $\rfloor$ do domínio para o qual $\mathcal{A}(\rfloor)$ é verdadeira na interpretação.

[2] Esta sentença não está entre os exemplos acima, porque ela é falsa em nossa interpretação. Para perceber isso basta notar que o indivíduo 3 é uma *contratestemunha*, ou seja, é um elemento do domínio que não satisfaz a fórmula quantificada universalmente.

sentenças *não* sustenta uma outra sentença, é chamada de *contrainterpretação* ou *contramodelo*.

Exercícios

A. Mostre que cada uma das seguintes sete sentenças não é nem uma validade (necessidade lógica) nem uma contradição.

1. $D(a) \wedge D(b)$
2. $\exists x\, T(x, h)$
3. $P(m) \wedge \neg\forall x\, P(x)$
4. $\forall z J(z) \leftrightarrow \exists y\, J(y)$
5. $\forall x(W(x, m, n) \vee \exists y L(x, y))$
6. $\exists x(G(x) \to \forall y\, M(y))$
7. $\exists x(x = h \wedge x = i)$

B. Mostre que as sentenças de cada um dos nove pares seguintes não são logicamente equivalentes.

1. $J(a)$, $K(a)$
2. $\exists x\, J(x)$, $J(m)$
3. $\forall x\, R(x, x)$, $\exists x\, R(x, x)$
4. $\exists x\, P(x) \to Q(c)$, $\exists x(P(x) \to Q(c))$
5. $\forall x(P(x) \to \neg Q(x))$, $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$
6. $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$, $\exists x(P(x) \to Q(x))$
7. $\forall x(P(x) \to Q(x))$, $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$
8. $\forall x \exists y\, R(x, y)$, $\exists x \forall y\, R(x, y)$
9. $\forall x \exists y\, R(x, y)$, $\forall x \exists y\, R(y, x)$

C. Mostre que as sentenças de cada um dos treze grupos abaixo são conjuntamente satisfatórias.

1. $M(a), \neg N(a), P(a), \neg Q(a)$
2. $L(e, e), L(e, g), \neg L(g, e), \neg L(g, g)$
3. $\neg(M(a) \wedge \exists x\, A(x)), M(a) \vee F(a), \forall x(F(x) \to A(x))$
4. $M(a) \vee M(b), M(a) \to \forall x \neg M(x)$
5. $\forall y\, G(y), \forall x(G(x) \to H(x)), \exists y \neg I(y)$

6. $\exists x(B(x) \vee A(x)), \forall x \neg C(x), \forall x\big[(A(x) \wedge B(x)) \rightarrow C(x)\big]$
7. $\exists x\, X(x), \exists x\, Y(x), \forall x(X(x) \leftrightarrow \neg Y(x))$
8. $\forall x(P(x) \vee Q(x)), \exists x \neg(Q(x) \wedge P(x))$
9. $\exists z(N(z) \wedge O(z, z)), \forall x \forall y(O(x, y) \rightarrow O(y, x))$
10. $\neg \exists x \forall y\, R(x, y), \forall x \exists y\, R(x, y)$
11. $\neg R(a, a),\ \forall x(x = a \vee R(x, a))$
12. $\forall x \forall y \forall z[(x = y \vee y = z) \vee x = z],\ \exists x \exists y\ \neg x = y$
13. $\exists x \exists y((Z(x) \wedge Z(y)) \wedge x = y),\ \neg Z(d),\ d = e$

D. Mostre que cada um dos dez argumentos abaixo é inválido.

1. $\forall x(A(x) \rightarrow B(x))\ \therefore\ \exists x\, B(x)$
2. $\forall x(R(x) \rightarrow D(x)), \forall x(R(x) \rightarrow F(x))\ \therefore\ \exists x(D(x) \wedge F(x))$
3. $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x))\ \therefore\ \exists x\, P(x)$
4. $N(a) \wedge N(b) \wedge N(c)\ \therefore\ \forall x\, N(x)$
5. $R(d)e, \exists x\, R(x, d)\ \therefore\ R(e, d)$
6. $\exists x(E(x) \wedge F(x)), \exists x\, F(x) \rightarrow \exists x\, G(x)\ \therefore\ \exists x(E(x) \wedge G(x))$
7. $\forall x\, O(x, c), \forall x\, O(c, x)\ \therefore\ \forall x\, O(x, x)$
8. $\exists x(J(x) \wedge K(x)), \exists x \neg K(x), \exists x \neg J(x)\ \therefore\ \exists x(\neg J(x) \wedge \neg K(x))$
9. $L(a)b \rightarrow \forall x\, L(x, b), \exists x\, L(x, b)\ \therefore\ L(b, b)$
10. $\forall x(D(x) \rightarrow \exists y\, T(y, x))\ \therefore\ \exists y \exists z\ \neg y = z$

CAPÍTULO 25

Raciocinando sobre uma infinidade de interpretações

25.1 Validades e contradições

Para mostrar que uma sentença não é uma validade basta apresentarmos uma única interpretação na qual a sentença é falsa. Mas para mostrar que uma sentença é uma validade, não é suficiente propor dez, cem, nem mesmo mil interpretações nas quais a sentença é verdadeira. Uma sentença é uma validade apenas se for verdadeira em *todas* as interpretações; e há infinitas delas. Precisamos ser capazes de raciocinar sobre todas elas, e não conseguiremos fazer isso lidando com elas uma de cada vez!

Raciocinar sobre todas as infinitas interpetações pode soar uma tarefa impossível. Mas não é. Algumas vezes nem é tão complicado. Veja como podemos mostar que a sentença

'$R(a,a) \lor \neg R(a,a)$' é uma validade:

> Qualquer interpretação relevante (ou seja que leve em consideração a relação 'R' e o nome 'a') atribui um valor de verdade à sentença '$R(a,a)$', que será verdadeira ou falsa. Então, se pensarmos na totalidade das interpretações relevantes, podemos dividir esta totalidade em dos grupos, o grupo (1), constituído pelas interpretações em que '$R(a,a)$' é verdadeira, e o grupo (2), com as interpretações em que '$R(a,a)$' é falsa. '$R(a,a) \lor \neg R(a,a)$' será verdadeira em todas as interpretações do grupo (1), já que em todas elas '$R(a,a)$' é verdadeira. Nas interpretações do grupo (2), como '$R(a,a)$' é falsa em todas elas, sabemos que '$\neg R(a,a)$' é verdadeira em todas elas, e por isso, '$R(a,a) \lor \neg R(a,a)$' também é verdadeira em todas as interpretações do grupo(2). Como a sentença '$R(a,a) \lor \neg R(a,a)$' é verdadeira em todas as interpretações do grupo (1) e do grupo (2), e qualquer interpretação está um destes dois grupos, então '$R(a,a) \lor \neg R(a,a)$' é verdadeira em todas as interpretações e é, por isso, uma validade.

Esta explicação é, ela própria, um argumento válido, e sua conclusão é verdadeira. Mas esta explicação não é um argumento na LPO, é um argumento em português *sobre* a LPO; ou seja, é um argumento em nossa metalinguagem.

Uma outra característica deste nosso argumento metalinguístico é que como a sentença em questão não contem quantificadores, não precisamos pensar em como interpretar 'a' e 'R'; dissemos apenas que qualquer que seja a interpretação, '$R(a,a)$' será verdadeira ou falsa. Poderíamos ter argumentado de modo similar a respeito de sentenças da LVF.

Eis aqui um outro exemplo de raciocínio sobre todas as interpretações. Considere a sentença '$\forall x(R(x,x) \lor \neg R(x,x))$'. Novamente, esta sentença parece uma validade óbvia, mas explicar precisamente por quê, é um grande desafio. Não podemos dizer simplesmente que '$R(x, x) \vee \neg R(x, x)$' é verdadeira em todas as interpretações, uma vez que '$R(x, x) \vee \neg R(x, x)$' não é nem mesmo uma *sentença* da LPO (lembre-se de que 'x' é uma variável, não um nome). Temos, então, que ser um pouco mais espertos.

> Considere uma interpretação arbitrária. '$\forall x(R(x, x) \vee \neg R(x, x))$' será verdadeira nessa interpretação se e somente se '$R(x, x) \vee \neg R(x, x)$' for satisfeita por todos os objetos do domínio. Considere algum membro arbitrário do domínio, que, por conveniência, chamaremos de Zé. Ou Zé satisfaz '$R(x, x)$', ou não. Se ele satisfaz '$R(x, x)$', então Zé também satisfaz '$R(x, x) \vee \neg R(x, x)$'. Se Zé não satisfaz '$R(x, x)$', ele certamente satisfaz '$\neg R(x, x)$' e, portanto, também satisfaz '$R(x, x) \vee \neg R(x, x)$'.[1] Então, em qualquer dos casos Zé satisfaz '$R(x, x) \vee \neg R(x, x)$'. Como não levamos em conta nenhuma característica específica de Zé—poderímos ter escolhido qualquer outro indivíduo do domínio—o que dissemos sobre Zé vale também para qualquer outro objeto do domínio. Então, todo objeto no domínio satisfaz '$R(x, x) \vee \neg R(x, x)$'. Portanto, '$\forall x(R(x, x) \vee \neg R(x, x))$' é verdadeira em nossa interpretação. Mas também escolhemos nossa interpretação arbitrariamente, portanto '$\forall x(R(x, x) \vee \neg R(x, x))$' é verdadeira em todas as interpretações. É, por isso, uma validade.

Esta é uma explicação bastante longa e tediosa, mas não há alternativas aqui. Para mostrar que uma sentença é uma validade precisamos raciocinar sobre *todas* as interpretações. Considerando que a quantidade delas é infinita, até que nosso raciocínio não foi tão longo assim!

[1] Usamos aqui o fato de que as condições de verdade para os conectivos também se aplicam à satisfação: a satisfaz $\mathcal{A}(\S) \vee \mathcal{B}(\S)$ se e somente se a satisfaz $\mathcal{A}(\S)$ ou $\mathcal{B}(\S)$, etc.

25.2 Outros casos

Há outros casos que também exigem que raciocinemos sobre todas as interpretações. Devemos fazê-lo se quisermos mostrar:

- que uma sentença é uma contradição; pois isso requer que ela seja falsa em *todas* as interpretações.
- que duas sentenças são logicamente equivalentes; pois isso requer que elas tenham o mesmo valor de verdade em *todas* as interpretações.
- que algumas sentenças são conjuntamente insatisfatórias; pois isso requer que não haja interpretação na qual todas essas sentenças sejam verdadeiras; ou seja, que, em *toda* interpretação, pelo menos uma dessas sentenças seja falsa.
- que um argumento é válido; pois isso requer que a conclusão seja verdadeira em *toda* interpretação em que as premissas são verdadeiras.
- que algumas sentenças sustentam alguma outra, pois isso também requer que a sentença sustentada seja verdadeira em *toda* interpretação em que as sentenças que sustentam são verdadeiras.

O problema é que, com as ferramentas que temos no momento, raciocinar sobre todas as interpretações é um sério desafio! Vamos ver apenas mais um exemplo. Aqui está um argumento que é obviamente válido:

$$\forall x(H(x) \land J(x)) \;\; .\because. \;\; \forall x\, H(x)$$

Afinal de contas, se tudo é H e J, então tudo é H. Mas só conseguimos mostrar que este argumento é válido se mostrarmos o que deve ser verdadeiro em todas as interpretações nas quais a premissa é verdadeira. Para mostrar isso temos que raciocinar da seguinte maneira:

> Considere uma interpretação arbitrária na qual a premissa '$\forall x(H(x) \land J(x))$' seja verdadeira. Segue-se que '$H(x) \land J(x)$' é satisfeita por todos os objetos

> nesta interpretação. Então '$H(x)$' também será satisfeita por todos os objetos.[2] Logo, '$\forall x\, H(x)$' deve ser verdadeira nesta interpretação. Como a única coisa que assumimos sobre a interpretação é que nela '$\forall x(H(x) \land J(x))$' é verdadeira, então, a mesma conclusão deve valer para qualquer outra interpretação que satisfaça a mesma condição. Ou seja, qualquer interpretação na qual '$\forall x(H(x) \land J(x))$' é verdadeira é tal que '$\forall x\, H(x)$' também é verdadeira. Por isso o argumento é válido!

Veja que mesmo para um argumento simples como esse, o raciocínio que demonstra sua validade é um pouco complicado. Para argumentos mais longos e complexos a demonstração de sua validade pode ser extremamente torturante.

A tabela a seguir indica, para todos os conceitos semânticos que vimos, se as demonstrações de que eles se aplicam ou não se aplicam exigem apenas **uma** interpretação ou se é necessário raciocinarmos sobre **todas** as interpretações.

Teste	**Sim**	**Não**
a sentença é uma validade?	todas	uma
a sentença é uma contradição?	todas	uma
as sentenças são equivalentes?	todas	uma
as sentenças são conjuntamente satisfatórias?	uma	todas
O argumento é válido?	todas	uma
As premissas sustentam a conclusão?	todas	uma

Pode ser útil comparar esta tabela com a que apresentamos para a LVF no final do Capítulo 14, p. 141. A principal diferença está no fato de que a LVF diz respeito a tabelas de verdade, enquanto a LPO lida com interpretações. Essa diferença, no entanto, é profundamente importante, uma vez que as tabelas de verdade têm sempre uma quantidade finita de linhas, de modo que uma tabela de verdade completa é um objeto relativamente

[2] Aqui, novamente, fazemos uso do fato de que qualquer objeto que satisfaça $\mathcal{A}(\S) \land \mathcal{B}(\S)$ deve satisfazer a $\mathcal{A}(\S)$ and $\mathcal{B}(\S)$.

tratável. Por outro lado, sempre existem infinitas interpretações diferentes para cada sentença, de modo que o raciocínio sobre todas as interpretações pode ser um assunto profundamente complicado.

PARTE VI

Dedução Natural para LVF

CAPÍTULO 26

A ideia de dedução natural

No Capítulo 2, dissemos que um argumento é válido se e somente se não existe nenhuma situação na qual todas as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa. Posteriormente, apresentamos as tabelas de verdade para as sentenças da LVF, onde cada linha de uma tabela completa corresponde a uma valoração. Assim, diante de um argumento da LVF, temos um modo direto para asserir se existe uma valoração na qual as premissas são todas verdadeiras e a conclusão falsa, isto é, apenas averiguando as tabelas de verdade.

Entretanto, tabelas de verdade não nos dão necessariamente muito *insight*. Considere os dois seguintes argumentos na LVF:

$$P \vee Q, \neg P \therefore Q$$
$$P \rightarrow Q, P \therefore Q$$

Claramente, esses argumentos são válidos. Você pode verificar que ele são válidos construindo tabelas de verdade de quatro linhas, mas podemos dizer que eles fazem uso de diferentes *formas* de reciocínio. Seria bom ter controle dessas diferentes *formas* de inferência.

Um dos objetivos de um *sistema em dedução natural* é de mostrar que argumentos particulares são válidos de um modo que nos permita entender o raciocínio que os argumentos possam envolver. Vamos começar com regras de inferências muito básicas. Essas regras podem ser combinadas para oferecer argumentos mais complexos. De fato, a partir de uma pequena quantidade de regras de inferência, esperamos capturar todos argumentos válidos.

Essa é uma maneira muito diferente de pensar sobre argumentos.

Com tabelas de verdade, consideramos diferentes maneiras para obter sentenças verdadeiras ou falsas. Com sistemas de dedução natural, manipulamos sentenças de acordo com as regras que estabelecemos como boas regras e isto nos possibilita um melhor insight, ou pelo menos, um insight diferente, de como os argumentos funcionam.

A mudança para dedução natural pode ser motivada por mais do que uma simples busca por um insight. Ela pode ser motivada por *necessidade.* Considere o seguinte argumento:

$$A_1 \rightarrow C_1 \therefore (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4 \wedge A_5) \rightarrow (C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee C_4 \vee C_5)$$

Para verificar a validade deste argumento, você pode usar uma tabela de verdade com 1024 linhas. Se você fizer isto corretamente, então você verá que não existe nenhuma linha na qual todas as premissas são verdadeiras e a conclusão seja falsa. Assim, você saberá que o argumento é válido. (Mas, como já mencionamos antes, existe um sentido no qual você não saberá porque o argumento é válido). Mas agora considere:

$$\begin{aligned} A_1 \rightarrow C_1 \therefore\ & (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4 \wedge A_5 \wedge A_6 \wedge A_7 \wedge A_8 \wedge A_9 \wedge A_{10}) \rightarrow \\ & (C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee C_4 \vee C_5 \vee C_6 \vee C_7 \vee C_8 \vee C_9 \vee C_{10}) \end{aligned}$$

Este argumento também é válido - você pode provavelmente dizer - mas para testá-lo é preciso uma tabela de verdade com 2^{20} =

1048576 inhas. A princípio, podemos configurar uma máquina para gerar tabelas de verdade e nos relatar quando o processo terminar. Na prática, argumentos mais complexos na LVF pode torna-se *intratável* se usamos tabelas de verdades.

Quando chegarmos à lógica de primeira ordem (LPO) (início do capítulo 15), o problema torna-se dramaticamente pior. Não existe nada como teste de tabela de verdade para a LPO. Para assegurar se um argumento é válido ou não, temos que raciocinar sobre *todas* as interpretações, mas, como iremos ver, existem infinitas interpretações possíveis. Em princípio, não podemos configurar uma máquina para tratar as infinitas interpretações possíveis e relatar quando estiver concluido: isto *nunca* terminará. Ou precisamos desenvolver modos de raciocínios mais eficientes para tratar todas as interpretações, ou precisamos procurar algo diferente.

Existem de fato, sistemas que codificam modos de raciocinar sobre todas as interpretações possíveis. Eles foram desenvolvidos nos ano 1950s por Evert Beth e Jaakko Hintikka. Mas não iremos segui este caminho. Ao invés disto, nossa atenção será voltada para dedução natural.

Antes de raciocinar diretamente sobre todas as valorações (no caso da LVF) tentaremos selecionar algumas poucas regras básicas de inferência. Algumas dessas regras irão governar o comportamento dos conectivos sentenciais. Outras irão governar o comportamento dos quantificadores e identidade que são marcas da LPO. O sistema resultante de regras nos dará um novo modo de pensar sobre a validade de argumentos. O desenvolvimento moderno de dedução natural data dos simultâneos e não relacionadas artigos de Gerhard Gentzen e Stanisław Jaśkowski (1934). Entretanto, o sistema de dedução natural que vamos usar será baseado largamente nos trabalhos de Frederic Fitch (publicado pela primeira vez em 1952).

CAPÍTULO 27

As regras básicas da LVF

Neste capítulo, apresentaremos um sistema em DEDUÇÃO NATURAL. Para cada conectivo, teremos regras de INTRODUÇÃO, que nos permite provar uma sentença que tenha esse conectivo como operador lógico principal, e regras de ELIMINAÇÃO, que nos permite provar algo a partir de uma sentença que tenha esse conectivo como operador lógico principal.

27.1 A ideia de uma prova formal

Uma *prova formal* é uma sequência de sentenças, dentre as quais, algumas são chamadas suposições iniciais (ou premissas). A última linha da prova formal é a conclusão. (A partir de agora, chamaremos simplesmente de 'provas', mas estejam cientes que existem *provas informais* também.)

Como uma ilustração, considere:

$$\neg(A \vee B) \therefore \neg A \wedge \neg B$$

Começaremos uma prova escrevendo a premissa:

$$\begin{array}{r|l} 1 & \neg(A \vee B) \\ \hline \end{array}$$

Note que numeramos a premissa, pois queremos nos referir a ela depois. De fato, cada linha ao longo da prova é numerada, assim poderemos sempre nos referir a ela novamente.

Note também que traçamos uma linha sob a premissa. Tudo que está escrito acima da linha é uma ***suposição***. Tudo que está escrito abaixo dessa linha é, ou algo que segue das suposições, ou será uma nova suposição. No nosso exemplo, desejamos concluir '$\neg A \wedge \neg B$'; então esperamos por fim concluir nossa prova com

$$\begin{array}{r|l} n & \neg A \wedge \neg B \end{array}$$

para algum número n. Não importa que número linha a prova termina. Mas obviamente preferimos uma prova mais curta a uma longa.

Similarmente, suponha que queremos considerar:

$$A \vee B, \neg(A \wedge C), \neg(B \wedge \neg D) \therefore \neg C \vee D$$

Esse argumento tem três premissas, então começaremos escrevendo as premissas uma abaixo da outra, numeradas, e trançamos uma linha sob elas:

$$\begin{array}{r|l} 1 & A \vee B \\ 2 & \neg(A \wedge C) \\ 3 & \neg(B \wedge \neg D) \\ \hline \end{array}$$

e esperamos concluir com alguma linha n:

$$\begin{array}{r|l} n & \neg C \vee D \end{array}$$

Tudo que resta a fazer é explicar cada uma das regras que podemos usar ao longo do caminho entre as premissas e a conclusão. As regras são discriminadas gradativamente (broken down) por nossos conectivos lógicos.

27.2 Reiteração

A primeira regra é tão incrivelmente óbvia que é surpreendente que nos importemos com ela.

Se você já mostrou alguma coisa ao longo de uma prova, a *regra de reiteração* permite você repeti-la em uma nova linha. Por exemplo:

$$
\begin{array}{r|ll}
4 & A \wedge B & \\
\vdots & \vdots & \\
10 & A \wedge B & \text{R } 4
\end{array}
$$

Isto indica que temos escrito '$A \wedge B$' na linha 4. Agora, em uma linha posterior - linha 10, por exemplo - decidimos que queremos repetir esta sentença na prova. Assim, a escrevemos abaixo novamente. Também adicionamos uma citação que justifica o que temos escrito. Neste caso, escrevemos 'R', para indicar que estamos usando a regra de reiteração, e escrevemos 4 para indicar que ela já foi usada na linha 4.

Aqui está uma ilustração generalizada da regra:

$$
\begin{array}{r|ll}
m & \mathcal{A} & \\
 & \mathcal{A} & \text{R } m
\end{array}
$$

O importante é que, se qualquer sentença $\mathcal{A}$ ocorre em alguma linha, então podemos repetir $\mathcal{A}$ em linhas posteriores. Cada linha de nossa prova deve ser justificada por alguma regra, e aqui temos 'R m'. Isto significa: Reiteração, aplicada a linha m.

Precisamos enfatizar duas coisa. Primeiro, '$\mathscr{A}$' não é uma sentença da LVF, mas um símbolo da metalinguagem que usamos quando queremos falar sobre qualquer sentença da LVF (veja capítulo 8). Segundo, similarmente, 'm' não é um símbolo que irá aparecer em uma prova. Ele também é um símbolo da metalinguagem, o qual usamos quando queremos falar sobre qualquer número linha de uma prova. Na prova apresentada, as linhas estão numeradas por '1', '2', '3', e assim por diante. Mas quando definimos a regra, usamos variáveis como 'm' para destacar o ponto em que a regra pode ser aplicada a qualquer momento.

27.3 Conjunção

Vamos supor que queremos mostrar que Louis é reservado e leal. Um modo óbvio para fazer isto seria como segue: primeiro mostramos que Louis é reservado, em seguida mostramos que Louis é leal. Depois colocamos essas duas demonstrações juntas para obter a conjunção.

Nosso sistema de dedução natural captura essa ideia diretamente. No exemplo dado, podemos adotar a seguinte simbolização:

R: Louis é reservado
L: Louis é leal

Talvez estejamos trabalhando em uma prova, e já temos obtido 'R' na linha 8 e 'L' na linha 15. Então em alguma linha subsequente podemos obter '$R \wedge L$' como segue:

8	R	
15	L	
	$R \wedge L$	$\wedge$I 8, 15

Note que cada linha de nossa prova ou deve ser uma suposição, ou deve ser justificada por alguma regra. Citamos aqui '$\wedge$I

8, 15' para indicar que a linha obtida pela regra da introdução da conjunção ($\wedge$I) aplicada as linhas 8 e 15. Poderíamos igualmente obter:

$$\begin{array}{r|ll}
8 & R & \\
15 & L & \\
 & L \wedge R & \wedge\text{I } 15, 8
\end{array}$$

com a citação invertida para capturar a ordem dos conjuntos. De maneira mais geral, aqui está a nossa regra de introdução da conjunção:

$$\begin{array}{r|ll}
m & \mathcal{A} & \\
n & \mathcal{B} & \\
 & \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} & \wedge\text{I } m, n
\end{array}$$

Para ser claro, o enunciado da regra é esquemático. Isto não é propriamente uma prova, '$\mathcal{A}$' e '$\mathcal{B}$' não são sentenças da LVF, mas símbolos da metalinguagem, que usamos quando queremos falar sobre qualquer sentenca da LVF (veja capítulo 8).

Similarmente, 'm' e 'n' não são numerais que irão aparecer em uma prova real. Eles também são símbolos da metalinguagem, os quais usamos quando queremos falar sobre qualquer numero linha de uma prova. Em uma prova real, as linhas são numeradas por '1', '2', '3', e assim por diante. Mas quando definimos a regra, usamos variáveis para destacar o ponto que a regra pode ser aplicada a qualquer momento. A regra requer somente que temos ambos os conjuntos disponíveis para ser usados em qualquer parte da prova. Eles podem ser separados um do outro, e podem aparecer em qualquer ordem.

A regra é chamada '*introdução* da conjunção' porque ela introduz o símbolo '$\wedge$' na nossa prova onde ele pode ter sido ausente. Correspondentemente, temos uma regra que *elimina* este símbolo. Vamos supor que temos mostrado que Louis é ambos reservado e leal. Você está autorizado a concluir que Louis é reservado. Igualmente você está autorizado a concluir que Louis é leal. Juntando tudo isto, obtemos nossa(s) regra(s) de eliminação da conjunção:

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathcal{A} \land \mathcal{B} & \\ & \mathcal{A} & \land\text{E } m \end{array}$$

e igualmente,

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathcal{A} \land \mathcal{B} & \\ & \mathcal{B} & \land\text{E } m \end{array}$$

O propósito é simplesmente este, quando temos uma conjunção em alguma linha da prova, você pode obter qualquer um dos conjuntos por $\land$E. Uma coisa importante a enfatizar: você só pode aplicar essa regra quando a conjunção é o operador lógico principal. Assim você não pode inferir 'D' apenas de '$C \lor (D \land E)$'!

Com apenas essas duas regras, já podemos começar a ver parte do poder do nosso sistema formal de provas. Considere:

$$\begin{array}{ll} & [(A \lor B) \to (C \lor D)] \land [(E \lor F) \to (G \lor H)] \\ \therefore & [(E \lor F) \to (G \lor H)] \land [(A \lor B) \to (C \lor D)] \end{array}$$

Note que o operador lógico principal em ambas a premissa e conclusão desse argumento é '$\land$'. Para construir uma prova, começamos escrevendo a premissa, que é nossa suposição. Traçamos uma linha abaixo dela. Tudo após essa linha deve seguir de nossas suposições por (repetidas aplicações de) nossas regras de inferência. Assim, o início da prova é da seguinte forma:

$$\begin{array}{r|l} 1 & [(A \lor B) \to (C \lor D)] \land [(E \lor F) \to (G \lor H)] \\ \hline \end{array}$$

A partir da premissa, podemos obter cada um dos conjuntos por $\wedge$E. A prova agora segue assim:

1	$[(A \vee B) \to (C \vee D)] \wedge [(E \vee F) \to (G \vee H)]$	
2	$[(A \vee B) \to (C \vee D)]$	$\wedge$E 1
3	$[(E \vee F) \to (G \vee H)]$	$\wedge$E 1

Então, aplicando a regra $\wedge$I nas linhas 3 e 2 (nesta ordem), chegamos a conclusão desejada. A prova finalizada é como segue:

1	$[(A \vee B) \to (C \vee D)] \wedge [(E \vee F) \to (G \vee H)]$	
2	$[(A \vee B) \to (C \vee D)]$	$\wedge$E 1
3	$[(E \vee F) \to (G \vee H)]$	$\wedge$E 1
4	$[(E \vee F) \to (G \vee H)] \wedge [(A \vee B) \to (C \vee D)]$	$\wedge$I 3, 2

Esta é uma prova muito simples, entretanto ela mostra como podemos encadear regras de prova em provas mais longas. A propósito, note que ao investigar esse argumento com uma tabela de verdade seria necessário 256 linhas, enquanto que nossa prova formal requer apenas quatro linhas.

Vale a pena ver um outro exemplo. Na Seção 11.3, vimos que o seguinte argumento é válido:

$$A \wedge (B \wedge C) \therefore (A \wedge B) \wedge C$$

Para fornecer uma prova para esse argumento, começamos escrevendo:

1	$A \wedge (B \wedge C)$

A partir da premissa, podemos obter um dos conjuntos aplicando $\wedge$E duas vezes. Podemos então aplicar $\wedge$E mais duas vezes, assim nossa prova é como segue:

1	$A \wedge (B \wedge C)$	
2	A	$\wedge$E 1
3	$B \wedge C$	$\wedge$E 1
4	B	$\wedge$E 3
5	C	$\wedge$E 3

Agora podemos facilmente reintroduzir conjunções na ordem que as desejamos. Assim, nossa prova completa é:

1	$A \wedge (B \wedge C)$	
2	A	$\wedge$E 1
3	$B \wedge C$	$\wedge$E 1
4	B	$\wedge$E 3
5	C	$\wedge$E 3
6	$A \wedge B$	$\wedge$I 2, 4
7	$(A \wedge B) \wedge C$	$\wedge$I 6, 5

Lembre-se que nossa definição oficial de sentenças na LVF somente admite conjunções com dois conjuntos. A prova que acabamos de apresentar sugere que podemos abandonar os parênteses em todas as nossas provas. Entretanto, isto não é o padrão e não iremos fazer isto. De fato, manteremos nossa convenção do uso de parênteses mais severa. (Entretanto, iremos permitir o abandono dos parênteses mais externos, por legitimidade.)

Vamos dar uma última ilustração. Ao usar a regra $\wedge$I não há necessidade de aplicá-la a sentenças diferentes. Assim, se quisermos, podemos provar formalmente '$A \wedge A$' a partir de 'A' como segue:

1	A	
2	$A \wedge A$	$\wedge$I 1, 1

Simples, porém eficaz.

27.4 Condicional

Considere o seguinte argumento::

Se Jane é inteligente, então ela é rápida.
Jane é inteligente.
∴ ela é rápida.

Este argumento certamente é valido, e ele sugere diretamente uma aplicação da regra de eliminação do condicional (→E):

m	$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$	
n	$\mathcal{A}$	
	$\mathcal{B}$	$\to$E m, n

Esta regra também é chamada *modus ponens.* Novamente, esta é uma regra de eliminação porque ela nos permite obter uma sentença que pode não conter '→', tendo começado com uma sentença que continha este símbolo. Note que o condicional $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e o antecedente $\mathcal{A}$ podem estar separados um do outro na prova, e eles podem aparecer em qualquer ordem. Entretanto, na citação para →E, sempre citamos primeiro o condicional, seguido pelo antecedente.

A regra para introdução do condicional é também facilmente motivada. O seguinte argumento deve ser válido:

Louis é reservado. Portanto, se Louis é leal, então Louis é ambos reservado *e* leal.

Se alguém duvidou que este argumento era válido, podemos tentar convencê-lo o contrário, dando a seguinte explicação.

> Assuma que Louis é reservado. Agora, *adicionalmente* assuma que Louis é leal. Então, pela introdução da conjunção - que acabamos de discutir - Louis é ambos reservado e leal. Claramente, isto depende da suposição que Louis é leal. Mas isto significa apenas que, se Louis é leal, então Louis é ambos reservado e leal.

Transferindo isto para o formato de dedução natural, temos aqui o padrão do raciocínio que acabamos de usar. Começamos com a premissa, 'Louis é reservado', como segue:

$$\begin{array}{r|l} 1 & R \\ \cline{2-2} \end{array}$$

A próxima coisa que fizemos foi criar uma suposição *adicional* ('Louis é leal'), por uma questão de argumento. Para indicar que não estamos mais lidando *meramente* com nossa suposição original, ('R'), mas com alguma suposição adicional, continuamos nossa prova como segue:

$$\begin{array}{r|l|l} 1 & R & \\ \cline{2-2} 2 & & L \\ \cline{3-3} \end{array}$$

Note que *não* estamos reivindicando, na linha 2, ter provado 'L' a partir da linha 1, assim não escrevemos nela qualquer justificativa para a suposição inicial na linha 2. No entanto, precisamos destacar que é uma suposição adicional. Fazemos isto traçando uma linha sob ela (para indicar que ela é uma suposição), recuando-a com uma linha vertical adicional (para indicar que ela é adicional).

Com essa suposição extra posta, estamos prontos para usar $\wedge$I. Assim, podemos continuar nossa prova:

1	R	
2	$\quad\mid L$	
3	$\quad\mid R \wedge L$	$\wedge$I 1, 2

Mostramos agora que, com a suposição adicional 'L', podemos obter '$R \wedge L$'. Assim, podemos concluir que, se temos 'L', então obtemos '$R \wedge L$'. Ou, mais brevemente, podemos concluir '$L \to (R \wedge L)$':

1	R	
2	$\quad\mid L$	
3	$\quad\mid R \wedge L$	$\wedge$I 1, 2
4	$L \to (R \wedge L)$	$\to$I 2–3

Observe que voltamos a usar uma linha vertical na esquerda. *Descartamos* a suposição adicional, 'L', pois o condicional ele próprio segue apenas de nossa suposição original, 'R'.

O padrão geral usado aqui é o seguinte. Primeiro adicionamos uma suposição, $\mathcal{A}$; e desta suposição adicional, provamos $\mathcal{B}$. Neste caso, sabemos o seguinte: se $\mathcal{A}$ é verdadeira, então $\mathcal{B}$ também é verdadeira. Isto está envolvido na regra de introdução do condicional:

i	$\quad\mid \mathcal{A}$	
j	$\quad\mid \mathcal{B}$	
	$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$	$\to$I i–j

Pode haver tantas linhas quantas você quiser entre as linhas i and j.

Apresentaremos uma segunda ilustração da regra →I em acão. Vamos considerar agora o seguinte argumento:

$$P \to Q, Q \to R \therefore P \to R$$

Vamos começar listando *ambas* as nossas premissas. Então, como queremos chegar a um condicional (nomeadamente '$P \to R$'), assumimos adicionalmente o antecedente deste condicional. Assim nossa prova principal começa:

$$
\begin{array}{r|l}
1 & P \to Q \\
2 & Q \to R \\
\hline
3 & \quad \begin{array}{|l} P \\ \hline \end{array}
\end{array}
$$

Observe que disponibilizamos 'P', tratando-a como uma suposição adicional. Agora, podemos usar a regra →E na primeira premissa e obter 'Q'. Novamente, podemos usar a regra →E na segunda premissa e obter R. Assim, assumindo 'P' conseguimos provar 'R', então aplicamos a regra →I - descartando 'P' - com isso, concluímos a prova. Considerando tudo isso junto, temos:

$$
\begin{array}{r|lll}
1 & P \to Q & & \\
2 & Q \to R & & \\
\hline
3 & \quad | \; P & & \\
4 & \quad | \; Q & & \to\text{E } 1, 3 \\
5 & \quad | \; R & & \to\text{E } 2, 4 \\
6 & P \to R & & \to\text{I } 3\text{–}5
\end{array}
$$

27.5 Suposições adicionais e subprovas

A regra →I invocou a ideia de criar suposições adicionais. Isto precisa ser manuseado com muito cuidado. Considere esta prova:

$$
\begin{array}{rlll}
1 & \mid \underline{A} & & \\
2 & \mid & \mid \underline{B} & \\
3 & \mid & \mid B & \text{R } 2 \\
4 & \mid B \to B & & \to\text{I } 2\text{–}3
\end{array}
$$

Isso está perfeitamente de acordo com as regras que já temos disponíveis e não deve parecer particularmente estranho. Como '$B \to B$' é uma tautologia, nenhuma premissa particular deve ser exigida para prová-la.

Vamos tentar agora continuar a prova como segue:

$$
\begin{array}{rlll}
1 & \mid \underline{A} & & \\
2 & \mid & \mid \underline{B} & \\
3 & \mid & \mid B & \text{R } 2 \\
4 & \mid B \to B & & \to\text{I } 2\text{–}3 \\
5 & \mid B & & \text{tentativa imprópria} \\
  & \mid & & \text{de invocar } \to\text{E } 4, 3
\end{array}
$$

Se pudéssemos fazer isso, seria um desastre. Poderíamos provar qualquer letra sentencial a partir de qualquer outra. Entretanto, se você me diz que Ana é inteligente (simbolizada por 'A'), não deveríamos ser capazes de concluir que a rainha bela estava feliz (simbolizada por 'B')! Devemos ser proibidos de fazer isso, mas como devemos implementar essa proibição?

Podemos descrever o processo de fazer uma suposição adicional como um de efetuar uma *subprova*: uma prova subsidiária dentro da prova principal. Quando começamos a subprova, traçamos uma outra linha vertical para indicar que não estamos mais na prova principal. Então, escrevemos uma suposição sobre qual a subprova será baseada. Uma subprova pode ser essencialmente pensada como esta questão: ***o que poderíamos mostrar se também fizermos esta suposição adicional?***

Quando estamos trabalhando dentro da subprova, podemos nos referir a suposição adicional que colocamos ao introduzir a subprova, e a qualquer coisa que obtivemos de nossas suposições originais (afinal de contas, essas suposições originais ainda estão em vigor). Entretanto, em algum momento, queremos parar de usar a suposição adicional: queremos sair da subprova e retornar a prova principal. Para indicar que retornamos a prova principal, a linha vertical da subprova chega ao fim. Neste ponto, dizemos que a subprova está FECHADA. Com a subprova fechada, deixamos de lado a suposição. Logo será ilegítimo recorrer a qualquer coisa que dependa dessa suposição adicional. Assim, estipulamos:

Para citar uma linha individual quando aplicamos uma regra:

1. a linha deve vir antes da linha onde a regra é aplicada, e

2. não ocorrer dentro de uma subprova que já tenha sido fechada antes da linha onde a regra foi aplicada.

Esta estipulação exclui a desastrosa tentativa da prova acima. A regra $\rightarrow$E exige que citemos duas linhas anteriores da prova. Na prova pretendida, acima, uma dessas linhas (nomeadamente, linha 4) ocorre dentro de uma subprova que (pela linha 5) já tinha sido fechada. Isto é ilegítimo.

O fechamento de uma subprova é chamado de DESCARTE da suposição desta subprova. Assim, fica estabelecido: ***você não pode se referir a nada que foi obtido usando suposições descartadas.***

Subprovas, então, nos permitem pensar sobre o que poderíamos mostrar, se fizermos suposições adicionais. O que podemos tirar disso não é surpreendente: no curso de uma prova, temos que acompanhar com muito cuidado as suposições que estamos fazendo uso, em qualquer momento. Nosso sistema de prova faz isso graficamente bem. (De fato, é exatamente por isso que escolhemos usar *este* sistema de prova.)

Uma vez que começamos a pensar sobre o que podemos mostrar fazendo suposições adicionais, nada nos impede de perguntar o que poderíamos mostrar se fizéssemos *ainda mais* suposições? Isso pode nos motivar a introduzir uma subprova dentro de uma subprova. Aqui está um exemplo usando apenas as regras que consideramos até agora:

1	$\mid A$	
2	$\mid \quad \mid B$	
3	$\mid \quad \mid \quad \mid C$	
4	$\mid \quad \mid \quad \mid A \wedge B$	$\wedge$I 1, 2
5	$\mid \quad \mid C \to (A \wedge B)$	$\to$I 3–4
6	$\mid B \to (C \to (A \wedge B))$	$\to$I 2–5

Observe que a citação na linha 4 se refere à suposição inicial (na linha 1) e uma suposição de uma subprova (na linha 2). Isso está perfeitamente em ordem, pois nenhuma suposição foi descartada no momento (isto é, pela linha 4).

Mais uma vez, porém, precisamos acompanhar cuidadosamente o que estamos assumindo a cada momento. Suponha que tentamos continuar a prova da seguinte maneira:

1	A	
2	$\quad B$	
3	$\quad\quad C$	
4	$\quad\quad A \wedge B$	$\wedge$I 1, 2
5	$\quad C \rightarrow (A \wedge B)$	$\rightarrow$I 3–4
6	$B \rightarrow (C \rightarrow (A \wedge B))$	$\rightarrow$I 2–5
7	$C \rightarrow (A \wedge B)$	tentativa imprópria de invocar $\rightarrow$I 3–4

Isso seria terrível. Se tivéssemos dito que Ana é inteligente, você não seria capaz de deduzir que, se Carla é inteligente (simbolizada por 'C') então *ambas* Ana é inteligente e a rainha Bela estava feliz. Mas isso é exatamente o que essa prova sugeriria, se fosse permissível.

O problema essencial é que a subprova que começou com a suposição 'C' dependia crucialmente do fato de termos assumido 'B' como uma suposição na linha 2. Pela linha 6, *descartamos* a suposição 'B': entretanto, neste ponto questionamos o que poderíamos mostrar, se assumíssemos também 'B'. Tentar justificar a linha 7 com a subprova que começou com a suposição 'C', é simplesmente uma trapaça. Assim estipulamos, como antes, que uma subprova só pode ser citada em uma linha se ela não ocorrer dentro de outra subprova que já esteja fechada nessa linha. A tentativa desastrosa da prova viola esta estipulação. A subprova de linhas 3–4 ocorre dentro de uma subprova que termina na linha 5. Portanto, não pode ser invocada na linha 7.

