Macroeconomia com Microfundamentos

João Ricardo Costa Filho
Ibmec/SP

Good ideas shine far more brightly when supported by good models
Avinash Dixit (‘‘The making of Economic Policy", 1996, p. 17)

Models are to be used, not believed.
Henri Theil (‘‘Principles of Econometrics", 1971, p. vi)

Não fique somente com os slides, LEIA OS LIVROS!

Overview

O que explica a diferença na riqueza das nações?

Trabalhemos com o modelo Ramsey-Cass-Koopmans[1] desenvolvido em [Barbosa, 2017] sob as seguintes premissas:

- Tempo contínuo onde $t \in [0, \infty)$.
- Agente representativo com vida infinita.
- Força de trabalho (L) cresce à uma taxa constante n.
- Utilidade separável ao longo do tempo.
- Fluxo de utilidade, $u(c)$, com $u'(c) > 0$ e $u''(c) < 0$.
- Taxa de desconto intertemporal: ρ.
- Retornos constantes de escala.
- Produtividade marginal decrescente.
- A produtividade cresce à uma taxa constante g.

[1] [Ramsey, 1928, Cass, 1965, KOOPMANS, 1965]

Dinâmica do estoque de capital

O estoque de capital evolui com base na seguinte equação:

$$\dot{K} = I - \delta K$$

Podemos reescrevê-la como

$$Y - C = \dot{K} - \delta K$$

ou na sua forma intensiva:

$$f(k) - c = \frac{\dot{K}}{AL} - \delta k$$

Dinâmica do estoque de capital

Dado que $k = K/AL$, temos que

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}AL - K\frac{dAL}{dt}}{(AL)^2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\dot{K}}{AL} = \dot{k} + (n+g)k$$

$\therefore$

$$\dot{k} = f(k) - c - (n+g-\delta)k$$

O problema do agente representativo

Por ora, trabalhemos com o consumo por trabalhador ($c^L = C/L$) e o estoque de capital por trabalhador ($k = K/L$) com $L_0 = 1$.

$$\max_{c^L} \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c^L) L_0 e^{nt} dt = \int_0^\infty e^{-(\rho - n)t} u(c^L) dt, \rho > n \quad (1)$$

s.a.

$$\begin{gathered} \dot{k} = f(k) - c^L - (\delta + n)k \\ k(0) = k_o \end{gathered} \quad (2)$$

onde δ representa a taxa de depreciação do capital.

O problema do agente representativo

Hamiltoniano a valor presente (H^*):

$$H^* = e^{-(\rho - n)t} u(c) + \mu[f(k) - c^L - (\delta + n)k] \tag{3}$$

As condições de primeira ordem são dadas por:

$$\frac{\partial H^*}{\partial c^L} = 0$$
$$\dot{\mu} + \frac{\partial H^*}{\partial k} = 0$$
$$\frac{\partial H^*}{\partial \mu} = \dot{k}$$

O problema do agente representativo

$$e^{-(\rho-n)t}u'(c^L) - \mu = 0 \tag{4}$$

$$\dot{\mu} + \mu[f'(k) - (\delta + n)] = 0 \tag{5}$$

$$f(k) - c^L - (\delta + n)k = \dot{k} \tag{6}$$

Com a condição de transversalidade dada por

$$\lim_{t\to\infty} e^{-(\rho-n)}u'(c^L)k = 0$$

O problema do agente representativo

Derivando a equação (4) em relação ao tempo, obtemos

$$-(\rho - n)e^{-(\rho-n)t}u'(c^L) + e^{-(\rho-n)t}u''(c^L)\dot{c} = \dot{\mu} = 0 \qquad (7)$$

Substituindo em (5) (e utilizando o resultado e 4) temos

$$-(\rho - n)e^{-(\rho-n)t}u'(c^L) + e^{-(\rho-n)t}u''(c^L)\dot{c^L} + e^{-(\rho-n)t}u'(c^L)[f'(k) - (\delta + n)]$$

$$\vdots$$

$$\dot{c^L} = \frac{u'(c^L)}{u''(c^L)}[(\rho + \delta) - f'(k)] \qquad (8)$$

Curvatura da função utilidade

O coeficiente de aversão relativa ao risco (γ) de uma função utilidade é dado por

$$\gamma = -c\frac{u''(c)}{u'(c)} \tag{9}$$

Quanto maior o valor de γ, mais sensível é o agente à variações na quantidade de consumo.

