Introdução e motivação para a pesquisa em redes neurais de Lyapunov

Rodrigo Fill
Report #1

Grupo TURING

Grupo Turing

Introdução e motivação para a pesquisa em redes neu de Lyapunov

25 de novembro de 2020

---

1 Introdução

Análise de estabilidade consiste na verificação se um sistema dinâmico é disposto a nunca escapar de um determinado ponto ou região de interesse, se ele pode convergir para tais regiões, ou se existe uma predisposição para a convergência à regiões fora do interesse, até mesmo para respostas ilimitadas. Convergência de respostas consiste em fator primário para projetos de controle de sistemas e são altamente propensos ao erro, uma vez que a análise não linear de uma planta é excessivamente complexa, enquanto que a linear é muito simples, mas são limitados os casos em que a análise linear é capaz de satisfazer as necessidades do projeto.

Uma planta de resposta não linear pode apresentar diversos comportamentos que não são característicos dos sistemas lineares, como:

- Múltiplos equilíbrios
- Ciclos limites
- Caos
- Bifurcações

A correta análise destes sistemas consiste em um importante fator de segurança para a aplicação, não é a toa que estabilidade e segurança costumam ser utilizados como sinônimos. Versar sobre a estabilidade é também garantir a segurança de um aparelho e todos que daquele dependem, como o piloto automático de uma aeronave, ou do sistema de refrigeração de uma usina nuclear, mas não só em termos de aparatos eletrônicos e digitais. É possível prever a eficiência de uma política de controle e dispersão de uma doença infecciosa tendo um bom modelo desta e sabendo analisar de forma precisa seus equilíbrios, ciclos limites, bifurcações, atratividade, entre outros fatores. Sabendo, por exemplo, qual a decisão pode levar a dinâmica da doença à um equilíbrio assintótico nulo ou pouco significativo, enquanto uma outra ação, aparentemente boa, pode levar a dinâmica à região de atratividade de um ciclo limite de 1000 mortes diárias, para pegar um exemplo familiar a todos nos dias atuais.

Mas para que os termos façam mais sentido é relevante apresentar uma definição mais formal de cada um deles.

1.1 Múltiplos equilíbrios:

Sistemas dinâmicos lineares apresentam sempre apenas um ponto de equilíbrio, este podendo ser estável, instável, assintoticamente estável, assintoticamente instável. Já sistemas não lineares podem apresentar mais de um ponto de equilíbrio, com diferentes domínios de atração, que consiste na região em que aquele exerce influência superior aos outros pontos , assim ao estar naquele domínio a dinâmica do modelo está sujeita à sua influência.

1.2 Ciclos Limites:

Ciclos limites são oscilações estáveis internamente, seriam um análogo em duas dimensões de um ponto de equilíbrio. Assim como os pontos, os ciclos limites podem ser estáveis ou instáveis, possuem um domínio de atração e modificam de forma significativa a dinâmica do modelo.

1.3 Caos:

Um sistema caótico apresenta uma alta sensibilidade à variação de parâmetros, ou seja, uma simulação em uma condição inicial, ao ser ressimulada variando minimamente algum parâmetro, causa uma grande variação na resposta qualitativa do mesmo. Vale dizer que caos não tem relação com efeito borboleta, apesar que este surgiu de um sistema caótico, a hipótese o bater de asas de uma borboleta na amazônia pode causar um tornado nos EUA é uma interpretação literal infundada da teoria de sistemas dinâmicos.

1.4 Bifurcações:

Bifurcações são alterações qualitativas na resposta de um sistema sujeita a alterações nos parâmetros. Alterações qualitativas são alterações em trajetórias, equilíbrios, ciclos-limites, etc. O diagrama de bifurcações é de extrema importância para compreensão e segurança do projeto.

2 Motivação

O estudo da estabilidade de sistemas não lineares pode ser feito de inúmeras formas distintas, sendo a mais comum baseada no teorema de Hartman-Grobman, que versa sobre a estabilidade da linearização e busca condições necessárias e suficientes para estender essas conclusões do sistema linear para o sistema não linear. Assim, de regra geral, antes de linearizar qualquer sistema deveria ser feita uma verificação pelo teorema de Hartman-Grobman para verificar se o mesmo pode ser linearizado.