Aqui temos mais um caso que devemos excluir:

1	A	
2	$\quad B$	
3	$\quad\quad C$	
4	$\quad\quad B \wedge C$	$\wedge$I 2, 3
5	$\quad\quad C$	$\wedge$E 4
6	$B \rightarrow C$	tentativa imprópria de invocar $\rightarrow$I 2–5

Aqui, estamos tentando citar uma subprova que começa na linha 2 e termina na linha 5 - mas a sentença na linha 5 depende não apenas da suposição da linha 2, mas também de uma outra suposição (linha 3) que não descartamos no final da subprova. A subprova iniciada na linha 3 ainda está aberta na linha 5. Mas $\rightarrow$I requer que a última linha da subprova seja baseada *apenas* na suposião da subprova que está sendo citada, ou seja, a subprova começando na linha 2 (e qualquer coisa antes dela), e não nas suposiçõees de quaisquer subprovas dentro dela. Em particular, a última linha da subprova citada não deve estar em si mesma dentro de uma subprova aninhada.

Para citar uma subprova ao aplicar uma regra:

1. a subprova citada deve vir inteiramente antes da aplicação da regra em que é citada,
2. a subprova citada não deve estar dentro de outra subprova fechada, que foi fechada na linha em que é citada, e
3. A última linha da subprova citada não deve ocorrer dentro de uma subprova aninhada.

Um último ponto a enfatizar como as regras podem ser aplicadas: onde uma regra exige que você cite uma linha individual, não é possível citar uma subprova; e onde for necessário citar uma subprova, não será possível citar uma linha individual. Assim, por exemplo, isso está incorreto:

1	A	
2	$\quad B$	
3	$\quad\quad C$	
4	$\quad\quad B \wedge C$	$\wedge$I 2, 3
5	$\quad\quad C$	$\wedge$E 4
6	$\quad C$	tentativa imprópria de invocar R 3–5
7	$B \rightarrow C$	$\rightarrow$I 2–6

Aqui, tentamos justificar C na linha 6 como a regra de reiteração, mas citamos a subprova das linhas 3–5. Esta subprova está fechada e pode, em princípio, ser citada na linha 6. (Por exemplo, poderíamos usá-la para justificar $C \rightarrow C$ por $\rightarrow$I.) Porém, a regra de reiteração R exige que você cite uma linha individual, assim, é inadmissível citar a subprova inteira (mesmo que essa subprova contenha a sentança C que queremos reiterar).

É sempre permitido abrir uma subprova com qualquer suposição. No entanto, existem algumas estratégias envolvidas na escolha eficiente de uma suposição. Iniciar uma subprova com uma suposição arbitrária e maluca apenas desperdiçaria as linhas da prova. A fim de obter um condicional usando a regra $\rightarrow$I, por exemplo, você deve assumir o antecedente do condicional em uma subprova.

Igualmente, é sempre permitido fechar uma subprova (e descartar suas suposições). No entanto, não será útil fazê-lo até que você alcance algo eficiente. Depois que a subprova for fechada, você poderá citar a subprova inteira em qualquer justificativa. As regras aplicadas a uma subprova ou subprovas, por sua vez, exigem que a última linha da subprova seja uma sentença de uma forma ou de outra. Por exemplo, você só pode citar uma subprova para $\rightarrow$I se a linha que você está justificando é da forma $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ é a suposião de sua subprova, e $\mathcal{B}$ é a útima linha da sua subprova.

27.6 Bicondicional

As regras para o bicondicional serão como versões de via de mão dupla das regras para o condicional.

Para provar '$F \leftrightarrow G$', por exemplo, você deve ser capaz de provar 'G' a partir da suposição 'F' *e* provar 'F' a partir da suposição 'G'. A regra de introdução do bicondicional ($\leftrightarrow$I) requer, portanto, duas subprovas. Esquematicamente, a regra funciona assim:

$$
\begin{array}{r|l}
i & \quad \begin{array}{|l} \mathcal{A} \\ \hline \end{array} \\
j & \quad \begin{array}{|l} \mathcal{B} \end{array} \\
k & \quad \begin{array}{|l} \mathcal{B} \\ \hline \end{array} \\
l & \quad \begin{array}{|l} \mathcal{A} \end{array} \\
 & \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B} \qquad \leftrightarrow\text{I } i\text{–}j,\ k\text{–}l
\end{array}
$$

Pode haver tantas linhas quantas você quiser entre i e j, e tantas linhas quantas você quiser entre k e l. Além disso, as subprovas podem vir em qualquer ordem, e a segunda subprova não precisa vir imediatamente após a primeira.

A regra de eliminação do bicondicional($\leftrightarrow$E) permite fazer um pouco mais do que a regra do condicional. Se você tem a sentença do lado esquerdo do bicondicional, você pode obter a sentença que está no lado direito. E inversamente, se você tem a sentença que está no lado direito do bicondicional, pode obter a sentença que está no lado esquerdo. Assim temos:

m	$\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$	
n	$\mathcal{A}$	
	$\mathcal{B}$	$\leftrightarrow$E m, n

e igualmente:

m	$\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$	
n	$\mathcal{B}$	
	$\mathcal{A}$	$\leftrightarrow$E m, n

Observe que o bicondicional, e o lado direito ou esquerdo podem ser separados um do outro e podem aparecer em qualquer ordem. No entanto, na citação de $\leftrightarrow$E, sempre citamos o bicondicional primeiro.

27.7 Disjunção

Vamos supor que Louis seja reservado. Então Louis é reservado ou leal. Afinal, dizer que Louis é reservado ou leal é dizer algo mais fraco do que dizer que Louis é reservado.

Vamos enfatizar esse ponto. Suponha que Louis seja reservado. Disto segue que Louis é *ou* reservado *ou* vegetariano. Igualmente, disto segue que *ou* Louis é reservado *ou* estudante. Também Igualmente segue que *ou* Louis é reservado ou a lua é redonda. Muitas dessas são inferências estranhas, mas não há nada *logicamente* errado com elas, mesmo que eles violem todos os tipos de normas implícitas de conversação.

Munido com tudo isso, apresentamos as regras de introdução da disjunção:

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathcal{A} & \\ & \mathcal{A} \vee \mathcal{B} & \vee\text{I } m \end{array}$$

e

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathcal{A} & \\ & \mathcal{B} \vee \mathcal{A} & \vee\text{I } m \end{array}$$

Observe que $\mathcal{B}$ pode ser *qualquer* sentença, então a seguir temos uma prova perfeitamente aceitável:

$$\begin{array}{r|ll} 1 & M & \\ \hline 2 & M \vee ([(A \leftrightarrow B) \rightarrow (C \wedge D)] \leftrightarrow [E \wedge F]) & \vee\text{I } 1 \end{array}$$

Observamos que a tabela de verdade para mostrar isso teria 128 linhas.

A regra da eliminação da disjunção é, no entanto, um pouco mais complicada Vamos supor que Louis é reservado ou leal. O que você pode concluir? Caso Louis não seja reservado; pode ser que ele seja leal. Igualmente, caso Louis não seja leal; pode ser que ele seja reservado. Disjunções, por si só, são difíceis de trabalhar.

Mas suponha que, de alguma forma, possamos mostrar os dois seguinte fatos: primeiro, que sendo Louis reservado implica que ele seja um economista; segundo, que sendo Louis leal implica que ele seja um economista. Então, se sabemos que Louis é reservado ou leal, então sabemos que, seja ele o que for, Louis é um economista. Esse insight pode ser expresso na regra a seguir, que é a regra de eliminação da disjunção (∨E):

$$
\begin{array}{l|l}
m & \mathcal{A} \lor \mathcal{B} \\
i & \quad \mid \underline{\mathcal{A}} \\
j & \quad \mid C \\
k & \quad \mid \underline{\mathcal{B}} \\
l & \quad \mid C \\
 & C \qquad\qquad \lor\text{E } m,\ i\text{–}j,\ k\text{–}l
\end{array}
$$

Obviamente, isso é um pouco mais complicado do que as regras anteriores, mas o argumento é bastante simples. Suponha que temos uma disjunção, $\mathcal{A} \lor \mathcal{B}$. Suponha também que temos duas subprovas, mostrando que C segue da suposição $\mathcal{A}$, e que C segue da suposição $\mathcal{B}$. Então podemos deduzir o póprio C. Como sempre, pode haver tantas linhas quantas você quiser entre i and j, e tantas linhas quantas você quiser entre k and l. Além disso, as subprovas e a disjunção podem vir em qualquer ordem e não precisam ser vizinhas.

Alguns exemplos podem ajudar a ilustrar isso. Considere este argumento:

$$(P \land Q) \lor (P \land R) \therefore P$$

A prova desse exemplo pode ser executada assim:

$$
\begin{array}{r|ll}
1 & \underline{(P \land Q) \lor (P \land R)} & \\
2 & \quad \mid \underline{P \land Q} & \\
3 & \quad \mid P & \land\text{E } 2 \\
4 & \quad \mid \underline{P \land R} & \\
5 & \quad \mid P & \land\text{E } 4 \\
6 & P & \lor\text{E } 1,\ 2\text{–}3,\ 4\text{–}5
\end{array}
$$

Agora temos um exemplo um pouco mais difícil:

$$A \wedge (B \vee C) \therefore (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

Aqui está uma prova correspondente a este argumento:

1	$A \wedge (B \vee C)$	
2	A	$\wedge$E 1
3	$B \vee C$	$\wedge$E 1
4	$\quad B$	
5	$\quad A \wedge B$	$\wedge$I 2, 4
6	$\quad (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$\vee$I 5
7	$\quad C$	
8	$\quad A \wedge C$	$\wedge$I 2, 7
9	$\quad (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$\vee$I 8
10	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$\vee$E 3, 4–6, 7–9

Não se assuste se você acha que não seria capaz de fazer essa prova. A habilidade de fazer novas provas vem com a prática, e abordaremos algumas estratégias para construuir provas no capítulo 28. A questão principal nesta fase é se, olhando a prova, você pode reconhecer que ela está em conformidade com as regras que estabelecemos. Isso envolve apenas verificar todas as linhas e garantir que elas sejam justificadas de acordo com as regras que estabelecemos.

27.8 Contradição e negação

Trataremos agora da negação, o nosso último conectivo. Entretanto, temos que fazer mais esforços para lidar com ele, pois precisamos conectar negação e *contradição*.

Uma forma eficaz de argumentar é demonstrar que o seus oponentes se contradizem. Nesse ponto, você os tem sob controle. Eles têm que desistir de pelo menos uma de suas suposições. Vamos usar essa ideia em nosso sistema de prova, adicionando um novo símbolo, '$\bot$', às nossas provas. Esse símbolo deve ser lido como algo como 'contradição!' ou 'redução!' ou 'isto é um absurdo!' Podemos usar a regra para a introdução desse símbolo sempre que nos contradizermos explicitamente, ou seja, sempre que encontrarmos uma sentença e sua negação aparecendo em nossa prova:

m	$\neg\mathscr{A}$	
n	$\mathscr{A}$	
	$\bot$	$\neg$E m, n

Não importa em que ordem a sentença e sua negação aparecem, e elas não precisam aparecer em linhas vizinhas. No entanto, sempre citamos o número da linha da negação primeiro, seguido pelo da sentença em que foi negada.

Obviamente, existe um vínculo estreito entre contradição e negação. A regra $\neg$E permite obter uma contradição explícita, $\bot$, a partir de duas sentenças contraditórias, $\mathscr{A}$ e sua negação $\neg\mathscr{A}$. Escolhemos essa regra como uma regra de eliminação pelo seguinte motivo: é a regra mais básica que nos permite passar de uma premissa que contenha uma negação, ou seja $\neg\mathscr{A}$, para uma sentença que não a contenha, ou seja, $\bot$. Portanto, é uma regra que *elimina* $\neg$.

Dissemos que '$\bot$' deve ser visto como uma 'contradição!', mas isso não nos diz muito sobre este símbolo. Existem, aproximadamente, três maneiras de abordar o símbolo '$\bot$'.

- Podemos considerar '$\bot$'. como uma nova sentença atômica da LVF, mas que só pode ter o valor de verdade Falso.
- Podemos considerar '$\bot$' como uma abreviação de alguma

contradição canônica, como '$A \wedge \neg A$'. Isso terá o mesmo efeito que o descrito acima - obviamente, '$A \wedge \neg A$' sempre tem o valor de verdade Falso - mas significa que, oficialmente, não precisamos adicionar um novo símbolo a LVF.

- Podemos considerar '$\bot$', não como um símbolo da LVF, mas como um *sinal de pontuação* que aparece em nossas provas. (Digamos que é comparável aos números das linhas e às linhas verticais.)

Existe algo filosoficamente muito atraente na terceira opção, mas aqui adotaremos *oficialmente* a primeira. '$\bot$' deve ser lido como uma letra sentencial que é sempre falsa. Isso significa que podemos manipulá-lo, em nossas provas, como qualquer outra sentença.

Ainda precisamos estabelecer uma regra para a introdução da negação. A regra é muito simples: se assumirmos algo que leva a uma contradição, a suposição deve estar errada. Esse pensamento motiva a seguinte regra:

$$
\begin{array}{r|l l}
i & \begin{array}{|l} \mathcal{A} \\ \hline \end{array} & \\
j & \begin{array}{|l} \bot \end{array} & \\
 & \neg\mathcal{A} & \neg\mathrm{I}\ i\text{–}j
\end{array}
$$

Pode haver tantas linhas quantas você desejar entre i and j. Para ver isso na prática e interagir com a negação, considere esta prova:

$$
\begin{array}{r|l l}
1 & D & \\ \hline
2 & \begin{array}{|l} \neg D \\ \hline \end{array} & \\
3 & \begin{array}{|l} \bot \end{array} & \neg\mathrm{E}\ 2, 1 \\
4 & \neg\neg D & \neg\mathrm{I}\ 2\text{–}3
\end{array}
$$

Se a suposição de que $\mathscr{A}$ é verdadeira leva a uma contradição, $\mathscr{A}$ não pode ser verdadeira, isto é, deve ser falsa, ou seja, $\neg\mathscr{A}$ deve ser verdadeira. Obviamente, se a suposição de que $\mathscr{A}$ é falsa (ou seja, a suposição de que $\neg\mathscr{A}$ é verdadeira) leva a uma contradição, então $\mathscr{A}$ não pode ser falsa, ou seja, $\mathscr{A}$ deve ser verdadeira. Portanto, podemos considerar a seguinte regra:

$$
\begin{array}{r|ll}
i & \begin{array}{|l} \neg\mathscr{A} \\ \hline \end{array} & \\
j & \begin{array}{|l} \bot \end{array} & \\
 & \mathscr{A} & \text{IP } i\text{–}j
\end{array}
$$

Essa regra é chamada de *prova indireta*, pois permite provar $\mathscr{A}$ indiretamente, assumindo sua negação. Formalmente, a regra é muito semelhante a $\neg$I, mas $\mathscr{A}$ e $\neg\mathscr{A}$ mudaram de lugar. Como $\neg\mathscr{A}$ não é a conclusão da regra, não estamos introduzindo $\neg$, então IP não é uma regra que introduz qualquer conectivo. Também não elimina um conectivo, pois não possui premissas autônomas que contenham $\neg$, apenas uma subprova com uma suposição da forma $\neg\mathscr{A}$. Por outro lado, $\neg$E tem uma premissa da forma $\neg\mathscr{A}$: é por isso que $\neg$E elimina $\neg$, mas a regra IP não.[1]

Usando $\neg$I, fomos capazes de dar uma prova de $\neg\neg\mathscr{D}$ a partir de $\mathscr{D}$. Usando IP, podemos ir na outra direção (com essencialmente a mesma prova).

[1]Existem lógicos que não aceitam a regra IP, mas aceitam $\neg$E. Eles são chamados de "intuicionistas". Os intuicionistas não aceitam nossa suposição básica de que cada sentença tem um dos dois valores de verdade, verdadeiro ou falso. Eles também acham que $\neg$ funciona diferentemente - para eles, uma prova do $\bot$ a partir de $\mathscr{A}$ garante $\neg\mathscr{A}$, mas uma prova do $\bot$ a partir de $\neg\mathscr{A}$ não garante que $\mathscr{A}$, mas apenas $\neg\neg\mathscr{A}$. Portanto, para eles, $\mathscr{A}$ e $\neg\neg\mathscr{A}$ não são equivalentes.

$$
\begin{array}{r|l l}
1 & \neg\neg D & \\
\hline
2 & \quad \neg D & \\
3 & \quad \bot & \neg\mathrm{E}\ 1,\ 2 \\
4 & D & \mathrm{IP}\ 2\text{–}3
\end{array}
$$

Precisamos de uma última regra. É uma espécie de regra de eliminação para '$\bot$', e conhecida como *explosão*.[2] Se obtemos uma contradição, simbolizada por '$\bot$', podemos concluir o que quisermos. Como isso pode ser motivado, como uma regra de argumentação? Bem, considere o dispositivo retórico '…e se *isso for* verdade, eu comerei o meu chapéu'. Como as contradições simplesmente não podem ser verdadeiras, se isto *for* verdadeiro, não apenas comerei o meu chapéu, como eu terei isto também. Aqui está a regra formal:

$$
\begin{array}{r|l l}
m & \bot & \\
 & \mathcal{A} & \mathrm{X}\ m
\end{array}
$$

Observe que $\mathcal{A}$ pode ser *qualquer* sentença.

A regra de explosão é um pouco estranha. Parece que $\mathcal{A}$ chega em nossa prova como um coelho que sai de uma cartola. Ao tentar encontrar provas, é muito tentador tentar usá-lo em qualquer lugar, pois parece muito poderoso. Resista a essa tentação: você só pode aplicá-la quando já tiver $\bot$! E você obtém $\bot$ somente quando suas suposições são contraditórias.

Ainda assim, não é estranho que, de uma contradição, alguma coisa deva seguir? Não de acordo com nossa noção de sustentação e validade. Para, $\mathcal{A}$ sustenta $\mathcal{B}$ se e somente se não exise nenhuma valoração de letras sentenciais que tornam $\mathcal{A}$ verdadeira e $\mathcal{B}$ falsa ao mesmo tempo. Mas $\bot$ é uma contradição,

[2] O nome latino para esse princípio é *ex contradictione quod libet*, "da contradição, qualquer coisa."

nunca é verdadeiro, seja qual for a valoração das letras sentenciais. Como não existe nenhuma valoração que faz $\bot$ verdadeiro, claro que também não existe nenhuma valoração que faz $\bot$ verdadeiro e $\mathscr{B}$ falsa! Então, de acordo com a nossa definição de sustentação, $\bot \vDash \mathscr{B}$, para qualquer que seja $\mathscr{B}$. Uma contradição sustenta qualquer coisa.[3]

Estas são todas as regras básicas para o sistema de prova da LVF.

Exercícios

A. As duas "provas"a seguir estão *incorretas.* Explique quais são os seus erros.

1	$(\neg L \wedge A) \vee L$	
2	$\neg L \wedge A$	
3	$\neg L$	$\wedge$E 3
4	A	$\wedge$E 1
5	L	
6	$\bot$	$\neg$E 3, 5
7	A	X 6
8	A	$\vee$E 1, 2–4, 5–7

[3] Existem alguns lógicos que não aceitam isso. Eles acham que se $\mathscr{A}$ implica $\mathscr{B}$, deve haver alguma *conexão relevante* entre $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$, mas não há uma entre $\bot$ e alguma sentença arbitrária $\mathscr{B}$. Portanto, esses lógicos desenvolvem outras lógicas "relevantes"nas quais a regra de explosão é não permitida.

1	$A \wedge (B \wedge C)$	
2	$(B \vee C) \to D$	
3	B	$\wedge$E 1
4	$B \vee C$	$\vee$I 3
5	D	$\to$E 4, 2

B. As três provas a seguir estão sem citações (números de regra e linha). Adicione-os, para transformá-las em provas fidedignas. Além disso, anote o argumento que corresponde a cada prova.

1	$P \wedge S$
2	$S \to R$
3	P
4	S
5	R
6	$R \vee E$

1	$A \to D$
2	$\quad A \wedge B$
3	$\quad A$
4	$\quad D$
5	$\quad D \vee E$
6	$(A \wedge B) \to (D \vee E)$

1	$\neg L \to (J \vee L)$
2	$\neg L$
3	$J \vee L$
4	$\quad J$
5	$\quad J \wedge J$
6	$\quad J$
7	$\quad L$
8	$\quad \bot$
9	$\quad J$
10	J

C. Apresente uma prova para cada um dos doze seguintes argumentos:

1. $J \to \neg J \therefore \neg J$

2. $Q \rightarrow (Q \wedge \neg Q) \therefore \neg Q$
3. $A \rightarrow (B \rightarrow C) \therefore (A \wedge B) \rightarrow C$
4. $K \wedge L \therefore K \leftrightarrow L$
5. $(C \wedge D) \vee E \therefore E \vee D$
6. $A \leftrightarrow B, B \leftrightarrow C \therefore A \leftrightarrow C$
7. $\neg F \rightarrow G, F \rightarrow H \therefore G \vee H$
8. $(Z \wedge K) \vee (K \wedge M), K \rightarrow D \therefore D$
9. $P \wedge (Q \vee R), P \rightarrow \neg R \therefore Q \vee E$
10. $S \leftrightarrow T \therefore S \leftrightarrow (T \vee S)$
11. $\neg(P \rightarrow Q) \therefore \neg Q$
12. $\neg(P \rightarrow Q) \therefore P$

CAPÍTULO 28

Construindo provas

Não existe uma receita simples para encontrar provas e não há substituto para a prática. Aqui, entretanto, apresentaremos algumas regras práticas e estratégias a serem lembradas.

28.1 Trabalhando do fim para o começo para chegar onde queremos

Você está tentando encontrar uma prova de alguma conclusão C, que será a última linha da sua prova. A primeira coisa que você faz é olhar para C e perguntar qual é a regra de introdução para seu principal operador lógico. Isso lhe dá uma ideia do que deve acontecer *antes* da última linha da prova.

As justificativas para a regra de introdução requerem uma ou duas outras sentenças acima da última linha, ou uma ou duas subprovas. Além disso, você pode dizer a partir de C quais são essas sentenças ou quais são as suposições e conclusões das subprovas. Em seguida, você pode escrever essas sentenças ou delinear as subprovas acima da última linha e tratá-las como seus novos objetivos.

Por exemplo: se sua conclusão é um condicional $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, planeje usar a regra $\to$I. Isso requer iniciar uma subprova na qual você assume $\mathcal{A}$. A subprova deve terminar com $\mathcal{B}$. Depois, continue pensando no que você deve fazer para obter $\mathcal{B}$ dentro dessa subprova, e como você pode usar a suposição $\mathcal{A}$.

Se seu objetivo for provar uma conjunção, um condicional ou uma sentença negada, você deve começar trabalhando dessa maneira, do fim para o começo. Descreveremos o que você deve fazer em cada um desses casos em detalhes.

Provando uma conjnção do fim para o começo

Se quisermos provar $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$, trabalhando do fim para o começo, significa que devemos escrever $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ na parte inferior da prova e tentar prová-la usando a regra $\wedge$I. No topo de uma folha de papel, escreveremos as premissas da prova, se houver alguma. E na parte inferior, escrevemos a sentença que queremos provar. Se for uma conjunção, vamos prová-la usando $\wedge$I.

1	$\mathcal{P}_1$	
	$\vdots$	
k	$\mathcal{P}_k$	
	$\vdots$	
n	$\mathcal{A}$	
	$\vdots$	
m	$\mathcal{B}$	
$m+1$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\wedge$I n, m

Para $\wedge$I, precisamos provar primeiro $\mathcal{A}$, depois provar $\mathcal{B}$. Na última linha, temos que citar as linhas em que provamos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, e usar $\wedge$I. As partes da prova marcadas por $\vdots$ ainda precisam ser preenchidas. Vamos marcar os números de linha m, n e k

por enquanto. Quando a prova estiver concluída, esses espaços reservados podem ser substituídos por números reais.

Provando um condicional do fim para o começo

Se nosso objetivo for provar um condicional, $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, teremos que usar a regra $\to$I. Isso requer uma subprova começando com $\mathcal{A}$ e terminando com $\mathcal{B}$. Vamos configurar nossa prova da seguinte forma:

$$
\begin{array}{l|l|ll}
n & & \mathcal{A} & \\ \cline{3-3}
 & & \vdots & \\
m & & \mathcal{B} & \\
m+1 & \multicolumn{2}{l}{\mathcal{A} \to \mathcal{B}} & \to\text{I } n\text{–}m
\end{array}
$$

Mais uma vez, deixaremos espaços reservados entre as linhas numeradas por m e n. Vamos registrar a última inferência como uma aplicação da regra $\to$I, citando a subprova.

Provando uma sentença negada do fim para o começo

Se queremos provar $\neg\mathcal{A}$, devemos usar a regra $\neg$I.

$$
\begin{array}{l|l|ll}
n & & \mathcal{A} & \\ \cline{3-3}
 & & \vdots & \\
m & & \bot & \\
m+1 & \multicolumn{2}{l}{\neg\mathcal{A}} & \neg\text{I } n\text{–}m
\end{array}
$$

Para aplicar a regra $\neg$I, temos que iniciar uma subprova com a suposição $\mathcal{A}$; a última linha da subprova tem que ser $\bot$. Vamos citar a subprova e usar $\neg$I como regra.

Aconselhamos a trabalhar do fim para o começo, o máximo que puder. Assim, se você está trabalhando do fim para o começo, para provar $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e construiu uma subprova com o objetivo de provar $\mathcal{B}$. Agora olhe para a sentença $\mathcal{B}$. Se ela for uma conjunção, por exemplo, trabalhe do fim para o começo e insira na subprova os dois conjuntos dessa conjunção, etc.

Provando uma disjunção do fim para o começo

Obviamente, você também pode trabalhar do fim para o começo para provar uma disjunção $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, se esse for seu objetivo. A regra $\vee$I exige que você tenha um dos disjuntos para deduzir $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$. Assim, escolha um dos disjuntos e, em seguida, procure uma prova para esse disjunto que você escolheu:

	$\vdots$	
n	$\mathcal{A}$	
$n+1$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\vee$I n

No entanto, você pode não conseguir provar o disjunto que escolheu. Nesse caso, você precisa voltar atrás, quando você não conseguir preencher as linha anteriores a n, isto é, em $\vdots$, apague tudo e tente com o outro disjunto:

	$\vdots$	
n	$\mathcal{B}$	
$n+1$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\vee$I n

Obviamente, apagar tudo e recomeçar é frustrante; assim, você deve evitar fazer isto. Se seu objetivo é provar uma disjunção, você *não deve começar* trabalhando do fim para o começo: tente trabalhar primeiro do início para o fim e só use a estratégia do fim para o começo para $\vee$I quando essa última não funcionar mais (e trabalhar do fim para o começo quando aplicar as regras $\wedge$I, $\rightarrow$I, e $\neg$I)

28.2 Trabalhando do começo para o fim a partir do que você tem

Sua prova pode ter premissas. E se você trabalhou de trás para frente para provar um condicional ou uma sentença negada, você inseriu subprovas com uma suposição e tentou provar uma sentença final na subprova. Essas premissas e suposições são sentenças as quais você pode trabalhar do começo para o fim para preencher as etapas ausentes na sua prova. Isso significa, aplicar regras de eliminação para os principais operadores dessas sentenças. A forma das regras dirão o que você deverá fazer.

Trabalhando do começo para o fim a partir de uma conjunção

Para usar a estratégia de provar do começo para fim a partir de uma sentença da forma $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$, usamos $\wedge$E. Essa regra nos permite fazer duas coisas: inferir $\mathcal{A}$, e inferir $\mathcal{B}$. Assim, em uma prova em que temos $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$, podemos avançar escrevendo $\mathcal{A}$ e/ou $\mathcal{B}$ imediatamente abaixo da conjunção:

n	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	
$n+1$	$\mathcal{A}$	$\wedge$E n
$n+2$	$\mathcal{B}$	$\wedge$E n

Geralmente fica claro a situação específica que você vai precisar usar uma das sentenças $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$. Mas, não custa nada escrever as duas sentenças.

Trabalhando do começo para o fim a partir de uma disjunção

Trabalhar do começo para o fim a partir de uma disjunção funciona um pouco diferente. Para usar uma disjunção, usamos a regra $\vee$E e para aplicar essa regra não basta saber quais são os disjuntos da disjunção que queremos usar. Também devemos ter em mente o que queremos provar. Suponha que queremos provar $\mathcal{C}$, e temos $\mathcal{A} \lor B$ para trabalhar. (Que $\mathcal{A} \lor B$ pode ser uma premissa da prova, uma suposição de uma subprova ou algo já provado.) Para poder aplicar a regra $\lor$E teremos de inserir duas subprovas:

n	$\mathcal{A} \lor \mathcal{B}$	
$n+1$	$\quad\mid\ \underline{\mathcal{A}}$	
	$\quad\mid\ \vdots$	
m	$\quad\mid\ \mathcal{C}$	
$m+1$	$\quad\mid\ \underline{\mathcal{B}}$	
	$\quad\mid\ \vdots$	
k	$\quad\mid\ \mathcal{C}$	
$k+1$	$\mathcal{C}$	$\lor$E n, $(n+1)$–m, $(m+1)$–k

A primeira subprova começa com o primeiro disjunto $\mathcal{A}$, e termina com a sentença que estamos procurando, $\mathcal{C}$. A segunda subprova começa com o outro disjunto $\mathcal{B}$, e também termina com a sentença $\mathcal{C}$. Cada uma dessas subprovas deve ser preenchida ainda mais. Podemos então justificar a sentença $\mathcal{C}$ usando $\lor$E, citando a linha com $\mathcal{A} \lor \mathcal{B}$ e as duas subprovas.

Trabalhando do começo para o fim a partir de um condicional

Para usar um condicional $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, você também precisa do antecedente $\mathcal{A}$ para aplicar a regra $\to$E. Assim, para trabalhar do começo para o fim a partir de um condicional, você obterá $\mathcal{B}$, justificando com a regra $\to$E, e estabelecendo $\mathcal{A}$ como um novo subobjetivo.

$$
\begin{array}{l|ll}
n & \mathcal{A} \to \mathcal{B} & \\
 & \vdots & \\
m & \mathcal{A} & \\
m+1 & \mathcal{B} & \to\text{E } n, m
\end{array}
$$

Trabalhando do começo para o fim a partir de uma sentença negada

Finalmente, para usar uma sentença negada $\neg\mathcal{A}$, você deve aplicar a regra $\neg$E. Isto requer, além de $\neg\mathcal{A}$, também a sentença correspondente $\mathcal{A}$ sem a negação. A sentença que você irá obter é sempre a mesma: $\bot$. Assim, trabalhar do começo para o fim a partir de uma sentença negada funciona especialmente bem dentro de uma subprova que você deseja usar em uma aplicaç ao da regra $\neg$I (ou IP). Você trabalha a partir de $\neg\mathcal{A}$ se você já tem $\neg\mathcal{A}$ e deseja provar $\bot$. Para isso, você estabelece $\mathcal{A}$ como um novo subobjetivo.

$$
\begin{array}{l|ll}
n & \neg\mathcal{A} & \\
 & \vdots & \\
m & \mathcal{A} & \\
m+1 & \bot & \neg\text{E } n, m
\end{array}
$$

28.3 Estratégias

Vamos supor que queremos mostrar que o argumento $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $\therefore$ $A \wedge (B \vee C)$ é válido. Começamos a prova escrevendo a premissa e a conclusão em baixo. (Com o máximo de espaço possível entre elas.)

$$
\begin{array}{r|l}
1 & (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \\ \hline
 & \vdots \\
n & A \wedge (B \vee C)
\end{array}
$$

Agora, temos duas opções: trabalhar do fim para o começo a partir da conclusão ou trabalhar começo para o fim a partir da partir da premissa. Escolheremos a segunda estratégia: usamos a disjunção na linha 1 e configuramos as subprovas que precisamos para $\vee$E. A disjunção na linha 1 tem dois disjuntos, $A \wedge B$ e $A \wedge C$. O nosso objetivo é provar a sentença $A \wedge (B \vee C)$. Assim, neste caso, você deve criar duas subprovas: uma com a suposição $A \wedge B$ e a última linha $A \wedge (B \vee C)$, e a outra com a suposição $A \wedge C$ e a última linha $A \wedge (B \vee C)$. A justificativa para a conclusão na linha n será $\vee$E, citando a disjunção na linha 1 e as duas subprovas. Assim, sua prova até agora é esta :

$$
\begin{array}{r|lll}
1 & (A \wedge B) \vee (A \wedge C) & & \\ \hline
2 & \quad | \ A \wedge B & & \\
 & \quad | \ \vdots & & \\
n & \quad | \ A \wedge (B \vee C) & & \\
n+1 & \quad | \ A \wedge C & & \\
 & \quad | \ \vdots & & \\
m & \quad | \ A \wedge (B \vee C) & & \\
m+1 & A \wedge (B \vee C) & & \vee\text{E } 1,\ 2\text{–}n,\ n+1\text{–}m
\end{array}
$$

Agora você tem duas tarefas separadas, a saber, preencher cada uma das duas subprovas. Na primeira subprova, trabalhamos do fim para o começo a partir da conclusão $A \wedge (B \vee C)$. Isso é uma conjunção, assim dentro da primeira subprova, você terá dois subobjetivos separados: provar A, e provar $B \vee C$. Esses subobjetivos permitem justificar a linha n usando $\wedge$I. A sua prova agora é assim:

1	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	
2	| $A \wedge B$	
	| $\vdots$	
i	| A	
	| $\vdots$	
$n-1$	| $B \vee C$	
n	| $A \wedge (B \vee C)$	$\wedge$I i, $n-1$
$n+1$	| $A \wedge C$	
	| $\vdots$	
m	| $A \wedge (B \vee C)$	
$m+1$	$A \wedge (B \vee C)$	$\vee$E 1, 2–n, $(n+1)$–m

Vimos imediatamente que podemos obter a linha i a partir da linha 2 por $\wedge$E. No entanto, a linha i é na verdade a linha 3 e pode ser justificada com $\wedge$E da linha 2. O outro subobjetivo $B \vee C$ é uma disjunção. Aplicaremos a estratégia de trabalhar do fim para o começo a partir de uma disjunção até a linha $n-1$. Temos que escolher um dos disjuntos, B ou C. Escolhendo C não funcionaria e teríamos que voltar atrás. Agora você já pode ver que, se você escolheu B como subobjetivo, poderá conseguir isso trabalhando novamente do começo para o fim a partir da conjunção $A \wedge B$ na linha 2. Assim, podemos concluir a primeira subprova como segue:

1	$(A \land B) \lor (A \land C)$	
2	$\quad \mid A \land B$	
3	$\quad \mid A$	$\land$E 2
4	$\quad \mid B$	$\land$E 2
5	$\quad \mid B \lor C$	$\lor$I 4
6	$\quad \mid A \land (B \lor C)$	$\land$I 3, 5
7	$\quad \mid A \land C$	
	$\quad \mid \vdots$	
m	$\quad \mid A \land (B \lor C)$	
$m+1$	$A \land (B \lor C)$	$\lor$E 1, 2–6, 7–m

Na primeira subprova, obtemos as linha 3 e 4 da mesma forma, i.e., de 2 por $\land$E. A linha 5 é justificada por $\lor$I da linha 4, pois estamos trabalhando do fim para o começo a partir de uma disjunção.

A segunda subprova é quase exatamente a mesma. Vamos deixar isso como um exercício.

Lembre-se de que, quando começamos, tínhamos a opção de começar a partir da premissa ou começar pela conclusão, e escolhemos a primeira opção. A segunda opção também leva a uma prova, mas será diferente. Os primeiros passos seriam trabalhar a partir da conclusão e estabelecer dois subobjetivos, A e $B \lor C$, e depois trabalhar a partir da premissa para prová-las, por exemplo:

1	$(A \land B) \lor (A \land C)$	
2	$\quad \vert\ A \land B$	
	$\quad \vert\ \vdots$	
k	$\quad \vert\ A$	
$k + 1$	$\quad \vert\ A \land C$	
	$\quad \vert\ \vdots$	
$n - 1$	$\quad \vert\ A$	
n	A	$\lor$E 1, 2–k, $(k + 1)$–$(n - 1)$
$n + 1$	$\quad \vert\ A \land B$	
	$\quad \vert\ \vdots$	
l	$\quad \vert\ B \lor C$	
$l + 1$	$\quad \vert\ A \land C$	
	$\quad \vert\ \vdots$	
$m - 1$	$\quad \vert\ B \lor C$	
m	$B \lor C$	$\lor$E 1, $(n + 1)$–l, $(l + 1)$–$(m - 1)$
$m + 1$	$A \land (B \lor C)$	$\land$I n, m

Deixaremos que você preencha as linhas ausentes indicadas por $\vdots$.

Vamos dar outro exemplo para ilustrar como aplicar as estratégias ao lidar com condicionais e negação. A sentença $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ é uma tautologia. Vamos ver se conseguimos encontrar uma prova disso, sem premissas, usando as estratégias. Primeiro escrevemos a sentença no final de uma folha de papel. Como trabalhar do começo para o fim não é uma boa opção (não há nada a partir do qual trabalhar), trabalhamos do fim para o começo e criamos uma subprova para obter a sentença que queremos $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ usando a regra $\to$I. A sua suposição deve ser o antecedente do condicional que queremos provar, ou seja, $A \to B$, e sua última linha, o consequente $\neg B \to \neg A$.

$$
\begin{array}{l|l|l l}
1 & & \quad A \to B & \\
\cline{3-3}
 & & \quad \vdots & \\
n & & \quad \neg B \to \neg A & \\
n+1 & (A \to B) \to (\neg B \to \neg A) & & \to\text{I } 1\text{–}n
\end{array}
$$

O novo objetivo, $\neg B \to \neg A$ é também um condicional, assim, trabalhando do fim para o começo, criamos outra subprova:

$$
\begin{array}{l l l}
1 & \mid\ \mid\ A \to B & \\
2 & \mid\ \mid\ \mid\ \neg B & \\
 & \mid\ \mid\ \mid\ \vdots & \\
n-1 & \mid\ \mid\ \mid\ \neg A & \\
n & \mid\ \mid\ \neg B \to \neg A & \to\text{I } 2\text{–}(n-1) \\
n+1 & \mid\ (A \to B) \to (\neg B \to \neg A) & \to\text{I } 1\text{–}n
\end{array}
$$

Trabalhamos novamente do fim para o começo a partir de $\neg A$. Para fazer isso, veja a regra $\neg$I. Ela requer uma subprova com A como suposição, e $\bot$ como sua última linha. Então a prova agora é:

1	$\quad\quad A \to B$	
2	$\quad\quad\quad \neg B$	
3	$\quad\quad\quad\quad A$	
	$\quad\quad\quad\quad \vdots$	
$n-2$	$\quad\quad\quad\quad \bot$	
$n-1$	$\quad\quad\quad \neg A$	$\neg$I 3–$(n-2)$
n	$\quad\quad \neg B \to \neg A$	$\to$I 2–$(n-1)$
$n+1$	$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$	$\to$I 1–n

Agora nosso objetivo é provar $\bot$. Dissemos acima, ao discutir como trabalhar a partir de uma sentença negada, que a regra $\neg$E permite que você prove $\bot$, o qual é o nosso objetivo na subprova interior. Então, procuramos uma sentença negada que a partir da qual possamos trabalhar do começo para o fim: esta sentença seria $\neg B$ da linha 2. Isso significa que temos que derivar B dentro da subprova, pois $\neg$E requer não apenas $\neg B$ (o que já temos), mas também B. E B, por sua vez, conseguimos a partir de $A \to B$, já que $\to$E nos permitirá justificar o consequente B do condicional por $\to$E. A regra $\to$E também requer o antecedente A do condicional, mas isso também já está disponível (na linha 3). Então, concluímos com:

1	$A \to B$	
2	$\neg B$	
3	A	
4	B	$\to$E 1, 3
5	$\bot$	$\neg$E 2, 4
6	$\neg A$	$\neg$I 3–5
7	$\neg B \to \neg A$	$\to$I 2–6
8	$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$	$\to$I 1–7

28.4 Trabalhando do começo para o fim a partir de $\bot$

Ao aplicar as estratégias, às vezes você se encontra em uma situação em que pode justificar $\bot$. Usando a regra de explosão, isso permitiria justificar *qualquer coisa*. Assim $\bot$ funciona como um curinga nas provas. Por exemplo, suponha que você queira fornecer uma prova do argumento $A \vee B, \neg A \therefore B$. Você configura sua prova, escrevendo as premissas $A \vee B$ e $\neg A$ na parte superior das linhas 1 e 2 e a conclusão B na parte inferior da página. B não tem conectivo principal, então você não pode usar a estratégia do fim para o começo. Em vez disso, você deve trabalhar a partir de $A \vee B$: Isso requer duas subprovas, tais como:

1	$A \vee B$	
2	$\neg A$	
3	$\quad A$	
	$\quad \vdots$	
m	$\quad B$	
$m+1$	$\quad B$	
	$\quad \vdots$	
k	$\quad B$	
$k+1$	B	$\vee$E 1, 3–m, $(m+1)$–k

Observe que você possui $\neg A$ na linha 2 e A como suposição da sua primeira subprova. Isso lhe dá $\perp$ usando $\neg$E, e de $\perp$ você obtém a conclusão B da primeira subprova usando X. Lembre-se de que você pode repetir uma sentença que já apareceu na prova usando a regra de reiteração R. Portanto, nossa prova seria:

1	$A \vee B$	
2	$\neg A$	
3	$\quad A$	
4	$\quad \perp$	$\neg$E 2, 3
5	$\quad B$	X 4
6	$\quad B$	
7	$\quad B$	R 6
8	B	$\vee$E 1, 3–5, 6–7

28.5 Seguindo indiretamente

Em muitos casos, as estratégias de trabalhar do começo para o fim e do fim para o começo dão certo. Mas há casos em que elas não funcionam. Se você não conseguir encontrar uma maneira de mostrar $\mathscr{A}$ diretamente usando essas estratégias, use a regra IP. Para fazer isso, configure uma subprova na qual você assume $\neg\mathscr{A}$ e procure uma prova para $\bot$ dentro dessa subprova.

$$
\begin{array}{l|l|l}
n & \quad \begin{array}{|l} \neg A \\ \hline \vdots \\ \bot \end{array} & \\
m & & \\
m+1 & \mathscr{A} & \text{IP } n\text{–}m
\end{array}
$$

Aqui, temos que iniciar uma subprova com a suposição $\neg\mathscr{A}$; a última linha da subprova deve ser $\bot$. Vamos citar a subprova e usar IP como regra. Na subprova, agora temos uma suposição adicional (na linha n) para trabalhar.