Taxa Marginal de Substituição Intertemporal

Considere dois períodos, s e t. Temos que

$$TMS_{c_t,c_s} = -\frac{\frac{\partial U(c)}{c_s}}{\frac{\partial U(c)}{c_t}} = -e^{-\rho(s-t)}\frac{u'(c_s)}{u'(c_t)} \tag{10}$$

Dessa forma, podemos definir a elasticidade de substituição intertemporal, isto é, qual é a variação da TMS ao longo da curva de indiferença, como:

$$\epsilon = \frac{d\frac{u'(c_s)}{u'(c_t)}}{d\frac{c_s}{c_t}}\frac{\frac{c_s}{c_t}}{\frac{u'(c_s)}{u'(c_t)}} = \frac{d\ln(\frac{u'(c_s)}{u'(c_t)})}{d\ln(\frac{c_s}{c_t})} \tag{11}$$

Função de utilidade CRRA

Assuma que a função utilidade seja dada por

$$u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} \tag{12}$$

Temos que

$$\ln(\frac{u'(c_s)}{u'(c_t)}) = \ln(e^{-\rho(s-t)}\frac{c_s^{-\sigma}}{c_t^{-\sigma}}) = -\rho(s-t) - \sigma \ln \frac{c_s}{c_t}) \tag{13}$$

$\therefore$

$$\epsilon = -\sigma \tag{14}$$

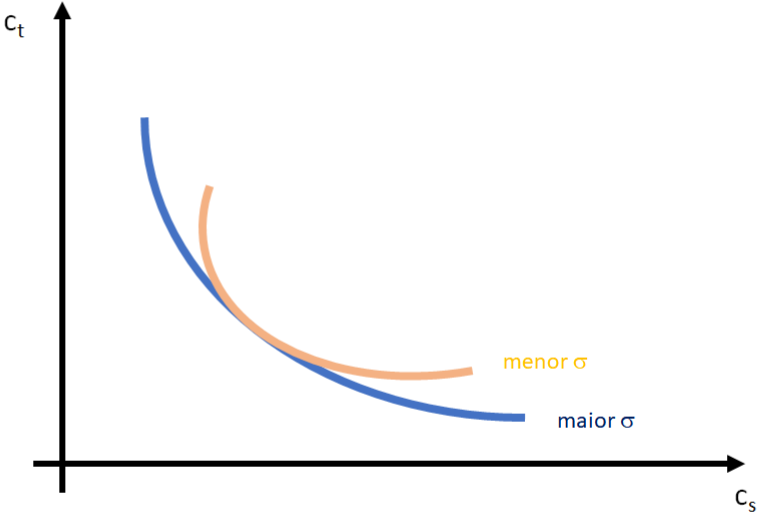
Note também que

$$\gamma = -c\frac{u''(c)}{u'(c)} = -c\frac{c^{-\sigma}}{-\sigma c^{-\sigma-1}} = -\frac{1}{\sigma} \tag{15}$$

Função de utilidade CRRA

- A forma funcional que adotamos possui tanto um coeficiente de aversão relativa ao risco, quanto uma elasticidade de substituição intertemporal constantes.
- Se $\downarrow \sigma$, temos que $\downarrow \epsilon$, $\uparrow \gamma$: ou seja, uma menor elasticidade intertemporal de substituição (menor aceitabilidade de variações no consumo ao longo do tempo, já que a TMS varia menos) está associada a uma maior versão relativa ao risco. É o indivíduo da curva laranja no próximo slide.