Como a análise deste modo é atrelada ao sistema linearizado, e, agora cientes das limitações atreladas à esta simplificação, qualquer conclusão proveniente deste teorema é apenas local, não há formas de inferir a globalidade das conclusões. O teorema de Hartman-Grobman é dependente das seguintes hipóteses:

1. $\dot{x} = f(x)$; $f \in C^1$; $f : R \to R$
2. $\bar{x}$: Ponto de equilíbrio e $A = [J f]_{\bar{x}}$ /
3. $R[\lambda_i] \neq 0$

O referente teorema enuncia que quando um sistema satisfaz as condições acima ele pode ser linearizado sem perder generalidade, visto que os fluxos do sistema não linear e do sistema linear são suficientemente próximos ao redor do ponto de equilíbrio analisado, sendo que a influência de outros componentes podem ser ignorados. Vale ressaltar que caso a parte real dos autovalores da matriz jacobiana sejam nulos, não é possível linearizar o sistema sem perdas significativas, logo nenhuma conclusão poderá ser obtida para a dinâmica não linear.

Mas a estabilidade local pouco é robusta, é necessário ter condições de conclusões globais para aumentar a robustez, consequentemente a segurança, do sistema em questão. Assim enunciamos o método direto de Lyapunov. Este consiste em uma generalização do conceito de energia de um sistema, e foi concebido desta forma. Intuitivamente é possível intuir que a energia de um sistema, quando decrescente, gera uma estabilidade assintótica. Quando constante gera estabilidade, e, quando crescente, gera instabilidade. Em geral, e teoricamente, a função candidata teria uma forma de energia, mas isso não é tão simples, como veremos a seguir.

Antes de avançar para o método em si, é válido relembrar algumas definições importantes a respeito de funções:

- Função localmente positiva definida:

$$V(x),\ V(x): R^n \to R;\ \text{é l.p.d.f} \Leftrightarrow \begin{cases} V(0) = 0 \\ V(x) > 0 \end{cases};\ \forall (x \neq 0) \in B_R$$

Em palavras, trata-se de uma função que, em uma dada região é nula na origem e positiva para todos os outros pontos.

- Função positiva definida:

$$V(x),\ V(x): R^n \to R;\ \text{é p.d.f} \Leftrightarrow \begin{cases} V(0) = 0 \\ V(x) > 0 \end{cases};\ \forall (x \neq 0) \in R$$

Trata-se de uma função que, em todo o espaço de estados, é nula na origem e positiva para todos os outros pontos.

- Função localmente negativa definida:

$$V(x) \text{ é l.n.d.f} \Leftrightarrow -V(x) \text{ é l.p.d.f}$$

- Função negativa definida:

$$V(x) \text{ é n.d.f} \Leftrightarrow -V(x) \text{ é p.d.f}$$

Em posse dessas definições, é possível partir para o método direto de Lyapunov: $\exists V(x)$ com derivadas parciais contínuas tais que:

- $V(x)$ é l.p.d.f;
- $\dot{V}(x)$ é l.n.s.d.f;

$\Rightarrow$ 0 é localmente estável; Se $\dot{V}(x)$ é l.n.d.f então 0 é localmente assintoticamente estável.

Desta forma, se encontrarmos uma função candidata, $V(x)$, localmente positiva definida com uma derivada localmente negativa semi-definida temos que a origem, lembrando que sempre queremos analisar a origem, se o ponto de equilíbrio não for na origem basta transladar, é estável. Se a derivada for localmente definida então a origem é localmente assintoticamente estável.

Dois grandes problemas pronunciados pelo método direto de Lyapunov. Primeiramente trata-se apenas de condições suficientes, mas não necessárias, de forma que se encontrar uma função de Lyapunov com a qual é possível concluir que o ponto é apenas estável, por exemplo, não é possível concluir que o ponto não é assintoticamente estável. Esse problema é corrigido por um teorema complementar que não será enunciado aqui. O segundo problema é que não existe uma forma direta de determinar a função de Lyapunov. Como dito, ela pode ser derivada de uma energia para o sistema, mas não há garantias que a obtenção desta forma resultará em uma boa função para análise.