Suponha que usamos a estratégia de prova indireta ou estamos em outra situação em que procuramos uma prova para $\bot$. O que é um bom candidato? é claro que o candidato óbvio seria usar uma sentença negada, pois (como vimos acima) com $\neg$E podemos obter $\bot$. Se você configurar uma prova como acima, tentando provar $\mathscr{A}$ usando IP, você terá $\neg\mathscr{A}$ como suposição de sua subprova - então trabalhando a partir dela para justificar $\bot$ dentro de sua subprova, você estabelece $\mathscr{A}$ como uma meta dentro de sua subprova. Assim, se você estiver usando IP, você se encontrará na seguinte situação:

$$
\begin{array}{l|l|ll}
n & & \neg\mathcal{A} & \\
\cline{3-3}
 & & \vdots & \\
m-1 & & \mathcal{A} & \\
m & & \bot & \neg\text{E } n,\ m-1 \\
m+1 & \multicolumn{2}{l}{\mathcal{A}} & \text{IP } n\text{–}m
\end{array}
$$

Isso parece estranho: queríamos provar $\mathcal{A}$ e as estratégias fracassaram; então usamos a regra IP como último recurso. E agora nos encontramos na mesma situação: estamos novamente procurando uma prova de $\mathcal{A}$. Mas observe que agora estamos *dentro* de uma subprova, e nessa subprova temos uma suposição adicional ($\neg\mathcal{A}$) para trabalhar a qual não tínhamos antes. Vamos ver um exemplo.

28.6 Prova indireta do terceiro excluído

A sentença $A \vee \neg A$ é uma tautologia e, portanto, deve ter uma prova mesmo sem quaisquer premissas. Mas trabalhar do fim para o começo falha nessa situação: para obter $A \vee \neg A$ usando $\vee$I teríamos que provar A ou $\neg A$; novamente, sem premissas. Nenhuma dessas é uma tautologia, portanto também não podemos provar. Trabalhar do começo para o fim também não funciona, já que não há nada para assumir. Portanto, a única opção é a prova indireta.

$$
\begin{array}{l|l|ll}
1 & & \neg(A \vee \neg A) & \\
\cline{3-3}
 & & \vdots & \\
m & & \bot & \\
m+1 & \multicolumn{2}{l}{A \vee \neg A} & \text{IP } 1\text{–}m
\end{array}
$$

Agora temos algo a partir do qual trabalhar: a suposição $\neg(A \vee \neg A)$. Para usá-la, justificamos $\bot$ com a regra $\neg$E, citando o pressuposto na linha 1, e também a sentença não negada correspondente $A \vee \neg A$, ainda a ser provada

$$
\begin{array}{l|l|l}
1 & \quad \neg(A \vee \neg A) & \\
 & \quad \vdots & \\
m-1 & \quad A \vee \neg A & \\
m & \quad \bot & \neg\text{E } 1, m-1 \\
m+1 & A \vee \neg A & \text{IP } 1\text{–}m
\end{array}
$$

No início, trabalhando do começo par o fim para provar $A \vee \neg A$ com a regra $\vee$I não funcionou. Mas agora estamos em uma situação diferente: queremos provar $A \vee \neg A$ dentro de uma subprova. Em geral, ao lidar com novas metas, devemos voltar e começar com as estratégias básicas. Nesse caso, devemos primeiro tentar trabalhar do fim para o começo a partir da disjunção $A \vee \neg A$, ou seja, precisamos escolher um dos disjuntos e tentar prová-lo. Vamos escolher $\neg A$. Isso permitiria justificar $A \vee \neg A$ na linha $m-1$ usando $\vee$I. Então, trabalhando novamente de fim para o começo a partir de $\neg A$, iniciamos outra subprova a fim de justificar $\neg A$ usando $\neg$I. Essa subprova deve ter A acomo suposição e $\bot$ como sua última linha.

$$
\begin{array}{l|l|l}
1 & \quad \neg(A \vee \neg A) & \\
2 & \quad\quad A & \\
 & \quad\quad \vdots & \\
m-3 & \quad\quad \bot & \\
m-2 & \quad \neg A & \neg\text{I } 2\text{–}(m-3) \\
m-1 & \quad A \vee \neg A & \vee\text{I } m-2 \\
m & \quad \bot & \neg\text{E } 1, m-1 \\
m+1 & A \vee \neg A & \text{IP } 1\text{–}m
\end{array}
$$

Dentro dessa nova subprova, precisamos novamente justificar $\bot$. A melhor maneira de fazer isso é começar com uma sentença negada; $\neg(A \lor \neg A)$ na linha 1 é a única sentença negada que podemos usar. A sentença não negada correspondente, $A \lor \neg A$, no entanto, segue diretamente de A (que temos na linha 2) por $\lor$I. Nossa prova completa é:

1	$\quad \mid\ \neg(A \lor \neg A)$	
2	$\quad \mid\ \quad \mid\ A$	
3	$\quad \mid\ \quad \mid\ A \lor \neg A$	$\lor$I 2
4	$\quad \mid\ \quad \mid\ \bot$	$\neg$E 1, 3
5	$\quad \mid\ \neg A$	$\neg$I 2–4
6	$\quad \mid\ A \lor \neg A$	$\lor$I 5
7	$\quad \mid\ \bot$	$\neg$E 1, 6
8	$A \lor \neg A$	IP 1–7

Exercícios

A. Use as estratégias para encontrar provas para cada um dos oito seguintes argumentos:

1. $A \to B, A \to C \therefore A \to (B \land C)$
2. $(A \land B) \to C \therefore A \to (B \to C)$
3. $A \to (B \to C) \therefore (A \to B) \to (A \to C)$
4. $A \lor (B \land C) \therefore (A \lor B) \land (A \lor C)$
5. $(A \land B) \lor (A \land C) \therefore A \land (B \lor C)$
6. $A \lor B, A \to C, B \to D \therefore C \lor D$
7. $\neg A \lor \neg B \therefore \neg(A \land B)$
8. $A \land \neg B \therefore \neg(A \to B)$

B. Formule estratégias para trabalhar do fim para o começo e do começo para o fim a partir de $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$.

C. Use as estratégias para encontrar provas para cada uma das cinco seguintes sentenças:

1. $\neg A \to (A \to \bot)$
2. $\neg(A \wedge \neg A)$
3. $[(A \to C) \wedge (B \to C)] \to [(A \vee B) \to C]$
4. $\neg(A \to B) \to (A \wedge \neg B)$
5. $(A \vee \neg B) \to (A \to B)$

Como essas devem ser provas de sentenças a partir de nenhuma premissa, você começará com a respectiva sentença *na parte inferior* da prova, as quais não terão premissas.
D. Use as estratégias para encontrar provas para cada um dos seguintes argumentos e sentenças:

1. $\neg\neg A \to A$
2. $\neg A \to \neg B \therefore B \to A$
3. $A \to B \therefore \neg A \vee B$
4. $\neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)$
5. $A \to (B \vee C) \therefore (A \to B) \vee (A \to C)$
6. $(A \to B) \vee (B \to A)$
7. $((A \to B) \to A) \to A$

Todos exigirão a estratégia de IP. Os últimos três especialmente são bastante difíceis!

CAPÍTULO 29

Regras adicionais da LVF

No Capítulo 27, introduzimos as regras básicas de nosso sistema de provas para a LVF e nesta seção, apresentaremos algumas regras adicionais a esse sistema. Veremos que em nosso sistema de prova estendido é um pouco mais fácil de trabalhar. No entanto, veremos, no Capítulo 31 que essas regras adicionais não são, estritamente falando,*necessárias.*

29.1 Silogismo disjuntivo

Vejamos uma forma de argumento muito natural.

> Maria está em Natal ou em Lisboa. Ela não está em Lisboa. Portanto, ela está em Natal.

Isso é chamado *silogismo disjuntivo.* Nós o adicionamos ao nosso sistema de prova da seguinte maneira:

m	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	
n	$\neg\mathcal{A}$	
	$\mathcal{B}$	SD m, n

e

m	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	
n	$\neg\mathcal{B}$	
	$\mathcal{A}$	SD m, n

Como usual, a disjunção e a negação de um dos disjuntos podem ocorrer em qualquer ordem e não precisam estar visinhos. No entanto, sempre citamos a disjunção primeiro.

29.2 Modus tollens

Outro padrão útil de inferência é incorporado no seguinte argumento:

> Se Carlos venceu a eleição, ele está em Natal. Ele não está em Natal. Portanto ele não venceu a eleição.

Este padrão de inferência é chamado *modus tollens.* A regra correspondente é:

m	$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$	
n	$\neg\mathcal{B}$	
	$\neg\mathcal{A}$	MT m, n

Como sempre, as premissas podem ocorrer em qualquer ordem, mas sempre citamos o condicional primeiro.

29.3 Eliminação da dupla negação

Outra regra útil é a *eliminação da dupla negação.* Faz exatamente o que diz:

m	$\neg\neg\mathscr{A}$	
	$\mathscr{A}$	DNE m

A justificativa para isso é que, em linguagem natural, as duplas negações tendem a se anular.

Dito isto, você deve estar ciente de que o contexto e a ênfase podem impedi-los de fazê-lo. Considere a sentença 'Jane *não* é infeliz'. A partir dessa afirmação não podemos necessariamente concluir 'Jane é feliz', pois a primeira sentença deve ser entendida como 'Jane está em um estado de profunda indiferença'. Como sempre, mudar para a LVF nos obriga a sacrificar certas nuances das expressões em português.

29.4 Terceiro excluído

Suponha que possamos mostrar que, se estiver ensolarado lá fora, Bento levará um guarda-chuva (por medo de se queimar). Suponha também que possamos mostrar que, se não estiver ensolarado lá fora, Bento levará um guarda-chuva (por medo de se molhar). Bem, não há um terceiro caminho para o clima. Portanto, *qualquer que seja* o clima, Bento levará um guarda-chuva.

Essa linha de pensamento motiva a seguinte regra:

i	$\mathcal{A}$	
j	$\mathcal{B}$	
k	$\neg\mathcal{A}$	
l	$\mathcal{B}$	
	$\mathcal{B}$	LEM i–j, k–l

Essa regra é às vezes chamada lei do *terceiro excluído*, pois encapsula a ideia de que $\mathcal{A}$ pode ser verdadeira ou $\neg\mathcal{A}$ pode ser verdadeira, mas não há meio caminho em que nenhum dos dois seja verdadeira.[1] Pode haver tantas linhas quantas você quiser entre i e j, e tantas linhas quantas quiser entre k e l. Além disso, as subprovas podem vir em qualquer ordem, e a segunda subprova não precisa vir imediatamente após a primeira.

Para ver a regra em ação, considere:

$$P \therefore (P \wedge D) \vee (P \wedge \neg D)$$

Aqui está uma prova correspondente ao argumento:

[1] Você pode às vezes encontrar lógicos ou filósofos falando sobre "tertium non datur". Esse é o mesmo princípio que o terceiro excluído; significa "não há terceira via". Lógicos que têm dúvidas sobre provas indiretas também têm dúvidas sobre a LEM.

1	P	
2	$\quad D$	
3	$\quad P \wedge D$	$\wedge$I 1, 2
4	$\quad (P \wedge D) \vee (P \wedge \neg D)$	$\vee$I 3
5	$\quad \neg D$	
6	$\quad P \wedge \neg D$	$\wedge$I 1, 5
7	$\quad (P \wedge D) \vee (P \wedge \neg D)$	$\vee$I 6
8	$(P \wedge D) \vee (P \wedge \neg D)$	LEM 2–4, 5–7

Aqui está outro exemplo:

1	$A \rightarrow \neg A$	
2	$\quad A$	
3	$\quad \neg A$	$\rightarrow$E 1, 2
4	$\quad \neg A$	
5	$\quad \neg A$	R 4
6	$\neg A$	LEM 2–3, 4–5

29.5 Regras de De Morgan

Nossas regras adicionais finais são chamadas de Leis de De Morgan (em homenagem a Augustus De Morgan). A forma das regras deve ser familiar nas tabelas de verdade.

A primeira regra de De Morgan é:

m	$\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$	
	$\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}$	DeM m

A segunda regra de De Morgan é o inverso da primeira:

m	$\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}$	
	$\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$	DeM m

A terceira regra de De Morgan é dual da primeira:

m	$\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$	
	$\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$	DeM m

E a quarta regra de De Morgan é o inverso da terceira:

m	$\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$	
	$\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$	DeM m

Essas são todas as regras adicionais do nosso sistema de prova para a LVF.

Exercícios

A. As provas a seguir estão sem citações (números de regra e linha). Adicione-os sempre que necessário:

1.

$$
\begin{array}{r|l}
1 & W \to \neg B \\
2 & A \wedge W \\
3 & B \vee (J \wedge K) \\
\hline
4 & W \\
5 & \neg B \\
6 & J \wedge K \\
7 & K
\end{array}
$$

2.

$$
\begin{array}{r|l}
1 & L \leftrightarrow \neg O \\
2 & L \vee \neg O \\
\hline
3 & \quad | \; \neg L \\
4 & \quad | \; \neg O \\
5 & \quad | \; L \\
6 & \quad | \; \bot \\
7 & \neg\neg L \\
8 & L
\end{array}
$$

3.

1	$Z \to (C \land \neg N)$
2	$\neg Z \to (N \land \neg C)$
3	$\quad \neg(N \lor C)$
4	$\quad \neg N \land \neg C$
5	$\quad \neg N$
6	$\quad \neg C$
7	$\quad\quad Z$
8	$\quad\quad C \land \neg N$
9	$\quad\quad C$
10	$\quad\quad \bot$
11	$\quad \neg Z$
12	$\quad N \land \neg C$
13	$\quad N$
14	$\quad \bot$
15	$\neg\neg(N \lor C)$
16	$N \lor C$

B. Dê uma prova para cada um desses argumentos:

1. $E \lor F,\ F \lor G,\ \neg F \therefore E \land G$
2. $M \lor (N \to M) \therefore \neg M \to \neg N$
3. $(M \lor N) \land (O \lor P),\ N \to P,\ \neg P \therefore M \land O$
4. $(X \land Y) \lor (X \land Z),\ \neg(X \land D),\ D \lor M \therefore M$

CAPÍTULO 30

Conceitos de teoria da prova

Neste capítulo, apresentaremos um novo vocabulário. A seguinte expressão:

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n \vdash \mathcal{C}$$

significa que existe uma prova que termina com $\mathcal{C}$ cujas suposições não descartadas estão entre $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$. Quando queremos dizer que *não* é o caso que existe uma prova que termine com $\mathcal{C}$ a partir de $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, ..., $\mathcal{A}_n$, escrevemos:

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n \nvdash \mathcal{C}$$

O símbolo '$\vdash$' é chamado de *roleta única*. Queremos enfatizar que este não é o símbolo do roleta dupla ('$\vDash$') que introduzimos no capítulo 12 para simbolizar sustentação. O símbolo roleta única, '$\vdash$', diz respeito à existência de provas; enquanto que a roleta dupla, '$\vDash$', diz respeito à existência de valorações (ou interpretações, quando usadas para FOL). *Elas são noções muito diferentes.*

Com o nosso símbolo '$\vdash$', podemos introduzir um pouco mais de terminologia. Para dizer que existe uma prova de $\mathcal{A}$ sem suposições não descartadas, escrevemos: $\vdash \mathcal{A}$. Nesse caso, dizemos que $\mathcal{A}$ é um TEOREMA.

> $\mathcal{A}$ é um TEOREMA se e somente se $\vdash \mathcal{A}$

Para ilustrar isso, suponha que desejamos mostrar que '$\neg(A \wedge \neg A)$' é um teorema. Assim, precisamos de uma prova de '$\neg(A \wedge \neg A)$' que *não* tenha suposições não descartadas. No entanto, como queremos provar uma sentença cujo operador lógico principal é uma negação, vamos começar com uma *subprova* dentro da qual assumimos '$A \wedge \neg A$', e mostrar que essa suposição leva a uma contradição. Levando em consideração tudo isso, a prova é assim:

1	$\quad\vert\ A \wedge \neg A$	
2	$\quad\vert\ A$	$\wedge$E 1
3	$\quad\vert\ \neg A$	$\wedge$E 1
4	$\quad\vert\ \bot$	$\neg$E 3, 2
5	$\neg(A \wedge \neg A)$	$\neg$I 1–4

Provamos então '$\neg(A \wedge \neg A)$' sem nenhuma suposição (não descartada). Esse teorema em particular é uma instância do que às vezes é chamado de *Lei da Não Contradição.*

Para mostrar que algo é um teorema, você apenas precisa encontrar uma prova adequada. Normalmente, é muito mais difícil mostrar que algo *não* é um teorema. Para fazer isso, você precisaria demonstrar, não apenas que certas estratégias de prova falham, mas que *nenhuma* prova é possível. Mesmo que você não consiga provar uma sentença de mil maneiras diferentes, talvez a prova seja longa e complexa demais para você entender. Talvez você não tenha se esforçado o suficiente.

Aqui temos um pouco mais de terminologia:

> Duas sentenças $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são DEDUTIVAMENTE EQUIVALENTES se e somente se cada uma puder ser provada a partir da outra. i.e, ambas $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$ e $\mathcal{B} \vdash \mathcal{A}$.

Assim como no caso de mostrar que uma sentença é um teorema, é relativamente fácil mostrar que duas sentenças são dedutivamente equivalentes: isto requer apenas um par de provas. Entretanto, mostrar que sentenças *não* são dedutivamente equivalentes seria muito mais difícil: é tão difícil quanto mostrar que uma sentença não é um teorema.

Um pouco mais de terminologia:

> As sentenças $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ são DEDUTIVAMENTE INCONSISTENTES se e somente se uma contradição puder ser provada a partir delas, ou seja, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n \vdash \bot$. Se elas não são INCONSISTENTES, dizemos que elas são DEDUTIVAMENTE CONSISTENTES.

É fácil mostrar que um conjunto de sentenças é dedutivamente inconsistente: você só precisa provar uma contradição a partir delas. Entretanto, mostrar que um conjunto de sentenças não é dedutivamente inconsistentes é muito mais difícil. Exigiria mais do que apenas fornecer uma ou duas provas; exigiria mostrar que nenhuma prova de um determinado tipo é *possível.*

Esta tabela resume se uma ou duas provas são bem sucedidas ou se devemos raciocinar sobre todas as provas possíveis.

	Sim	**Não**
teorema?	uma prova	todas as provas possíveis
inconsistente?	uma prova	todas as provas possíveis
equivalente?	duas provas	todas as provas possíveis
consistente?	todas as provas possíveis	uma prova

Exercícios

A. Mostre que cada uma das seguintes sentenças é um teorema:

1. $O \to O$
2. $N \vee \neg N$
3. $J \leftrightarrow [J \vee (L \wedge \neg L)]$
4. $((A \to B) \to A) \to A$

B. Forneça provas para mostrar cada um dos seguintes argumentos:

1. $C \to (E \wedge G), \neg C \to G \vdash G$
2. $M \wedge (\neg N \to \neg M) \vdash (N \wedge M) \vee \neg M$
3. $(Z \wedge K) \leftrightarrow (Y \wedge M), D \wedge (D \to M) \vdash Y \to Z$
4. $(W \vee X) \vee (Y \vee Z), X \to Y, \neg Z \vdash W \vee Y$

C. Mostre que cada um dos seguintes pares de sentenças é dedutivamente equivalente:

1. $R \leftrightarrow E$, $E \leftrightarrow R$
2. G, $\neg\neg\neg\neg G$
3. $T \to S$, $\neg S \to \neg T$
4. $U \to I$, $\neg(U \wedge \neg I)$
5. $\neg(C \to D), C \wedge \neg D$
6. $\neg G \leftrightarrow H$, $\neg(G \leftrightarrow H)$

D. Se você sabe que $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$, o que você pode dizer sobre $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}) \vdash \mathcal{B}$? E quanto a $(\mathcal{A} \vee \mathcal{C}) \vdash \mathcal{B}$? Explique suas respostas.

E. Neste capítulo, alegamos que é muito difícil mostrar que duas sentenças não são dedutivamente equivalentes, assim como mostrar que uma sentença não é um teorema. Por que afirmamos isso? (*Sugestão*: pense em uma sentença que seria um teorema se e somente se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ fossem dedutivamente equivalentes.)

CAPÍTULO 31

Regras derivadas

Nesta seção, veremos por que introduzimos as regras do nosso sistema de prova em dois lotes separados. Em particular, queremos mostrar que as regras adicionais do capítulo 29 não são estritamente necessárias, mas podem ser derivadas das regras básicas aprestadas no capítulo 27.

31.1 Derivação da Reiteração

Para ilustrar o que significa derivar uma *regra* de outras regras, primeiro considere a reiteração. É uma regra básica do nosso sistema, mas também não é necessária. Suponha que você tenha alguma sentença em alguma linha de sua dedução:

m	$\mathcal{A}$

Agora você deseja repeti-la em alguma linha k. Você poderia simplesmente invocar a regra R. Mas igualmente bem, você pode fazer isso com outras regras básicas do capítulo 27:

m	$\mathcal{A}$	
k	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{A}$	$\wedge$I m, m
$k + 1$	$\mathcal{A}$	$\wedge$E k

Para ser claro: isso não é uma prova, mas um *esquema* de prova. Afinal, foi usada uma variável, '$\mathcal{A}$', em vez de uma sentença da LVF, entretanto o ponto é simples: quaisquer que sejam as sentenças da LVF que atribuímos à '$\mathcal{A}$', e quaisquer que sejam as linhas em que estivéssemos trabalhando, poderíamos produzir uma prova genuína. Assim, você pode pensar nisso como uma receita para produzir provas.

De fato, é uma receita que nos mostra o seguinte: qualquer coisa que possamos provar usando a regra R, podemos provar (com mais uma linha) usando apenas as regras básicas do capítulo 27 sem R. É isso que significa dizer que a regra R pode ser derivada de outras regras básicas: qualquer coisa que possa ser justificada usando R pode ser justificada usando apenas as outras regras básicas.

31.2 Derivação do Silogismo Disjuntivo

Suponha que você esteja em uma prova e tenha algo desta forma:

m	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$
n	$\neg\mathcal{A}$

Agora você deseja, na linha k, provar $\mathcal{B}$. Você pode fazer isso com a regra DS, introduzida no capítulo 29, mas igualmente, você pode fazer isso com as regras *básicas* do capítulo 27:

$$
\begin{array}{l|lll}
m & \mathcal{A} \lor \mathcal{B} & & \\
n & \neg\mathcal{A} & & \\
k & & \mathcal{A} & \\
\cline{3-3}
k+1 & & \bot & \neg\text{E } n,\ k \\
k+2 & & \mathcal{B} & \text{X } k+1 \\
k+3 & & \mathcal{B} & \\
\cline{3-3}
k+4 & & \mathcal{B} & \text{R } k+3 \\
k+5 & \mathcal{B} & & \lor\text{E } m,\ k\text{–}k+2,\ k+3\text{–}k+4
\end{array}
$$

A regra DS, igualmente, pode ser derivada de nossas regras mais básicas. Adicioná-la ao nosso sistema não possibilitou novas provas. Sempre que você usar a regra DS, você pode provar a mesma coisa usando algumas linhas extras aplicando apenas as nossas regras básicas. Assim, DS é uma regra *derivada*.

31.3 Derivação de Modus Tollens

Suponha que você tenha o seguinte em sua prova:

$$
\begin{array}{l|l}
m & \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \\
n & \neg\mathcal{B}
\end{array}
$$

Agora você deseja, na linha k, provar $\neg\mathcal{A}$. Você pode fazer isso com a regra MT, introduzida no capítulo 29. Igualmente aqui, você pode fazer isso com as regras *básicas* do capítulo 27:

m	$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$	
n	$\neg\mathcal{B}$	
k	$\quad \mathcal{A}$	
$k+1$	$\quad \mathcal{B}$	$\to$E m, k
$k+2$	$\quad \bot$	$\neg$E n, $k+1$
$k+3$	$\neg\mathcal{A}$	$\neg$I k–$k+2$

Novamente, a regra MT pode ser derivada das regras *básicas* do capítulo 27.

31.4 Derivação da Eliminação da Dupla Negação

Considere o seguinte esquema de dedução:

m	$\neg\neg\mathcal{A}$	
k	$\quad \neg\mathcal{A}$	
$k+1$	$\quad \bot$	$\neg$E m, k
$k+2$	$\mathcal{A}$	IP k–$k+1$

Aqui também podemos derivar a regra DNE das regras *básicas* do capítulo 27.

31.5 Derivação do terceiro excluído

Suponha que você queira provar algo usando a regra LEM, ou seja, você tem em sua prova

$$
\begin{array}{l|l|l}
m & & \mathcal{A} \\ \cline{3-3}
n & & \mathcal{B} \\
k & & \neg\mathcal{A} \\ \cline{3-3}
l & & \mathcal{B}
\end{array}
$$

Agora você deseja, na linha $l + 1$, provar $\mathcal{B}$. A regra LEM do capítulo 29 permitiria que você fizesse isso. Mas, você pode obter $\mathcal{B}$ usando apenas as regras *básicas* do Capítulo 27.

Uma opção é primeiro provar $\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}$, e depois aplicar a regra $\vee$E, ou seja, provar por casos:

$$
\begin{array}{l|l|ll}
m & & \mathcal{A} & \\ \cline{3-3}
n & & \mathcal{B} & \\
k & & \neg\mathcal{A} & \\ \cline{3-3}
l & & \mathcal{B} & \\
 & \vdots & & \\
i & \mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A} & & \\
i+1 & \mathcal{B} & & \vee\text{E } i,\ m\text{–}n,\ k\text{–}l
\end{array}
$$

(Na Seção 28.6 fizemos uma prova de $\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}$ usando apenas nossas regras básicas.)

Aqui está outra maneira que é um pouco mais complicada do que as anteriores. O que você precisa fazer é incorporar suas duas subprovas dentro de outra subprova. A suposição da subprova será $\neg\mathcal{B}$, e a última linha $\perp$. Assim, para obter a subprova completa você precisa concluir $\mathcal{B}$ usando IP. Dentro da prova, você precisa trabalhar um pouco mais para obter $\perp$:

m	$\quad \mid \neg\mathcal{B}$	
$m+1$	$\quad \mid \quad \mid \mathcal{A}$	
	$\quad \mid \quad \mid \vdots$	
n	$\quad \mid \quad \mid \mathcal{B}$	
$n+1$	$\quad \mid \quad \mid \bot$	$\neg$E m, n
$n+2$	$\quad \mid \quad \mid \neg\mathcal{A}$	
	$\quad \mid \quad \mid \vdots$	
l	$\quad \mid \quad \mid \mathcal{B}$	
$l+1$	$\quad \mid \quad \mid \bot$	$\neg$E m, l
$l+2$	$\quad \mid \neg\mathcal{A}$	$\neg$I $(m+1)$–$(n+1)$
$l+3$	$\quad \mid \neg\neg\mathcal{A}$	$\neg$I $(n+2)$–$(l+1)$
$l+4$	$\quad \mid \bot$	$\neg$E $l+3$, $l+2$
$l+5$	$\mathcal{B}$	IP m–$(l+4)$

Observe que, como adicionamos uma suposição na parte superior e conclusões adicionais dentro das subprovas, os números das linhas mudam. Você pode ter que aceitar isso por enquanto até entender o que está acontecendo.

31.6 Derivação das regras de De Morgan

Aqui está uma demonstração de como poderíamos derivar a primeira regra de De Morgan:

m	$\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$	
k	$\mathcal{A}$	
$k+1$	$\mathcal{B}$	
$k+2$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\wedge$I k, $k+1$
$k+3$	$\bot$	$\neg$E m, $k+2$
$k+4$	$\neg\mathcal{B}$	$\neg$I $k+1$–$k+3$
$k+5$	$\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}$	$\vee$I $k+4$
$k+6$	$\neg\mathcal{A}$	
$k+7$	$\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}$	$\vee$I $k+6$
$k+8$	$\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}$	LEM k–$k+5$, $k+6$–$k+7$

E agora, veremos como poderíamos derivar a segunda regra de De Morgan:

m	$\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}$	
k	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	
$k+1$	$\mathcal{A}$	$\wedge$E k
$k+2$	$\mathcal{B}$	$\wedge$E k
$k+3$	$\neg\mathcal{A}$	
$k+4$	$\bot$	$\neg$E $k+3$, $k+1$
$k+5$	$\neg\mathcal{B}$	
$k+6$	$\bot$	$\neg$E $k+5$, $k+2$
$k+7$	$\bot$	$\vee$E m, $k+3$–$k+4$, $k+5$–$k+6$
$k+8$	$\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$	$\neg$I k–$k+7$

Demonstrações semelhantes podem ser apresentadas, explicando como poderíamos derivar a terceira e a quarta regra de De Morgan. Estas são deixadas como exercícios.

Exercícios

A. Forneça esquemas de prova que justifiquem a adição da terceira e quarta regras de De Morgan como regras derivadas.

B. As provas que você ofereceu em resposta aos exercícios dos capítulos 29 e 30 usavam regras derivadas. Substitua o uso de regras derivadas, nessas provas, por apenas regras básicas. Você encontrará algumas 'repetições' nas provas resultantes; nesses casos, apresentar uma prova simplificada usando apenas regras básicas. (Isso lhe dará uma idéia, do poder das regras derivadas e de como todas as regras interagem.)

C. Dê uma prova para $\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}$. Em seguida, faça uma prova que *use apenas as regras básicas.*

D. Mostre que se você tivesse LEM como regra básica, poderia justificar IP como regra derivada. Ou seja, suponha que você tenha a prova:

$$\begin{array}{l|l|l}
m & & \underline{\neg\mathcal{A}} \\
 & & \ldots \\
n & & \bot
\end{array}$$

Como você pode usar isto para provar $\mathcal{A}$ sem usar IP, mas usando LEM, bem como todas as outras regras básicas?

E. Dê uma prova da primeira regra de De Morgan, mas usando apenas as regras básicas, em particular, *sem* usar o LEM. (Obviamente, você pode combinar a prova usando LEM com a prova *do* LEM. Tente encontrar uma prova diretamente.)

CAPÍTULO 32

Correção e completude

No capítulo 30, vimos que poderíamos usar derivações para testar os mesmos conceitos testados antes com tabelas de verdade. Poderíamos, além de usar derivações para provar que um argumento é válido, também poderíamos usá-las para testar se uma sentença é uma tautologia ou se um par de sentenças é equivalente. Também começamos a usar o roleta única da mesma maneira que usamos a roleta dupla. Se pudéssemos provar que $\mathcal{A}$ era uma tautologia com uma tabela de verdade, escreveríamos $\vDash \mathcal{A}$, e se pudéssemos prová-la usando uma derivação, escreveríamos $\vdash \mathcal{A}$.

Você pode ter se perguntado naquele momento se os dois tipos de roletas sempre funcionavam da mesma maneira. Se você pode mostrar que $\mathcal{A}$ é uma tautologia usando tabelas de verdade, também pode sempre mostrar que é um teorema usando uma derivação? O inverso é verdadeiro? Essas coisas também são verdadeiras para argumentos válidos e pares de sentenças equivalentes? Como se vê, a resposta para todas essas perguntas e muitas outras como essas é sim. Podemos mostrar isso definindo todos esses conceitos separadamente e depois provar que eles são equivalentes. Isto é, imaginamos que realmente temos duas noções de validade, validade$_{\vDash}$ e validade$_{\vdash}$ e, em seguida, mostramos que os dois conceitos sempre funcionam da mesma maneira.

Para começar, precisamos definir todos os nossos conceitos lógicos separadamente para tabelas de verdade e para derivações. Muito deste trabalho já foi feito. Manuseamos com todas as definições de tabela de verdade no capítulo 12. Também já fornecemos definições sintáticas para tautologias (teoremas) e pares de sentenças logicamente equivalentes. As outras definições seguem naturalmente. Para a maioria das propriedades lógicas, podemos testá-las usando derivações, e aquelas que não podemos testar diretamente podem ser definidas em termos dos conceitos que podemos definir.

Por exemplo, definimos um teorema como uma sentença que pode ser derivada sem quaisquer premissas (p. 333). Como a negação de uma contradição é uma tautologia, podemos definir uma CONTRADIÇÃO SINTÁTICA NA LVF como uma sentença cuja negação pode ser derivada sem quaisquer premissas. A definição sintática de uma sentença contingente é um pouco diferente. Não temos nenhum método prático e finito para provar que uma sentença é contingente usando derivações, da mesma maneira que fizemos usando tabelas de verdade. Portanto, precisamos nos contentar em definir "sentença contingente"negativamente. Uma sentença é SINTATICAMENTE CONTINGENTE NA LVF se ela não for um teorema ou uma contradição.

Um conjunto de sentenças é DEDUTIVAMENTE INCONSISTENTE NA LVF se e somente se pode-se derivar uma contradição dele. A consistência, por outro lado, é como contingência na medida em que não temos um método finito prático para testá-la diretamente. Então, novamente, temos que definir um termo negativamente. Um conjunto de sentenças é DEDUTIVAMENTE CONSISTENTE NA LVF se e somente se ele não for dedutivamente inconsistente.

Finalmente, um argumento é DEDUTIVAMENTE VÁLIDO NA LVF se e somente se houver uma derivação de sua conclusão a partir de suas premissas. Todas essas definições são apresentadas na

Tabela 32.1.

Todos os nossos conceitos foram definidos agora semântica e sintaticamente. Como podemos provar que essas definições sempre funcionam da mesma maneira? Uma prova completa aqui vai muito além do escopo deste livro. No entanto, podemos fazer um esboço de como ela seria. Vamos nos concentrar em mostrar que as duas noções de validade são equivalentes. A partir disso, os outros conceitos seguirão rapidamente. A prova vai em duas direções. Primeiro, mostraremos que tudo que é sintaticamente válido também é semanticamente válido. Em outras palavras, tudo o que podemos provar usando derivações também pode ser comprovado usando tabelas de verdade. Simbolicamente, queremos mostrar que válido$_{\vdash}$ implica válido$_{\vDash}$. Depois, mostraremos a outra direção, válido$_{\vDash}$ implica válido$_{\vdash}$

Mostrar que $\vdash$ implica $\vDash$ é o problema da CORREÇÃO. Um sistema de prova é CORRETO se não houver derivações de argumentos que possam ser mostrados inválidos pelas tabelas de verdade.

Demonstrar que o sistema de prova é correto exigiria mostrar que *qualquer* prova possível é a prova de um argumento válido. Não seria suficiente ter sucesso ao tentar provar muitos argumentos válidos e falhar ao tentar provar argumentos inválidos.

A prova que iremos esboçar depende do fato de que inicialmente definimos uma sentença da LVF usando uma definição indutiva (ver p. 63). Também poderíamos ter usado definições indutivas para definir uma prova na LVF e uma tabela de verdade (mas não o fizemos.) Se tivéssemos essas definições, poderíamos usar uma *prova indutiva* para mostrar a correção da LVF. Uma prova indutiva funciona da mesma maneira que uma definição indutiva. Com a definição indutiva, identificamos um grupo de elementos básicos que foram estipulados como exemplos da coisa que estávamos tentando definir. No caso de uma sentença da LVF, a classe base foi o conjunto de letras sentenciais A, B, C, ...

Apenas anunciamos que existiam essas sentenças. O segundo passo de uma definição indutiva é dizer que qualquer coisa cons-

Conceito	Definição (semântica): tabela de verdade	Definição (sintática): teoria da prova
Tautologia	Uma sentença cuja tabela de verdade só tem Vs sob o conectivo principal	Uma sentença que pode ser derivada sem nenhuma premissa
Contradição	Uma sentença cuja tabela de verdade só tem Fs sob o conectivo principal	Uma sentença cuja negação pode ser derivada sem quaisquer premissas
Sentença contingente	Uma sentença cuja tabela de verdade contém Vs e Fs sob o conectivo principal	Uma sentença que não é um teorema nem uma contradição
Sentenças equivalentes	As colunas sob os conectivos principais são idênticas	As sentenças podem ser derivadas uma da outra
Sentenças insatisfatórias / inconsistentes	Sentenças que não possuem uma única linha na tabela de verdade, onde todas são verdadeiras	Sentenças a partir das quais se pode derivar uma contradição
Sentenças satisfatórias / consistentes	Sentenças que tenham pelo menos uma linha na tabela de verdade onde elas todas são verdadeiras	Sentenças a partir das quais não se pode derivar uma contradição.
Argumento válido	Um argumento cuja tabela de verdade não tem nenhuma linha na qual tem Vs sob todos os conectivos principais das premissas e F sob o conectivo principal da conclusão	Um argumento em que se pode derivar a conclusão a partir das premissas

Tabela 32.1: Duas maneiras de definir conceitos lógicos.

truída a partir da sua classe base usando certas regras também conta como um exemplo do que você está definindo. No caso da definição de uma sentença, as regras correspondiam aos cinco conectivos sentenciais (ver p. 63).Uma vez estabelecida uma definição indutiva, você pode usá-la para mostrar que todos os membros da classe que você definiu possuem uma determinada propriedade. Você simplesmente prova que a propriedade é verdadeira para os membros da classe base e depois prova que as regras para estender a classe base não alteram a propriedade. Isto é o que significa dar uma prova indutiva.

Mesmo que não tenhamos uma definição indutiva de prova na LVF, podemos esboçar como seria uma prova indutiva da correção da LVF. Imagine uma classe base de provas de uma linha, uma para cada uma das nossas onze regras de inferência. Os membros dessa classe seriam da forma $\mathcal{A}, \mathcal{B} \vdash \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$; $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \vdash \mathcal{A}$; $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}, \neg\mathcal{A} \vdash \mathcal{B} \ldots$ etc. Como algumas regras têm duas formas diferentes, teríamos que adicionar alguns membros a essa classe base, por exemplo $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \vdash \mathcal{B}$. Observe que essas são todas declarações na metalinguagem. A prova que a LVF é correta não faz parte da LVF, porque a LVF não tem o poder de falar sobre si mesma.

Você pode usar as tabelas de verdade para mostrar que cada uma dessas provas de uma linha nesta classe base é válida$_\vDash$. Por exemplo, a prova de $\mathcal{A}, \mathcal{B} \vdash \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ corresponde a uma tabela de verdade que mostra, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \vDash \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$. Isso estabelece a primeira parte de nossa prova indutiva.

O próximo passo é mostrar que a adição de linhas em qualquer prova nunca transformará uma prova válida$_\vDash$ em uma inválida$_\vDash$. Precisaríamos fazer isso para cada uma das nossas onze regras básicas de inferência. Assim, por exemplo, para $\wedge$I precisamos mostrar que, para qualquer prova $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \vdash \mathcal{B}$ adicionando uma linha onde usamos a regra $\wedge$I para inferir $\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}$, onde $\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}$ pode ser legitimamente derivada de $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n, \mathcal{B}$, não transformaria uma prova válida em uma prova inválida. Mas atenção, se podemos derivar legitimamente $\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}$ dessas premissas, então $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ já estavam disponíveis na prova.

Elas já estavam entre $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n, \mathcal{B}$, ou foram legitimamente derivadas delas. Assim sendo, qualquer linha da tabela de verdade na qual as premissas são verdadeiras deve ser uma linha da tabela de verdade na qual $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são verdadeiras. De acordo com a tabela de verdade característica de $\wedge$, isso significa que $\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}$ também é verdadeira nessa linha. Portanto, $\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}$ segue validamente a partir das premissas. Isso significa que o uso da regra $\wedge$E rule para estender uma prova válida produz outra prova válida.

Para mostrar que o sistema de prova é coreto, precisaríamos mostrar isso para as outras regras de inferência. Como as regras derivadas são consequências das regras básicas, seria suficiente fornecer argumentos semelhantes para as 11 outras regras básicas. Este exercício tedioso está além do escopo deste livro.

Assim, mostramos que $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$ implica $\mathcal{A} \vDash \mathcal{B}$. A outra direção seria pensar que *todo* argumento que pode ser mostrado válido usando tabelas de verdade também pode ser mostrado usando uma derivação.

Esse é o problema da completude. Um sistema de prova tem a propriedade da COMPLETUDE se e somente se houver uma derivação de todo argumento semanticamente válido. Provar que um sistema é completo é geralmente mais difícil do que provar que é correto. Provar que um sistema é correto significa mostrar que todas as regras do seu sistema de prova funcionam da maneira como deveriam. Mostrar que um sistema é completo significa mostrar que você incluiu *todas* as regras necessárias e que não deixou nada de fora. Mostrar isso está além do escopo deste livro. O ponto importante é que, felizmente, o sistema de prova da LVF é coreto e completo. Este não é o caso de todos os sistemas de prova ou todas as linguagens formais. Por ser o caso da LVF, podemos optar por fornecer provas ou fornecer tabelas de verdade, o que for mais fácil para a tarefa em questão.