Função de utilidade CRRA



Exercício

Prove que

$$\lim_{\gamma \to \infty} \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} = \ln c$$

O problema do agente representativo

De volta ao problema. Podemos reescrever (8) como

$$\frac{\dot{c^L}}{c^L} = \sigma[f'(k) - (\rho + \delta)] \tag{16}$$

Para encontrar a dinâmica em unidades de eficiência, lembremos que

$$c = \frac{C}{AL} \implies \frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{c^L}}{c^L} - g \tag{17}$$

$\therefore$

$$\frac{\dot{c}}{c} = \sigma[f'(k) - (\rho + \delta) - \frac{g}{\sigma}] \tag{18}$$

Sistema de equações

$$\begin{cases} \dot{k} = f(k) - c - (g + n + \delta)k \\ \frac{\dot{c}}{c} = \sigma \left[f'(k) - \delta - \rho - \frac{g}{\sigma} \right] \end{cases}$$

Equilíbrio:

$$\begin{aligned} c^* &= f(k^*) - (g + n + \delta)k^* \\ f'(k^*) - \delta &= \rho + \frac{1}{\sigma} g \end{aligned} \tag{19}$$

Equilíbrio

A partir do equilíbrio, temos que a taxa de juros $(rho + \frac{g}{\sigma})$ é maior do que a taxa de crescimento do produto real $(g + n)$

$$\rho + \frac{g}{\sigma} > g + n \tag{20}$$

quando a condição de transversalidade é satisfeita.

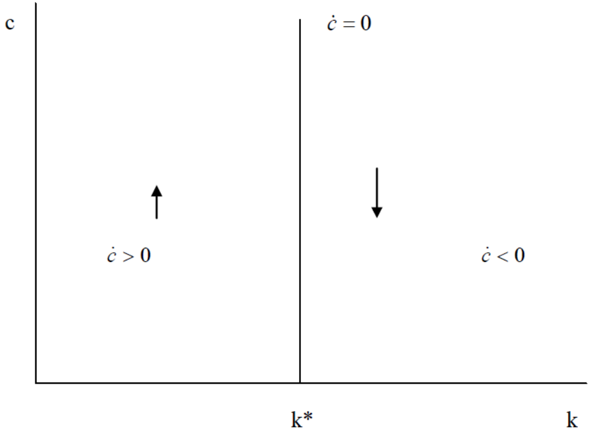
Equilíbrio

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{c}}{\partial c} & \frac{\partial \dot{c}}{\partial k} \\ \frac{\partial \dot{k}}{\partial c} & \frac{\partial \dot{k}}{\partial k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma f''\left(k^*\right) c^* \\ -1 & f'\left(k^*\right) - \left(g + n + \delta\right)] \end{bmatrix}$$

Temos que

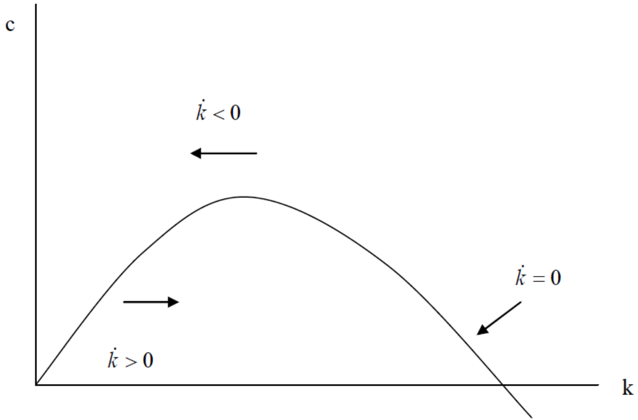
$$|J| = \sigma f''\left(k^*\right) c^* < 0$$

Diagrama de fases



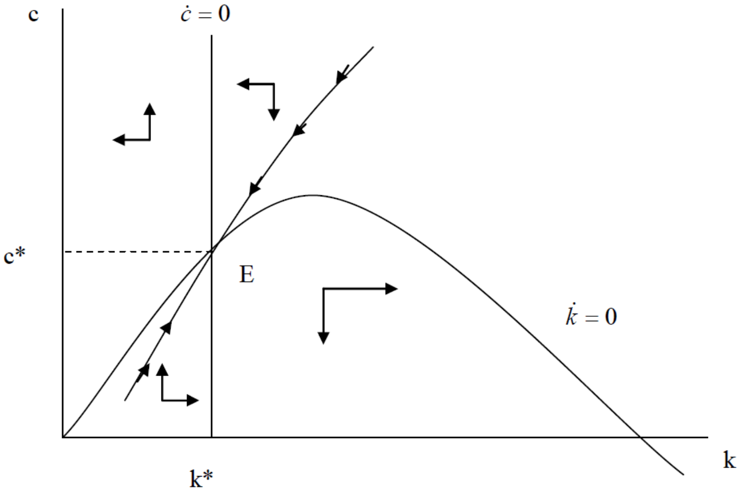
Fonte: [Barbosa, 2017]