Sobre a estabilidade global, grande vantagem do método, a condição a ser realizada é simples, basta remover o localmente dos itens anteriores e adicionar um novo:

- $V(x)$ é p.d.f;
- $\dot{V}(x)$ é n.s.d.f;
- $\lim_{x\to\infty} V(x) = \infty$

$\Rightarrow$ origem é globalmente estável; Se $\dot{V}(x)$ é n.d.f então a origem é globalmente assintoticamente estável.

Com isso fica evidente a motivação da implementação de redes neurais de Lyapunov, s algoritmos de aprendizagem de máquina adaptados à encontrar funções de Lyapunov ótimas, de forma simples e rápida, garantindo robustez para a condição fornecida. Para entender melhor algumas aplicações, bem como dificuldades e a motivação como um todo, apresenta-se agora alguns exercícios sobre o tema.

3 Exercícios

For the following systems, find the equilibrium points and determine their stability. Indica whether the stability is asymptotic, and whether it is global.

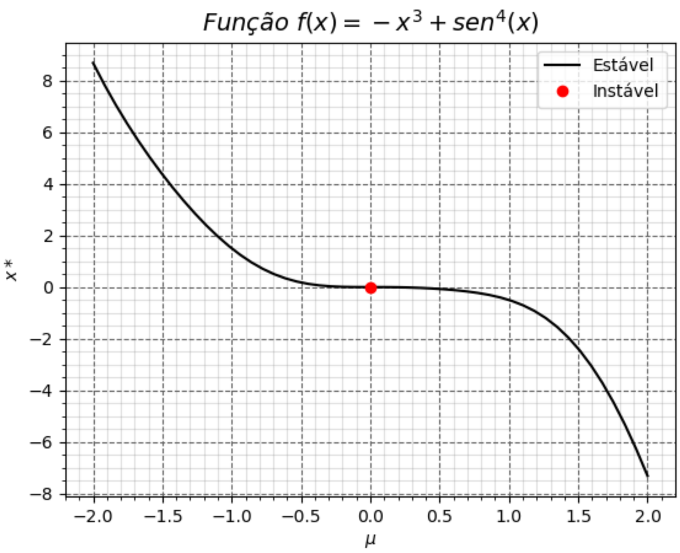
1. $\dot{x} = -x^3 + sen^4 x$
2. $\dot{x} = (5 - x)^5$
3. $\ddot{x} + \dot{x}^5 + x^7 = x^2 sen^8(x)\ cos^2(3x)$
4. $\ddot{x} + (x - 1)^2 \dot{x}^7 + x = sen(x\pi/2)$

3.1 Solução

Primeiro é necessário encontrar os pontos de equilíbrio do sistema descrito:

$$\dot{x} = 0 = -x^3 + sen^4 x$$

Resolvendo numericamente a equação acima temos o seguinte gráfico:



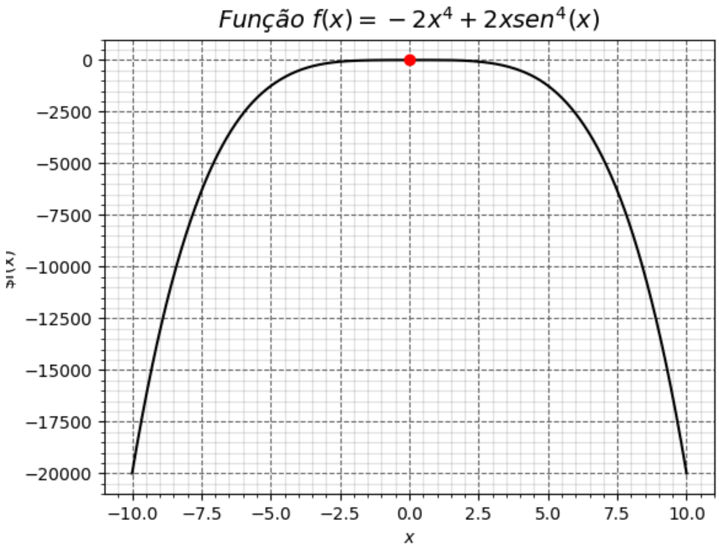
O gráfico indica a existência de um único ponto de equilíbrio com multiplicidade 3. Tomando uma candidata a função de Lyapunov dada por:

$$V(x) = x^2$$

Temos, portanto, que a $V(x)$ é positiva definida e ilimitada. Sua derivada tem valor:

$$\dot{V}(x) = 2x\dot{x} = -2x^4 + 2x sen^4(x)$$

Como o termo $2xsen^4(x)$ é sempre menor em módulo que o termo $2x^4$, e como este último tem um sinal negativo na frente, podemos dizer que a derivada de nossa candidata é negativa definida, veja a imagem abaixo.