Agora que sabemos que o método da tabela de verdade é intercambiável com o método de derivações, você pode escolher qual método deseja usar para qualquer problema. Os alunos geralmente preferem usar tabelas de verdade, porque elas podem ser produzidas apenas mecanicamente, e isso parece 'mais fácil'. No entanto, já vimos que as tabelas de verdade se tornam impossivelmente grandes com um pouco mais de letras sentenciais. Por outro lado, existem algumas situações em que o uso de provas simplesmente não é possível. Definimos sintaticamente uma sentença contingente como uma sentença que não pode ser provada ser uma tautologia ou uma contradição. Não existe um modo prática de provar esse tipo de declaração negativa. Nunca saberemos se não existe alguma prova de que uma declaração é uma contradição e ainda não a encontramos. Não temos nada a fazer nessa situação, se não recorrer a tabelas de verdade. Da mesma forma, podemos usar derivações para provar que duas sentenças são equivalentes, mas e se quisermos provar que elas *não* são equivalentes? Não temos como provar que nunca encontraremos a prova relevante. Então, temos que voltar às tabelas de verdade de novo.

A tabela 32.2 resume quando é melhor usar provas e quando é melhor usar tabelas de verdade.

Exercícios

A. Em cada um dos casos abaixo, use uma derivação ou uma tabela de verdade para mostrar que:

1. A sentença $A \to [((B \wedge C) \vee D) \to A]$ é um teorema.
2. A sentença $A \to (A \to B)$ não é um teorema.
3. A sentença $A \to \neg A$ não é uma contradição.
4. A sentença $A \leftrightarrow \neg A$ é uma contradição.
5. A sentença $\neg(W \to (J \vee J))$ é contingente.
6. A sentença $\neg(X \vee (Y \vee Z)) \vee (X \vee (Y \vee Z))$ não é contingente
7. A sentença $B \to \neg S$ é equivalente à sentença $\neg\neg B \to \neg S$.

Propriedade lógica	**Para provar que está presente**	**Para provar que está ausente**
Ser um teorema	Derivar a sentença	Encontrar uma linha falsa na tabela de verdade para a sentença
Ser uma contradição	Derivar a negação da sentença	Encontrar uma linha verdadeira na tabela de verdade para a sentença
Contingência	Encontrar uma linha falsa e uma linha verdadeira na tabela de verdade para a sentença	Provar a sentença ou sua negação
Equivalência	Derivar cada sentença da outra	Encontrar uma linha na tabelas de verdade para a sentença onde elas tenham valores diferentes
Consistência	Encontrar uma linha na tabela de verdade para a sentença em que todas elas são verdadeiras	Derivar uma contradição das sentenças
Validade	Derivar a conclusão a partir das premissas	Encontrar uma linha na tabela de verdade onde as premissas são todas verdadeiras e a conclusão é falsa.

Tabela 32.2: Quando fornecer uma tabela de verdade e quando fornecer uma prova.

8. A sentença $\neg(X \vee O)$ não é equivalente à sentença $X \wedge O$.
9. As sentenças $\neg(A \vee B)$, C, $C \rightarrow A$ são conjuntamente inconsistentes
10. As sentenças $\neg(A \vee B)$, $\neg B$, $B \rightarrow A$ são conjuntamente consistentes.
11. O argumento $\neg(A \vee (B \vee C)) \therefore \neg C$ é válido.
12. O argumento $\neg(A \wedge (B \vee C)) \therefore \neg C$ é inválido

B. Em cada um dos casos abaixo, use uma derivação ou uma tabela de verdade para mostrar que:

1. A sentença $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ é um teorema
2. A sentença$\neg(((N \leftrightarrow Q) \vee Q) \vee N)$ não é um teorema.
3. A sentença $Z \vee (\neg Z \leftrightarrow Z)$ é contingente.
4. A sentença $(L \leftrightarrow ((N \rightarrow N) \rightarrow L)) \vee H$ não é contingente.
5. A sentença $(A \leftrightarrow A) \wedge (B \wedge \neg B)$ é uma contradição.
6. A sentença$(B \leftrightarrow (C \vee B))$ não é uma contradição.
7. A sentença$((\neg X \leftrightarrow X) \vee X)$ é equivalente à sentença X.
8. A sentença $F \wedge (K \wedge R)$ não é equivalente à sentença. $(F \leftrightarrow (K \leftrightarrow R))$.
9. As sentenças $\neg(W \rightarrow W)$, $(W \leftrightarrow W) \wedge W$, $E \vee (W \rightarrow \neg(E \wedge W))$ são conjuntamente inconsistentes.
10. As sentenças $\neg R \vee C$, $(C \wedge R) \rightarrow \neg R$, $(\neg(R \vee R) \rightarrow R)$ são conjuntamente consistentes.
11. O argumento $\neg\neg(C \leftrightarrow \neg C), ((G \vee C) \vee G) \therefore ((G \rightarrow C) \wedge G)$ é válido.
12. O argumento $\neg\neg L, (C \rightarrow \neg L) \rightarrow C) \therefore \neg C$ é inválido

PARTE VII

Dedução natural para a LPO

CAPÍTULO 33

Regras básicas da LPO

A linguagem da LPO faz uso de todos os conectivos da LVF e no âmbito da teoria da prova não seria diferente. No sistema de provas da LPO usaremos todas as regras básicas e derivadas da LVF, assim como o símbolo '$\vdash$' e todas as noções de teoria da prova introduzidas na Parte VI. Entretanto, precisaremos de algumas novas regras básicas para governar os quantificadores e o símbolo de identidade.

33.1 Eliminação universal

A partir da afirmação de que tudo é F, você pode deduzir que qualquer coisa particular é F. O que você nomear tem a propriedade F. Vejamos um exemplo:

$$\begin{array}{r|ll} 1 & \forall x\, R(x,x,d) & \\ \hline 2 & R(a,a,d) & \forall\text{E } 1 \end{array}$$

Obtivemos a linha 2 abandonando o quantificador universal e substituindo cada instância de 'x' por 'a'. Igualmente, o seguinte deveria ser permitido:

1	$\forall x\, R(x, x, d)$	
2	$R(d, d, d)$	$\forall$E 1

Neste caso, obtivemos a linha 2 também abandonando o quantificador universal, mas substituindo todas as instâncias de 'x' por 'd'. Poderíamos ter feito o mesmo com qualquer outro nome que quiséssemos.

Aqui está uma ilustração da regra eliminação universal ($\forall$E):

m	$\forall \S\, \mathcal{A}(\ldots \S \ldots \S \ldots)$	
	$\mathcal{A}(\ldots \rfloor \ldots \rfloor \ldots)$	$\forall$E m

Essa notação foi introduzida no capítulo 22. O importante é que você pode obter qualquer *instância de substituição* de uma fórmula quantificada universalmente: substitua todas as instâncias da variável quantificada por qualquer nome que desejar.

Devemos enfatizar que (como em todas as regras de eliminação), você só pode aplicar a regra $\forall$E quando o quantificador universal for o operador lógico principal. Portanto, o seguinte é *proibido*:

1	$\forall x\, B(x) \to B(k)$	
2	$B(b) \to B(k)$	tentativa imprópria de invocar $\forall$E 1

Isso é ilegítimo, pois '$\forall x$' não é o operador lógico principal da linha 1. (Se você precisar relembrar por que esse tipo de inferência é imprópria, releia o capítulo 16.)

33.2 Introdução existencial

A partir da afirmação de que algo em particular é F, você pode deduzir que algo é F. Então, devemos permitir:

$$
\begin{array}{r|ll}
1 & R(a, a, d) & \\
\hline
2 & \exists x\, R(a, a, x) & \exists\text{I } 1
\end{array}
$$

Substituímos o nome 'd' pela variável 'x', e quantificamos existencialmente. Da mesma forma, poderíamos ter feito:

$$
\begin{array}{r|ll}
1 & R(a, a, d) & \\
\hline
2 & \exists x\, R(x, x, d) & \exists\text{I } 1
\end{array}
$$

Aqui, substituímos as duas instâncias do nome 'a' por uma variável e depois generalizamos existencialmente. Mas não precisamos substituir *todas* as instâncias de um nome por uma variável. Vejamos outro exemplo: se Narciso ama ele própio, então há alguém que ama Narciso. Assim, temos:

$$
\begin{array}{r|ll}
1 & S(a, a) & \\
\hline
2 & \exists x\, S(x, a) & \exists\text{I } 1
\end{array}
$$

Nese caso, substituímos *uma* instância do nome 'a' por uma variável e fizemos uma generalizção existencial. Essas observações motivam nossa regra de introdução existencial, embora precisaremos introduzir ainda uma nova notação para melhor explicá-la.

Escrevemos '$\mathcal{A}(\ldots \rfloor \ldots \rfloor \ldots)$' para enfatizar que uma sentença $\mathcal{A}$ contém o nome $\rfloor$, e escreveremos '$\mathcal{A}(\ldots \S \ldots \rfloor \ldots)$' para indicar qualquer fórmula obtida substituindo algumas ou todas as instâncias do nome $\rfloor$ pela variável $\S$. Assim, nossa regra de introdução existencial é:

$$
\begin{array}{r|ll}
m & \mathcal{A}(\ldots \rfloor \ldots \rfloor \ldots) & \\
 & \exists \S\, \mathcal{A}(\ldots \S \ldots \rfloor \ldots) & \exists\text{I } m
\end{array}
$$

$\S$ não deve ocorrer em $\mathcal{A}(\ldots \rfloor \ldots \rfloor \ldots)$

A restrição é incluída para garantir que qualquer aplicação da regra produza uma sentença da LPO. Assim, é permitido o seguinte:

1	$R(a, a, d)$	
2	$\exists x\, R(x, a, d)$	$\exists$I 1
3	$\exists y \exists x\, R(x, y, d)$	$\exists$I 2

Mas o seguinte não é permito:

1	$R(a, a, d)$	
2	$\exists x\, R(x, a, d)$	$\exists$I 1
3	$\exists x\, \exists x\, R(x, x, d)$	tentativa imprópria de invocar $\exists$I 2

uma vez que a expressão da linha 3 não é uma sentença da LPO, pois temos aqui um choque de variáveis.

33.3 Domínios vazios

A prova a seguir combina nossas duas novas regras para quantificadores:

1	$\forall x\, F(x)$	
2	$F(a)$	$\forall$E 1
3	$\exists x\, F(x)$	$\exists$I 2

Isso seria uma prova ruim? Se existe alguma coisa afinal de contas, certamente podemos inferir que algo é F, pelo fato de que tudo é F. Porém, e se *nada* existir? Então, com certeza, é vacuamente verdade que tudo é F. No entanto, não se segue que algo seja F, pois não há nada para *ser* F. Portanto, se afirmarmos que, apenas por uma questão de lógica '$\exists x\, F(x)$' segue de '$\forall x\, F(x)$', então estaríamos reivindicando que, por uma questão de *lógica* *apenas*, há algo em vez de nada. Isso pode nos parecer um pouco estranho.

Na verdade, já estamos comprometidos com essa estranheza. No capítulo 15, estipulamos que os domínios na LPO devem ter pelo menos um membro. Definimos a validade (da LPO) como uma sentença verdadeira em toda interpretação. Como '$\exists x\, x = x$' será verdadeiro em toda interpretação, isso *também* está sob a condição, por questão de lógica, que exista algo em vez de nada.

Está longe de ficar claro que a lógica deveria nos dizer que deve haver algo em vez de nada. Entretanto, veremos que pagamos um preço muito alto se recusarmos essa condição. Para esclarecer melhor um pouco isso, analisemos as três seguinte asserções:

- $\forall x\, F(x) \vdash F(a)$: aplicação da regra $\forall$E.
- $F(a) \vdash \exists x\, F(x)$: aplicação da regra $\exists$I.
- A capacidade de copiar-e-colar provas juntas: pois, o raciocínio funciona colocando muitos pequenos passos juntos em grandes cadeias.

Se aceitamos esses três fatos, devemos aceitar também $\forall x Fx \vdash \exists x\, F(x)$. Assim, o sistema de provas nos diz que há algo em vez de nada. E se recusarmos isso, teremos que renunciar a uma dessas três asserções.

Antes de começarmos a pensar sobre o que renunciar, podemos perguntar *o quanto* isso seria uma trapaça. É verdade que pode dificultar o debate teológico sobre o porquê de haver algo em vez de nada. Mas fora isso, nos daremos bem. Assim, talvez devêssemos considerar nosso sistema de provas (e LPO, de maneira mais geral) como tendo um alcance muito limitado. Se quisermos permitir a possibilidade de domínios vazios, i.e., do *nada*, teremos que encontrar um sistema de provas mais complexo. Mas enquanto nos contentarmos em ignorar essa possibilidade, nosso sistema de provas estará perfeitamente em ordem. (Assim como a estipulação de que todo domínio deve conter pelo menos um objeto.)

33.4 Introdução universal

Suponha que você tenha demonstrado que cada coisa em particular é F (e que não há outras coisas a considerar). Assim, seria permitido afirmar que tudo é F. Isso motivaria a seguinte regra de prova. Se você estabeleceu toda e qualquer instância de substituição de '$\forall x\, F(x)$', então você pode inferir '$\forall x\, F(x)$'.

Infelizmente, essa regra não estaria totalmente apta para ser usada. Para estabelecer cada uma das instâncias de substituição, seria necessário provar '$F(a)$', '$F(b)$', ..., '$F(j_2)$', ..., '$F(r_{79002})$', ..., e assim por diante. De fato, como existem muitos nomes na LPO, esse processo nunca chegaria ao fim. Portanto, nunca poderíamos aplicar essa regra. Precisamos ser um pouco mais espertos ao apresentar nossa regra para introduzir a quantificação universal.

Uma solução será inspirada por:

$$\forall x\, F(x) \therefore \forall y\, F(y)$$

Este argumento deve *obviamente* ser válido. Afinal, a variação alfabética deve ser uma questão de gosto e não de consequência lógica. Mas como nosso sistema de prova pode refletir isso? Suponha que comecemos uma prova assim:

1	$\forall x\, F(x)$	
2	$F(a)$	$\forall$E 1

Nós provamos '$F(a)$'. E, é claro, nada nos impede de usar a mesma justificativa para provar '$F(b)$', '$F(c)$', ..., '$F(j_2)$', ..., '$F(r_{79002})$, ..., e assim por diante até ficarmos sem espaço, tempo ou paciência. Mas, refletindo sobre isso, vemos que existe uma maneira de provar $F\rfloor$, para qualquer nome $\rfloor$. E se pudermos fazer isso para *qualquer coisa*, certamente poderemos dizer que 'F' é verdadeiro para *tudo*. Isso, portanto, nos justifica deduzir '$\forall y\, F(y)$' como segue:

1	$\forall x\, F(x)$	
2	$F(a)$	$\forall$E 1
3	$\forall y\, F(y)$	$\forall$I 2

O ponto crucial aqui é que 'a' era apenas um nome *arbitrário*. Não havia nada de especial nisso - poderíamos ter escolhido qualquer outro nome - e ainda assim a prova seria boa. E esse ponto crucial motiva a regra de introdução universal ($\forall$I):

m	$\mathscr{A}(\ldots \rfloor \ldots \rfloor \ldots)$	
	$\forall\S\, \mathscr{A}(\ldots \S \ldots \S \ldots)$	$\forall$I m

$\rfloor$ não deve ocorrer em nenhuma suposição não descartada
$\S$ não deve ocorrer em $\mathscr{A}(\ldots \rfloor \ldots \rfloor \ldots)$

Um aspecto crucial dessa regra, porém, está ligado à primeira restrição. Essa restrição garante que estamos sempre raciocinando em um nível suficientemente geral. Para ver a restrição em ação, considere este argumento terrível:

> Todo mundo ama José; portanto, todo mundo se ama.

Podemos simbolizar esse padrão de inferência, obviamente inválido, como:

$$\forall x\, A(x, j) \therefore \forall x\, A(x, x)$$

Agora, suponha que tentamos oferecer uma prova para justificar esse argumento.

1	$\forall x\, A(x, j)$	
2	$A(j, j)$	$\forall$E 1
3	$\forall x\, A(x, x)$	tentativa imprópria de invocar $\forall$I 2

Isso não é permitido, porque 'j' já ocorreu em uma suposição não descartada, ou seja, na linha 1. O ponto crucial é que, se fizemos alguma suposição sobre o objeto com o qual estamos trabalhando, não poderíamos aplicar a regra ∀I.

Embora o nome não possa ocorrer em nenhuma suposição não *descartada*, ele pode ocorrer em uma suposição *descartada*. Ou seja, pode ocorrer em uma subprova que já fechamos. Por exemplo:

$$
\begin{array}{r|l l}
1 & \quad \begin{array}{|l} \underline{G(d)} \end{array} & \\
2 & \quad \begin{array}{|l} G(d) \end{array} & \text{R } 1 \\
3 & G(d) \to G(d) & \to\text{I } 1\text{–}2 \\
4 & \forall z(G(z) \to G(z)) & \forall\text{I } 3
\end{array}
$$

Isso nos diz que '$\forall z(G(z) \to G(z))$' é um *teorema*. E de fato é como deveria ser.

Vamos enfatizar um último ponto. De acordo com as convenções da Seção 22.3, o uso de ∀I exige que devemos substituir *todas* as instâncias do nome $\rfloor$ em $\mathcal{A}(\ldots \rfloor \ldots \rfloor \ldots)$ pela variável §. Se substituirmos apenas *alguns* nomes e outros não, acabaríamos "provando"coisas tolas. Por exemplo, considere o argumento:

> Todo mundo é tão velho quanto si mesmo; então todo mundo é tão velho quanto Matusalém

Podemos simbolizar isso da seguinte maneira:

$$\forall x\, O(x, x) \therefore \forall x\, O(x, d)$$

Mas agora suponha que tentamos justificar esse terrível argumento da seguinte forma:

$$
\begin{array}{r|l l}
1 & \underline{\forall x\, O(x, x)} & \\
2 & O(d, d) & \forall\text{E } 1 \\
3 & \forall x\, O(x, d) & \text{tentativa imprópria de invocar } \forall\text{I } 2
\end{array}
$$

Felizmente, nossas regras não nos permitem fazer isso: a tentativa de prova é proibida, pois não foi substituída *todas* as ocorrências de 'd' na linha 2 por um 'x'.

33.5 Eliminação existencial

Suponha que sabemos que *algo* é F. O problema é que simplesmente saber isso não nos diz qual é F. Então pareceria que a partir de '$\exists x\, F(x)$' não podemos concluir imediatamente '$F(a)$', '$F(e_{23})$', ou qualquer outra instância de substituição da sentença. O que podemos fazer?

Suponha que sabemos que algo é F e que tudo que é F também é G. Na língua portuguesa, podemos raciocinar da seguinte maneira:

> Como algo é F, há algo em particular que é um F. Não sabemos nada sobre isso, exceto que tem a propriedade F. Mas, por conveniência, vamos chamá-lo de "Bento". Então: Bento é F. Como tudo o que é F é G, segue-se que Bento é G. Mas como Bentoé G, segue-se que algo é G. Nesse raciocino, nada dependeu de qual objeto era. Neste exemplo, não precisamos saber quem exatamente Bento era. Então, algo é G.

Podemos tentar capturar esse padrão de raciocínio em uma prova da seguinte maneira:

1	$\exists x\, F(x)$	
2	$\forall x(F(x) \to G(x))$	
3	$\quad F(b)$	
4	$\quad F(b) \to G(b)$	$\forall$E 2
5	$\quad G(b)$	$\to$E 4, 3
6	$\quad \exists x\, G(x)$	$\exists$I 5
7	$\exists x\, G(x)$	$\exists$E 1, 3–6

Detalhando isso, começamos escrevendo nossas suposições. Na linha 3, fizemos uma suposição adicional: '$F(b)$'. Essa foi apenas uma instância de substituição de '$\exists x\, F(x)$'. A partir dessa suposição, obtivemos '$\exists x\, G(x)$'. Observe que não fizemos suposições *especiais* sobre o objeto nomeado por 'b'; assumimos *somente* que satisfaz '$F(x)$'. Portanto, nada depende de qual objeto é. E a linha 1 nos disse que *algo* satisfaz '$F(x)$', então nosso padrão de raciocínio foi perfeitamente geral. Pudemos descartar a suposição específica '$F(b)$', e simplesmente inferir '$\exists x\, G(x)$' por conta própria.

Levando em consideração tudo isso, obtemos a regra de eliminação existencial ($\exists$E):

$$
\begin{array}{r|l l}
m & \exists\S\, \mathcal{A}(\ldots\S\ldots\S\ldots) & \\
i & \quad \begin{array}{|l} \mathcal{A}(\ldots\rfloor\ldots\rfloor\ldots) \\ \hline \end{array} & \\
j & \quad \begin{array}{|l} \mathcal{B} \end{array} & \\
 & \mathcal{B} & \exists\text{E } m, i\text{–}j
\end{array}
$$

$\rfloor$ não deve ocorrer em nenhuma suposição não descartada antes da linha i
$\rfloor$ não deve ocorrer em $\exists\S\, \mathcal{A}(\ldots\S\ldots\S\ldots)$
$\rfloor$ não deve ocorrer em $\mathcal{B}$

Como na regra de introdução universal, essas restrições são extremamente importantes. Para entender por que, considere o seguinte argumento terrível:

> Daniel é professor. Alguém não é professor. Então, Daniel é professor e não professor.

Podemos simbolizar esse padrão de inferência, obviamente inválido, da seguinte maneira:

$$L(d), \exists x\, \neg L(x) \therefore L(d) \wedge \neg L(d)$$

Agora, suponha que tentamos oferecer uma prova para justificar esse argumento:

$$
\begin{array}{r|l l}
1 & L(d) & \\
2 & \exists x\, \neg L(x) & \\
\hline
3 & \quad \begin{array}{|l} \neg L(d) \\ \hline \end{array} & \\
4 & \quad \begin{array}{|l} L(d) \wedge \neg L(d) \end{array} & \wedge\text{I } 1, 3 \\
5 & L(d) \wedge \neg L(d) & \text{tentativa imprópria} \\
 & & \text{de invocar } \exists\text{E } 2, 3\text{–}4
\end{array}
$$

A última linha da prova não é permitida. O nome que usamos em nossa instância de substituição para '$\exists x\, \neg L(x)$' na linha 3, ou seja, 'd', ocorre na linha 4. Vamos modificar um pouco:

1	$L(d)$	
2	$\exists x\, \neg L(x)$	
3	$\quad \neg L(d)$	
4	$\quad L(d) \wedge \neg L(d)$	$\wedge$I 1, 3
5	$\quad \exists x(L(x) \wedge \neg L(x))$	$\exists$I 4
6	$\exists x(L(x) \wedge \neg L(x))$	tentativa imprópria de invocar $\exists$E 2, 3–5

A inferência da última linha da prova ainda não é permitida. O nome que usamos em nossa instância de substituição para '$\exists x\, \neg L(x)$', nomeadamente 'd', ocorre em uma suposição não descartada, ou seja, na linha 1.

A moral da história é essa. *Se você deseja extrair informações de um quantificador existencial, escolha um novo nome para sua instância de substituição.* Dessa forma, você pode garantir que todas as restrições da regra $\exists$E sejam atendidas.

Exercícios

A. Explique por que essas duas 'provas' estão *incorretas.* Além disso, forneça interpretações que invalidariam o argumento falacioso dessa 'provas':

1	$\forall x\, R(x, x)$	
2	$R(a, a)$	$\forall$E 1
3	$\forall y\, R(a, y)$	$\forall$I 2
4	$\forall x\, \forall y\, R(x, y)$	$\forall$I 3

1	$\forall x\, \exists y\, R(x, y)$	
2	$\exists y\, R(a, y)$	$\forall$E 1
3	$\quad R(a, a)$	
4	$\quad \exists x\, R(x, x)$	$\exists$I 3
5	$\exists x\, R(x, x)$	$\exists$E 2, 3–4

B. Nas três provas a seguir estão faltando as citações (regra e números de linha). Adicione-as, para transformá-las em provas fidedignas.

1.

1	$\forall x \exists y(R(x, y) \lor R(y, x))$
2	$\forall x\, \neg R(m, x)$
3	$\exists y(R(m, y) \lor R(y, m))$
4	$\quad R(m, a) \lor R(a, m)$
5	$\quad \neg R(m, a)$
6	$\quad R(a, m)$
7	$\quad \exists x\, R(x, m)$
8	$\exists x\, R(x, m)$

2.

$$
\begin{array}{r|l}
1 & \forall x(\exists y\, L(x, y) \to \forall z\, L(z, x)) \\
2 & \underline{L(a, b)} \\
3 & \exists y\, L(a, y) \to \forall z L(z, a) \\
4 & \exists y\, L(a, y) \\
5 & \forall z\, L(z, a) \\
6 & L(c, a) \\
7 & \exists y\, L(c, y) \to \forall z\, L(z, c) \\
8 & \exists y\, L(c, y) \\
9 & \forall z\, L(z, c) \\
10 & L(c, c) \\
11 & \forall x\, L(x, x)
\end{array}
$$

3.

$$
\begin{array}{r|l}
1 & \forall x(J(x) \to K(x)) \\
2 & \exists x\, \forall y\, L(x, y) \\
3 & \underline{\forall x\, J(x)} \\
4 & \quad \vert\; \underline{\forall y\, L(a, y)} \\
5 & \quad \vert\; L(a, a) \\
6 & \quad \vert\; J(a) \\
7 & \quad \vert\; J(a) \to K(a) \\
8 & \quad \vert\; K(a) \\
9 & \quad \vert\; K(a) \wedge L(a, a) \\
10 & \quad \vert\; \exists x(K(x) \wedge L(x, x)) \\
11 & \exists x(K(x) \wedge L(x, x))
\end{array}
$$

C. No problema A do capítulo 16, consideramos quinze figuras silogísticas da Lógica aristotélica. Forneça provas para cada uma dessas formas de argumento. NB: Será *muito* mais fácil se você simbolizar (por exemplo) 'Nenhum F é G' como '$\forall x(F(x) \rightarrow \neg G(x))$'.

D. Aristóteles e seus sucessores identificaram outras formas silogísticas que dependiam da "importação existencial". Simbolize cada uma dessas formas de argumento na LPO e forneça suas respectivas provas.

1. **Barbari**. Algo é H. Todo G é F. Todo H é G. Portanto: Algum H é F.
2. **Celaront**. Algo é H. Nenhum G é F. Todo H é G. Portanto: Algum H não é F
3. **Cesaro**. Algo é H. Nenhum F é G. Todo H é G. Portanto: Algum H não é F.
4. **Camestros**. Algo é H. Todo F é G. No H é G. Portanto: Algum H não é F.
5. **Felapton**. Algo é G. Nenhum G é F. Todo G é H. Portanto: Algum H não é F.
6. **Darapti**. Algo é G. Todo G é F. Todo G é H. Portanto: Algum H é F.
7. **Calemos**. Algo é H. Todo F é G. No G é H. Portanto: Algum H não é F.
8. **Fesapo**. Algo é G. Nenhum F is G. Todo G é H. Portanto: Algum H não é F.
9. **Bamalip**. Algo é F. Todo F é G. Todo G é H. Portanto: Algum H é F.

E. Forneça uma prova para cada uma das nove afirmações seguintes.

1. $\vdash \forall x\, F(x) \rightarrow \forall y(F(y) \land F(y))$
2. $\forall x(A(x) \rightarrow B(x)), \exists x\, A(x) \vdash \exists x\, B(x)$
3. $\forall x(M(x) \leftrightarrow N(x)), M(a) \land \exists x\, R(x, a) \vdash \exists x\, N(x)$
4. $\forall x\, \forall y\, G(x, y) \vdash \exists x\, G(x, x)$
5. $\vdash \forall x\, R(x, x) \rightarrow \exists x\, \exists y\, R(x, y)$

6. $\vdash \forall y\, \exists x(Q(y) \to Q(x))$
7. $N(a) \to \forall x(M(x) \leftrightarrow M(a)), M(a), \neg M(b) \vdash \neg N(a)$
8. $\forall x\, \forall y(G(x, y) \to G(y, x)) \vdash \forall x \forall y(G(x, y) \leftrightarrow G(y, x))$
9. $\forall x(\neg M(x) \lor L(j, x)), \forall x(B(x) \to L(j, x)), \forall x(M(x) \lor B(x)) \vdash \forall x L(j, x)$

F. Escreva uma chave de simbolização para o seguinte argumento, e forneça uma prova para ele:

> Há alguém que gosta de todos que gosta de todos que ela gosta. Portanto, há alguém que gosta dela mesma.

G. Mostre que cada par de sentenças é dedutivamente equivalente.

1. $\forall x(A(x) \to \neg B(x)),\ \neg\exists x(A(x) \land B(x))$
2. $\forall x(\neg A(x) \to B(d)),\ \forall x\, A(x) \lor B(d)$
3. $\exists x\, P(x) \to Q(c),\ \forall x(P(x) \to Q(c))$

H. Para cada um dos seguintes pares de sentenças: Se forem dedutivamente equivalentes, dê provas para mostrar isso. Caso contrário, construa uma interpretação para mostrar que eles não são logicamente equivalentes.

1. $\forall x\, P(x) \to Q(c), \forall x(P(x) \to Q(c))$
2. $\forall x\, \forall y\, \forall z\, B(x, y, z), \forall x\, B(x, x)x$
3. $\forall x\, \forall y\, D(x, y), \forall y\, \forall x\, D(x, y)$
4. $\exists x\, \forall y\, D(x, y), \forall y\, \exists x\, D(x, y)$
5. $\forall x(R(c, a) \leftrightarrow R(x, a)), R(c, a) \leftrightarrow \forall x\, R(x, a)$

I. Para cada um dos seguintes argumentos: Se for válido na LPO, forneça uma prova. Se for inválido, construa uma interpretação para mostrar que é inválido.

1. $\exists y\, \forall x\, R(x, y)\ \therefore\ \forall x\, \exists y\, R(x, y)$
2. $\forall x\, \exists y\, R(x, y)\ \therefore\ \exists y\, \forall x\, R(x, y)$
3. $\exists x(P(x) \land \neg Q(x))\ \therefore\ \forall x(P(x) \to \neg Q(x))$
4. $\forall x(S(x) \to T(a)), S(d)\ \therefore\ T(a)$

5. $\forall x(A(x) \to B(x)), \forall x(B(x) \to C(x)) \therefore \forall x(A(x) \to C(x))$
6. $\exists x(D(x) \lor E(x)), \forall x(D(x) \to F(x)) \therefore \exists x(D(x) \land F(x))$
7. $\forall x \forall y(R(x, y) \lor R(y, x)) \therefore R(j, j)$
8. $\exists x \exists y(R(x, y) \lor R(y, x)) \therefore R(j, j)$
9. $\forall x P(x) \to \forall x Q(x), \exists x \neg P(x) \therefore \exists x \neg Q(x)$
10. $\exists x M(x) \to \exists x N(x), \neg \exists x N(x) \therefore \forall x \neg M(x)$

CAPÍTULO 34

Provas com quantificadores

No capítulo 28 discutimos estratégias para construir provas usando as regras básicas de dedução natural para a LVF. Nesta seção, veremos que essas mesmas estratégias também se aplicam às regras para os quantificadores. Assim, podemos usar a estratégia do fim para o começo, se quisermos provar sentenças quantificadas, $\forall \S\, \mathcal{A}(\S)$ ou $\exists \S\, \mathcal{A}(\S)$, justificando-as respectivamente com as regras de introdução $\forall$I ou $\exists$I. Por outro lado, veremos também que podemos usar a estratégia do começo para o fim a partir de sentenças quantificadas, aplicando as regras de eliminação $\forall$E ou $\exists$E.

Especificamente, suponha que você queira provar $\forall \S\, \mathcal{A}(\S)$. Para fazer isso usando $\forall$I, precisaríamos de uma prova de $\mathcal{A}(\rfloor)$ para algum nome $\rfloor$ que não ocorra em nenhuma suposição não descartada. Assim, trabalhando com a estratégia do fim para o começo, devemos escrever a sentença $\mathcal{A}(\rfloor)$ acima de $\forall \S\, \mathcal{A}(\S)$ e continuar tentando encontrar uma prova para ela, como no esboço de prova seguinte.

	$\vdots$	
n	$\mathcal{A}(\rfloor)$	
$n+1$	$\forall \S\, \mathcal{A}(\S)$	$\forall$I n

Como trabalhamos do fim para o começo, $\mathcal{A}(\rfloor)$ é obtido de $\mathcal{A}(\S)$ substituindo cada ocorrência livre de $\S$ em $\mathcal{A}(\S)$ por $\rfloor$. Para que isso funcione, $\rfloor$ deve satisfazer a condição especial da regra $\forall$I. Podemos garantir isso escolhendo sempre um nome que ainda não ocorreu na prova construída até o momento. (??? Obviamente, isso ocorrerá na prova que acabamos construindo - mas não em uma suposição que não é descartada na linha $n+1$. ?????)

Para trabalhar do fim para o começo a partir de uma sentença $\exists \S\, \mathcal{A}(\S)$, escrevemos similarmente uma sentença acima dela que pode servir como justificativa para uma aplicação da regra $\exists$I, ou seja, uma sentença da forma $\mathcal{A}(\rfloor)$.

	$\vdots$	
n	$\mathcal{A}(\rfloor)$	
$n+1$	$\exists \S\, \mathcal{A}(\S)$	$\exists$I n

Isto é exatamente o que faríamos se estivéssemos trabalhando em uma sentença quantificada universalmente. A diferença é que, enquanto para $\forall$I temos que escolher um nome $\rfloor$ que não ocorreu na prova (até agora), para $\exists$I podemos e, em geral, devemos escolher um nome $\rfloor$ que já ocorre na prova. Assim como no caso da regra $\vee$I, muitas vezes não está claro qual $\rfloor$ funcionará; portanto, para evitar ter que voltar atrás, você só deve usar a estratégia do fim para o começo a partir de sentenças quantificadas existencialmente quando todas as outras estratégias tiverem sido aplicadas.

Por outro lado, usar a estratégia *do começo para o fim* a partir de sentenças existenciais, $\exists \S\, \mathcal{A}(\S())$, geralmente funciona e você não precisa voltar atrás. Pois essa estratégia leva em consideração não apenas $\exists \S\, \mathcal{A}(\S)$ mas também qualquer sentença $\mathcal{B}$ que voçê gostaria de provar. Isto exige que você configure uma subprova acima de $\mathcal{B}$, cuja suposição é uma instância de substituição $\mathcal{A}(\rfloor)$ de $\exists \S\, \mathcal{A}(\S)$ e $\mathcal{B}$ é a última linha dessa subprova. Escolha um nome $\rfloor$ que ainda não ocorra na prova para garantir as restrições da regra $\exists$E.

	$\vdots$	
m	$\exists \S\, \mathcal{A}(\S)$	
	$\vdots$	
n	$\quad \mathcal{A}(\rfloor)$	
	$\quad \vdots$	
k	$\quad \mathcal{B}$	
$k+1$	$\mathcal{B}$	$\exists$E m, n–k

Você continuará com o objetivo de provar $\mathcal{B}$, mas agora dentro de uma subprova em que você tem uma sentença adicional para trabalhar, a saber $\mathcal{A}(\rfloor)$.

Por fim, trabalhar com a estratégia do começo par o fim a partir de $\forall \S\, \mathcal{A}(\S)$ significa que você sempre pode escrever a sentença $\mathcal{A}(\rfloor)$ e justificá-la usando $\forall$E, para qualquer nome $\rfloor$. É claro que somente certos nomes $\rfloor$ ajudarão na sua tarefa de provar seja qual for a sentença desejada. Portanto, assim como antes, você só deveria usar a estratégia de começo para o fim a partir de $\forall \S\, \mathcal{A}(\S)$ somente após todas as outras estratégias terem sido aplicadas.

Vamos considerar como exemplo o argumento $\forall x(A(x) \rightarrow B)$ $\therefore$ $\exists x\, A(x) \rightarrow B$. Para começar a construir uma prova, escrevemos a premissa no topo e a conclusão na parte inferior.

$$
\begin{array}{l|l}
1 & \forall x(A(x) \to B) \\
\hline
 & \vdots \\
n & \exists x\, A(x) \to B
\end{array}
$$

As estratégias usadas para os conectivos da LVF ainda se aplicam, e você deve aplicá-las na mesma ordem: primeiro trabalhe do fim para o começo a partir de condicionais, sentenças negadas, conjunções e agora também a partir de sentenças quantificadas universalmente, depois use a estratégia do começo para o fim a partir de disjunções e agora a partir de sentenças quantificadas existencialmente, e só então tente aplica as regras $\to$E, $\neg$E, $\vee$I, $\forall$E, ou $\exists$I. Podemos ver a seguir que, no nosso exemplo, usamos a estratégia do fim para o começo a partir da conclusão:

$$
\begin{array}{l|l|ll}
1 & \forall x(A(x) \to B) & & \\
\hline
2 & & \exists x\, A(x) & \\
\cline{3-3}
 & & \vdots & \\
n-1 & & B & \\
n & \exists x\, A(x) \to B & & \to\text{I } 2\text{–}(n-1)
\end{array}
$$

Nosso próximo passo será trabalhar do começo para o fim a partir de $\exists x\, A(x)$ na linha 2. Para isso, precisamos escolher um nome que ainda não esteja em nossa prova. Como nenhum nome aparece, podemos escolher qualquer um, digamos d.

$$
\begin{array}{l|l l}
1 & \forall x(A(x) \to B) & \\
\hline
2 & \quad \vert\ \exists x\, A(x) & \\
3 & \quad \vert\ \quad \vert\ A(d) & \\
 & \quad \vert\ \quad \vert\ \vdots & \\
n-2 & \quad \vert\ \quad \vert\ B & \\
n-1 & \quad \vert\ B & \exists\text{E } 2,\ 3\text{–}(n-2) \\
n & \exists x\, A(x) \to B & \to\text{I } 2\text{–}(n-1)
\end{array}
$$

Agora que exaurimos nossas estratégias iniciais, é hora de continuar a partir da premissa $\forall x(A(x) \to B)$. Assim, aplicando a regra $\forall$E podemos justificar qualquer instância de $A(\rfloor) \to B$, independentemente do nome $\rfloor$ que escolhemos. Obviamente, neste caso, é conveniente escolher d, pois isso nos dará $A(d) \to B$. Agora podemos aplicar $\to$E para justificar B, finalizando assim a prova:

$$
\begin{array}{l|l l}
1 & \forall x(A(x) \to B) & \\
\hline
2 & \quad \vert\ \exists x\, A(x) & \\
3 & \quad \vert\ \quad \vert\ A(d) & \\
4 & \quad \vert\ \quad \vert\ A(d) \to B & \forall\text{E } 1 \\
5 & \quad \vert\ \quad \vert\ B & \to\text{E } 4,\ 3 \\
6 & \quad \vert\ B & \exists\text{E } 2,\ 3\text{–}5 \\
7 & \exists x\, A(x) \to B & \to\text{I } 2\text{–}6
\end{array}
$$

Agora vamos construir uma prova do inverso. Começamos da seguinte maneira:

$$\begin{array}{r|ll}
1 & \exists x\, A(x) \to B & \\
\cline{2-2}
 & \vdots & \\
n & \forall x(A(x) \to B) &
\end{array}$$

Observe que a premissa é um condicional, e não uma sentença existencialmente quantificada. Assim, não devemos (ainda) começar a partir dela, mas trabalhar de fim para o começo a partir da conclusão $\forall x(A(x) \to B)$, Isso nos leva a procurar uma prova para $A(d) \to B$:

$$\begin{array}{r|ll}
1 & \exists x\, A(x) \to B & \\
\cline{2-2}
 & \vdots & \\
n-1 & A(d) \to B & \\
n & \forall x(A(x) \to B) & \forall\text{I } n-1
\end{array}$$

O próximo passo é usar outra vez a estratégia do fim para o começo a partir de $A(d) \to B$. Isto significa que devemos configurar uma subprova com $A(d)$ como suposição e B como a última linha:

$$\begin{array}{r|l|ll}
1 & \multicolumn{2}{l}{\exists x\, A(x) \to B} & \\
\cline{2-3}
2 & & A(d) & \\
\cline{3-3}
 & & \vdots & \\
n-2 & & B & \\
n-1 & \multicolumn{2}{l}{A(d) \to B} & \to\text{I } 2\text{–}(n-2) \\
n & \multicolumn{2}{l}{\forall x(A(x) \to B)} & \forall\text{I } n-1
\end{array}$$

Agora podemos continuar a prova a partir da premissa da linha 1. Isso é um condicional e seu consequentemente é a sentença B que estamos tentando justificar na linha $n-2$. Assim, devemos procurar uma prova para o seu antecedente, $\exists x\, A(x)$. Mas como veremos a seguir, isso é obtido facilmente aplicando a regra ∃I. Segue a prova completa:

$$
\begin{array}{r|l|ll}
1 & \exists x\, A(x) \to B & & \\
\hline
2 & \quad \begin{array}{|l} A(d) \\ \hline \end{array} & & \\
3 & \quad \begin{array}{|l} \exists x\, A(x) \end{array} & & \exists\mathrm{I}\ 2 \\
4 & \quad \begin{array}{|l} B \end{array} & & \to\mathrm{E}\ 1, 3 \\
5 & A(d) \to B & & \to\mathrm{I}\ 2\text{–}4 \\
6 & \forall x(A(x) \to B) & & \forall\mathrm{I}\ 5
\end{array}
$$

Exercícios

A. Use as estratégias para encontrar provas para cada um dos argumentos e teoremas seguintes:

1. $A \to \forall x\, B(x)\ .\!\cdot\!.\ \forall x(A \to B(x))$
2. $\exists x(A \to B(x))\ .\!\cdot\!.\ A \to \exists x\, B(x)$
3. $\forall x(A(x) \land B(x)) \leftrightarrow (\forall x\, A(x) \land \forall x\, B(x))$
4. $\exists x(A(x) \lor B(x)) \leftrightarrow (\exists x\, A(x) \lor \exists x\, B(x))$
5. $A \lor \forall x\, B(x))\ .\!\cdot\!.\ \forall x(A \lor B(x))$
6. $\forall x(A(x) \to B)\ .\!\cdot\!.\ \exists x\, A(x) \to B$
7. $\exists x(A(x) \to B)\ .\!\cdot\!.\ \forall x\, A(x) \to B$
8. $\forall x(A(x) \to \exists y\, A(y))$

Use somente as regras básicas da LVF, além das regras básicas dos quantificadores.