Diagrama de fases



Fonte: [Barbosa, 2017]

Diagrama de fases



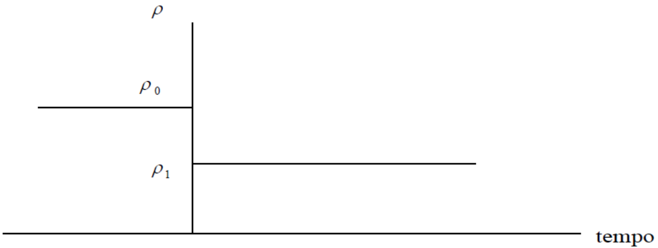
Fonte: [Barbosa, 2017]

Exercício

Mostre que o crescimento da produtividade da mão de obra é dado por

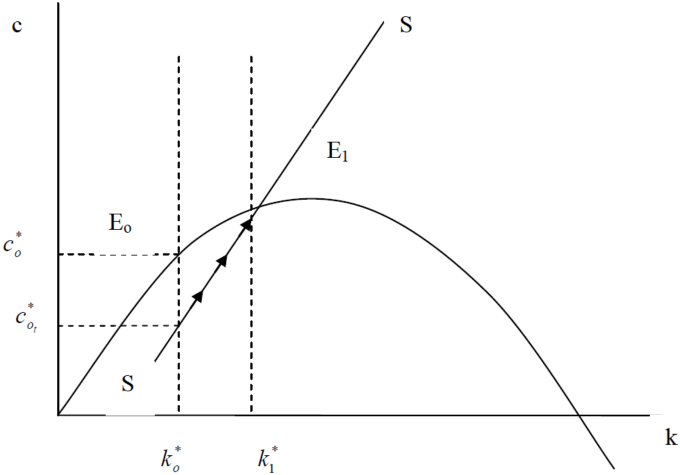
$$\hat{Y} - \hat{L} = \hat{A} + \alpha_k \left(\frac{f(k) - c(k)}{k} - (g + n + \delta) \right)$$

Choque



Fonte: [Barbosa, 2017]

Choque

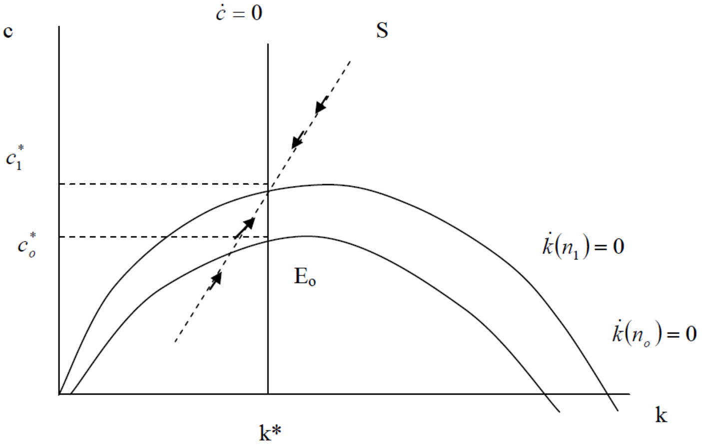


Fonte: [Barbosa, 2017]

Choque

Fonte: [Barbosa, 2017]

Choque



Fonte: [Barbosa, 2017]

Referências

Barbosa, F. d. H. (2017).
Macroeconomia.
Editora FGV.

Cass, D. (1965).
Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation.
The Review of economic studies, 32(3):233–240.

KOOPMANS, T. C. (1965).
On the concept of optimal economic growth,"in the econometric approach to development planning, north holland, amsterdam.

Ramsey, F. P. (1928).
A mathematical theory of saving.
The economic journal, 38(152):543–559.