$$e_j^n = e^{i\mu j \Delta x} \quad e^{V K n}$$

se propone la anterior expresión para error con propagación exponencial. Si se toma $\xi = e^{VK}$:

$$e_j^n = e^{i\mu j \Delta x} \, \xi^n$$

si V es un valor imaginario, el error oscilará en el tiempo pero no crecerá, en su lugar, si V es positivo el error crecerá exponencialmente.

La estabilidad se reduce a $|\xi| \leq 1$

Dada la ecuación:

$$u_j^{n+1} = \frac{\alpha}{2}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \cdot \left[u_{j+1}^n - 2_j^n + u_{j-1}^n\right] + \left[2u_j^n - u_j^{n-1}\right] + O^{-2}$$

y reemplazando dentro el error hablado se tiene:

$$e_j^{n+1} - 2e_j^n + e_j^{n-1} = \frac{\alpha}{2}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \left(e_{j+1}^n - 2e_j^n + e_{j-1}^n\right)$$

$$\downarrow$$

$$e^{i\mu j \Delta x} \, \varepsilon^n \left(\varepsilon - 2 + \frac{1}{\varepsilon} - \frac{\alpha}{2}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \left(e^{iV\Delta x} - 2 + e^{-iV\Delta x}\right)\right) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\varepsilon^2 - 2\varepsilon \underbrace{\left(1 - \alpha\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \cdot \sin^2(V\Delta x/2)\right)}_{\text{Tomaré esto como } \gamma} + 1 = 0$$

Hallando las raíces de: $\varepsilon^2 - 2\varepsilon\gamma + 1 = 0$

$$\frac{+2\alpha\gamma \pm \sqrt{(2\alpha\gamma)^2 - 4(1)(1)}}{2} = \begin{cases} \varepsilon_+ = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1} \\ \varepsilon_- = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1} \end{cases}$$

γ debe ser menor o igual a 1, dado que, para todo valor de V se cumple:

$$1 - \alpha\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2(V\Delta x/2) \leq 1$$

Existen 2 casos

$|\gamma| \leq 1 \rightarrow |\varepsilon_+| = |\varepsilon_-| = 1 \rightarrow$ Por ende el esquema es estable

$\gamma < -1 \rightarrow |\varepsilon_-| > 1 \rightarrow$ Como $|\varepsilon|$ no cumple condición de estabilidad, el esquema es inestable

Como $|\gamma| \leq 1$:

oscila entre 1 y -1

$$\alpha\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2\left(\cancel{V\Delta x/2}\right) \leq 1$$

Ref: solución de la ecuación de onda como un problema de valores iniciales usando diferencias finitas. F.S Guzmán