B. Use as estratégias para encontrar provas para cada um dos seguintes argumentos e teoremas:

1. $\forall x\, R(x, x)\ .\!\cdot\!.\ \forall x\, \exists y\, R(x, y)$
2. $\forall x\, \forall y\, \forall z[(R(x, y) \land R(y, z)) \to R(x, z)]$
   $.\!\cdot\!.\ \forall x\, \forall y[R(x, y) \to \forall z(R(y, z) \to R(x, z))]$

3. $\forall x\, \forall y\, \forall z[(R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z)]$,
   $\forall x\, \forall y(R(x, y) \rightarrow R(y, x))$
   $\therefore\ \forall x\, \forall y\, \forall z[(R(x, y) \wedge R(x, z)) \rightarrow R(y, z)]$
4. $\forall x\, \forall y(R(x, y) \rightarrow R(y, x))$
   $\therefore\ \forall x\, \forall y\, \forall z[(R(x, y) \wedge R(x, z)) \rightarrow \exists u(R(y, u) \wedge R(z, u))]$
5. $\neg\exists x\, \forall y(A(x, y) \leftrightarrow \neg A(y, y))$

C. Use as estratégias para encontrar provas para cada um dos seguintes argumentos e teoremas

1. $\forall x\, A(x) \rightarrow B\ \therefore\ \exists x(A(x) \rightarrow B)$
2. $A \rightarrow \exists x\, B(x)\ \therefore\ \exists x(A \rightarrow B(x))$
3. $\forall x(A \vee B(x))\ \therefore\ A \vee \forall x\, B(x))$
4. $\exists x(A(x) \rightarrow \forall y\, A(y))$
5. $\exists x(\exists y\, A(y) \rightarrow A(x))$

Isso requer o uso de IP. Use apenas as regras básicas da LVF, além das regras básicas dos quantificadores.

CAPÍTULO 35

Transformação de quantificadores

Nesta seção, introduziremos quatro regras adicionais às regras básicas da seção anterior com o objetivo de governar a interação entre os quantificadores e a negação. Essas regras de transformação de quantificadores serão chamadas regras CQ.

No capítulo 15, notamos que $\forall x \neg \mathcal{A}$ é logicamente equivalente a $\neg \exists x \mathcal{A}$. Assim, adicionaremos as seguintes regras CQ ao nosso sistema de provas que regem isso.

m	$\forall \S\, \neg \mathcal{A}$	
	$\neg \exists \S\, \mathcal{A}$	CQ m

e

$$\begin{array}{r|ll} m & \neg\exists\S\,\mathcal{A} & \\ & \forall\S\,\neg\mathcal{A} & \text{CQ } m \end{array}$$

As duas seguintes regras CQ são adicionadas ao nosso sistema de provas para governar a equivalência lógica entre as sentenças $\exists x\,\neg\mathcal{A}$ e $\neg\forall x\mathcal{A}$, vista também no capítulo 15.

$$\begin{array}{r|ll} m & \exists\S\,\neg\mathcal{A} & \\ & \neg\forall\S\,\mathcal{A} & \text{CQ } m \end{array}$$

e

$$\begin{array}{r|ll} m & \neg\forall\S\,\mathcal{A} & \\ & \exists\S\,\neg\mathcal{A} & \text{CQ } m \end{array}$$

Essas são as quatro regras de transformação de quantificadores, CQ

Exercícios

A. Mostre nos quatro casos seguintes que as sentenças são dedutivamente inconsistentes:

1. $S(a) \to T(m), T(m) \to S(a), T(m) \land \neg S(a)$
2. $\neg\exists x\, R(x, a), \forall x\, \forall y\, R(y, x)$
3. $\neg\exists x\, \exists y\, L(x, y), L(a, a)$
4. $\forall x(P(x) \to Q(x)), \forall z(P(z) \to R(z)), \forall y\, P(y), \neg Q(a) \land \neg R(b)$

B. Mostre que cada par de sentenças é dedutivamente equivalente:

1. $\forall x(A(x) \to \neg B(x)), \neg\exists x(A(x) \land B(x))$

2. $\forall x(\neg A(x) \rightarrow B(d)), \forall x\, A(x) \vee B(d)$

C. No capítulo 16, vimos o que acontece quando movemos quantificadores 'entre' vários operadores lógicos. Mostre que cada um dos seis pares de sentenças é dedutivamente equivalente:

1. $\forall x(F(x) \wedge G(a)), \forall x\, F(x) \wedge G(a)$
2. $\exists x(F(x) \vee G(a)), \exists x\, F(x) \vee G(a)$
3. $\forall x(G(a) \rightarrow F(x)), G(a) \rightarrow \forall x\, F(x)$
4. $\forall x(F(x) \rightarrow G(a)), \exists x\, F(x) \rightarrow G(a)$
5. $\exists x(G(a) \rightarrow F(x)), G(a) \rightarrow \exists x\, F(x)$
6. $\exists x(F(x) \rightarrow G(a)), \forall x\, F(x) \rightarrow G(a)$

NB: a variável 'x' não ocorre em '$G(a)$'. Quando todos os quantificadores ocorrem no início de uma sentença, diz-se que essa sentença está na *forma normal prenex*. Essas equivalências às vezes são chamadas de *regras prenex*, pois fornecem um meio para colocar qualquer sentença na forma normal prenex.

CAPÍTULO 36

As regras para a identidade

No capítulo 21, mencionamos o filosoficamente controverso princípio da *identidade dos indiscerníveis* que afirma que objetos que são indistinguíveis de todas as formas são, de fato, idênticos entre si. Entretanto, dissemos também que esse não é um princípio válido na LPO. Daqui resulta que, não importa o quanto você saiba sobre dois objetos, não podemos provar que eles são idênticos. A menos que, é claro, você saiba que os dois objetos são de fato idênticos, mas a prova dificilmente será muito esclarecedora.

O ponto geral, no entanto, é que *nenhuma sentença* que ainda não contenha o predicado de identidade poderia justificar uma inferência para '$a = b$'. Portanto, nossa regra de introdução de identidade não pode permitir inferir uma reivindicação de identidade que contém dois nomes *diferentes.*

No entanto, todo objeto é idêntico a si mesmo. Não são necessárias premissas para concluir que algo é idêntico a si mesmo. Portanto, esta será a regra de introdução de identidade:

$$\big|\ \rfloor = \rfloor \qquad =\mathrm{I}$$

Observe que esta regra não requer referência a nenhuma linha anterior da prova. Para qualquer nome $\rfloor$, você pode escrever $\rfloor = \rfloor$ em qualquer ponto, justificando apenas com a regra =I .

Nossa regra de eliminação é mais divertida. Se você estabeleceu '$a = b$', qualquer coisa que seja verdadeira para o objeto nomeado por 'a' também deve ser verdadeira para o objeto nomeado por 'b'. Para qualquer sentença com 'a', você pode substituir algumas ou todas as ocorrências de 'a' por 'b' e produzir uma sentença equivalente. Por exemplo, a partir de '$R(a, a)$' e '$a = b$', você pode deduzir '$R(a, b)$', '$R(b, a)$' ou '$R(b, b)$'. De forma geral:

$$
\begin{array}{r|ll}
m & \dashv = \lfloor & \\
n & \mathcal{A}(\ldots \dashv \ldots \dashv \ldots) & \\
 & \mathcal{A}(\ldots \lfloor \ldots \dashv \ldots) & =\mathrm{E}\ m, n
\end{array}
$$

A notação aqui é similar à da regra ∃I. Assim, $\mathcal{A}(\ldots \dashv \ldots \dashv \ldots)$ é uma fórmula que contém o nome $\dashv$, e $\mathcal{A}(\ldots \lfloor \ldots \dashv \ldots)$ é uma fórmula obtida substituindo uma ou mais instâncias do nome $\dashv$ pelo nome $\lfloor$. As linhas m e n podem ocorrer em qualquer ordem e não precisam ser vizinhas, mas sempre citamos a identidade primeiro. Simetricamente, temos:

$$
\begin{array}{r|ll}
m & \dashv = \lfloor & \\
n & \mathcal{A}(\ldots \lfloor \ldots \lfloor \ldots) & \\
 & \mathcal{A}(\ldots \dashv \ldots \lfloor \ldots) & =\mathrm{E}\ m, n
\end{array}
$$

Essa regra às vezes é chamada *Lei de Leibniz*, em homenagem a Gottfried Leibniz.

Para ver as regras em ação, provaremos alguns resultados rápidos. Primeiro, provaremos que a identidade é *simétrica*:

1	$\quad a = b$	
2	$\quad a = a$	=I
3	$\quad b = a$	=E 1, 2
4	$a = b \to b = a$	→I 1–3
5	$\forall y(a = y \to y = a)$	∀I 4
6	$\forall x \forall y(x = y \to y = x)$	∀I 5

Obtemos a linha 3 substituindo uma instância de 'a' na linha 2 por uma instância de 'b', pois tínhamos '$a = b$' na linha 1.

Seguindo, provaremos que a identidade é *transitiva*:

1	$\quad a = b \wedge b = c$	
2	$\quad a = b$	∧E 1
3	$\quad b = c$	∧E 1
4	$\quad a = c$	=E 2, 3
5	$(a = b \wedge b = c) \to a = c$	→I 1–4
6	$\forall z((a = b \wedge b = z) \to a = z)$	∀I 5
7	$\forall y \forall z((a = y \wedge y = z) \to a = z)$	∀I 6
8	$\forall x \forall y \forall z((x = y \wedge y = z) \to x = z)$	∀I 7

Obtemos a linha 4 substituindo 'b' na linha 3 por 'a'; uma vez que já tínhamos '$a = b$' na linha 2

Exercícios

A. Forneça uma prova para cada um das dez seguintes asserções.

1. $P(a) \vee Q(b), Q(b) \to b = c, \neg P(a) \vdash Q(c)$
2. $m = n \vee n = o, A(n) \vdash A(m) \vee A(o)$

3. $\forall x\ x = m, R(m, a) \vdash \exists x\, R(x, x)$
4. $\forall x\, \forall y(R(x, y) \to x = y) \vdash R(a, b) \to R(b, a)$
5. $\neg\exists x \neg x = m \vdash \forall x\, \forall y(P(x) \to P(y))$
6. $\exists x\, J(x), \exists x\, \neg J(x) \vdash \exists x\, \exists y\, \neg x = y$
7. $\forall x(x = n \leftrightarrow M(x)), \forall x(O(x) \lor \neg M(x)) \vdash O(n)$
8. $\exists x\, D(x), \forall x(x = p \leftrightarrow D(x)) \vdash D(p)$
9. $\exists x\big[(K(x) \land \forall y(K(y) \to x = y)) \land B(x)\big], Kd \vdash B(d)$
10. $\vdash P(a) \to \forall x(P(x) \lor \neg x = a)$

B. Mostre que as seguintes sentenças são dedutivamente equivalentes:

- $\exists x\big([F(x) \land \forall y(F(y) \to x = y)] \land x = n\big)$
- $F(n) \land \forall y(F(y) \to n = y)$

E, portanto, ambas podem igualmente simbolizar a sentença em português 'Nonato é o F'.

C. No capítulo 18, dissemos que as três seguintes sentenças logicamente equivalentes são simbolizações da sentença em português 'existe exatamente um F':

- $\exists x\, F(x) \land \forall x\, \forall y\big[(F(x) \land F(y)) \to x = y\big]$
- $\exists x\big[F(x) \land \forall y(F(y) \to x = y)\big]$
- $\exists x\, \forall y(F(y) \leftrightarrow x = y)$

Mostre que todas são dedutivamente equivalentes. (*Dica*: para mostrar que três sentenças são dedutivamente equivalentes, basta mostrar que a primeiro prova a segunda, a segunda prova a terceira e a terceira prova a primeira; pense no porquê.)

D. Simbolize e prove seguinte argumento:

> Existe exatamente um F. Existe exatamente um G. Nada é ambos F e G. Portanto, existem exatamente duas coisas que são ou F ou G.

CAPÍTULO 37

Regras derivadas

Lembramos que na LVF primeiro introduzimos às regras básicas do sistema de provas e depois adicionamos outras regras. Posteriormente mostramos que essas regras adicionais eram todas regras derivadas das regras básica da LVF. Faremos o mesmo no caso caso da LPO. No no capítulo 33 introduzimos algumas regras básicas para a LPO e no capitulo 35 adicionamos as regras de transformação de quantificadores, CQ. Veremos que todas as quatro regras CQ podem ser *derivadas* das regras *básicas* da LPO.

Justificativa da primeira regra CQ:

1	$\forall x\, \neg A(x)$	
2	$\quad \exists x\, A(x)$	
3	$\quad\quad A(c)$	
4	$\quad\quad \neg A(c)$	$\forall$E 1
5	$\quad\quad \bot$	$\neg$E 4, 3
6	$\quad \bot$	$\exists$E 2, 3–5
7	$\neg\exists x\, A(x)$	$\neg$I 2–6

Justificativa da terceira regra CQ:

1	$\exists x \neg A(x)$	
2	$\quad \forall x\, A(x)$	
3	$\quad\quad \neg A(c)$	
4	$\quad\quad A(c)$	$\forall$E 2
5	$\quad\quad \bot$	$\neg$E 3, 4
6	$\quad \bot$	$\exists$E 1, 3–5
7	$\neg\forall x\, A(x)$	$\neg$I 2–6

Isso explica por que estas duas regras podem ser tratadas como derivadas. Semelhante justificativas podem ser oferecidas para as outras duas regras CQ.

Exercícios

A. Mostre que a segunda e a quarta regra CQ são regras derivadas.

CAPÍTULO 38

Provas e semântica

Apresentamos ao longo deste livro muitas noções as quais foram classificas de formas diferentes: umas como noções da teoria da prova e outras como noções semânticas. Falaremos neste capítulo, mesmo que brevemente, de suas diferenças e conexões. Por exemplo, usamos duas roletas diferentes. Por um lado, a roleta única $\vdash$, para simbolizar a noção de dedutibilidade. Quando afirmamos

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n \vdash \mathcal{C}$$

estamos dizendo que há uma prova que termina com $\mathcal{C}$ e cujas únicas suposições não descartadas estão entre $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$. Esta é uma noção da *teoria da prova*. Por outro lado, a roleta dupla $\vDash$, representa simbolicamente a noção de sustentação. E a afirmação

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n \vDash \mathcal{C}$$

significa que não há nenhuma valoração (ou interpretação) na qual $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ são todas verdadeiras e $\mathcal{C}$ falsa. Isso diz respeito a atribuições de verdade e falsidade às sentenças. Essa é portanto uma *noção semântica*.

Embora nossas noções semântica e de teoria da prova sejam *noções diferentes*, há uma conexão profunda entre elas. Para explicar essa conexão, começaremos considerando a relação entre validade e teorema.

Para mostrar que uma sentença é um teorema, você só precisa produzir uma prova. Pode ser difícil produzir uma prova de vinte linhas, mas não é tão difícil verificar cada linha da prova e confirmar se ela é legítima; e se cada linha da prova individualmente é legítima, então toda a prova é legítima. Mostrar que uma sentença é uma validade, no entanto, requer raciocinar sobre todas as interpretações possíveis. Dada a escolha entre mostrar que uma sentença é um teorema e mostrar que é uma validade, seria mais fácil mostrar que é um teorema.

Por outro lado, mostrar que uma sentença *não* é um teorema é difícil. Precisamos raciocinar sobre todas as provas (possíveis). Isso é muito difícil. No entanto, para mostrar que uma sentença não é uma validade, você precisa encontrar apenas uma interpretação na qual essa sentença seja falsa. É verdade que pode ser difícil apresentar essa tal interpretação; mas depois de fazer isso, é relativamente simples verificar qual o valor de verdade atribuído a uma sentença. Dada a escolha entre mostrar que uma sentença não é um teorema e mostrar que não é uma validade, seria mais fácil mostrar que não é uma validade.

Felizmente, *uma sentença é um teorema se e somente se for uma validade*. Como resultado, se fornecermos uma prova de $\mathcal{A}$ sem suposições e, assim, mostrarmos que $\mathcal{A}$ é um teorema, i.e., $\vdash \mathcal{A}$, podemos legitimamente inferir que $\mathcal{A}$ 'e uma validade, i.e., $\vDash \mathcal{A}$. Da mesma forma, se construirmos um interpretação em que $\mathcal{A}$ seja falsa e, assim, mostrar que ela não é uma validade, i.e., $\nvDash \mathcal{A}$, disto segue que $\mathcal{A}$ não é um teorema, i.e., $\nvdash \mathcal{A}$.

De maneira mais geral, temos o seguinte resultado poderoso:

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n \vdash \mathcal{B} \textbf{ se e somente se } \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n \vDash \mathcal{B}$$

Isso mostra que, embora a dedutibilidade e sustentação sejam noções *diferentes*, elas são extensionalmente equivalentes. Assim sendo:

- Um argumento é *válido* se e somente se *a conclusão puder ser provada a partir das premissas.*
- Duas sentenças são *logicamente equivalentes* se e somente se *elas são dedutivamente equivalentes.*
- Sentenças são *satisfatórias* se e somente se *não são dedutivamente inconsistentes.*

Pelos motivos citados acima, você pode escolher quando pensar em termos de provas e quando pensar em termos de valorações / interpretações, fazendo o que for mais fácil para uma determinada tarefa. A tabela na próxima página resume qual é (geralmente) a mais fácil.

É intuitivo que a dedutibilidade e a sustentação semântica devam concordar. Mas, é bom sempre repetir, não se deixe enganar pela semelhança dos símbolos '$\vDash$' e '$\vdash$'. Esses dois símbolos têm significados muito diferentes. O fato de que a dedutibilidade e a sustentação semântica concordam não é um resultado fácil de mostrar.

De fato, demonstrar que a dedutibilidade e a sustentação semântica concordam é, muito decisivamente, o ponto em que a lógica introdutória se torna lógica intermediária.

	Sim	**Não**
$\mathcal{A}$ é uma **validade**?	dê uma prova para $\vdash \mathcal{A}$	dê uma interpretação na qual $\mathcal{A}$ seja falsa
$\mathcal{A}$ é uma **contradição**?	dê uma prova para $\vdash \neg\mathcal{A}$	dê uma interpretação na qual $\mathcal{A}$ seja verdadeira
$\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são **equivalentes**?	dê duas provas, uma para $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$ e outra para $\mathcal{B} \vdash \mathcal{A}$	dê uma interpretação na qual $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ tenham diferentes valores de verdade
$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ são **conjuntamente satisfatórias**?	dê uma interpretação na qual todas as sentenças $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ sejam verdadeiras	prove uma contradição a partir das suposições $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$
$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n \therefore \mathcal{C}$ é **válido**?	dê uma prova para a sentença $\mathcal{C}$ a partir das suposições $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$	dê uma interpretação na qual cada uma das suposições $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ seja verdadeira e $\mathcal{C}$ falsa

PARTE VIII

Lógica Modal

CAPÍTULO 39

Introduzindo a Lógica Modal

A lógica modal (LM) é a lógica que trata de modalidades, maneiras pelas quais uma afirmação pode ser verdadeira. As duas modalidades mais conhecidas são *Necessidade* e *Possibilidade.* Uma afirmação pode ser verdadeira, mas também pode ser necessariamente verdadeira (verdadeira não importando como o mundo possa ser). Por exemplo, verdades lógicas não são apenas verdadeiras por causa de alguma característica acidental do mundo, mas verdadeiras em qualquer circunstância. Uma dada afirmação pode não ser realmente verdadeira, mas pode ter sido verdadeira. Usamos o operador modal $\Box$ para expressar *necessidade* e $\Diamond$ para expressar *possibilidade.* Assim, você pode ler $\Box\mathscr{A}$ como *é necessariamente o caso que* $\mathscr{A}$, e $\Diamond\mathscr{A}$ como *é possivelmente o caso que* $\mathscr{A}$.

Existem muitos tipos diferentes de necessidade e possibilidade. Por exemplo, é *humanamente impossível* para mim correr a 200 Km/h. Dado o tipo de criaturas que somos, nenhum ser humano pode fazer isso. Mas, ainda assim, não é *fisicamente impossível* para mim correr tão rápido. Ainda não temos a tecnologia para fazer isso, mas certamente é fisicamente possível trocar minhas pernas biológicas por pernas robóticas que possam funcionar a 200 Km/h. Por outro lado, é fisicamente impossível para mim correr mais rápido do que a velocidade da luz, pois isso contrariaria as leis da física. Entretanto, isso não é *logicamente* impossível, pois não é uma contradição imaginar que as leis da física possam ser diferentes e que possam permitir que os objetos se movam mais rápido que a luz.

Com que tipo de modalidade a LM lida? *Todos eles*! A LM é uma ferramenta muito flexível. Começamos com um conjunto básico de regras que regem os operadores modais $\Box$ e $\Diamond$. Em seguida, adicionamos mais regras para adequar qualquer tipo de modalidade que estamos interessados. Na verdade, a LM é tão flexível que nem precisamos pensar sempre $\Box$ e $\Diamond$ como expressando *necessidade* e *possibilidade* respectivamente. Em vez disso, podemos ler $\Box$ como expressando *demonstrabilidade*, de modo que $\Box\mathscr{A}$ significa *é demonstrável que* $\mathscr{A}$, e $\Diamond\mathscr{A}$ significa *não é refutável que* $\mathscr{A}$. Da mesma forma, podemos interpretar $\Box\mathscr{A}$ como significando *S sabe que* $\mathscr{A}$ ou *S acredita que* $\mathscr{A}$. Ou, ainda podemos ler $\Box$ como expressando *obrigação moral*. Neste caso $\Box\mathscr{A}$ significa *é moralmente obrigatório que* $\mathscr{A}$ e $\Diamond\mathscr{A}$ significa *é moralmente permissível que* $\mathscr{A}$. Tudo o que precisaríamos fazer é elaborar as regras corretas para essas diferentes leituras de $\Box$ e $\Diamond$.

Dependendo da interpretação que atribuímos aos operadores $\Box$ e $\Diamond$, certas sentenças modais serão provadas ou válidas. Por exemplo, se $\Box$ é interpretado como necessidade, a sentença $\Box A \rightarrow A$ pode expressar “se A é necessária, é verdadeira”, Sob essa interpretação, $\Box A \rightarrow A$ é válida: todas as afirmações necessárias são verdadeiras aconteça o que acontecer, então são verdadeiras no mundo real. No entanto, quando $\Box$ é interpretado como “acredita-se que” ou “deveria ser o caso”, a sentença $\Box A \rightarrow A$ não é válida: podemos acreditar em proposições falsas. Nem toda proposição que deveria ser verdadeira é de fato verdadeira como por exemplo, "Todo assassino será levado à justiça".

Isso *deve* ser verdadeiro, mas não o é.

Vamos apresentar diferentes tipos de sistemas da LM, a saber, os sistemas K, T, S4 e S5. Eles diferem nas regras de derivação permitidas e na semântica que usaremos para definir nossas noções lógicas. K é o sistema básico, pois tudo o que é válido ou provado em K também pode ser provado nos outros sistemas. Veremos que a sentença $\Box A \rightarrow A$ não é provada em K, mas sim em T. Isto significa que o sistema T é mais apropriado quando se trata de necessidade, porém menos apropriado quando se trata de crença ou obrigação. O sistema S5, por sua vez, além de ser considerado como o sistema que melhor captura os conceitos de possibilidade e necessidade lógica, é do ponto de vista dedutivo o sistema mais forte entre eles.

39.1 A linguagem da LM

A linguagem da LM é uma extensão da LVF. Tem um estoque infinito de *letras sentenciais* (sentenças atômicas); os conectivos lógicos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$; além dos operadores modais $\Box$ e $\Diamond$.

Poderíamos ter começado com a LPO, o que nos teria dado a Lógica Modal Quantificada (LMQ). A LMQ é muito mais poderosa do que a LM, mas também é muito, muito mais complicada. Assim, vamos manter as coisas simples e começar com uma extensão da LVF.

As regras de construção de sentenças da LM são todas da LVF mais duas novas regras para os operadores modais. Assim, temos a seguinte definição formal para uma sentença da LM:

(1) Toda letra sentencial é uma sentença.

(2) Se $\mathscr{A}$ é uma sentença, então $\neg\mathscr{A}$ é uma sentença.

(3) Se $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ são sentenças, então $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$ é uma sentença.

(4) Se $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ são sentenças, então $(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$ é uma sentença.

(5) Se $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ são sentenças, então $(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B})$ é uma sentença.

(6) Se $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ são sentenças, então $(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})$ é uma sentença.

(7) Se $\mathscr{A}$ é uma sentença, então $\Box\mathscr{A}$ é uma sentença.

(8) Se $\mathscr{A}$ é uma sentença, então $\Diamond\mathscr{A}$ é uma sentença.

(9) Nada além do estabelecido por essas cláusulas é uma sentença.

Aqui estão alguns exemplos de sentenças da LM:

A, $P \vee Q$, $\Box A$, $C \vee \Box D$, $\Box\Box(A \rightarrow R)$ e

$\Box\Diamond(S \wedge (Z \leftrightarrow (\Box W \vee \Diamond Q)))$

CAPÍTULO 40

Dedução natural para a LM

Na Parte VI, apresentamos um sistema em dedução natural para a LVF, no qual, explicitamos as regras de inferência que regem os conetivos lógicos da LVF. Agora, sabendo que a linguagem da LM é uma extensão da LVF, que além dos conectivos lógicos tem os operadores modais $\Box$ e $\Diamond$, precisamos especificar as regras de inferência para tais operadores modais. Ora, é exatamente isso o que faremos neste capítulo. Vamos apresentar os sistemas em dedução natural para as lógicas modais K, T, S4 e S5.

Como antes, usaremos $\vdash$ para expressar dedutibilidade. Entretanto, será útil adicionar um subscrito para indicar em qual sistema modal estamos trabalhando. Assim, por exemplo, se quisermos dizer que podemos provar $\mathscr{C}$ a partir de $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n$ ***no sistema*** K, escrevemos: $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{C}$.

40.1 Sistema K

Começamos com um sistema modal particularmente simples, chamado K em homenagem ao filósofo e lógico Saul Kripke. O sistema K tem todas as regras de dedução natural da LVF, incluindo as regras básicas e as derivadas, além de duas novas regras básicas para o operador modal $\Box$ e um tipo especial de subprova.

Esse tipo especial de subprova, que chamamremos de *subprova estrita*, parece uma subprova comum, exceto que tem um $\Box$ em sua linha de suposição em vez de uma fórmula. Ela nos permite provar coisas e raciocinar sobre possibilidades alternativas.

O que podemos provar dentro de uma subprova estrita vale para qualquer possibilidade alternativa, em particular, em possibilidades alternativas onde as suposições em vigor em nossa prova podem não valer. Em uma subprova estrita, todas as suposições são desconsideradas, e não estamos autorizados a apelar para quaisquer linhas fora da subprova estrita (exceto conforme permitido pelas regras modais fornecidas abaixo).

A regra $\Box$I nos permite derivar uma fórmula $\Box\mathscr{A}$ se pudermos derivar $\mathscr{A}$ dentro de uma subprova estrita. Esse é nosso método fundamental para introduzir $\Box$ nas provas. A ideia básica é bastante simples: se $\mathscr{A}$ é um teorema, então $\Box\mathscr{A}$ deve ser um teorema também (Lembre-se de que chamar $\mathscr{A}$ de teorema é dizer que podemos provar $\mathscr{A}$ sem confiar em quaisquer suposições não descartadas).

Suponha que queremos provar $\Box(A \to A)$. A primeira coisa que precisamos fazer é provar que $A \to A$ é um teorema. Isso você já sabe como fazer na LVF, simplesmente apresentando uma prova de $A \to A$ como esta:

1	$\quad\mid A$	
2	$\quad\mid A$	R 1
3	$A \to A$	$\to$I 1–2

Claramente, a prova de $A \to A$ não faz uso de nenhuma suposição não descartada. Assim, para aplicar a regra $\Box$I, precisamos apenas inserir esta prova dentro de uma subprova estrita como segue:

$$
\begin{array}{r|l|l}
1 & \quad \Box & \\
2 & \quad\quad A & \\
3 & \quad\quad A & \text{R } 2 \\
4 & \quad A \to A & \to\text{I } 2\text{–}3 \\
5 & \Box(A \to A) & \Box\text{I } 1\text{–}4
\end{array}
$$

Apresentamos agora a regra $\Box$I, a regra de introdução para o operador modal $\Box$.

$$
\begin{array}{r|l|l}
m & \quad \Box & \\
n & \quad \mathscr{A} & \\
 & \Box\mathscr{A} & \Box\text{I } m\text{–}n
\end{array}
$$

Nenhuma linha acima da linha *m* pode ser citada por qualquer regra dentro da subprova estrita iniciada na linha *m*, a menos que a regra explicitamente o permita.

É essencial enfatizar que na subprova estrita você não pode usar qualquer regra que apele a qualquer coisa que você provou fora da subprova estrita. Veremos que existem exceções como por exemplo a regra $\Box$E. Mas, essas regras determinam explicitamente que podem ser usadas dentro de subprovas estritas e cita linhas fora da subprova estrita. Essa restrição é essencial, caso contrário, obteríamos resultados terríveis. Por exemplo, poderíamos

mos fornecer a seguinte prova para justificar $A \therefore \Box A$:

$$\begin{array}{r|lll}
1 & A & & \\ \hline
2 & \quad | \; \Box & & \\
3 & \quad | \; A & & \text{uso incorreto de R 1} \\
4 & \Box A & & \Box\text{I } 2\text{–}3
\end{array}$$

Esta não é uma prova legítima, porque na linha 3 apelamos para a linha 1, usando a regra de reiteração. Mas a linha 1 vem antes do início da subprova estrita na linha 2, contrariando assim a restrição da regra $\Box$I

Dissemos acima que uma subprova estrita nos permite raciocinar sobre possíveis situações alternativas arbitrárias. O que pode ser provado em uma subprova estrita vale em todas as situações alternativas possíveis e, portanto, é necessário. Essa é a ideia por trás da regra $\Box$I. Por outro lado, se assumimos que algo é necessário, assumimos que isso é verdadeiro em todas as situações alternativas possíveis. Assim, temos a regra $\Box$E:

$$\begin{array}{r|ll}
m & \Box\mathscr{A} & \\
 & \quad | \; \Box & \\
n & \quad | \; \mathscr{A} & \Box\text{E } m
\end{array}$$

$\Box$E só pode ser aplicada se a linha m (contendo $\Box A$) estiver *fora* da subprova estrita na qual a linha n cai, e esta subprova estrita não é ela própria parte de uma subprova estrita que não contém m.

A regra $\Box$E permite que você introduza $\mathscr{A}$ dentro de uma subprova estrita se você tiver $\Box\mathscr{A}$ fora dessa subprova estrita. A restrição impõe que você só pode fazer isso na primeira subprova estrita, não permitindo aplicar a regra $\Box$E dentro de uma subprova estrita aninhada. Vejamos um exemplo de uso incorreto de $\Box$E.

$$
\begin{array}{r|l}
1 & \Box\mathscr{A} \\
2 & \begin{array}{|l} \Box \\ \hline \end{array} \\
3 & \begin{array}{|l} \begin{array}{|l} \Box \\ \hline \end{array} \end{array} \\
4 & \begin{array}{|l} \begin{array}{|l} \mathscr{A} \end{array} \end{array} \qquad \text{uso incorreto de } \Box\text{E } 1
\end{array}
$$

O uso incorreto da regra $\Box$E na linha 4 viola a condição, porque embora a linha 1 esteja fora da subprova estrita que termina na linha 4, a subprova estrita contendo a linha 4 está dentro da subprova estrita começando na linha 2, que não contém a linha 1.

Vejamos agora um exemplo com aplicações corretas das regras $\Box$I e $\Box$E.

$$
\begin{array}{r|l l}
1 & \Box A & \\
2 & \Box B & \\ \hline
3 & \begin{array}{|l} \Box \\ \hline \end{array} & \\
4 & \begin{array}{|l} A \end{array} & \Box\text{E } 1 \\
5 & \begin{array}{|l} B \end{array} & \Box\text{E } 2 \\
6 & \begin{array}{|l} A \wedge B \end{array} & \wedge\text{I } 4, 5 \\
7 & \Box(A \wedge B) & \Box\text{I } 3\text{–}7
\end{array}
$$

Também podemos misturar subprovas regulares e subprovas estritas, como podemos ver na seguinte prova de $\Box(A \rightarrow B) \vdash_{\mathrm{K}} \Box A \rightarrow \Box B$.

$$
\begin{array}{r|lll}
1 & \Box(A \to B) & & \\
\hline
2 & \quad \vert\ \Box A & & \\
3 & \quad \vert\ \quad \vert\ \Box & & \\
4 & \quad \vert\ \quad \vert\ A & & \Box\text{E } m \\
5 & \quad \vert\ \quad \vert\ A \to B & & \Box\text{E } 1 \\
6 & \quad \vert\ \quad \vert\ B & & \to\text{E } 4, 5 \\
7 & \quad \vert\ \Box B & & \\
8 & \Box A \to \Box B & & \to\text{I } 2\text{–}7
\end{array}
$$

Esta é chamada de *regra de distribuição*, porque nos diz que $\Box$ 'distribui' sobre $\to$.

As regras $\Box$I e $\Box$E parecem bastante simples e, de fato, K é um sistema muito simples! Mas K é mais poderoso do que você poderia imaginar. Você também pode provar outras coisas nele.

40.2 Possibilidade

Na seção anterior, vimos todas as regras básicas para K. Mas você deve ter notado que todas essas regras eram sobre necessidade, $\Box$, e nenhuma delas era sobre possibilidade, $\Diamond$. Isso não é um problema uma vez que podemos *definir* possibilidade em termos de necessidade:

$$\Diamond\mathscr{A} =_{df} \neg\Box\neg\mathscr{A}$$

Em outras palavras, dizer que $\mathscr{A}$ é *possivelmente verdadeira*, é dizer que $\mathscr{A}$ *não é necessariamente falsa*. Como resultado, não é realmente essencial adicionar um símbolo novo para possibilidade no sistema K. Ainda assim, o sistema será *muito mais* fácil de usar se o fizermos. Por isso, adicionaremos as seguintes regras de definição:

$$\begin{array}{r|ll} m & \neg\Box\neg\mathscr{A} & \\ & \Diamond\mathscr{A} & \text{Def}\Diamond\ m \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \Diamond\mathscr{A} & \\ & \neg\Box\neg\mathscr{A} & \text{Def}\Diamond\ m \end{array}$$

É importante ressaltar que essas regras registram apenas a maneira como o operador $\Diamond$ é definido em termos de $\Box$ e, do ponto de vista dedutivo, elas não representam nenhuma adição real ao sistema K. Entretanto, além dessas, será útil adicionar outras *regras de conversão modal* que nos fornecem maneiras diferentes de alternar $\Box$ e $\Diamond$:

$$\begin{array}{r|ll} m & \neg\Box\mathscr{A} & \\ & \Diamond\neg\mathscr{A} & \text{MC}\ m \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \Diamond\neg\mathscr{A} & \\ & \neg\Box\mathscr{A} & \text{MC}\ m \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \neg\Diamond\mathscr{A} & \\ & \Box\neg\mathscr{A} & \text{MC}\ m \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \Box\neg\mathscr{A} & \\ & \neg\Diamond\mathscr{A} & \text{MC}\ m \end{array}$$

Todas essas regras de conversão modal podem ser derivadas das regras básicas de K, usando a definição de $\Diamond$.

No sistema K, escolhemos $\Box$ como nosso símbolo modal primitivo e, em seguida, definimos $\Diamond$ em termos dele. Mas, poderíamos ter começado com $\Diamond$ como símbolo primitivo, e então definido $\Box$ como segue: $\Box\mathscr{A} =_{df} \neg\Diamond\neg\mathscr{A}$. Assim, não há nenhum sentido em que a necessidade seja de alguma forma mais *fundamental* do que a possibilidade. A necessidade é tão fundamental quanto a possibilidade em contextos modais.

40.3 Sistema T

O sistema K é um sistema modal muito simples e tão fraco que nem mesmo permite que você prove $\mathscr{A}$ a partir de $\Box\mathscr{A}$. Mas se estivermos pensando em $\Box$ como expressando *necessidade*, deveríamos ser capazes de fazer esta inferência: se $\mathscr{A}$ é *necessariamente verdadeira*, então ela certamente deve ser *verdadeira*!

Isso nos leva a um novo sistema modal, T, que obtemos adicionando a seguinte regra, RT, ao sistema K:

m	$\Box\mathscr{A}$	
n	$\mathscr{A}$	RT m

A linha n na qual a regra RT é aplicada *não deve* estar em uma subprova estrita que começa após a linha m.

A restrição da regra RT é, de certa forma, oposta à restrição em $\Box$E. Ao contrario da restrição de $\Box$E, você não pode usar a regra RT em uma subprova estrita aninhada.

Com a inclusão da regra RT, podemos provar coisas em T que não poderíamos provar em K, como por exemplo: $\Box A \to A$.

40.4 Sistema S4

Vimos que no sistema T é permitido retirar as caixas de necessidade de uma formula: de $\Box\mathscr{A}$, você pode inferir $\mathscr{A}$. Mas, e se quiséssemos adicionar caixas extras? Ou seja, podemos ir de $\Box\mathscr{A}$ para $\Box\Box\mathscr{A}$? Bem, isso não seria problema, se tivéssemos provado $\Box\mathscr{A}$ aplicando $\Box$I em uma subprova estrita de $\mathscr{A}$ que ela mesma não usa $\Box$E. Nesse caso, $\mathscr{A}$ seria uma tautologia e, ao aninhar a subprova estrita dentro de outra subprova estrita e aplicando $\Box$I novamente, podemos provar $\Box\Box\mathscr{A}$. Por exemplo, podemos provar $\Box\Box(P \to P)$ da seguinte forma:

$$
\begin{array}{r|l|l}
1 & \quad \vert\ \Box & \\
2 & \quad \vert\ \quad \vert\ \Box & \\
3 & \quad \vert\ \quad \vert\ \quad \vert\ P & \\
4 & \quad \vert\ \quad \vert\ \quad \vert\ P & \text{R } 3 \\
5 & \quad \vert\ \quad \vert\ P \to P & \to\text{I } 3\text{–}4 \\
6 & \quad \vert\ \Box(P \to P) & \Box\text{I } 2\text{–}5 \\
7 & \Box\Box(P \to P) & \Box\text{I } 1\text{–}6
\end{array}
$$

Mas, se não provássemos $\Box\mathscr{A}$ dessa forma restrita e usássemos $\Box$E dentro da subprova estrita de $\mathscr{A}$? Se colocarmos essa subprova estrita dentro de outra subprova estrita, o requisito da regra $\Box$E de não citar uma linha contendo $\Box\mathscr{A}$ que se encontra em outra subprova estrita que ainda não foi concluída, é violada. Ou, se $\Box\mathscr{A}$ fosse apenas uma suposição com a qual começamos nossa prova, podemos então inferir $\Box\Box\mathscr{A}$? Em T não poderíamos. E isso pode muito bem lhe parecer uma limitação de T, pelo menos se estivermos lendo $\Box$ como expressando *necessidade*. Parece intuitivo que, se $\mathscr{A}$ for necessariamente verdadeira, não poderia *deixar de ser* necessariamente verdadeira.

Isso nos leva a outro novo sistema, S4, que obtemos adicionando a seguinte regra ao sistema T:

$$
\begin{array}{r|l|ll}
m & \Box\mathscr{A} & & \\
 & & \Box & \\
\cline{3-3}
n & & \Box\mathscr{A} & \text{R4 } m
\end{array}
$$

Observe que R4 só pode ser aplicada se a linha m (contendo $\Box A$) estiver fora da subprova estrita na qual a linha n cai, e esta subprova estrita não é ela mesma parte de uma subprova estrita que não contém m.

A regra R4 é de certa forma similar à regra $\Box$E. A diferença é que a partir de $\Box\mathscr{A}$, obtemos dentro de uma subprova estrita $\Box\mathscr{A}$ no lugar de $\mathscr{A}$. A restrição é a mesma. Significa que R4 não permite "importar" $\Box\mathscr{A}$ para dentro de uma subprova estrita se ela própria estiver aninhada em outra subprova estrita. No entanto, se isso for necessário, podemos obter o mesmo resultado com uma aplicação adicional de R4.

Agora podemos provar ainda mais resultados. Por exemplo:

$$
\begin{array}{r|l|l|ll}
1 & & \Box A & & \\
\cline{3-3}
2 & & & \Box & \\
\cline{4-4}
3 & & & \Box A & \text{R4 } 1 \\
4 & & \Box\Box A & & \Box\text{I } 2\text{–}3 \\
5 & \Box A \to \Box\Box A & & & \to\text{I } 1\text{–}6
\end{array}
$$

Da mesma forma, podemos provar $\Diamond\Diamond A \to \Diamond A$. Isso nos mostra que, além ser possível *adicionar caixas extras*, no sistema S4 também podemos *excluir losangos extras* : de $\Diamond\Diamond\mathscr{A}$, você sempre pode inferir $\Diamond\mathscr{A}$.

40.5 Sistema S5

No sistema S4 sempre podemos adicionar uma caixa na frente de outra caixa, mas não podemos adicionar automaticamente uma caixa na frente de um *losango*. Ou seja, S4 geralmente não permite a inferência de $\Diamond\mathscr{A}$ para $\Box\Diamond\mathscr{A}$. Isso pode lhe parecer uma lacuna, pelo menos se você estiver lendo $\Box$ e $\Diamond$ como expressando *necessidade* e *possibilidade* respectivamente. Parece intuitivo que se $\mathscr{A}$ é possivelmente verdadeira, então não poderia deixar de ser possivelmente verdadeira. Isso nos leva ao sistema modal S5, que obtemos adicionando a seguinte regra a S4:

$$
\begin{array}{r|l}
m & \neg\Box\mathscr{A} \\
 & \quad \begin{array}{|l} \Box \\ \hline \end{array} \\
n & \quad \begin{array}{|l} \neg\Box\mathscr{A} \qquad \text{R5 } m \end{array}
\end{array}
$$

A regra R5 só pode ser aplicada se a linha m (contendo $\neg\Box\mathscr{A}$) estiver fora da subprova estrita na qual a linha n cai, e esta subprova estrita não é ela mesma parte de uma subprova estrita que não contém a linha m.

Esta regra nos permite mostrar que $\Diamond\Box A \vdash_{S5} \Box A$:

1	$\Diamond\Box A$	
2	$\neg\Box\neg\Box A$	Def$\Diamond$ 1
3	$\quad \neg\Box A$	
4	$\quad\quad \Box$	
5	$\quad\quad \neg\Box A$	R5 3
6	$\quad \Box\neg\Box A$	$\Box$I 4–5
7	$\quad \bot$	$\neg$E 2, 6
8	$\Box A$	IP 3–7

Assim, além de adicionar caixas na frente de losangos, também podemos excluir os losangos que estão na frente das caixas.

Obtemos S5 apenas adicionando a regra R5 a S4. Na verdade, poderíamos ter adicionado a regra R5 a T sozinha, e deixar de fora a regra R4. Tudo o que podemos provar com a regra R4 também pode ser provado usando RT junto com R5. Por exemplo, aqui está uma prova que mostra $\Box A \vdash_{S5} \Box\Box A$ sem usar R4:

1	$\Box A$	
2	$\quad \Box\neg\Box A$	
3	$\quad \neg\Box A$	RT 2
4	$\quad \bot$	$\neg$E 1, 3
5	$\neg\Box\neg\Box A$	$\neg$I 2–4
6	$\quad \Box$	
7	$\quad\quad \neg\Box A$	
8	$\quad\quad\quad \Box$	
9	$\quad\quad\quad \neg\Box A$	R5 7
10	$\quad\quad \Box\neg\Box A$	$\Box$I 8–9
11	$\quad\quad \neg\Box\neg\Box A$	R5 5
12	$\quad\quad \bot$	$\neg$E 10, 11
13	$\quad \Box A$	IP 7–12
14	$\Box\Box A$	$\Box$I 6–13

Acabamos de ver que o sistema S5 é *estritamente mais forte* que S4, pois há coisas que podem ser provadas em S5, mas não podem em S4 como por exemplo: $\Diamond\Box A \rightarrow \Box A$.

O ponto importante sobre S5 pode ser colocado assim: se você tiver uma longa sequência de caixas e losangos em qualquer combinação, você pode excluir todos, exceto o último. Por exemplo, a sentença $\Diamond\Box\Diamond\Diamond\Box\Box\Diamond\Box A$ pode ser simplificada para $\Box A$ com apenas um operador.

Exercícios

A. Forneça provas em K para as seguintes asserções:

1. $\Box(A \wedge B) \vdash_{\mathrm{K}} \Box A \wedge \Box B$
2. $\Box A \wedge \Box B \vdash_{\mathrm{K}} \Box(A \wedge B)$
3. $\Box A \vee \Box B \vdash_{\mathrm{K}} \Box(A \vee B)$
4. $\Box(A \leftrightarrow B) \vdash_{\mathrm{K}} \Box A \leftrightarrow \Box B$

B. Forneça provas em K para as seguintes asserções (sem usar a Conversão Modal!):

1. $\neg\Box A \vdash_{\mathrm{K}} \Diamond\neg A$
2. $\Diamond\neg A \vdash_{\mathrm{K}} \neg\Box A$
3. $\neg\Diamond A \vdash_{\mathrm{K}} \Box\neg A$
4. $\Box\neg A \vdash_{\mathrm{K}} \neg\Diamond A$

C. Forneça provas em K para as seguintes asserções (e agora sinta-se à vontade para usar a Conversão Modal!):

1. $\Box(A \rightarrow B), \Diamond A \vdash_{\mathrm{K}} \Diamond B$
2. $\Box A \vdash_{\mathrm{K}} \neg\Diamond\neg A$
3. $\neg\Diamond\neg A \vdash_{\mathrm{K}} \Box A$

D. Forneça provas em T para as seguintes asserções:

1. $P \vdash_{\mathrm{T}} \Diamond P$
2. $\vdash_{\mathrm{T}} (A \wedge B) \vee (\neg\Box A \vee \neg\Box B)$

E. Forneça provas em S4 para as seguintes asserções:

1. $\Box(\Box A \rightarrow B), \Box(\Box B \rightarrow C), \Box A \vdash_{\mathrm{S4}} \Box\Box C$
2. $\Box A \vdash_{\mathrm{S4}} \Box(\Box A \vee B)$
3. $\Diamond\Diamond A \vdash_{\mathrm{S4}} \Diamond A$

F. Forneça provas em S5 para as seguintes asserções:

1. $\neg\Box\neg A, \Diamond B \vdash_{\mathrm{S5}} \Box(\Diamond A \wedge \Diamond B)$
2. $A \vdash_{\mathrm{S5}} \Box\Diamond A$
3. $\Diamond\Diamond A \vdash_{\mathrm{S5}} \Diamond A$

CAPÍTULO 41

Semântica para a LM

Neste capítulo vamos tratar dos aspectos *semânticos* da Lógica modal. Inicialmente veremos as circunstâncias sob as quais sentenças modais são consideradas verdadeiras. Em seguida, veremos como avaliar a validade de argumentos envolvendo tais sentenças modais, levando em consideração as peculiaridades dos diversos sistemas de dedução natural apresentados no capítulo anterior. Para dar conta de tudo isso, veremos também que será necessário estender os conceitos semânticos da LVF apresentados no capítulo 11.

41.1 Interpretações da LM

A grande ideia por trás da semântica da LM é que as sentenças não são apenas verdadeiras ou falsas e ponto final. Dizemos que uma sentença é verdadeira ou falsa em *um dado mundo possível.* Assim, a mesma sentença pode muito bem ser verdadeira em alguns mundos, mas falsa em outros. Grosso modo, dizemos que $\Box\mathscr{A}$ é verdadeira se e somente se $\mathscr{A}$ é verdadeira em *todos* os mundos possíveis, e $\Diamond\mathscr{A}$ é verdadeira se e somente se $\mathscr{A}$ é verdadeira em *algum* mundo.

Precisamos refinar essa ideia e torná-la mais precisa. Para fazer isso, vamos especificar o que é uma *interpretação* para a LM. A primeira coisa que você precisa incluir em uma interpretação é uma coleção de *mundos possíveis.* Mas, o que exatamente é um mundo possível? A ideia intuitiva é que um mundo possível é outra maneira que este mundo poderia ter sido. Há uma grande discussão filosófica sobre essa questão que examinaremos com mais detalhes posteriormente. Agora, no entanto, não precisamos nos preocupar muito com isso, pois no que diz respeito à lógica formal, os mundos possíveis podem ser o que você quiser. Tudo o que importa é que você forneça a cada interpretação uma coleção não vazia de coisas rotuladas MUNDOS POSSIVEIS.

Uma vez escolhida a sua coleção de mundos possíveis, você precisa encontrar uma maneira de determinar quais sentenças da LM são verdadeiras em quais mundos possíveis. Para fazer isso, precisamos introduzir a noção de uma *função de valoração.* Aqueles que estudaram matemática já estão familiarizados com a ideia geral de uma função. Mas, para aqueles que não o fizeram, uma função é uma entidade matemática que mapeia argumentos em valores. Isso pode parecer um pouco abstrato, mas alguns exemplos familiares ajudarão. Considere a função $x + 1$. Esta é uma função que recebe um número como argumento e, em seguida, fornece um número como valor. Portanto, se você inserir o número 1 como um argumento, a função $x + 1$ fornecerá o número 2 como valor; se você inserir o número 2, ela fornecerá 3; se você inserir o número 3, ela fornecerá 4 ... No caso da função $x + y$, você deve inserir dois argumentos, se quiser que ela retorne um valor: se você inserir 2 e 3 como seus argumentos, ela produzirá 5; se você inserir os números 1003 e 2005, ela fornecerá como resultado 3008; e assim por diante.

Uma função de valoração para a LM é uma função com dois argumentos: uma sentença e um mundo possível; e tem como resultado um valor de verdade. Mais precisamente, se v é uma função de valoração e w é um mundo possível, $v_w(\mathscr{A}) = F$ se e somente se $\mathscr{A}$ é falsa no mundo w na valoração v; e $v_w(\mathscr{A}) = V$ se e somente se $\mathscr{A}$ é verdadeira no mundo w na valoração v.

O valor de verdade de qualquer *sentença atômica* em um dado mundo é determinado por essas funções de valoração. A seguir, apresentaremos as regras que determinam como valores de verdade são atribuídos a sentenças mais complexas em um mundo. Iniciamos com as regras para os conectivos da LVF:

(1) $\nu_w(\neg\mathscr{A}) = V$ se e somente se $\nu_w(\mathscr{A}) = F$

(2) $\nu_w(\mathscr{A} \land \mathscr{B}) = V$ se e somente se $\nu_w(\mathscr{A}) = V$ e $\nu_w(\mathscr{B}) = V$

(3) $\nu_w(\mathscr{A} \lor \mathscr{B}) = V$ se e somente se $\nu_w(\mathscr{A}) = V$ ou $\nu_w(\mathscr{B}) = V$

(4) $\nu_w(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}) = V$ se e somente se $\nu_w(\mathscr{A}) = F$ ou $\nu_w(\mathscr{B}) = V$

(5) $\nu_w(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}) = V$ se e somente se $\nu_w(\mathscr{A}) = \nu_w(\mathscr{B})$

Até agora, todas essas regras devem parecer muito familiares. Essencialmente, todas elas funcionam exatamente como as tabelas de verdade para a LVF. A única diferença é que as regras das tabelas de verdade devem ser aplicadas, repetidamente, a um mundo de cada vez. Mas quais são as regras para os novos operadores modais, $\Box$ e $\Diamond$? A ideia mais óbvia seria fornecer regras como estas:

$$\nu_w(\Box\mathscr{A}) = V \text{ se e somente se } \forall w'(\nu_{w'}(\mathscr{A}) = V)$$

$$\nu_w(\Diamond\mathscr{A}) = V \text{ se e somente se } \exists w'(\nu_{w'}(\mathscr{A}) = V)$$

Esta é apenas a maneira formal sofisticada de escrever a ideia de que $\Box\mathscr{A}$ é verdadeira em w apenas no caso de $\mathscr{A}$ ser verdadeira em *todos* os mundos, e $\Diamond\mathscr{A}$ é verdadeira em w apenas no caso de $\mathscr{A}$ ser verdadeira em *algum* mundo.

No entanto, embora essas regras sejam boas e simples, elas acabam não sendo tão úteis quanto gostaríamos. Como mencionamos, a LM deve ser uma ferramenta muito flexível. Pretende ser uma estrutura geral para lidar com muitos tipos diferentes de necessidade. Como resultado, queremos que nossas regras semânticas para $\Box$ e $\Diamond$ sejam um pouco menos rígidas. Podemos fazer isso introduzindo outra ideia nova: *relação de acessibilidade*.

Uma relação de acessibilidade, R, é uma relação entre mundos possíveis. Grosso modo, dizer que Rw_1w_2 (em português: o mundo w_1 *acessa* o mundo w_2) é dizer que w_2 é possível *em relação a* w_1. Em outras palavras, ao introduzir relações de acessibilidade, ampliamos a ideia de que um determinado mundo pode ser possível em relação a alguns mundos, mas não a outros. Isso acaba sendo uma ideia muito frutífera quando se trata de sistemas modais. Agora podemos fornecer as seguintes regras semânticas para os operadores modais $\Box$ e $\Diamond$:

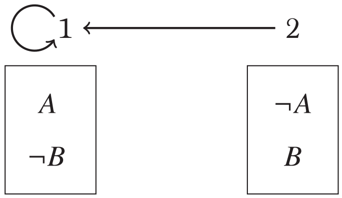
(6) $v_{w_1}(\Box\mathscr{A}) = V$ se e somente se $\forall w_2(Rw_1w_2 \rightarrow v_{w_2}(\mathscr{A}) = V)$

(7) $v_{w_1}(\Diamond\mathscr{A}) = V$ se e somente se $\exists w_2(Rw_1w_2 \land v_{w_2}(\mathscr{A}) = V)$

Isto significa que $\Box\mathscr{A}$ é verdadeira no mundo w_1 se e somente se $\mathscr{A}$ é verdadeira em todos os mundos acessíveis a w_1; e $\Diamond\mathscr{A}$ é verdadeira no mundo w_1 se e somente se $\mathscr{A}$ é verdadeira em algum mundo acessível a w_1.

O que sabemos até agora com respeito à semântica da LM? Uma interpretação para a LM consiste em três coisas: uma coleção não vazia de mundos possíveis, W; uma relação de acessibilidade, R; e uma função de valoração, v. A coleção de 'mundos possíveis' pode realmente ser uma coleção de qualquer coisa que você quiser. Realmente não importa, contanto que W não seja vazio. (Para muitos propósitos, é útil apenas considerar uma coleção de números como sua coleção de mundos.) E por enquanto, pelo menos, R pode ser qualquer relação entre os mundos de W que você desejar. Pode ser uma relação que todos os mundos de W têm com todos os mundos de W, ou que nenhum mundo tem com nenhum mundo, ou qualquer coisa intermediária. E, por último, v é uma função que pode mapear qualquer sentença atômica da LM em qualquer valor de verdade em qualquer mundo. Tudo o que importa é que ela siga as regras (1) - (7) quando se tratar de sentenças mais complexas.

Muitas vezes é útil apresentar interpretações da LM como diagramas como este:



Qual a interpretação deste diagrama? Ele contém apenas dois mundos, 1 e 2. As setas entre os mundos indicam a relação de acessibilidade. Os mundos 1 e 2 acessam o mundo 1, mas nem 1 nem 2 acessam o mundo 2. As caixas em cada mundo nos permitem saber quais sentenças atômicas são verdadeiras em cada mundo: A é verdadeira em 1 mas falsa em 2; B é falsa em 1 mas verdadeira em 2. Você só pode escrever uma sentença atômica ou a negação dela em cada uma dessas caixas. A partir daí, podemos descobri facilmente quais são os valores de verdade das sentenças complexas em cada mundo. Por exemplo, nesta interpretação, todas as sentenças a seguir são verdadeiras em w_1:

$$A \wedge \neg B,\ B \to A,\ \Diamond A,\ \Box\neg B$$

Se você não gosta de pensar diagramaticamente, também pode apresentar uma interpretação como esta:

W: $1, 2$

R: $\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle$

$$v_1(A) = V, v_2(B) = F, v_2(A) = F, v_2(B) = V$$

Você terá a chance de preparar suas próprias interpretações em breve, quando começarmos a olhar para *contra-interpretações.*

41.2 Uma semântica para o Sistema $\mathbb{K}$

Agora podemos estender todos os conceitos semânticos da LVF para cobrir também a LM:

- $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \therefore \mathscr{C}$ é MODALMENTE VALIDO se e somente se não há nenhum mundo em qualquer interpretação em que $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n$ são todas verdadeiras e $\mathscr{C}$ é falsa.
- $\mathscr{A}$ é uma VERDADE MODAL se e somente se $\mathscr{A}$ é verdadeira em todos os mundos e em todas as interpretações
- $\mathscr{A}$ é uma CONTRADICAO MODAL se e somente se $\mathscr{A}$ é falsa em todos os mundos e em todas as interpretações.
- $\mathscr{A}$ is MODALMENTE SATISFATORIA se e somente se $\mathscr{A}$ é verdadeira em algum mundo em alguma interpretação.

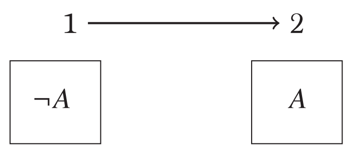
(De agora em diante, deixaremos de lado as qualificações "modais"explícitas, uma vez que podem ser consideradas como lidas.)

Também podemos estender o uso de $\vDash$. Para isso, precisamos adicionar subscritos da mesma forma como fizemos com $\vdash$. Assim, quando quisermos dizer que $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \therefore \mathscr{C}$ é válido em K, escreveremos: $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathrm{K}} \mathscr{C}$.

Para se ter uma ideia melhor desses conceitos semânticos, vejamos algumas contra-interpretações. Considere a seguinte afirmação (falsa):

$$\neg A \vDash_{\mathrm{K}} \neg\Diamond A$$

Como obter uma contra-interpretação para essa afirmação? Precisamos construir uma interpretação na qual $\neg A$ é verdadeira em algum mundo w, e $\neg\Diamond A$ é falsa nesse mundo w. Aqui está uma dessas interpretações, apresentada em um diagrama:



É fácil ver que isso funciona como uma contra-interpretação para $\neg A \vDash_{\mathrm{K}} \neg\Diamond A$. Em primeiro lugar, $\neg A$ é verdadeira no mundo 1. E, em segundo lugar, como A é verdadeira em 2 e 2 é acessível a partir de 1, temos que $\Diamond A$ é verdadeira em 1, e consequentemente $\neg\Diamond A$ é falsa em 1. Portanto, há algum mundo nesta interpretação onde $\neg A$ é verdadeira e $\neg\Diamond A$ falsa.

Por que escolhemos o subscrito K? Existe uma relação importante entre o sistema K e a definição de validade que acabamos de fornecer. Em particular, temos os dois resultados a seguir:

- Se $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{C}$, então $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathrm{K}} \mathscr{C}$
- Se $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathrm{K}} \mathscr{C}$, então $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{C}$

O primeiro resultado é conhecido como *correção*, pois nos diz que as regras de K são boas e corretas: se você pode justificar um argumento fornecendo uma prova dele usando o sistema K, então esse argumento é realmente válido. O segundo resultado é conhecido como *completude*, uma vez que nos diz que as regras de K são amplas o suficiente para capturar todos os argumentos válidos: se um argumento é válido, então será possível oferecer uma prova em K que o justifique.

Chamamos atenção para o fato de que uma coisa é anunciar esses resultados, outra bem diferente é prová-los. Não vamos provar esses resultados aqui, mas a ideia por trás da prova da correção talvez torne mais claro como funcionam as subprovas estritas.

Em uma subprova estrita, não é permitido fazer uso de qualquer informação que esteja fora dela, exceto o que importamos para a subprova estrita usando $\Box$E. Se tivermos assumido ou provado $\Box\mathscr{A}$, então por $\Box$E podemos usar $\mathscr{A}$ dentro de uma subprova estrita. E em K, essa é a única maneira de importar uma fórmula para dentro de uma subprova estrita. Portanto, tudo o que pode ser provado dentro de uma subprova estrita deve seguir a partir de uma fórmula $\mathscr{A}$ onde fora da subprova estrita temos $\Box\mathscr{A}$. Vamos imaginar que estejamos raciocinando sobre o que é verdade em um mundo possível em alguma interpretação. Se sabemos que $\Box\mathscr{A}$ é verdadeira em um mundo possível, então sabemos que $\mathscr{A}$ é verdadeira em todos os mundos acessíveis a ele. Portanto, tudo o que for provado dentro de uma subprova estrita é verdadeiro em todos os mundos possíveis acessíveis a esse mundo. É por isso que $\Box$I é uma regra correta.

41.3 Uma semântica para o sistema T

Dissemos que o sistema K é correto e completo em relação à definição de validade que demos acima. Mas, o que podemos afirmar sobre os outros sistemas modais T, S4 e S5? Bem, eles são todos *incorretos* com respeito a essa definição de validade. Por exemplo, todos esses sistemas permitem inferir A a partir de $\Box A$, embora $\Box A \nvDash_{\mathrm{K}} A$.

Isso significa que esses sistemas são uma perda de tempo? De jeito nenhum! Esses sistemas são apenas incorretos *em relação à definição de validade que demos acima.* (Ou, usando símbolos, eles não são corretos em relação a $\vDash_{\mathrm{K}}$.) Assim, quando estamos lidando com esses sistemas modais mais fortes, precisamos apenas modificar nossa definição de validade. É aqui que as relações de acessibilidade são realmente úteis.

Quando introduzimos a ideia de uma relação de acessibilidade, dissemos que poderia ser qualquer relação entre mundos que você goste: você poderia tê-la relacionando todos os mundos a todos os mundos, nenhum mundo para nenhum mundo, ou qualquer coisa no meio. É assim que pensamos as relações de acessibilidade em nossa definição de $\vDash_{\mathrm{K}}$. Mas se quiséssemos, poderíamos colocar algumas restrições na relação de acessibilidade. Em particular, podemos impor que a relação de acessibilidade seja *reflexiva*:

▹ $\forall wRww$

Isto significa que todo mundo acessa ele próprio. Ou em termos de possibilidade relativa: todo mundo é possível em relação a si mesmo. Com essa restrição podemos introduzir uma nova relação de consequência, $\vDash_{\mathrm{T}}$, como segue:

> $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathrm{T}} \mathscr{C}$ se e somente se não existe nenhum mundo em qualquer interpretação *que tenha uma relação de acessibilidade reflexiva*, na qual $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n$ são todas verdadeiras e $\mathscr{C}$ é falsa

Anexamos o subscrito T a $\vDash$ porque verifica-se que o sistema T é correto e completo em relação a esta nova definição de validade:

▹ Se $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vdash_{\mathrm{T}} \mathscr{C}$, então $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathrm{T}} \mathscr{C}$

▹ Se $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathrm{T}} \mathscr{C}$, então $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vdash_{\mathrm{T}} \mathscr{C}$

Como antes, não provaremos os resultados de correção e completude. No entanto, é relativamente fácil justificar a regra RT, se a relação de acessibilidade for reflexiva.

$$\begin{array}{r|ll} m & \Box\mathscr{A} & \\ & \mathscr{A} & \text{RT } m \end{array}$$

Para mostrar isto é suficiente mostrar que não existe uma contra-interpretação para:

$$\Box\mathscr{A} \vDash_{\mathrm{T}} \mathscr{A}$$

Caso existisse, precisaríamos construir uma interpretação na qual $\Box\mathscr{A}$ fosse verdadeira em algum mundo w, mas $\mathscr{A}$ fosse falsa nesse mundo. Agora, se $\Box\mathscr{A}$ é verdadeira em w, então $\mathscr{A}$ deve ser verdadeira em todos os mundos acessíveis a w. Mas como a relação de acessibilidade é reflexiva, w acessa w. Logo, $\mathscr{A}$ deve ser verdadeira também em w. Chegamos assim a uma contradição, pois assumimos que $\mathscr{A}$ era falsa em w.

41.4 Uma semântica para S4

De que outra forma podemos ajustar nossa definição de validade? Podemos também estipular que a relação de acessibilidade seja *transitiva*:

- $\forall w_1 \forall w_2 \forall w_3((Rw_1w_2 \wedge Rw_2w_3) \rightarrow Rw_1w_3)$

Isso significa que se w_1 acessa w_2, e w_2 acessa w_3, então w_1 acessa w_3. Ou em termos de possibilidade relativa: se w_3 é possível em relação a w_2, e w_2 é possível em relação a w_1, então w_3 é possível em relação a w_1. Com esta restrição imposta à nossa relação de acessibilidade, temos uma nova relação de consequência, $\vDash_{\text{S4}}$, como segue:

> $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\text{S4}} \mathscr{C}$ se e somente se não existe nenhum mundo em qualquer interpretação *que tenha uma relação de acessibilidade reflexiva e transitiva*, na qual $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n$ são todas verdadeiras e $\mathscr{C}$ é falsa

Anexamos o subscrito S4 a $\vDash$ porque verifica-se que o sistema S4 é correto e completo em relação a esta nova definição de validade:

- Se $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vdash_{\text{S4}} \mathscr{C}$, então $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\text{S4}} \mathscr{C}$

- Se $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\text{S4}} \mathscr{C}$, então $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vdash_{\text{S4}} \mathscr{C}$

Como antes, não provaremos os resultados de correção e completude. No entanto, é relativamente fácil justificar a regra R4, se a relação de acessibilidade for transitiva.

$$\begin{array}{r|l} m & \Box\mathscr{A} \\ & \begin{array}{|l} \Box \\ \hline \Box\mathscr{A} \qquad \text{R4 } m \end{array} \end{array}$$

Lembramos que a ideia por trás das subprovas estritas é que elas são maneiras de provar coisas que devem ser verdadeiras em todos os mundos acessíveis. Assim, a regra R4 significa que sempre que $\Box\mathscr{A}$ for verdadeira em um mundo, $\Box\mathscr{A}$ também deve ser verdadeira em todos os mundos acessíveis a este mundo. Logo, devemos ter $\Box\mathscr{A} \vDash_{S4} \Box\Box\mathscr{A}$.

Para ver isso, tente construir uma contra-interpretação para esta afirmação:

$$\Box\mathscr{A} \vDash_{S4} \Box\Box\mathscr{A}$$

Precisaríamos construir uma interpretação na qual $\Box\mathscr{A}$ seja verdadeira em um mundo w_1, mas $\Box\Box\mathscr{A}$ falsa nesse mundo. Agora, se $\Box\Box\mathscr{A}$ é falsa em w_1, então w_1 deve acessar algum mundo, w_2, no qual $\Box\mathscr{A}$ é falsa. Da mesma forma, se $\Box\mathscr{A}$ é falsa em w_2, então w_2 deve acessar algum mundo, w_3, no qual $\mathscr{A}$ é falsa. Acabamos de dizer que w_1 acessa w_2, e w_2 acessa w_3. Logo, w_1 acessa w_3, pois a relação de acessibilidade é transitiva. Por outro lado, do fato de $\Box\mathscr{A}$ ser verdadeira em w_1, segue que $\mathscr{A}$ é verdadeira em todo mudo acessível a w_1, em particular, verdadeira em w_3. Portanto, $\mathscr{A}$ é verdadeira e falsa em w_3. Contradição!

41.5 Uma semântica para S5

Vamos acrescentar mais uma restrição à relação de acessibilidade. Desta vez, impor que a relação de acessibilidade seja também *simétrica*:

▹ $\forall w_1 \forall w_2 (Rw_1w_2 \rightarrow Rw_2w_1)$

Isto significa que se w_1 acessa w_2, então w_2 acessa w_1. Ou em termos de possibilidade relativa: se w_2 é possível em relação a w_1, então w_1 é possível em relação a w_2. Os lógicos chamam uma relação que é reflexiva, simétrica e transitiva de *relação de equivalência*. Agora podemos definir uma nova relação de consequência, $\vDash_{S5}$, como segue:

> $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{S5} \mathscr{C}$ se e somente se não existe nenhum mundo em qualquer interpretação *cuja relação de acessibilidade seja uma relação de equivalência*, na qual $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n$ são todas verdadeiras e $\mathscr{C}$ é falsa.

Anexamos o subscrito S5 a $\vDash$ porque o sistema S5 é correto e completo em relação a esta nova definição de validade:

- Se $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vdash_{S5} \mathscr{C}$, então $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{S5} \mathscr{C}$
- Se $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{S5} \mathscr{C}$, então $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vdash_{S5} \mathscr{C}$

Como antes, não provaremos os resultados de correção e completude. No entanto, é relativamente fácil justificar a regra a regra R5, se a relação de acessibilidade for uma relação de equivalência.

$$
\begin{array}{r|l}
m & \neg\Box\mathscr{A} \\
 & \begin{array}{|ll}
 \Box & \\
 \hline
 \neg\Box\mathscr{A} & \quad \text{R5 } m
 \end{array}
\end{array}
$$

Essa regra diz que se $\mathscr{A}$ não é necessária, ou seja, falsa em algum mundo acessível, também não é necessária em qualquer mundo possível acessível. Temos então $\neg\Box\mathscr{A} \vDash_{S5} \Box\neg\Box\mathscr{A}$.

Para ver isso, tente construir uma contra-interpretação para esta afirmação:

$$\neg\Box\mathscr{A} \vDash_{S5} \Box\neg\Box\mathscr{A}$$

Precisaríamos construir uma interpretação na qual $\neg\Box\mathscr{A}$ é verdadeira em um mundo w_1, mas $\Box\neg\Box\mathscr{A}$ é falsa nesse mundo. Agora, se $\neg\Box\mathscr{A}$ é verdadeira em w_1, então w_1 deve acessar algum mundo, w_2, no qual $\mathscr{A}$ é falsa. Da mesma forma, se $\Box\neg\Box\mathscr{A}$ é falsa em w_1, então w_1 deve acessar algum mundo, w_3, no qual $\neg\Box\mathscr{A}$ é falsa. Como agora temos a restrição que a relação de acessibilidade é uma relação de equivalência e, portanto, simétrica, podemos inferir que w_3 acessa w_1. Assim, w_3 acessa w_1, e w_1 acessa w_2. Novamente, como a relação de acessibilidade é uma relação de equivalência e, portanto, transitiva, podemos inferir que w_3 acessa w_2. Mas antes dissemos que $\neg\Box\mathscr{A}$ é falsa em w_3, o que implica que $\mathscr{A}$ é verdadeira em todos os mundos que w_3 acessa. Portanto, $\mathscr{A}$ é verdadeira e falsa em w_2. Contradição!

Na definição de $\vDash_{S5}$, estipulamos que a relação de acessibilidade deve ser uma relação de equivalência. Mas acontece que há outra maneira de obter uma noção de validade adequada para S5. Em vez de estipular que a relação de acessibilidade seja uma relação de equivalência, podemos estipular que seja uma relação *universal*:

- ▹ $\forall w_1 \forall w_2 R w_1 w_2$

Isto significa que todo mundo acessa todo mundo. Ou em termos de possibilidade relativa: todo mundo é possível em relação a todo mundo. Usando esta restrição na relação de acessibilidade, poderíamos ter definido $\vDash_{S5}$ assim:

> $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{S5} \mathscr{C}$ se e somente se não existe nenhum mundo em qualquer interpretação *que tenha uma relação de acessibilidade universal*, na qual $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n$ são todas verdadeiras e $\mathscr{C}$ é falsa.

Se definíssemos $\vDash_{S5}$ assim, ainda obteríamos os mesmos resultados de correção e completude para S5. O que isso nos diz? Isso significa que se estamos lidando com uma noção de necessidade segundo a qual todo mundo é possível em relação a todo mundo, então devemos usar S5. Além disso, a maioria dos filósofos assume que as noções de necessidade com as quais estão mais preocupados, como a necessidade lógica e a *necessidade metafísica*, são exatamente desse tipo. Portanto, S5 é o sistema modal que a maioria dos filósofos usa na maior parte do tempo.

Exercícios

A. Apresente contra-interpretações para as seguintes afirmações falsas:

1. $\neg P \vDash_{\mathrm{K}} \neg\Diamond P$
2. $\Box(P \lor Q) \vDash_{\mathrm{K}} \Box P \lor \Box Q$
3. $\vDash_{\mathrm{K}} \neg\Box(A \land \neg A)$
4. $\Box A \vDash_{\mathrm{K}} A$

B. Apresente contra-interpretações para as seguintes afirmações falsas:

1. $\Box(M \to O), \Diamond M \vDash_{\mathrm{T}} O$
2. $\Box A \vDash_{\mathrm{T}} \Box\Box A$

C. Apresente contra-interpretações para as seguintes afirmações falsas:

1. $\Diamond A \vDash_{\mathrm{S4}} \Box\Diamond A$
2. $\Diamond A, \Box(\Diamond A \to B) \vDash_{\mathrm{S4}} \Box B$

Leitura adicional

A lógica modal é um grande subcampo da lógica. Nós apenas arranhamos a superfície. Se você quiser aprender mais sobre lógica modal, aqui estão alguns livros que você pode consultar:

▹ Hughes, G. E., & Cresswell, M. J. (1996). *A New Introduction to Modal Logic*, Oxford: Routledge.

- ▹ Priest, G. (2008). *An Introduction to Non-Classical Logic*, 2nd ed., Cambridge: Cambridge University Press.
- ▹ Garson, J. W. (2013). *Modal Logic for Philosophers*, 2nd ed., Cambridge: Cambridge University Press.

Nenhum desses autores formula seus sistemas de prova modal da mesma forma que nós, mas a formulação mais próxima é dada por Garson.

PARTE IX

Metateoria

CAPÍTULO 42

Formas normais e expressividade

42.1 Forma Normal Disjuntiva

Às vezes é útil considerar grupos restritos de sentenças com formas particularmente simples. Por exemplo, podemos considerar o grupo restrito formado pelas sentenças atômicas e pelas sentenças que são negações de sentenças atômicas:

$$A, \neg B, A_3, \neg F_2, \ldots$$

As sentenças deste grupo são comumente chamadas de LITERAIS. Podemos criar um grupo mais amplo, acrescentando aos literais sentenças que são conjunções arbitrárias de literais:

$$
\begin{array}{l}
A_3 \\
A \wedge \neg B \\
\neg C \\
\neg J \wedge \neg A_3 \wedge C \\
F_2 \wedge J \\
\quad \vdots
\end{array}
$$

Podemos ampliar mais um pouco este grupo e acrescentar a ele sentenças que são disjunções de literais ou de conjunções arbitrárias de literais:

$$
\begin{array}{l}
A \\
A \wedge \neg B \wedge C \\
(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \\
(A \wedge B) \vee (A \wedge B \wedge C \wedge \neg D \wedge \neg E) \\
A \vee (C \wedge \neg P_{234} \wedge P_{233} \wedge Q) \vee \neg B \\
\quad \vdots
\end{array}
$$

Dizemos que as sentenças deste grupo mais amplo estão na FORMA NORMAL DISJUNTIVA, cuja definição formal pode ser assim apresentada: uma sentença está na *forma normal disjuntiva* se e somente se ela satisfezer todas as seguintes condições:

(FND 1) Nenhum conectivo que não seja negação, conjunção ou disjunção ocorre na sentença;
(FND 2) Qualquer negação que ocorra na sentença é a negação de uma letra sentencial;
(FND 3) Qualquer conjunção que ocorra na sentença é conjunção de literais; ou seja, apenas sentenças atômicas ou negações de sentenças atômicas podem ser conjuntos das conjunções.

Um outro modo de entender o grupo de sentenças que estão na forma normal disjuntiva é definindo-o como o grupo composto pelas sentenças que pertencem a qualquer um dos seguintes 4 grupos:

GRUPO 1 - letras sentenciais:
$B_3, A, J_7, C, P_5, \ldots$

GRUPO 2 - negações de sentenças do grupo anterior:
$\neg A, \neg B_9, \neg K_2, \neg J, \ldots$

GRUPO 3 - conjunção de sentenças dos grupos anteriores:
$(B_3 \wedge C)$, $(\neg S \wedge A \wedge \neg C_1), \ldots$

GRUPO 4 - disjunção de sentenças dos grupos anteriores:
$(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$, $A \vee (C \wedge \neg P_{234} \wedge P_{233} \wedge Q) \vee \neg B, \ldots$

Repare que estamos *temporariamente* desrespeitando a gramática da LVF aqui. Nos exemplos acima, empregamos conjunções e disjunções com mais de dois itens sem os necessários parênteses intermediários. Estritamente falando, '$(A \wedge B \wedge C)$', por exemplo, não é uma sentença gramaticalmente correta. Ela teria que ter sido escrita ou como '$((A \wedge B) \wedge C)$' ou como '$(A \wedge (B \wedge C))$'. E o mesmo ocorre com as disjunções com mais de dois disjuntos. Vamos continuar desconsiderando os parênteses intermediários em disjunções e conjunções com mais de duas partes porque isso facilita o reconhecimento das sentenças na forma normal disjuntiva e, além disso, todos os diferentes modos possíveis de preencher os parênteses nestes casos levam a sentenças logicamente equivalentes.

A seguinte notação nos ajudará a termos uma intuição visual de como são as sentenças na forma normal disjuntiva. Escrevemos '$\pm\mathcal{A}$' para indicar que $\mathcal{A}$ é um literal, ou seja, $\mathcal{A}$ é uma letra sentencial ou a negação de uma letra sentencial. Então, uma sentença na forma normal disjuntiva tem o seguinte aspecto geral:

$$(\pm\mathcal{A}_1 \wedge \ldots \wedge \pm\mathcal{A}_i) \vee (\pm\mathcal{A}_{i+1} \wedge \ldots \wedge \pm\mathcal{A}_j) \vee \ldots \vee (\pm\mathcal{A}_{m+1} \wedge \ldots \wedge \pm\mathcal{A}_n)$$

Veja que o aspecto mais geral de uma sentença na forma normal disjuntiva é o de uma disjunção de conjunções de literais. Mas esta é só uma intuição visual, já que qualquer sentença pertencente a qualquer um dos quatro grupos descritos acima está na forma normal disjuntiva.

As sentenças na forma normal disjuntiva satisfazem a seguinte propriedade:

Teorema da Formal Normal Disjuntiva. Dada qualquer sentença da LVF, existe uma sentença logicamente equivalente a ela que está na forma normal disjuntiva.

Daqui para a frente iremos abreviar a expressão 'forma normal disjuntiva' por 'FND'.

42.2 Prova do Teorema FND

Usaremos as tabelas de verdade para construirmos uma prova do Teorema da FND. A ideia é que dada uma sentença qualquer, podemos utilizar sua tabela de verdade como fonte para produzir uma sentença na FND com tabela de verdade idêntica e que, por isso, será logicamente equivalente à sentença original. Vamos inicialmente ilustrar como isto é feito e, em seguida, transformar essa ilustração em uma prova rigorosa.

Considere uma sentença $\mathcal{S}$ e suponha que $\mathcal{S}$ contém três letras sentencias: 'A', 'B' e 'C'. O nosso primeiro passo é construir uma tabela de verdade completa para $\mathcal{S}$. Suponha que $\mathcal{S}$ seja tal que sua tabela de verdade resulte em:

A	B	C	$\mathcal{S}$
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	F	V

Note que $\mathcal{S}$ é verdadeira em quatro linhas da tabela de verdade: nas linhas 1, 3, 7 e 8. Na linha 1 de nossa tabela, as três letras sentencias 'A', 'B' e 'C' são verdadeiras. Utilizamos esta informação para construir uma sentença que será verdadeira nesta linha e falsa em todas as outras. A sentença é:

$$A \wedge B \wedge C$$

Note que uma conjunção só é verdadeira quando todos os seus conjuntos são verdadeiros. Então esta conjunção só será verdadeira quando 'A', 'B' e 'C' forem. Ou seja, só na linha 1 da tabela de $\mathcal{S}$.

Fazemos a mesma coisa com as outras linhas da tabela em que $\mathcal{S}$ é verdadeira. A próxima delas é a linha 3, onde as colunas de referência indicam que 'A' é verdadeira, 'B' é falsa e 'C' é verdadeira. Utilizamos esta informação para construir uma sentença que será verdadeira nesta linha e falsa em todas as outras. A sentença é:

$$A \wedge \neg B \wedge C$$

Novamente, repare que uma conjunção só é verdadeira quando todos os seus conjuntos são verdadeiros. Então esta conjunção só será verdadeira quando 'A' é verdadeira, 'B' é falsa e 'C' é verdadeira. Ou seja, só na linha 3 da tabela de $\mathcal{S}$.

Fazendo a mesma coisa com as outras linhas da tabela nas quais $\mathcal{S}$ é verdadeira, as linhas 7 e 8, obtemos, respectivamente, as seguintes sentenças:

$$\neg A \wedge \neg B \wedge C$$
$$\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$$

Então, o que fizemos até aqui foi que, dada a tabela de verdade de $\mathcal{S}$, para cada uma das linhas em que $\mathcal{S}$ é verdeira, construímos uma sentença que é verdadeira nesta linha e falsa em todas as outras:

1. '$A \wedge B \wedge C$'	verdadeira apenas na linha 1
2. '$A \wedge \neg B \wedge C$'	verdadeira apenas na linha 3

3. '$\neg A \wedge \neg B \wedge C$' verdadeira apenas na linha 7
4. '$\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$' verdadeira apenas na linha 8

Fazendo uma disjunção destas 4 sentenças obtemos:

$$(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$$

Repare que, devido à sua construção, esta sentença terá uma tabela de verdade idêntica à da sentença $\mathcal{S}$. Será verdadeira exatamente nas linhas 1, 3, 7 e 8, e falsa nas demais; exatamente como $\mathcal{S}$. Ou seja, esta sentença é logicamente equivalente a $\mathcal{S}$. Repare também que esta sentença é uma disjunção de conjunções de literais. Ou seja, é uma sentença na FND. Ela é, então, a sentença que queríamos. Uma sentença na FND que é logicamente equivalente a $\mathcal{S}$.

Partimos de uma sentença qualquer e construímos uma sentença na FND logicamente equivalente à sentença original. A estratégia que utilizamos para esta construção não depende de nenhuma característica específica de $\mathcal{S}$. $\mathcal{S}$ é uma sentença qualquer e por isso nossa estratégia é completamente geral. Podemos, então, utilizá-la como base para construir uma prova do teorema da forma normal disjuntiva da seguinte forma.

Explicitando a prova do teorema da FND

Considere $\mathcal{S}$ uma sentença qualquer e $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ as letras sentenciais que ocorrem em $\mathcal{S}$. Considere, também, a tabela de verdade de $\mathcal{S}$. Para obter uma sentença na FND que seja logicamente equivalente a $\mathcal{S}$, há dois casos a tratar:

1. *$\mathcal{S}$ é falsa em todas as linhas de sua tabela de verdade.* Neste caso $\mathcal{S}$ é uma contradição. A sentença $(\mathcal{A}_1 \wedge \neg \mathcal{A}_1)$ satisfaz as condições que buscamos. Está na FND e é logicamente equivalente a $\mathcal{S}$, já que também é uma contradição.

2. *$\mathcal{S}$ é verdadeira em pelo menos uma linha de sua tabela de verdade.* Neste caso, para cada linha i da tabela de verdade de $\mathcal{S}$,

seja $\mathcal{B}_i$ uma conjunção da forma

$$(\pm\mathcal{A}_1 \land \ldots \land \pm\mathcal{A}_n)$$

onde cada literal $\pm\mathcal{A}_j$ será da forma $\mathcal{A}_j$ ou $\neg\mathcal{A}_j$ conforme as seguinte regras:

$$\begin{array}{rcrcl} \pm\mathcal{A}_j & \text{é} & \mathcal{A}_j & \textit{sse} & \mathcal{A}_j \text{ é verdadeira na linha } i \\ \pm\mathcal{A}_j & \text{é} & \neg\mathcal{A}_j & \textit{sse} & \mathcal{A}_j \text{ é falsa na linha } i \end{array}$$

O objetivo destas regras é garantir que $\mathcal{B}_\rangle$ será verdadeira na (e somente na) linha i da tabela de verdade de $\mathcal{S}$.

Considere agora i_1, i_2, ..., i_m os números das linhas da tabela verdade onde $\mathcal{S}$ é *verdadeira* e seja $\mathcal{D}$ a seguinte sentença:

$$\mathcal{B}_{i_1} \lor \mathcal{B}_{i_2} \lor \ldots \lor \mathcal{B}_{i_m}$$

Como estamos considerando o caso 2, em que $\mathcal{S}$ é verdadeiro em pelo menos uma linha de sua tabela de verdade, a sentença $\mathcal{D}$ está, por isso, bem definida. $\mathcal{D}$ é, em geral, uma disjunção de conjunções de literais e no caso limite, quando $\mathcal{S}$ é verdadeira em apenas uma linha de sua tabela, $\mathcal{D}$ é uma conjunção de literais. Seja qual for o caso, $\mathcal{D}$ está na FND.

Além disso, a construção de $\mathcal{D}$ assegura também que para cada linha i da tabela de verdade: $\mathcal{S}$ é verdadeira na linha i da tabela verdade *se e somente se* um dos disjuntos de $\mathcal{D}$ (a saber, $\mathcal{B}_\rangle$) é verdadeiro na, e somente na, linha i. Portanto, $\mathcal{S}$ e $\mathcal{D}$ têm a mesma tabela verdade e são, por isso, logicamente equivalentes.

Esses dois casos esgotam todas as possibilidades para a tabela de $\mathcal{S}$ e em ambos obtivemos uma sentença na FND que é logicamente equivalente a $\mathcal{S}$. Eles garantem, portanto, que dada qualquer sentença $\mathcal{S}$ há uma sentença na FND que é equivalente a $\mathcal{S}$. E isso finaliza a nossa prova do teorema da forma normal disjuntiva.

42.3 Forma Normal Conjuntiva

Existem outras formas normais além da *disjuntiva*. Uma que merece nossa atenção é a *forma normal conjuntiva* (FNC). A definição de FNC é muito parecida à definição da FND. Uma sentença está na FNC se e somente se ela satisfaz todas as seguintes condições:

(FNC 1) Nenhum conectivo que não seja negação, conjunção ou disjunção ocorre na sentença;
(FNC 2) Qualquer negação que ocorra na sentença é negação de uma letra sentencial;
(FNC 3) Qualquer disjunção que ocorra na sentença tem literais como disjuntos; ou seja, apenas sentenças atômicas ou negações de sentenças atômicas podem ser disjuntos das disjunções.

A definição da FNC é, portanto, absolutamente análoga à definição da FND, com a única diferença de que as conjunções e as disjunções trocaram de papel. Ou seja, enquanto a forma geral das sentenças na FND é a de uma *disjunção de conjunções* de literais, o aspecto mais geral de uma sentença na FNC será o de uma *conjunção de disjunções* de literais:

$$(\pm\mathcal{A}_1 \vee \ldots \vee \pm\mathcal{A}_i) \wedge (\pm\mathcal{A}_{i+1} \vee \ldots \vee \pm\mathcal{A}_j) \wedge \ldots \wedge (\pm\mathcal{A}_{m+1} \vee \ldots \vee \pm\mathcal{A}_n)$$

lembrando que a notação $\pm\mathcal{A}_k$ indica que $\mathcal{A}_k$ é um literal, ou seja, uma letra sentencial ou a negação de uma letra sentencial.

Podemos agora propor e provar outro teorema sobre forma normal:

Teorma da Forma Normal Conjuntiva. Dada qualquer sentença da LVF, existe uma sentença logicamente equivalente a ela que está na forma normal conjuntiva.

Seja $\mathcal{S}$ uma sentença LVF.

- ▹ Começamos escrevendo a tabela verdade completa para $\mathcal{S}$.

- Se $\mathcal{S}$ é *verdadeira* em todas as linhas da tabela verdade, então $(\mathcal{A}_1 \vee \neg\mathcal{A}_1)$ satisfaz o teorema, já que está na FNC e é logicamente equivalente a $\mathcal{S}$.
- Se $\mathcal{S}$ é *falsa* em pelo menos uma linha da sua tabela de verdade, então, para cada linha onde $\mathcal{S}$ é falsa, escreva uma disjunção $(\pm\mathcal{A}_1 \vee \ldots \vee \pm\mathcal{A}_n)$ que seja *falsa* nesta linha (e verdadeira em todas as outras).[1]
- Considere C a conjunção de todas essas disjunções. A construção de C garante que ela está na FNC e que sua tabela de verdade é idêntica à de $\mathcal{S}$, e que, por isso, C e $\mathcal{S}$ são logicamente equivalentes.

Exercícios

A. Para cada uma das 6 sentenças abaixo apresente duas outras sentenças logicamente equivalentes à sentença original. Uma delas na FND e outra na FNC.

1. $(A \rightarrow \neg B)$
2. $\neg(A \leftrightarrow B)$
3. $(\neg A \vee \neg(A \wedge B))$
4. $(\neg(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C))$
5. $(\neg(A \vee B) \leftrightarrow ((\neg C \wedge \neg A) \rightarrow \neg B))$
6. $((\neg(A \wedge \neg B) \rightarrow C) \wedge \neg(A \wedge D))$

42.4 Adequação Expressiva da LVF

Dos conectivos da LVF, a engação, '$\neg$', é um conectivo de um lugar (unário), ou seja, liga-se a uma única sentença, e todos

[1] Quais devem ser as regras para a construção desta sentença? Tente descobrir. O que queremos aqui é o inverso do que fizemos na prova do teorema da FND. Lá queríamos uma sentença verdadeira na linha especificada e falsa em todas as outras, que fosse uma conjunção de literais. Aqui queremos uma sentença que é uma disjunção de literais, e que seja falsa na linha especificada e verdadeira em todas as outras.

os outros são conectivos de dois lugares (binários) que ligam-se a exatamente duas sentenças. Mas nós podemos cogitar sobre conectivos de *n* lugares (*n*-ários), que ligam-se a *n* sentenças. Por exemplo, poderíamos propor um conectivo de três lugares, cujo símbolo poderia ser um coração, '$\heartsuit$', e estipular que ele tem a seguinte tabela de verdade característica:

A	B	C	$\heartsuit(A, B, C)$
V	V	V	F
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	V
F	F	V	F
F	F	F	F

Um tal conectivo, provavelmente, não corresponde nem aproximadamente a nenhuma expressão do português. Pelo menos não do jeito que '$\wedge$' corresponde a 'e', por exemplo. Mas independentemente disso, há uma questão interessante a ser feita aqui. Suponha que nós queremos construir uma sentença que diz exatamente o que '$\heartsuit(A, B, C)$' diz. Ou seja, suponha que queremos construir uma sentença tautologicamente equivalente a '$\heartsuit(A, B, C)$', cuja tabela é idêntica à tabela de '$\heartsuit(A, B, C)$'. Será que para fazer isso nós precisamos adicionar à LVF o conectivo '$\heartsuit$' e sua tabela característica? Ou será que para dizer o que '$\heartsuit(A, B, C)$' diz, os conectivos que *já existem* na LVF bastam?

Vamos refazer esta pergunta de um modo mais geral e preciso. Antes disso, aqui vai um pouco de vocabulário. Chamaremos um conjunto de conectivos de EXPRESSIVAMENTE ADEQUADO se e somente se as sentenças construídas apenas com estes conectivos são capazes de nos dar todas as tabelas de verdade possíveis. Dito de outro modo, um conjunto de conectivos é *expressivamente adequado* se e somente se dada qualquer tabela de verdade, existe alguma sentença com todos os seus conectivos pertencentes a este grupo e que tem exatamente esta tabela de verdade.

O ponto geral aqui é que quando um conjunto de conectivos é expressivamente adequado, podemos, com ele, construir sentenças que nos dão qualquer tabela de verdade. Todas as tabelas de verdade são alcançáveis através de um conjunto de conectivos expressivamente adequado. Então, o modo mais geral e preciso da pergunta feita acima é: será que o conjunto total de conectivos da LVF, $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, é expressivamente adequado?

Teorema da Adequação Expressiva. O conjunto dos conectivos da LVF é expressivamente adequado. Na verdade, cada um dos seguintes pares é um conjunto expressivamente adequado de conectivos:

1. '$\neg$' e '$\vee$'
2. '$\neg$' e '$\wedge$'
3. '$\neg$' e '$\rightarrow$'

Dada qualquer tabela verdade, podemos usar o método empregado na prova do Teorema FND para obter uma sentença com os conectivos tradicionais da LVF cuja tabela de verdade é idêntica a esta dada. Por exemplo, aplicando aquele método à tabela de '$\heartsuit(A, B, C)$' apresentada acima, obtemos a seguinte sentença que tem exatamente a mesma tabela de verdade:

$$(A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C)$$

Ou seja, o método empregado na prova do Teorema da FND nos garante que $\{\neg, \wedge, \vee\}$ é um conjunto expressivamente adequado de conectivos, porque conseguimos produzir qualquer tabela de verdade com eles. Então é claro que o conjunto de todos os conectivos da LVF, que contém $\{\neg, \wedge, \vee\}$, também é expressivamente adequado. Vamos agora provar alguns resultados subsidiários.

Resultado subsidiário 1: adequação expressiva de '$\neg$' e '$\vee$'

Observe que as sentenças que construímos através do método de prova do Teorema da FND sempre vão conter apenas os conectivos '$\neg$', '$\wedge$' e '$\vee$'. Portanto, para demonstrar este resultado subsidiário é suficiente mostrar que dada qualquer sentença cujos conectivos sejam '$\neg$', '$\wedge$' e '$\vee$', existe uma sentença tautologicamente equivalente na qual ocorrem apenas os conectivos '$\neg$' e '$\vee$'. E para mostrar isso, basta mostrar que

$$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \quad \text{e} \quad \neg(\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B})$$

são logicamente equivalentes.[2]

Resultado subsidiário 2: adequação expressiva de '$\neg$' e '$\wedge$'

Exatamente como no caso anterior, como já provamos que $\{\neg, \wedge, \vee\}$ é expressivamente adequado, a equivalência

$$(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \quad \text{e} \quad \neg(\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B})$$

é suficiente para mostrar que $\{\neg, \wedge\}$ também é, uma vez que nos dá um método para substituir disjunções por conjunções combinadas com negações.

Resultado subsidiário 3: adequação expressiva de '$\neg$' e '$\rightarrow$'

Aqui também, como no caso dos resultados subsidiários anteriores, estas duas equivalências

$$(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \quad \text{e} \quad (\neg\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$$
$$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \quad \text{e} \quad \neg(\mathcal{A} \rightarrow \neg\mathcal{B})$$

são suficientes para demonstrar que $\{\neg, \rightarrow\}$ é expressivamente adequado, pois nos dão um método para transformar sentenças na FND em sentenças que contenham apenas a negação e o condicional como conectivos.

---

[2] Considere, por exemplo, uma sentença com os três tipos de conectivos, tal como$((\neg A \wedge B) \vee \neg C)$. É fácil ver como a aplicação desta equivalência transforma esta sentença em uma que contém apenas disjunção e negação:

$$((\neg A \wedge B) \vee \neg C) \quad \Longleftrightarrow \quad (\neg(\neg\neg A \vee \neg B) \vee \neg C)$$

a sentença da direita é equivalente à da esquerda e só emprega '$\neg$' e '$\vee$'.

Em resumo, não há qualquer *necessidade* de adicionar novos conectivos à LVF. Estes resultados nos mostram, inclusive, que já existe alguma redundância entre os conectivos que temos: poderíamos ter nos contentado com apenas dois conectivos, se quiséssemos ser realmente austeros.

42.5 Adequação expressiva com um único conectivo

Há alguns conectivos de dois lugares que são expressivamente adequados *individualmente*; ou seja, podemos obter todas as tabelas de verdade com sentenças em que ocorrem apenas conectivos de um destes tipos. Eles não são incluídos nas apresentações típicas da LVF porque eles tornam as tabelas e as simbolizações das sentenças em português mais complicadas. Mas a sua existência mostra que, se quiséssemos, poderíamos ter definido a linguagem da LVF com apenas um conectivo e, mesmo assim, ela seria expressivamente adequada.

Veremos dois destes conectivos. O primeiro deles, simbolizado por '$\uparrow$', tem a seguinte tabela verdade característica.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \uparrow \mathcal{B}$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

Este conectivo costuma ser chamado de 'o traço de Sheffer'[3], em homenagem a Henry Sheffer, que o propôs e usou para mostrar como reduzir o número de conectivos lógicos da versão da LVF introduzida por Russell e Whitehead na famosa obra *Principia Mathematica*.[4] (Na verdade, Charles Sanders Peirce antecipou

[3] em inglês: '*the Sheffer stroke*'.

[4] Confira Sheffer, 'A Set of Five Independent Postulates for Boolean Algebras, with application to logical constants' (1913, *Transactions of the American Mathematical Society* 14.4)

Sheffer em cerca de 30 anos, mas nunca publicou seus resultados.)[5] É bastante comum, também, chamar este conectivo de '*nand*', já que sua tabela característica é equivalente à tabela da negação da conjunção (em inglês: *not* + *and* = *nand*).

> O conectivo '↑' é, sozinho, expressivamente adequado.

O Teorema da Adequação Expressiva garante que o conjunto $\{\neg, \vee\}$ é expressivamente adequado. Portanto, é suficiente mostrar que, dada qualquer sentença que contém apenas esses dois conectivos, podemos reescrevê-la como uma sentença logicamente equivalente que contém apenas o '↑'. Assim como fizemos na prova dos casos subsidiários do Teorema da Adequação Expressiva, aqui também basta aplicamos as seguintes equivalências

$$\begin{array}{rcl} \neg\mathcal{A} & \text{e} & (\mathcal{A} \uparrow \mathcal{A}) \\ (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) & \text{e} & ((\mathcal{A} \uparrow \mathcal{A}) \uparrow (\mathcal{B} \uparrow \mathcal{B})) \end{array}$$

ao Resultado Subsidiário 1.[6]

Da mesma forma, podemos considerar o conectivo '↓', cuja tabela característica é:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \downarrow \mathcal{B}$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Este conectivo é algumas vezes chamado de 'seta de Peirce' (apesar de o próprio Peirce o ter batizado de '*ampheck*'). Seu nome mais comum, no entanto, é '*nor*', porque sua tabela de verdade característica é a negação da disjunção (*not* + *or* = *nor*).

[5] Veja Peirce, 'A Boolian Algebra with One Constant', que data de1880. Veja também, de Peirce, os seus *Collected Papers*, 4. 264–5.

[6] Como exercício, use a tabela característica da '↑' acima para verificar que estas sentenças são mesmo logicamente equivalentes.

> O conectivo '$\downarrow$' é, sozinho, expressivamente adequado.

Analogamente ao resultado anterior para o '$\uparrow$', as equivalências

$$\begin{array}{rcl} \neg\mathcal{A} & \text{e} & (\mathcal{A} \downarrow \mathcal{A}) \\ (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) & \text{e} & ((\mathcal{A} \downarrow \mathcal{A}) \downarrow (\mathcal{B} \downarrow \mathcal{B})) \end{array}$$

aplicadas ao Resultado Subsidiário 2 são suficientes para demonstrar a adequação expressiva de $\downarrow$.

42.6 Identificando a inadequação expressiva

De fato, os *únicos* conectivos binários que são expressivamente adequados individualmente são '$\uparrow$' e '$\downarrow$'. Mas como podemos demonstrar isso? Ou ainda, como podemos mostrar que um certo conjunto de conectivos *não é* expressivamente adequado?

O modo mais direto de fazer isso é tentar encontrar alguma tabela de verdade *impossível* de ser expressa usando apenas os conectivos do conjunto dado. Mas essa não é uma tarefa mecânica. Ela envolve um pouco de arte.

Vejamos um exemplo concreto. Será que o conjunto unitário $\{\vee\}$ é expressivamente adequado? Um pouco de reflexão nos convencerá de que a resposta é não. Não parece possível construir uma sentença que tenha apenas disjunções e cuja tabela de verdade seja idêntica à tabela característica da negação.

$\mathcal{A}$	$\neg\mathcal{A}$
V	F
F	V

A razão intuitiva deste fato é simples: o valor da primeira linha da tabela de verdade da negação é o Falso, mas o valor da primeira linha da tabela de qualquer sentença que tenha *apenas* disjunções ($\vee$) sempre será o Verdadeiro. A negação leva o Verdadeiro no Falso, mas nenhuma combinação de disjunções fará isso. As disjunções sempre levam o Verdadeiro no Verdadeiro. O mesmo raciocínio vale para a conjunção, o condicional e o bicondicional.

> Nenhum dos conectivos '$\vee$', '$\wedge$', '$\rightarrow$', e '$\leftrightarrow$' é expressivamente adequado isoladamente.

De fato, a seguinte afirmação é verdadeira:

> Os *únicos* conectivos binários que são expressivamente adequados isoladamente são '$\uparrow$' e '$\downarrow$'.

Isso, no entanto, é mais difícil de provar do que a inadequação expressiva dos conectivos primitivos tomados isoladamente. Por exemplo, o conectivo "ou exclusivo" não tem um V na primeira linha de sua tabela de verdade característica e, portanto, o método usado acima não funciona para mostrar que ele não pode expressar todas as tabelas de verdade. Também é mais difícil mostrar, por exemplo, que $\{\leftrightarrow, \neg\}$ não é um conjunto expressivamente adequado.

CAPÍTULO 43

Correção

Neste capítulo vamos relacionar os dois aspectos distintos nos quais estudamos a LVF: a sua *semântica*, dada pelas tabelas de verdade (estudadas na Parte III), e o seu *sistema formal*, dado pelo sistema de dedução natural (apresentado na Parte VI). Nós vamos comprovar que o sistema formal da LVF é *correto*: através dele só conseguimos provar formalmente a validade de argumentos que são de fato válidos quando analisados via tabelas de verdade. Intuitivamente, um sistema formal é correto quando é impossível, através dele, provar quaisquer argumentos inválidos. Obviamente esta é uma propriedade altamente desejável. Ela nos diz, quando satisfeita, que o sistema formal de provas nunca nos levará ao erro. Na verdade, se o nosso sistema formal não fosse correto, nós não poderíamos confiar nas provas feitas através dele. O objetivo deste capítulo é provar que o sistema formal de provas da LVF apresentado na Parte VI é correto.

Vamos tornar essa ideia mais precisa. Em primeiro lugar, um pouco de notação.

- ▹ Nós vamos usar a letra maiúscula grega Γ (gama) como abreviação para uma lista qualquer de sentenças $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$.

- ▹ Vamos também nos lembrar que o símbolo '$\vDash$' indica *sustentação*. Ou seja, $\Gamma \vDash C$ denota que as sentenças de Γ

sustentam C e, por isso, o argumento $\Gamma \therefore C$ é válido.[1]

- Por fim, vamos nos lembrar que símbolo '$\vdash$' indica a existência de uma *prova* formal. Ou seja, $\Gamma \vdash C$ denota que há uma prova que termina com C cujas suposições não descartadas estão todas entre as sentenças de Γ.

Dizemos, então, que um sistema formal de provas é CORRETO (com relação a uma dada semântica) *se e somente se*, sempre que houver uma prova formal de C cujas suposições não descartadas estão todas em Γ, então Γ sustenta C (na semântica considerada). Usando as notações de metalinguagem que acabamos de relembrar, podemos dizer, então, que provar que o sistema formal da LVF é correto equivale a provar o seguinte teorema:

Teorema da Correção. Para quaisquer sentenças Γ e C: se $\Gamma \vdash C$, então $\Gamma \vDash C$.

Para provar este teorema usaremos a seguinte ideia geral: verificaremos individualmente cada uma das regras do sistema formal da LVF e mostraremos que nenhuma aplicação dessas regras nos leva ao erro. Como uma prova envolve apenas repetidas aplicações destas regras, esta verificação será suficiente para mostrar que nenhuma prova jamais nos levará ao erro.

Em primeiro lugar, precisamos tornar mais precisa essa idéia de "levar ao erro". Vamos chamar uma linha de uma prova de INOCENTE se a sentença desta linha é *sustentada* pelas suposições das quais esta linha *depende*.

Lembremos que uma linha depende de todas as suposições ainda não descartadas em linhas anteriores da prova. Considere, por exemplo, que $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_k$ sejam todas as suposições ainda não descartadas por linhas anteriores à linha n em uma prova, e que $\mathcal{A}_n$ seja a sentença da linha n. Dizer que a linha n é inocente, ou

[1] Dito de um modo ainda mais detalhado, '$\Gamma \vDash C$' denota que qualquer valoração (linha de tabela de verdade) na qual todas as sentenças de Γ são verdadeiras também torna C verdadeira.

seja, que ela é sustentada pelas suposições das quais ela depende, equivale a afirmar que $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_k \vDash \mathcal{A}_n$.

Vale a pena, também, notar que uma suposição sempre depende dela mesma e, por isso, como toda sentença sustenta a si mesma (para qualquer $\mathcal{A}$ e Γ, vale $\Gamma, \mathcal{A} \vDash \mathcal{A}$), a linha de qualquer suposição em qualquer prova sempre é uma linha inocente.

Para ilustrar essa ideia de inocência das linhas, considere a seguinte prova:

$$
\begin{array}{r|ll}
1 & F \to (G \wedge H) & \\
\hline
2 & \quad \vert\ F & \\
3 & \quad \vert\ G \wedge H & \to\text{E } 1, 2 \\
4 & \quad \vert\ G & \wedge\text{E } 3 \\
5 & F \to G & \to\text{I } 2\text{–}4
\end{array}
$$

Como as linhas 1 e 2 são suposições, cada uma delas depende de si e são, como vimos, inocentes, uma vez que

$$F \to (G \wedge H) \ \vDash \ F \to (G \wedge H)$$

$$F \to (G \wedge H), \ F \ \vDash \ F$$

As linhas 3 e 4, por sua vez, serão inocentes se elas forem sustentadas pelas suposições não descartadas neste setor da prova. Ou seja, as linhas 3 e 4 serão inocentes, respectivmente, se

$$F \to (G \wedge H), \ F \ \vDash \ G \wedge F$$

$$F \to (G \wedge H), \ F \ \vDash \ G$$

Não é difícil verificar que isso de fato se dá nos dois casos. Com relação à linha 5, repare que ela depende apenas da suposição da linha 1, uma vez que a suposição da linha 2 foi descartada na passagem da linha 4 para a 5, quando sua subprova foi finalizada. Então a linha 5 será inocente se

$$F \to (G \wedge H) \vDash F \to G$$

o que, novamente, não é difícil de verificar em uma tabela de verdade. O que nós queremos mostrar é que não é por mera coinciência que todas as linhas desta prova são inocentes.

> **Lema da Inocência**. Todas as linhas de qualquer prova formal da LVF são inocentes.

Se todas as linhas de todas as provas que podem ser feitas na LVF são inocentes, então nós podemos confiar que as provas nunca vão nos desviar do caminho e nos levar ao erro. De fato, é bem simples provar o Teorema da Correção quando assumimos como suposição que o Lema da Inocência vale.

Prova do Teorema da Correção. Suponha que $\Gamma \vdash C$. Então, há uma prova na LVF cuja sentença da última linha é C e cujas suposições não descartadas estão todas entre as sentenças de Γ. O Lema da Inocência nos garante que cada linha desta prova é inocente. Em particular, a última linha desta prova é inocente, ou seja, é consequência tautológica das suposições não descartadas e, portanto, $\Gamma \vDash C$. Veja que partimos de $\Gamma \vdash C$ e chegamos em $\Gamma \vDash C$, o que demonstra o Teorema da Correção.♦[2]

Resta agora provar o Lema da Inocência. Para fazer isso começamos observando que cada linha de qualquer prova da LVF ou é uma suposição, ou é obtida aplicando-se alguma regra. Como todas as suposições são por definição inocentes, o que precisamos mostrar é que nenhuma aplicação de qualquer regra de inferência nos levará ao erro. Para tornar essa ideia mais precisa, vamos definir mais uma noção, a de REGRA CONFIAVEL. Dada uma prova qualquer da LVF e uma aplicação de regra qualquer (digamos que a linha n de uma prova contém a sentença $\mathcal{A}$ obtida pela aplicação de uma regra qualquer G)

[2] Uma prática comum em livros de matemática e lógica é indicar o fim das demonstrações (provas) com alguma marca. Vamos, neste capítulo, nos exercitar nesta prática, usando o símbolo '♦' para fazer este papel.

$$\begin{array}{r|l} \vdots & \vdots \\ n & \mathcal{A} \quad \textit{regra G} \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

nós dizemos que a regra G é uma *regra confiável* se e somente se em qualquer uso desta regra, em qualquer prova, se todas as linhas da prova anteriores à linha n são inocentes, então a linha n também é inocente.

Então, intuitivamente, uma regra é confiável quando sempre que ela é aplicada em uma prova com todas as linhas anteriores inocentes, a linha resultante de sua aplicação também será inocente. O que nós queremos é mostrar que *todas* as regras do sistema formal da LVF são regras confiáveis. Antes de fazer isso, vejamos como a prova do Lema da Inocência fica simples quando assumimos que todas as regras de inferência da LVF são confiáveis.

Prova do Lema da Inocência

- A primeira linha de qualquer prova é sempre uma suposição e, conforme já notamos, toda suposição é inocente. Portanto a primeira linha de qualquer prova é inocente.

- E a segunda linha de uma prova qualquer? Ou ela é uma suposição ou foi obtida através da aplicação de uma regra de inferência.

  - Se a 2ª linha for uma suposição, ela também será inocente.
  - Se a 2ª linha for obtida pela aplicação de uma regra, como estamos assumindo que todas as regras são confiáveis, e já vimos que a 1ª linha é inocente, então a segunda linha também será inocente.
  - Ou seja, todas as linhas de todas as provas de duas linhas são inocentes.

- ▹ Até aqui mostramos que qualquer prova de uma linha tem sua linha inocente, e qualquer prova de duas linhas tem as suas duas linhas inocentes.

- ▹ Mas e as provas de 3 linhas? O caso é idêntico ao das provas de 2 linhas. Ou a 3ª linha é uma suposição ou foi obtida através da aplicação de uma regra de inferência.

  - Se a 3ª linha for uma suposição, ela também será inocente.
  - Se a 3ª linha for obtida pela aplicação de uma regra, como estamos assumindo que todas as regras são confiáveis, e já vimos que todas as linhas de todas as provas de 2 linhas são inocentes, então a terceira linha também será inocente.
  - Ou seja, todas as linhas de todas as provas de três linhas são inocentes.

- ▹ Bem, acho que você já pegou o espírito da coisa. A mesma situação vai acontecer com as provas de 4 linhas, com as de 5 linhas,... e com as de n linhas, para qualquer número finito n de linhas. Ou seja, todas as linhas de todas as provas da LVF são inocentes, o que demonstra o Lema da Inocência.♦[3]

O único passo que ainda falta para completarmos de vez a prova do Teorema da Correção é provar que todas as regras de inferência da LVF são mesmo confiáveis. Apesar de não ser especialmente difícil, esta é uma prova longa, já que a LVF tem

[3] Esta prova do Lema da Inocência poderia ser apresentada de modo mais preciso e conciso se explicitássemos o uso que fazemos do *princípio da indução finita* (PIF). O PIF fornece um poderoso método de prova muito empregado nas demonstrações de resultados metatetóricos sobre a lógica. Optamos por ocultar a referência explícita ao PIF nesta prova por razões de economia didática. Nós mencionamos este princípio anterioremente no *Capítulo 31 - Correção e Completude*, quando falamos ali de *provas indutivas.* Vale apena rever.

muitas regras de inferência e precisaremos verificar a confiabilidade de cada regra individualmente. Para encurtar um pouco as coisas, vamos introduzir mais algumas notações convenientes:

- ‘Δ_i’ abreviará a lista das suposições (se houver) das quais a linha i da prova analisada depende.
- ‘$\mathcal{S}_i$’ denotará de modo genérico a sentença da linha i da prova analisada.
- Com estas duas notações, podemos fazer a seguinte abreviação:

‘a linha i é inocente’ *abrevia-se por* ‘$\Delta_i \vDash \mathcal{S}_i$’

Bem, nós queremos demonstrar que todas as regras da LVF são confiáveis, ou seja, queremos demonstrar que a sentença resultante da aplicação de qualquer regra em uma linha n qualquer de uma prova será uma sentença inocente sempre que todas as sentenças das linhas i, com $i < n$, nesta prova, também forem todas inocentes. Com as notações recém introduzidas podemos denotar genericamente isso que queremos demonstrar como:

$$\text{Se} \ \ (\text{para todo } i < n, \Delta_i \vDash \mathcal{S}_i) \quad \text{então} \quad \Delta_n \vDash \mathcal{S}_n$$

Aqui vale a pena sermos bem minuciosos. Repare que esta notação está fazendo uma afirmação condicional. Seu antecedente (para todo $i < n$, $\Delta_i \vDash \mathcal{S}_i$) equivale à afirmação de que todas as linhas anteriores à linha n são inocentes, e seu consequente ($\Delta_n \vDash \mathcal{S}_n$) equivale à afirmação de que a linha n é inocente. Ou seja, a notação ‘se (para todo $i < n$, $\Delta_i \vDash \mathcal{S}_i$) então $\Delta_n \vDash \mathcal{S}_n$’ afirma precisamente a propriedade da confiabilidade que queremos demonstrar que é satisfeita por todas as regras de inferência da LVF.

A ideia é enunciar um lema para cada regra de inferência da LVF e provar que cada uma delas é confiável. Então, mãos à obra.

> $\wedge$I é uma regra de inferência confiável.

Prova. Considere uma aplicação qualquer de $\wedge$I em uma prova qualquer da LVF. Esta aplicação genérica pode ser representada esquematicamente como:

$$\begin{array}{r|ll} i & \mathcal{A} & \\ j & \mathcal{B} & \\ n & \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} & \wedge\text{I } i, j \end{array}$$

Aplicando a a notação recém introduzida nesta representação, o que temos que demonstrar é:

(*) Se (para todo $k < n$, $\Delta_k \vDash \mathcal{S}_k$) então $\Delta_n \vDash \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$

Começamos, então, assumindo o antecedente de (*) como suposição.

(1) Para todo $k < n$, $\Delta_k \vDash \mathcal{S}_k$

Pelo esquema da regra apresentado acima e por (1) é claro que

(2) $\Delta_i \vDash \mathcal{A}$

Além disso, o esquema da regra também nos ajuda ver que

(3) todas as sentenças de Δ_i estão também em Δ_n.[4]

Então, de (2) e (3) podemos afirmar que

(4) $\Delta_n \vDash \mathcal{A}$

Um raciocínio exatamente análogo garante que

(5) $\Delta_n \vDash \mathcal{B}$

[4] Δ_i só poderia ter alguma sentença ausente em Δ_n se a linha i estivesse em uma subprova finalizada em linha anterior à linha n. Mas se este fosse o caso, nós não poderíamos usar a linha i na aplicação da regra $\wedge$I.

Mas de (4) e (5) podemos concluir que

(6) $\Delta_n \vDash \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ [5]

Veja que nós assumimos (1), o antecedente de (*), como suposição e obtivemos (6), o consequente de (*). Isso prova (*) e finaliza a demonstração do Lema.♦

Todos os lemas restantes, que estabelecem a confiabilidade das demais regras da LVF terão, essencialmente, a mesma estrutura que este.

> $\wedge$E é uma regra de inferência confiável.

Prova. Uma aplicação genérica da regra $\wedge$E pode ser representada esquematicamente por:

i	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	
n	$\mathcal{A}$	$\wedge$E i

(alternativamente poderíamos ter $\mathcal{B}$ na linha n; e um raciocínio semelhante ao que faremos aqui se aplicaria neste caso) Analogamente à prova do lema anterior, o que temos que demonstrar é:

(*) Se (para todo $k < n$, $\Delta_k \vDash \mathcal{S}_k$) então $\Delta_n \vDash \mathcal{A}$

Aqui também assumimos como suposição o antecedente de (*)

(1) Para todo $k < n$, $\Delta_k \vDash \mathcal{S}_k$

De (1) é claro que $\Delta_i \vDash \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ e, como aqui também não pode haver qualquer sentença em Δ_i que não esteja também em Δ_n, temos que

[5] Para entender melhor este passo da prova considere v uma valoração qualquer que faz todas as sentenças de Δ_n verdadeiras. Como $\Delta_n \vDash \mathcal{A}$ e $\Delta_n \vDash \mathcal{B}$, então v também faz $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ verdadeiras. Logo, é claro que v faz $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ verdadeira. Ou seja, qualquer valoração que faz todas as sentenças de Δ_n verdadeiras também faz $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ verdadeira. Portanto $\Delta_n \vDash \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$.

(2) $\Delta_n \vDash \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$

E (2) nos assegura que $\Delta_n \vDash \mathcal{A}$, que é o consequente de (*), o que finaliza a prova do lema.♦

$\vee$I é uma regra de inferência confiável.

Deixamos esta prova como um exercício. Ela é análoga aos lemas anteriores.

$\vee$E é uma regra de inferência confiável.

Prova. Uma aplicação genérica da regra$\vee$E pode ser representada esquematicamente por:

$$
\begin{array}{l|lll}
m & \mathcal{A} \vee \mathcal{B} & & \\
i & \quad \mathcal{A} & & \\
j & \quad \mathcal{C} & & \\
k & \quad \mathcal{B} & & \\
l & \quad \mathcal{C} & & \\
n & \mathcal{C} & & \vee\text{E } m,\ i\text{–}j,\ k\text{–}l
\end{array}
$$

Novamente, dada nossa notação, o que temos que demonstrar neste caso é:

(*) Se (para todo $h < n$, $\Delta_k \vDash \mathcal{S}_h$) então $\Delta_n \vDash \mathcal{C}$

De novo, assumimos como suposição o antecedente de (*):

(1) Para todo $h < n$, $\Delta_h \vDash \mathcal{S}_h$

O mesmo raciocínio feito nos lemas anteriores nos assegura que não há sentença em Δ_m que não esteja também em Δ_n. Portanto, como, por (1), $\Delta_m \vDash \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, então

(2) $\Delta_n \vDash \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$

Mas se, conforme (2), qualquer valoração que faz todas as sentenças de Δ_n verdadeiras, faz também $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ verdadeira, então as propriedades da tabela de verdade da disjunção asseguram que qualquer valoração que faz todas as sentenças de Δ_n verdadeiras faz $\mathcal{A}$ verdadeira ou faz $\mathcal{B}$ verdadeira. Ou seja, de (2) temos que:

(3) $\Delta_n \vDash \mathcal{A}$ ou $\Delta_n \vDash \mathcal{B}$

Vamos analisar estas duas alternativas:

Caso 1: $\Delta_n \vDash \mathcal{A}$.

Repare que, por (1),

(4) $\Delta_j \vDash C$

Repare também, através do esquema da regra representado acima, que a única sentença em Δ_j que pode não estar em Δ_n é $\mathcal{A}$. Então, de (4) temos:

(5) $\Delta_n, \mathcal{A} \vDash C$

Mas a hipótese deste caso é que $\Delta_n \vDash \mathcal{A}$. Então de (5) e desta hipótese temos:

(6) $\Delta_n \vDash C$

Caso 2: $\Delta_n \vDash \mathcal{B}$.

Raciocinando exatamente como no caso 1, considerando agora que $\Delta_l \vDash C$, também concluímos que

(7) $\Delta_n \vDash C$

Assim, como (3) nos assegura que $\Delta_n \vDash \mathcal{A}$ ou $\Delta_n \vDash \mathcal{B}$ e como vimos que em ambas essas alternativas $\Delta_n \vDash C$, então concluímos incondicionalmente que $\Delta_n \vDash C$, o que, de acordo com (*), finaliza a prova do lema.♦

> $\neg$E é uma regra de inferência confiável.

Prova. Uma aplicação genérica da regra $\neg$E pode ser representada esquematicamente por:

$$
\begin{array}{r|ll}
i & \mathcal{A} & \\
j & \neg\mathcal{A} & \\
n & \bot & \neg\text{E } i, j
\end{array}
$$

Aqui o que temos que demonstrar é:

(*) Se (para todo $k < n$, $\Delta_k \vDash \mathcal{S}_k$) então $\Delta_n \vDash \bot$

Iniciamos, novamente, assumindo o antecedente de (*) como suposição:

(1) Para todo $k < n$, $\Delta_k \vDash \mathcal{S}_k$

Como toda sentença de Δ_i é sentença de Δ_n e, por (1), $\Delta_i \vDash \mathcal{A}$, então:

(2) $\Delta_n \vDash \mathcal{A}$

Um raciocínio análogo garante que:

(3) $\Delta_n \vDash \neg\mathcal{A}$

De (2) e (3) podemos concluir que:

(4) $\Delta_n \vDash \mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A}$

Mas lembre-se que a notação $\Delta_n \vDash \mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A}$ significa que toda valoração que faz verdadeiras todas as senças de Δ_n também faz $\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A}$ verdadeira. Só que nós sabemos que $\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A}$ é uma contradição, ou seja, nenhuma valoração a faz verdadeira. Então, de (4) e do fato de que nenhuma valoração faz $\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A}$ verdadeira, concluímos que:

(5) não há qualquer valoração que faz todas as sentenças de Δ_n verdadeiras.[6]

[6] Repare que o raciocínio (a inferência) que fizemos na passagem de (4) para (5) é a *contraposição*, ou *negação do consequente*: '$P \to Q, \neg Q \vDash \neg P$'. Veja que uma consequência da afirmação (4) é que se v é uma valoração na qual

Mas então, (5) nos autoriza a concluir a seguinte estranha afirmação:

(6) toda valoração que faz todas as sentenças de Δ_n verdadeiras também faz $\perp$ verdadeira.

A afirmação (6) é mesmo bem suspeita. Não só porque acabamos de dizer, em (5), que nenhuma valoração faz todas as sentenças de Δ_n verdadeiras, mas também porque sabemos que '$\perp$' não é verdadeiro em nenhuma valoração; o que deixa esta passagem de (5) para (6) pelo menos duvidosa. Nós vamos refletir um pouco sobre isso, mas antes vamos apenas notar que, reescrita através de nossa notação, a afirmação (6) diz que $\Delta_n \vDash \perp$, e isso, de acordomdo (*), admitindo que não cometemos nenhum erro, finaliza a prova do lema.♦

Um rápido desvio: sentenças vacuamente verdadeiras

Antes de prosseguir com os lemas que faltam, vamos nos deter brevemente sobre a passagem crucial da prova anterior, de (5) para (6), e certificarmo-nos de que não cometemos nenhum erro ali.

Pense um pouco sobre a afirmação (6). Em que condições (6) seria uma afirmação falsa? Veja bem, como (6) está dizendo que toda valoração que faz todas as sentenças de Δ_n verdadeiras também faz $\perp$ verdadeira, as únicas situações que comprovariam a falsidade de (6) ocorrem quando temos uma valoração v na qual

a) todas as sentenças de Δ_n são verdadeiras,

b) mas $\perp$ é falsa.

---

todas as sentenças de Δ_n são verdadeiras, então $\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A}$ também é verdadeira em v ($P \to Q$). Mas nós sabemos que $\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A}$ não é verdadeira em nenhuma valoração ($\neg Q$). Então concluímos que não pode haver nenhuma valoração v na qual todas as sentenças de Δ_n são verdadeiras ($\neg Q$).

Mas note que (5) afirma que nenhuma valoração faz todas as sentenças de Δ_n verdadeiras. Ou seja, (5) está dizendo que a condição (*a*) exigida para qualquer contraexemplo de (6) é impossível. Nunca ocorre. Então (5) garante que (6) não tem contraexemplo: (6) não será falsa em nenhuma situação que respeite o que (5) diz. É isso que nos autoriza concluir (6) a partir de (5) e ter confiança de que não cometemos nenhum erro.

A estranheza desta passagem se dá porque, apesar de aceitarmos (6) como verdadeira, a propriedade que (6) expressa sobre as valorações não é instanciada por nenhuma valoração, quando (5) é mesmo verdadeira. Nenhuma valoração satisfaz as condições de aplicabilidade de (6). Ela é verdadeira apenas porque não tem contraexemplo que a falsifique.

O caso da afirmação (6) é similar, por exemplo, ao da seguinte afirmação:

(7) Todas as pessoas com mais de 400 anos têm três pés.

A propriedade sobre as pessoas que a afirmação (7) expressa não é instanciada por ninguém. Nenhuma pessoa satisfaz a condição de aplicabilidade da propriedade (7), já que ninguém tem mais de 400 anos. Mas note que ao não ser instanciada, (7) não tem contraexemplo. Um contraexemplo para (7) seria dado por uma pessoa que tivesse mais de 400 anos e não tivesse três pés. Como ninguém tem mais de 400 anos, (7) não tem contraexemplo.

A convenção clássica estabelecida é considerar *vacuamente verdadeiras* sentenças como (6) e (7) que não são instanciáveis. São classificadas como *verdadeiras* porque não têm contraexemplo, mas são rotuladas de *vacuamente* verdadeiras porque não têm instâncias. Tratamos rapidamente deste assunto no âmbito da LPO na Seção 15.2.

De volta à confiabilidade das regras de inferência

Pronto. Depois deste breve desvio, voltemos aos nossos lemas sobre a confiabilidade das regras de inferência.

X é uma regra de inferência confiável.

Também deixamos esta prova como um exercício.

$\neg$I é uma regra de inferência confiável.

Prova. Uma aplicação genérica da regra $\neg$I pode ser representada esquematicamente por:

$$
\begin{array}{l|l|ll}
i & & \underline{\mathcal{A}} & \\
j & & \bot & \\
n & \neg\mathcal{A} & & \neg\text{I } i\text{–}j
\end{array}
$$

O que temos que demonstrar é:

(*) Se (para todo $k < n$, $\Delta_k \vDash \mathcal{S}_k$) então $\Delta_n \vDash \neg\mathcal{A}$

Iniciamos, novamente, assumindo o antecedente de (*) como suposição:

(1) Para todo $k < n$, $\Delta_k \vDash \mathcal{S}_k$

Por (1) é claro que

(2) $\Delta_j \vDash \bot$ e

(3) $\Delta_i \vDash \mathcal{A}$

Note, através do esquema da regra representado acima, que $\Delta_j = \Delta_i$, portanto, por (2),

(4) $\Delta_i \vDash \bot$

O esquema geral da regra também nos mostra que

(5) toda sentença em Δ_i está entre as sentenças de Δ_n, com a possível exceção de $\mathcal{A}$.

De (4) e (5) temos que:

(6) $\Delta_n, \mathscr{A} \vDash \bot$

Então, pelo mesmo racioncínio de contraposição usado no Lema da regra ¬E, de (6) nós podemos inferir que

(7) nenhuma valoração faz todas as sentenças de Δ_n e $\mathscr{A}$ verdadeiras.

Ou seja, de acordo com (7), $\mathscr{A}$ tem que ser falsa em qualquer valoração onde todas as sentenças de Δ_n são verdadeiras. Então,

(8) toda valoração que faz todas as sentenças de Δ_n verdadeiras também faz $\neg\mathscr{A}$ verdadeira.

Reescrita segundo nossa notação, (8) diz que $\Delta_n \vDash \neg\mathscr{A}$; e isso, de acordo com (*), finaliza a prova o lema.♦

> IP, →I, →E, ↔I e ↔E são todas regras confiáveis.

Como estes casos não trazem novidade aos já apresentados, também os deixamos como exercícios.

Até aqui já demonstramos que todas as regras básicas do sistema formal de provas da LVF são confiáveis. Vamos agora demonstrar que qualquer regra derivada também é confiável.

> Todas as regras derivadas de nosso sistema formal para a LVF são confiáveis.

Prova. Suponha que tenhamos usado uma regra derivada para obter alguma sentença, $\mathscr{A}$, na linha n de alguma prova da LVF, e que todas as linhas anteriores da prova são inocentes. Mas qualquer uso de uma regra derivada é, na verdade, uma abreviação de vários usos das regras básicas de inferência. Ou seja, poderíamos ter usado apenas as regras básicas para obter a sentença $\mathscr{A}$ em alguma linha $n + k$, sem a introdução de quaisquer outras suposições. Portanto, aplicando várias vezes (exatamente

$k+1$ vezes) os resultados já demonstrados de que todas as regras básicas são confiáveis, concluímos que a linha $n+k$ é inocente. Conseqüentemente, a regra derivada é confiável.♦

É isso! Provamos que todas as regras (básicas ou não) são confiáveis, e assim completamos a prova do Lema da Inocência e finalizamos a demonstração do Teorema da Correção.

O fim e o começo...

Demonstramos que o sistema formal de provas da LVF que aprendemos neste livro é Correto. Isto significa que qualquer prova formal que fizermos nesse sistema será a prova de um argumento válido de acordo com a semântica das tabelas de verdade. O nosso sistema de provas é correto; ele jamais produzirá a prova de um argumento que não seja válido.

E como fizemos a demonstração disso? Bem, lembre que uma prova formal é apenas uma seqüência (de comprimento arbitrário) de aplicações de regras. Mostramos que nenhuma aplicação individual de qualquer regra nos levará ao erro. Segue-se (por indução) que nenhuma prova formal (sequência finita de aplicações de regras) nos levará ao erro. Ou seja: nosso sistema de prova é correto.

Fazer isso deu um pouco de trabalho. Tivemos que introduzir notações, definições, propor e demonstrar lemas e organizar tudo de um modo bastante detalhado, o que consumiu umas boas páginas deste texto e exigiu alguns de seus neurônios para acompanhar tudo. Mas a ideia geral da Correção de um sistema formal é simples e, no caso da LVF, além de simples ela, desde o princípio, pareceu plausível, quase óbvia. Este é um excelente exemplo do tipo de desafio geral que a lógica coloca a quem se atreve a estudá-la e, por isso, é um ótimo ponto para finalizar este livro. O livro termina aqui, mas a lógica não termina com ele. Ela está apenas começando. Esperamos por você nas nossas próximas aventuras.

Exercícios

A. Complete os Lemas deste capítulo que foram deixados como exercícios. Ou seja, mostre que as seguintes regras são confiáveis:

1. $\vee$I. (*Dica*: este é um caso similar ao da regra $\wedge$E.)
2. X. (*Dica*: este é um caso similar ao da regra $\neg$E.)
3. $\rightarrow$I. (*Dica*: este é um caso similar ao da regra $\vee$E.)
4. $\rightarrow$E.
5. IP. (*Dica*: este é um caso similar ao da regra $\neg$I.)

Apêndices

APÊNDICE A

Notação simbólica

1.1 Nomemclatura alternativa

Lógica verofuncional. LVF também é conhecida por outros nomes. Às vezes é chamada de *lógica sentencial*, porque lida fundamentalmente com sentenças. Às vezes é chamada de *lógica proposicional*, a partir da ideia de que trabalha fundamentalmente com proposições. Preferimos continuar usando *lógica verofuncional*, para enfatizar o fato de que ela lida apenas com atribuições de verdade e falsidade a sentenças, e que seus conectivos são todos verofuncionais.

Lógica de primeira ordem. LPO tem outros nomes. Às vezes é chamada de *lógica de predicados*, porque nos permite aplicar predicados a objetos. Às vezes é chamada de *lógica quantificada*, porque faz uso de quantificadores.

Fórmulas. Alguns textos referem-se a fórmulas usando o termo *fórmulas bem formadas*. Uma vez que 'fórmula bem formada' é uma frase longa e incômoda, eles a abreviam como *fbf* ou, em inglês, *wff* (*well-formed formulas*). Isso é bárbaro e desnecessário (tais textos não aceitam 'fórmulas mal formadas'). Nós optamos por usar apenas 'fórmula'.

Em §6, nós definimos *sentenças* na LVF. Algumas vezes elas também são chamadas de 'fórmulas' (ou 'fórmulas bem formadas'), pois na LVF, ao contrário da LPO, não há distinção entre uma fórmula e uma sentença.

Valorações. Alguns textos chamam valorações de *atribuições de verdade*, ou *atribuições de valor de verdade.*

Adequação expressiva. Alguns textos descrevem LVF como *verofuncionalmente completa* em vez de adequadamente expressiva.

Predicados *n*-ários. Escolhemos chamar os predicados de 'unários', 'binários', 'ternários' e, de maneira geral, 'n-ários'. Alguns textos preferem referir-se a eles como sendo de 'um lugar', 'dois lugares', 'três lugares', etc. Outros, ainda, optam por caracterizá-los como 'monádicos', 'diádicos', 'triádicos', etc.

Nomes. Em LPO, usamos 'a','b', 'c', para nomes. Alguns textos chamam isso de 'constantes'. Outros textos não usam nenhuma diferenciação entre nomes e variáveis na sintaxe. Esses textos focam simplesmente em se o símbolo ocorre *ligado* ou *livre.*

Domínios. Alguns textos descrevem um domínio como 'domínio de discurso' ou 'universo de discurso'.

1.2 Símbolos alternativos

Na história da lógica formal, diferentes símbolos foram usados em diferentes momentos e por diferentes autores. Frequentemente, os autores eram forçados a usar notações que suas impressoras podiam produzir. Este apêndice apresenta alguns símbolos comuns, para que você possa reconhecê-los se os encontrar em um artigo ou em outro livro.

Negação. Dois símbolos comumente usados são o '$\neg$' e o '$\sim$' (*til*). Em alguns sistemas formais mais avançados, é necessário distinguir entre dois tipos de negação; a distinção às vezes é representada usando ambos: '$\neg$' e '$\sim$'. Textos mais antigos às vezes indicam negação por uma linha sobre a fórmula sendo negada, por exemplo, $\overline{A \wedge B}$. Alguns textos usam '$x \neq y$' para abreviar '$\neg x = y$'.

Disjunção. O símbolo '$\vee$' é tipicamente usado para simbolizar a disjunção inclusiva. Uma etimologia aponta a palavra latina 'vel', que significa 'ou', como origem desse uso. Em alguns sistemas a disjunção é representada usando-se o símbolo da adição.

Conjunção. A conjunção é frequentemente simbolizada com o *e comercial*, '&', também conhecido como *e sertanejo*. O e comercial é uma forma decorativa da palavra latina 'et', que significa a conjunção 'e'. (Sua etimologia ainda persiste em certas fontes, particularmente em fontes em itálico; portanto, um 'e' comercial em itálico pode aparecer como '*&*'.) Este símbolo é comumente usado na escrita natural do português (por exemplo, 'Chitãozinho & Xororó') e assim, embora seja uma escolha natural, muitos lógicos usam um símbolo diferente para evitar confusão entre objeto e metalinguagem: como um símbolo em um sistema formal, o e comercial não é a palavra portuguesa '&'. A escolha mais comum agora é '$\wedge$', que é uma contraparte do símbolo usado para disjunção. Às vezes, um único ponto, '$\bullet$', é usado. Em alguns textos mais antigos, não há nenhum símbolo de conjunção; 'A e B' são simplesmente escritos como 'AB'.

Condicional Material. Existem dois símbolos comuns para o condicional material: a *seta*, '$\rightarrow$', e o *contém*, '$\supset$', usado em teoria de conjuntos matemáticos.

Bicondicional Material. A *seta dupla*, '$\leftrightarrow$', é usada em sistemas que usam a seta para representar o condicional material.

Os sistemas que usam o símbolo de contém para o condicional normalmente usam a *barra tripla*, '$\equiv$', como bicondicional.

Quantificadores. O quantificador universal é tipicamente simbolizado como um 'A' de cabeça para baixo, e o quantificador existencial como um 'E' espelhado horizontalmente. Em alguns textos não existe um símbolo separado para o quantificador universal. Em vez disso, simplesmente coloca-se entre parênteses as variáveis cujas ocorrências estão sob a ação do quantificador. Por exemplo, eles podem escrever '$(x)Px$' onde escreveríamos '$\forall x\, Px$'.

Resumo dos símbolos:

negação	$\neg$, $\sim$
conjunção	$\wedge$, $\&$, $\bullet$
disjunção	$\vee$
condicional	$\to$, $\supset$
bicondicional	$\leftrightarrow$, $\equiv$
quantificador universal	$\forall x$, (x)

APÊNDICE B

Sistemas formais alternativos

Ao formular nosso sistema de dedução natural, tratamos certas regras de dedução natural como *básicas*, e outras como *derivadas*. No entanto, poderíamos igualmente ter considerado várias regras diferentes como básicas ou derivadas. Ilustraremos este ponto considerando alguns tratamentos alternativos de disjunção, negação e quantificadores. Também explicaremos por que fizemos as escolhas que fizemos.

2.1 Eliminação da disjunção alternativa

Alguns sistemas consideram o SD como regra básica para a eliminação da disjunção. Esses sistemas podem então tratar a regra $\vee$E como uma regra derivada, pois podem oferecer o seguinte esquema de prova:

m	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	
i	$\quad \mathcal{A}$	
j	$\quad \mathcal{C}$	
k	$\quad \mathcal{B}$	
l	$\quad \mathcal{C}$	
n	$\mathcal{A} \to \mathcal{C}$	$\to$I i–j
$n+1$	$\mathcal{B} \to \mathcal{C}$	$\to$I k–l
$n+2$	$\quad \neg\mathcal{C}$	
$n+3$	$\quad\quad \mathcal{A}$	
$n+4$	$\quad\quad \mathcal{C}$	$\to$E $n+3$, n
$n+5$	$\quad\quad \bot$	$\neg$E $n+2$, $n+4$
$n+6$	$\quad \neg\mathcal{A}$	$\neg$I $n+3$–$n+5$
$n+7$	$\quad \mathcal{B}$	DS m, $n+6$
$n+8$	$\quad \mathcal{C}$	$\to$E $n+7$, $n+1$
$n+9$	$\quad \bot$	$\neg$E $n+2$, $n+8$
$n+10$	$\mathcal{C}$	IP $n+2$–$n+9$

Então, por que escolhemos $\vee$E como básico, em vez de SD?[1] Nosso raciocínio é que o SD envolve o uso de '$\neg$' na declaração da regra. É em certo sentido 'mais limpo' para nossa regra de eliminação de disjunções evitar a menção de *outros* conectivos.

[1] A versão original deste livro, de P.D. Magnus, fez o contrário.

2.2 Regras de negação alternativas

Alguns sistemas adotam como básica a seguinte regra de introdução da negação:

$$
\begin{array}{r|l|ll}
m & & \mathcal{A} & \\ \cline{3-3}
n-1 & & \mathcal{B} & \\
n & & \neg\mathcal{B} & \\
 & \multicolumn{2}{l}{\neg\mathcal{A}} & \neg\text{I}^{*}\ m\text{–}n
\end{array}
$$

e uma versão correspondente da regra a que demos o nome de IP como regra básica de eliminação de negação:

$$
\begin{array}{r|l|ll}
m & & \neg\mathcal{A} & \\ \cline{3-3}
n-1 & & \mathcal{B} & \\
n & & \neg\mathcal{B} & \\
 & \multicolumn{2}{l}{\mathcal{A}} & \neg\text{E}^{*}\ m\text{–}n
\end{array}
$$

Com essas duas regras, poderíamos ter evitado completamente o uso do símbolo '⊥'. [2] O sistema resultante teria menos regras do que as nossas.

Outra maneira de lidar com a negação é usar LEM ou DNE como regra básica e introduzir IP como regra derivada. Normalmente, nesse sistema, as regras também recebem nomes diferentes. Por exemplo, às vezes o que chamamos de ¬E é chamado de ⊥I, e o que chamamos de X é ⊥E. [3]

Então, por que escolhemos nossas regras de negação e contradição?

Nossa primeira razão é que adicionar o símbolo '⊥' ao nosso sistema de dedução natural torna consideravelmente mais fácil

[2] Novamente, a versão original de P.D. Magnus fez o contrário.

[3] A versão de Tim Button segue este caminho e substitui IP por LEM, que ele chama de TND, de "tertium non datur".

trabalhar com as provas. Por exemplo, em nosso sistema é sempre claro qual é a conclusão de uma subprova: a frase na última linha, por exemplo, $\perp$ em IP ou $\neg$I. Em $\neg$I* e $\neg$E*, as subprovas têm duas conclusões, portanto, não dá pra checar numa rápida olhada se uma aplicação delas está correta.

Nossa segunda razão é que muitas discussões filosóficas fascinantes se concentraram na aceitabilidade ou não da prova indireta IP (equivalentemente, terceiro excluído, ou seja, LEM, ou eliminação da dupla negação DNE) e da explosão (ou seja, X). Ao tratá-las como regras separadas no sistema de prova, você estará em uma posição melhor para se envolver com essa discussão filosófica. Em particular: tendo invocado essas regras explicitamente, torna-se mais fácil saber como seria um sistema que não fizesse uso delas.

Esta discussão, e de fato a grande maioria dos estudos matemáticos sobre aplicações de provas de dedução natural para além dos cursos introdutórios, faz referência a uma versão diferente da dedução natural. Esta versão foi inventada por Gerhard Gentzen em 1935 e aperfeiçoada por Dag Prawitz em 1965. Nosso conjunto de regras básicas coincide com o deles. Em outras palavras, as regras que usamos são o padrão nas discussões filosóficas e matemáticas de provas de dedução natural fora dos cursos introdutórios.

2.3 Regras alternativas de quantificação

Uma abordagem alternativa para os quantificadores é tomar como básicas as regras para $\forall$I e $\forall$E de §33, e também duas regras CQ que nos permitem partir de $\forall\S\neg\mathscr{A}$ e chegar a $\neg\exists\S\mathscr{A}$ e vice-versa.[4]

Tomando apenas essas regras como básicas, poderíamos ter derivado as regras $\exists$I e $\exists$E fornecidas em §33. Derivar a regra

[4]Warren Goldfarb segue esta linha em *Deductive Logic*, 2003, Hackett Publishing Co.

$\exists$I é bastante simples. Suponha que $\mathscr{A}$ contém o nome $\rfloor$, e não contém instâncias da variável §, e que queremos fazer o seguinte:

m	$\mathscr{A}(\ldots\rfloor\ldots\rfloor\ldots)$	
k	$\exists\S\mathscr{A}(\ldots\S\ldots\rfloor\ldots)$	

Isso ainda não é permitido, já que neste novo sistema não temos a regra $\exists$I. Podemos, no entanto, oferecer o seguinte:

m	$\mathscr{A}(\ldots\rfloor\ldots\rfloor\ldots)$	
$m+1$	$\quad\neg\exists\S\mathscr{A}(\ldots\S\ldots\rfloor\ldots)$	
$m+2$	$\quad\forall\S\neg\mathscr{A}(\ldots\S\ldots\rfloor\ldots)$	CQ $m+1$
$m+3$	$\quad\neg\mathscr{A}(\ldots\rfloor\ldots\rfloor\ldots)$	$\forall$E $m+2$
$m+4$	$\quad\bot$	$\neg$E $m+3$, m
$m+5$	$\exists\S\mathscr{A}(\ldots\S\ldots\rfloor\ldots)$	IP $m+1$–$m+4$

Derivar a regra $\exists$E é um pouco mais sutil. Isso ocorre porque a regra $\exists$E tem uma restrição importante (como, de fato, a regra $\forall$I), e precisamos ter certeza de que a estamos respeitando. Então, suponha que estamos em uma situação em que *queremos* fazer o seguinte:

m	$\exists\S\mathscr{A}(\ldots\S\ldots\S\ldots)$	
i	$\quad\mathscr{A}(\ldots\rfloor\ldots\rfloor\ldots)$	
j	$\quad\mathscr{B}$	
k	$\mathscr{B}$	

onde $\rfloor$ não ocorre em nenhuma suposição não descarregada«obs», ou em $\mathscr{B}$, ou em $\exists\S\mathscr{A}(\ldots\S\ldots\S\ldots)$. Normalmente, teríamos permissão para usar a regra $\exists$E; mas não estamos aqui assumindo que temos acesso a essa regra como uma regra básica. No entanto, poderíamos oferecer a seguinte derivação mais complicada:

m	$\exists\S\mathscr{A}(\ldots\S\ldots\S\ldots)$	
i	$\quad \mathscr{A}(\ldots\rfloor\ldots\rfloor\ldots)$	
j	$\quad \mathscr{B}$	
k	$\mathscr{A}(\ldots\rfloor\ldots\rfloor\ldots) \to \mathscr{B}$	$\to$I i–j
$k+1$	$\quad \neg\mathscr{B}$	
$k+2$	$\quad \neg\mathscr{A}(\ldots\rfloor\ldots\rfloor\ldots)$	MT k, $k+1$
$k+3$	$\quad \forall\S\neg\mathscr{A}(\ldots\S\ldots\S\ldots)$	$\forall$I $k+2$
$k+4$	$\quad \neg\exists\S\mathscr{A}(\ldots\S\ldots\S\ldots)$	CQ $k+3$
$k+5$	$\quad \bot$	$\neg$E $k+4$, m
$k+6$	$\mathscr{B}$	IP $k+1$–$k+5$

Estamos autorizados a usar $\forall$I na linha $k+3$ porque $\rfloor$ não ocorre em nenhuma suposição não descarregada ou em $\mathscr{B}$. As entradas nas linhas $k+4$ e $k+1$ se contradizem, porque $\rfloor$ não ocorre em $\exists\S\mathscr{A}(\ldots\S\ldots\S\ldots)$.

Armados com essas regras derivadas, poderíamos agora derivar as duas regras CQ restantes, exatamente como em §37.

Então, por que começamos com todas as regras do quantificador como básicas e, em seguida, derivamos as regras CQ?

Nossa primeira razão é que parece mais intuitivo tratar os quantificadores como em pé de igualdade, dando-lhes suas próprias regras básicas para introdução e eliminação.

Nossa segunda razão se refere à discussão de regras alternativas da negação. Nas derivações das regras de $\exists$I e $\exists$E que oferecemos nesta seção, invocamos IP. Mas, como mencionamos anteriormente, o IP é uma regra controversa. Então, se quisermos passar para um sistema que abandona IP, mas que ainda nos permite usar quantificadores existenciais, desejaremos considerar as regras de introdução e eliminação para os quantificadores como básicas, e as regras CQ como derivadas. (De fato, em um sistema sem IP, LEM e DNE, seremos *incapazes* de derivar a regra CQ partindo de $\neg\forall\S\mathcal{A}$ para $\exists\S\neg\mathcal{A}$.)

APÊNDICE C

Referência rápida

3.1 Tabelas-verdade típicas

$\mathcal{A}$	$\neg\mathcal{A}$
T	F
F	T

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

3.2 Uso dos símbolos

CONECTIVOS SENTENCIAIS

Não é o caso que P	$\neg P$
Ou P, ou Q	$(P \vee Q)$
Nem P, nem Q	$\neg(P \vee Q)$ or $(\neg P \wedge \neg Q)$
Tanto P quanto Q	$(P \wedge Q)$
Se P, então Q	$(P \to Q)$
P somente se Q	$(P \to Q)$
P se, e somente se Q	$(P \leftrightarrow Q)$
P a não ser que Q	$(P \vee Q)$

PREDICADOS

Todos os Fs são Gs	$\forall x(F(x) \to G(x))$
Alguns Fs são Gs	$\exists x(F(x) \wedge G(x))$
Nem todos os Fs são Gs	$\neg\forall x(F(x) \to G(x))$ or $\exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$
Nenhum F é G	$\forall x(F(x) \to \neg G(x))$ or $\neg\exists x(F(x) \wedge G(x))$

IDENTIDADE

Apenas c é G	$\forall x(G(x) \leftrightarrow x = c)$
Todo não c é G	$\forall x(\neg x = c \to G(x))$
O F é G	$\exists x(F(x) \wedge \forall y(F(y) \to x = y) \wedge G(x))$
Não é o caso que o F é G	$\neg\exists x(F(x) \wedge \forall y(F(y) \to x = y) \wedge G(x))$
O F é não-G	$\exists x(F(x) \wedge \forall y(F(y) \to x = y) \wedge \neg G(x))$

3.3 Usando identidade para simbolizar quantidades

Há ao menos _____ F(s).

$$\begin{array}{rl}
\text{um} & \exists x\, F(x) \\
\text{dois} & \exists x_1 \exists x_2 (F(x_1) \land F(x_2) \land \neg x_1 = x_2) \\
\text{três} & \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (F(x_1) \land F(x_2) \land F(x_3) \land \\
 & \neg x_1 = x_2 \land \neg x_1 = x_3 \land \neg x_2 = x_3) \\
\text{quatro} & \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 (F(x_1) \land F(x_2) \land F(x_3) \land F(x_4) \land \\
 & \neg x_1 = x_2 \land \neg x_1 = x_3 \land \neg x_1 = x_4 \land \\
 & \neg x_2 = x_3 \land \neg x_2 = x_4 \land \neg x_3 = x_4) \\
n & \exists x_1 \ldots \exists x_n (F(x_1) \land \ldots \land F(x_n) \land \\
 & \neg x_1 = x_2 \land \ldots \land \neg x_{n-1} = x_n)
\end{array}$$

Há no máximo _____ F(s).

Uma maneira de dizer 'há no máximo n F(s)' é colocar um sinal de negação antes da simbolização para 'há pelo menos $n+1$ F(s)'. De forma equivalente, podemos oferecer:

$$\begin{array}{rl}
\text{um} & \forall x_1 \forall x_2 \big[(F(x_1) \land F(x_2)) \to x_1 = x_2\big] \\
\text{dois} & \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \big[(F(x_1) \land F(x_2) \land F(x_3)) \to \\
 & (x_1 = x_2 \lor x_1 = x_3 \lor x_2 = x_3)\big] \\
\text{três} & \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 \big[(F(x_1) \land F(x_2) \land F(x_3) \land F(x_4)) \to \\
 & (x_1 = x_2 \lor x_1 = x_3 \lor x_1 = x_4 \lor \\
 & x_2 = x_3 \lor x_2 = x_4 \lor x_3 = x_4)\big] \\
n & \forall x_1 \ldots \forall x_{n+1} \big[(F(x_1) \land \ldots \land F(x_{n+1})) \to \\
 & (x_1 = x_2 \lor \ldots \lor x_n = x_{n+1})\big]
\end{array}$$

Há exatamente _____ F(s).

Uma maneira de dizer 'há exatamente n F(s)' é juntar as duas simbolizações acima e dizer 'há pelo menos n F(s) e há no máximo n F(s)'. As seguintes fórmulas equivalentes são mais curtas:

zero	$\forall x \neg F(x)$
um	$\exists x\big[F(x) \wedge \forall y(F(y) \rightarrow x = y)\big]$
dois	$\exists x_1 \exists x_2\big[F(x_1) \wedge F(x_2) \wedge$
	$\neg x_1 = x_2 \wedge \forall y\big(F(y) \rightarrow (y = x_1 \vee y = x_2)\big)\big]$
três	$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3\big[F(x_1) \wedge F(x_2) \wedge F(x_3) \wedge$
	$\neg x_1 = x_2 \wedge \neg x_1 = x_3 \wedge \neg x_2 = x_3 \wedge$
	$\forall y\big(F(y) \rightarrow (y = x_1 \vee y = x_2 \vee y = x_3)\big)\big]$
n	$\exists x_1 \ldots \exists x_n\big[F(x_1) \wedge \ldots \wedge F(x_n) \wedge$
	$\neg x_1 = x_2 \wedge \ldots \wedge \neg x_{n-1} = x_n \wedge$
	$\forall y\big(F(y) \rightarrow (y = x_1 \vee \ldots \vee y = x_n)\big)\big]$

3.4 Regras de dedução básicas para LVF

Reiteração

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathcal{A} & \\ & \mathcal{A} & \text{R } m \end{array}$$

Cconjunção

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathcal{A} & \\ n & \mathcal{B} & \\ & \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} & \wedge\text{I } m, n \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} & \\ & \mathcal{A} & \wedge\text{E } m \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} & \\ & \mathcal{B} & \wedge\text{E } m \end{array}$$

Condicional

$$\begin{array}{r|ll} \begin{array}{r} i \\ j \end{array} & \begin{array}{|l} \mathcal{A} \\ \hline \mathcal{B} \end{array} & \\ & \mathcal{A} \to \mathcal{B} & \to\text{I } i\text{–}j \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathcal{A} \to \mathcal{B} & \\ n & \mathcal{A} & \\ & \mathcal{B} & \to\text{E } m, n \end{array}$$

Negação

$$\begin{array}{r|ll} \begin{array}{r} i \\ j \end{array} & \begin{array}{|l} \mathcal{A} \\ \hline \bot \end{array} & \\ & \neg\mathcal{A} & \neg\text{I } i\text{–}j \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \neg\mathcal{A} & \\ n & \mathcal{A} & \\ & \bot & \neg\text{E } m, n \end{array}$$

Prova indireta

$$\begin{array}{r|ll} \begin{array}{r} i \\ j \end{array} & \begin{array}{|l} \neg\mathcal{A} \\ \hline \bot \end{array} & \\ & \mathcal{A} & \text{IP } i\text{–}j \end{array}$$

Explosão

$$\begin{array}{r|ll} m & \bot & \\ & \mathcal{A} & \text{X } m \end{array}$$

Disjunção

$$
\begin{array}{l|ll}
m & \mathcal{A} & \\
 & \mathcal{A} \vee \mathcal{B} & \vee\mathrm{I}\ m
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|ll}
m & \mathcal{A} & \\
 & \mathcal{B} \vee \mathcal{A} & \vee\mathrm{I}\ m
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|ll}
m & \mathcal{A} \vee \mathcal{B} & \\
i & \quad \vert\ \underline{\mathcal{A}} & \\
j & \quad \vert\ \mathcal{C} & \\
k & \quad \vert\ \underline{\mathcal{B}} & \\
l & \quad \vert\ \mathcal{C} & \\
 & \mathcal{C} & \vee\mathrm{E}\ m,\ i\text{–}j,\ k\text{–}l
\end{array}
$$

Bicondicional

$$
\begin{array}{l|ll}
i & \quad \vert\ \underline{\mathcal{A}} & \\
j & \quad \vert\ \mathcal{B} & \\
k & \quad \vert\ \underline{\mathcal{B}} & \\
l & \quad \vert\ \mathcal{A} & \\
 & \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B} & \leftrightarrow\mathrm{I}\ i\text{–}j,\ k\text{–}l
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|ll}
m & \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B} & \\
n & \mathcal{A} & \\
 & \mathcal{B} & \leftrightarrow\mathrm{E}\ m,\ n
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|ll}
m & \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B} & \\
n & \mathcal{B} & \\
 & \mathcal{A} & \leftrightarrow\mathrm{E}\ m,\ n
\end{array}
$$

3.5 Regras derivadas para LVF

Silogismo disjuntivo

$$
\begin{array}{r|ll}
m & \mathcal{A} \vee \mathcal{B} & \\
n & \neg\mathcal{A} & \\
 & \mathcal{B} & \text{DS } m, n
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|ll}
m & \mathcal{A} \vee \mathcal{B} & \\
n & \neg\mathcal{B} & \\
 & \mathcal{A} & \text{DS } m, n
\end{array}
$$

Modus Tollens

$$
\begin{array}{r|ll}
m & \mathcal{A} \to \mathcal{B} & \\
n & \neg\mathcal{B} & \\
 & \neg\mathcal{A} & \text{MT } m, n
\end{array}
$$

Eliminação da dupla degação

$$
\begin{array}{r|ll}
m & \neg\neg\mathcal{A} & \\
 & \mathcal{A} & \text{DNE } m
\end{array}
$$

Terceiro excluído

$$
\begin{array}{r|ll}
i & \quad \mathcal{A} & \\
j & \quad \mathcal{B} & \\
k & \quad \neg\mathcal{A} & \\
l & \quad \mathcal{B} & \\
 & \mathcal{B} & \text{LEM } i\text{–}j, k\text{–}l
\end{array}
$$

Regras de De Morgan

$$
\begin{array}{r|ll}
m & \neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) & \\
 & \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B} & \text{DeM } m
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|ll}
m & \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B} & \\
 & \neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) & \text{DeM } m
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|ll}
m & \neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) & \\
 & \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B} & \text{DeM } m
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|ll}
m & \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B} & \\
 & \neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) & \text{DeM } m
\end{array}
$$

3.6 Regras de dedução básica para LPO

Eliminação do universal

$$\begin{array}{r|ll} m & \forall \S \mathcal{A}(\ldots \S \ldots \S \ldots) & \\ & \mathcal{A}(\ldots \rfloor \ldots \rfloor \ldots) & \forall\text{E } m \end{array}$$

Introdução do universal

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathcal{A}(\ldots \rfloor \ldots \rfloor \ldots) & \\ & \forall \S \mathcal{A}(\ldots \S \ldots \S \ldots) & \forall\text{I } m \end{array}$$

$\rfloor$ não pode ocorrer em nenhuma undischarged assumption«obs»

§ não pode ocorrer em $\mathcal{A}(\ldots \rfloor \ldots \rfloor \ldots)$

Introdução do existencial

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathcal{A}(\ldots \rfloor \ldots \rfloor \ldots) & \\ & \exists \S \mathcal{A}(\ldots \S \ldots \rfloor \ldots) & \exists\text{I } m \end{array}$$

§ não pode ocorrer em $\mathcal{A}(\ldots \rfloor \ldots \rfloor \ldots)$

Eliminação do existencial

$$\begin{array}{l|l|l}
m & \exists \S \mathcal{A}(\ldots \S \ldots \S \ldots) & \\
i & \quad \mathcal{A}(\ldots \rfloor \ldots \rfloor \ldots) & \\
j & \quad \mathcal{B} & \\
 & \mathcal{B} & \exists\mathrm{E}\ m,\ i\text{–}j
\end{array}$$

$\rfloor$ não pode ocorrer em nenhuma undischarged assumption«obs», em $\exists \S \mathcal{A}(\ldots \S \ldots \S \ldots)$, ou em $\mathcal{B}$

Introdução da identidade

$$\begin{array}{|l l}
\rfloor = \rfloor & =\mathrm{I}
\end{array}$$

Eliminação da identidade

$$\begin{array}{l|l l}
m & \dashv = \lfloor & \\
n & \mathcal{A}(\ldots \dashv \ldots \dashv \ldots) & \\
 & \mathcal{A}(\ldots \lfloor \ldots \dashv \ldots) & =\mathrm{E}\ m,\ n
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l l}
m & \dashv = \lfloor & \\
n & \mathcal{A}(\ldots \lfloor \ldots \lfloor \ldots) & \\
 & \mathcal{A}(\ldots \dashv \ldots \lfloor \ldots) & =\mathrm{E}\ m,\ n
\end{array}$$

3.7 Regras derivadas para LPO

$$\begin{array}{l|l l}
m & \forall \S \neg \mathcal{A} & \\
 & \neg \exists \S \mathcal{A} & \mathrm{CQ}\ m
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l l}
m & \exists \S \neg \mathcal{A} & \\
 & \neg \forall \S \mathcal{A} & \mathrm{CQ}\ m
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l l}
m & \neg \exists \S \mathcal{A} & \\
 & \forall \S \neg \mathcal{A} & \mathrm{CQ}\ m
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l l}
m & \neg \forall \S \mathcal{A} & \\
 & \exists \S \neg \mathcal{A} & \mathrm{CQ}\ m
\end{array}$$

Glossário

antecedent The sentence on the left side of a conditional.

argument a connected series of sentences, divided into premises and conclusion.

atomic sentence An expression used to represent a basic sentence; a sentence letter in TFL, or a predicate symbol followed by names in FOL.

biconditional The symbol $\leftrightarrow$, used to represent words and phrases that function like the English phrase "if and only if"; or a sentence formed using this connective.

bound variable An occurrence of a variable in a formula which is in the scope of a quantifier followed by the same variable.

complete truth table A table that gives all the possible truth values for a sentence (of TFL) or sentences in TFL, with a line for every possible valuation of all sentence letters.

completude A property held by logical systems if and only if $\vDash$ implies $\vdash$.

conclusion the last sentence in an argument.

conclusion indicator a word or phrase such as "therefore" used to indicate that what follows is the conclusion of an argument.

conditional The symbol $\rightarrow$, used to represent words and phrases that function like the English phrase "if … then …"; a sentence formed by using this symbol.

conjunct A sentence joined to another by a conjunction.

conjunction The symbol $\wedge$, used to represent words and phrases that function like the English word “and”; or a sentence formed using that symbol.

conjunctive normal form (DNF) a sentence which is a conjunction of disjunctions of atomic sentences or negated atomic sentences.

connective A logical operator in TFL used to combine sentence letters into larger sentences.

consequent The sentence on the right side of a conditional.

contingent sentence A sentence that is neither a necessary truth nor a necessary falsehood; a sentence that in some case is true and in some other case, false.

contradiction (of FOL) A sentence of FOL that is false in every interpretation.

contradiction (of TFL) A sentence that has only Fs in the column under the main logical operator of its complete truth table; a sentence that is false on every valuation.

correção Propriedade possuída pelos argumentos que são válidos e têm todas as premissas verdadeiras..

dedutivamente equivalente Duas sentenças A e B são dedutivamente equivalentes se e somente se cada uma puder ser provada a partir da outra..

dedutivamente inconsistente Sentenças são dedutivamente inconsistentes se e somente se uma contradição puder ser provada a partir delas.

disjunct A sentence joined to another by a disjunction.

disjunction The connective $\vee$, used to represent words and phrases that function like the English word “or” in its inclusive sense; or a sentence formed by using this connective.

disjunctive normal form (DNF) a sentence which is a disjunction of conjunctions of atomic sentences or negated atomic sentences.

domain The collection of objects assumed for a symbolization in FOL, or that gives the range of the quantifiers in an interpretation.

empty predicate A predicate that applies to no object in the domain.

equivalence (in FOL) A property held by pairs of sentence of FOLs if and only if the sentences have the same truth value in every interpretation.

equivalence (in TFL) A property held by pairs of sentences if and only if the complete truth table for those sentences has identical columns under the two main logical operators, i.e., if the sentences have the same truth value on every valuation.

existential quantifier The symbol $\exists$ of FOL used to symbolize existence; $\exists x\, F(x)$ is true iff at least one member of the domain is F.

expressive adequacy property of a collection of connectives which holds iff every possible truth table is the truth table of a sentence involving only those connectives.

formula An expression of FOL built according to the inductive rules in §20.2.

free variable An occurrence of a variable in a formula which is not a bound variable.

interpretation A specification of a domain together with the objects the names pick out and which objects the predicates are true of.

joint possibility A property possessed by some sentences when they are all true in a single case.

main connective The last connective that you add when you assemble a sentence using the inductive definition.

metalanguage The language logicians use to talk about the object language. In this textbook, the metalanguage is English, supplemented by certain symbols like metavariables and technical terms like “valid”.

metavariables A variable in the metalanguage that can represent any sentence in the object language.

name A symbol of FOL used to pick out an object of the domain.

necessary equivalence A property held by a pair of sentences that, in every case, are either both true or both false.

necessary falsehood A sentence that is false in every case.

necessary truth A sentence that is true in every case.

negation The symbol ¬, used to represent words and phrases that function like the English word "not".

object language A language that is constructed and studied by logicians. In this textbook, the object languages are TFL and FOL.

predicate A symbol of FOL used to symbolize a property or relation.

premise a sentence in an argument other than the conclusion.

premise indicator a word or phrase such as "because" used to indicate that what follows is the premise of an argument.

satisfiability (in FOL) A property held by sentence of FOLs if and only if some interpretation makes all the sentences true.

satisfiability (in TFL) A property held by sentences if and only if the complete truth table for those sentences contains one line on which all the sentences are true, i.e., if some valuation makes all the sentences true.

scope the subformula of a sentence (of TFL) or a formula of FOL for which the main connective is the operator.

sentence (of FOL) A formula of FOL which has no bound variables.

sentence (of TFL) A string of symbols in TFL that can be built up according to the inductive rules given on p. 63.

sentence letter An letter used to represent a basic sentence in TFL.

substitution instance The result of replacing every free occurrence of a variable in a formula with a name.

symbolization key A list that shows which English sentences are represented by which sentence letters in TFL.

tautology A sentence that has only Ts in the column under the main logical operator of its complete truth table; a sentence that is true on every valuation.

teorema Uma sentença que é provada sem nenhuma premissa.

term Either a name or a variable.

truth value One of the two logical values sentences can have: True and False.

truth-functional connective an operator that builds larger sentences out of smaller ones and fixes the truth value of the resulting sentence based only on the truth value of the component sentences.

universal quantifier The symbol $\forall$ of FOL used to symbolize generality; $\forall x\, F(x)$ is true iff every member of the domain is F.

validity A sentence of FOL that is true in every interpretation.

validity of arguments (in FOL) A property held by arguments; an argument is valid if and only if no interpretation makes all premises true and the conclusion false.

validity of arguments (in TFL) A property held by arguments if and only if the complete truth table for the argument contains no rows where the premises are all true and the conclusion false, i.e., if no valuation makes all premises true and the conclusion false.

valuation An assignment of truth values to particular sentence letters.

variable A symbol of FOL used following quantifiers and as placeholders in atomic formulas; lowercase letters between s and z.

Siglas

LPO Lógica de Primeira Ordem.
LVF Lógica Verofuncional.

Esta é a versão rascunho (0.4) de um livro que ainda não está pronto. Você pode verificar neste link, http://tiny.cc/wwpksz, se alguma versão mais recente já está disponível. Este livro está sendo testado em uma disciplina de lógica da UFRN e pretendemos finalizar uma primeira edição para publicação no final de 2020 ou início de 2021. Para esta finalização ainda falta produzirmos duas partes do livro, uma tratando de rudimentos de lógica modal e outra de metateoria, além de considerações finais, alguns apêndices sobre notação e jargão e um glossário. Falta, principalmente, uma rigorosa revisão e homogeneização do texto. Caso você tenha interesse neste projeto e queira participar mais ativamente, conctacte-nos através do email durante10@gmail.com. Também agradecemos se nos contactar apontando erros (sim, ainda há muitos!), ou tenha sugestões, discordâncias, críticas,... suas contribuições serão todas muito bem-vindas.