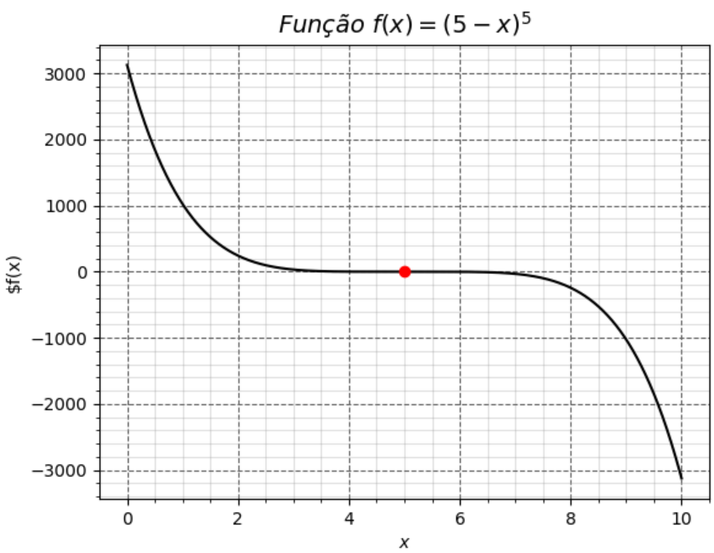
Assim pelo teorema de Lyapunov podemos dizer que a origem do sistema é globalmente assintoticamente estável.

3.2 Solução

Vamos iniciar a análise pela determinação dos pontos de equilíbrio do sistema descrito:

$$\dot{x} = 0 = (5 - x)^5$$

Não é complexo inferir da expressão acima que o único ponto de equilíbrio do sistema é $x = 5$.



Vamos tomar a seguinte candidata à função de Lyapunov:

$$V(x) = (5 - x)^2$$

Esta função é positiva definida, vejamos o comportamento de usa derivada:

$$\dot{V}(x) = 2(5 - x)\dot{x} = -2(5 - x)^6$$

Que é uma função negativa definida, e não é nula na origem, é nula em $x = 5$, mas podemos transladar o ponto de equilíbrio para a origem, visto que o ponto de equilíbrio também é $x = 5$, assim sabemos que o ponto é globalmente assintoticamente estável.

3.3 Solução

Vamos começar a análise definindo os pontos de equilíbrio deste sistema, primeiro vamos fazer uma transformação de variáveis:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2^5 + x_1^2(sen^8(x_1)cos^2(3x_1) - x_1^5) \end{cases}$$

Deste sistema vemos claramente, mas também comprova-se pelo MATLAB, que a origem é um ponto de equilíbrio. Vamos tentar encontrar algumas funções de Lyapunov por alguns diferentes métodos para explicar o equilíbrio do ponto. Tomando a seguinte função:

$$V_1 = \frac{x_2^2}{2} + (1 - cos(X_1))$$

Retorna a seguinte expressão para sua derivada:

$$\dot{V}_1 = x_2 \cdot \sin(x_1) - x_2 \cdot (x_2^5 + x_1^7 - x_1^2 \cdot \cos(3x_1)^2 \cdot \sin(x_1)^8)$$

Simulando essas expressões no MATLAB, afim de visualizar seu comportamento em torno do equilíbrio, vou limitar a visualização à uma pequena região em torno do mesmo, 0,1 no eixo X_1 e 0.1 no eixo X_2. Assim temos os seguintes gráficos:

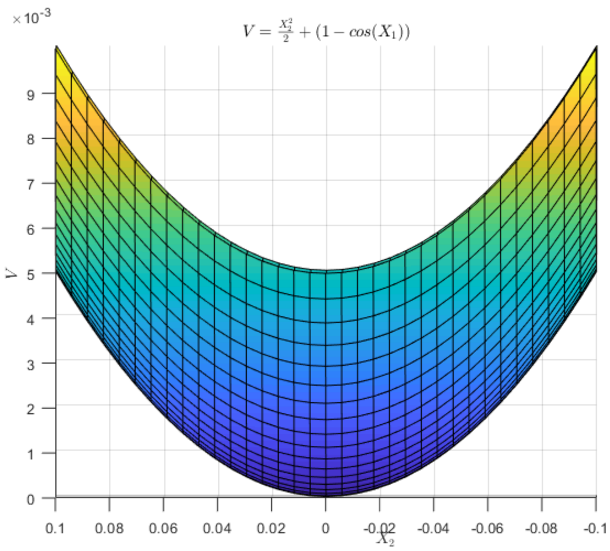


Figura 1: Gráfico de superfície de V_1 em relação à x_2

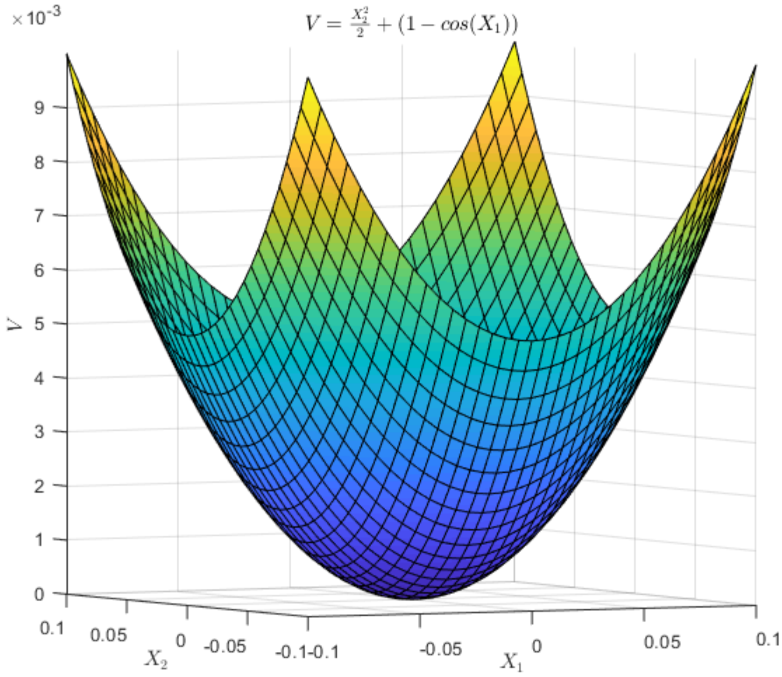


Figura 2: Gráfico de superfície de V em relação à x_1 e x_2

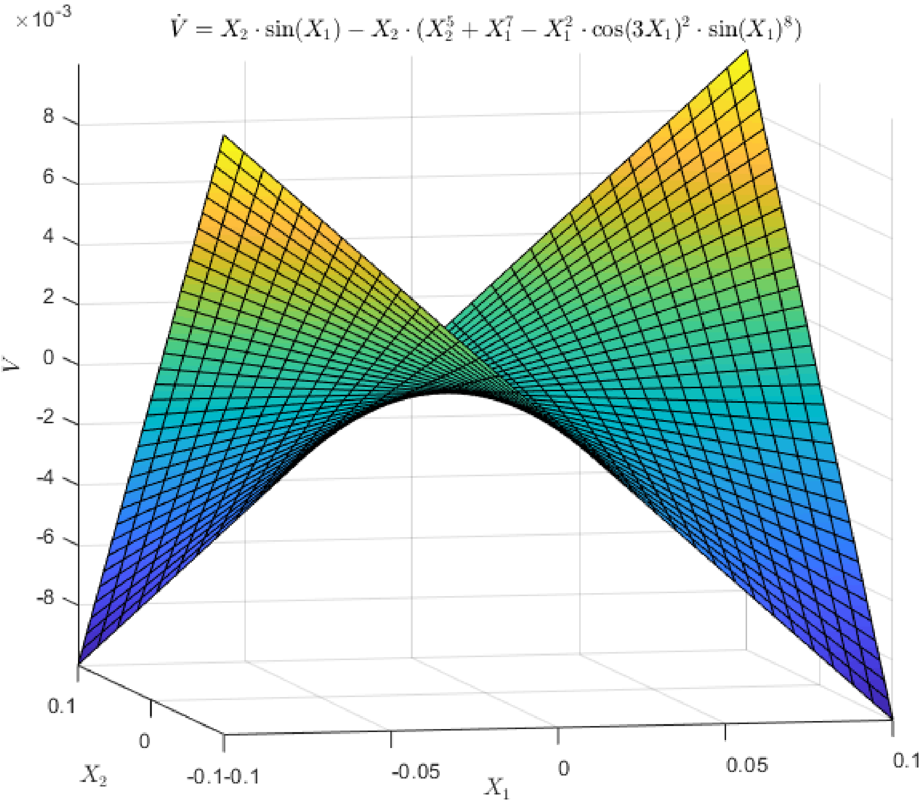


Figura 3: Gráfico de superfície de $\dot{V}$ em relação à x_1 e x_2

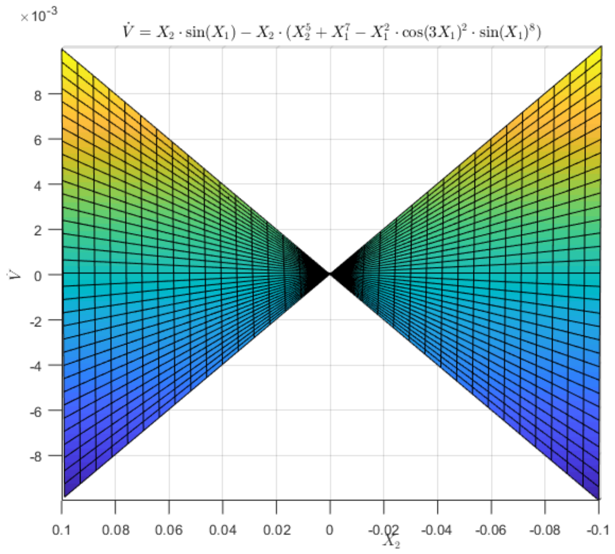


Figura 4: Gráfico de superfície de $\dot{V}_1$ em relação à x_2

Vemos que, claramente, apesar da função V_1 ser positiva definida para o intervalo em análise, sua derivada apresenta um comportamento que não pode ser dito como negativo definido ou semi definido, de forma que esta função de Lyapunov não ajuda na análise do sistema. Assim vamos buscar uma outra função:

$$V_2 = x_1^2 + x_2^2$$

Sua derivada é:

$$\dot{V}_2 = 2\,x_1 x_2 - 2\,x_2\ \ x_1{}^7 - x_1{}^2 \cos(3x_1)^2 \sin(x_1)^8 + x_2{}^5$$

Assim, novamente simulando as expressões acima temos o seguinte resultado:

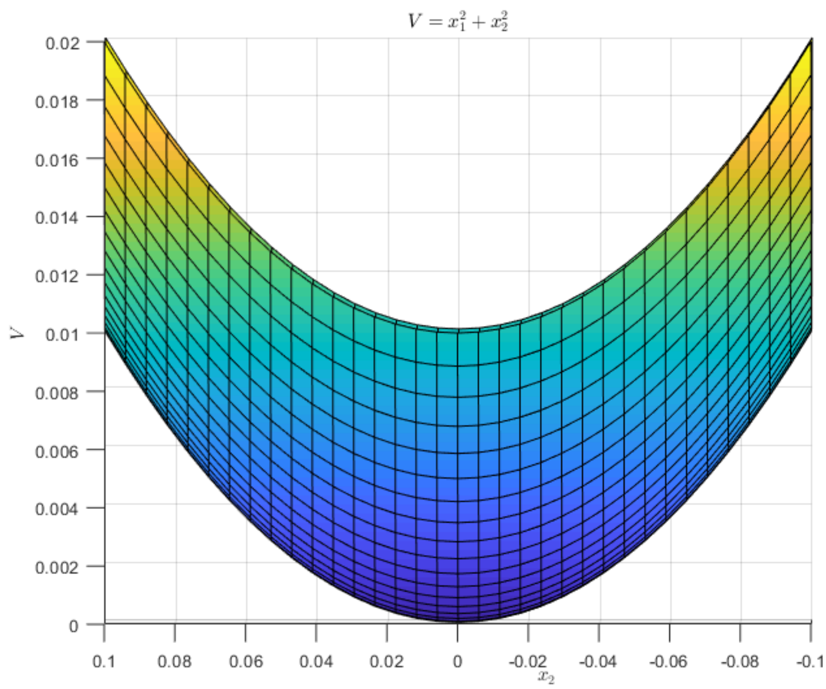


Figura 5: Gráfico de superfície de V_2 em relação à x_2

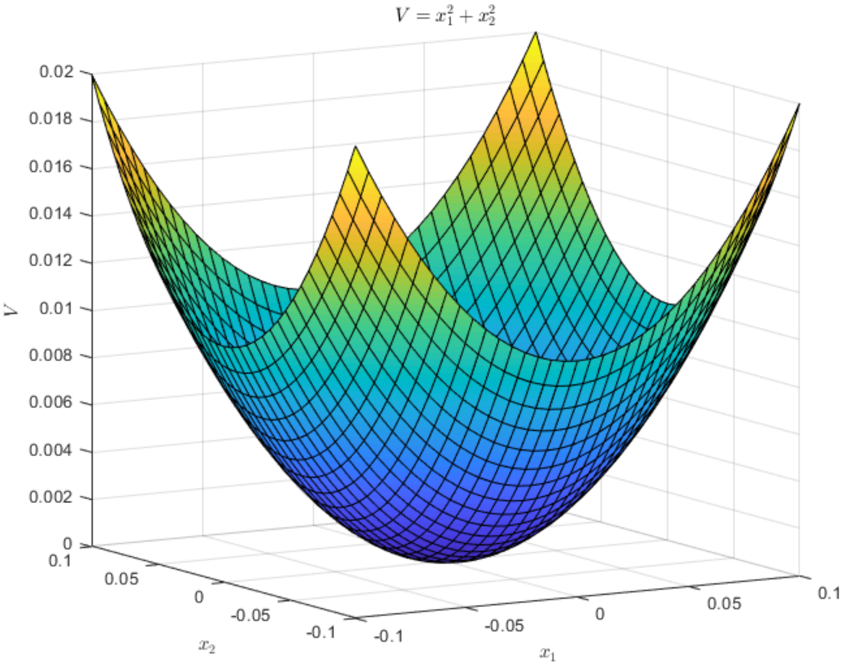


Figura 6: Gráfico de superfície de V em relação à x_1 e x_2

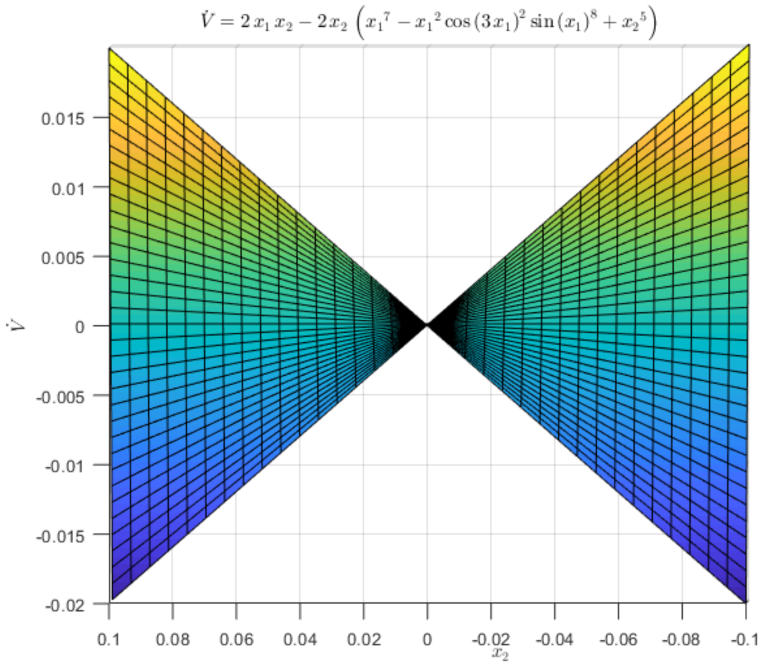


Figura 7: Gráfico de superfície de $\dot{V}$ em relação à x_2

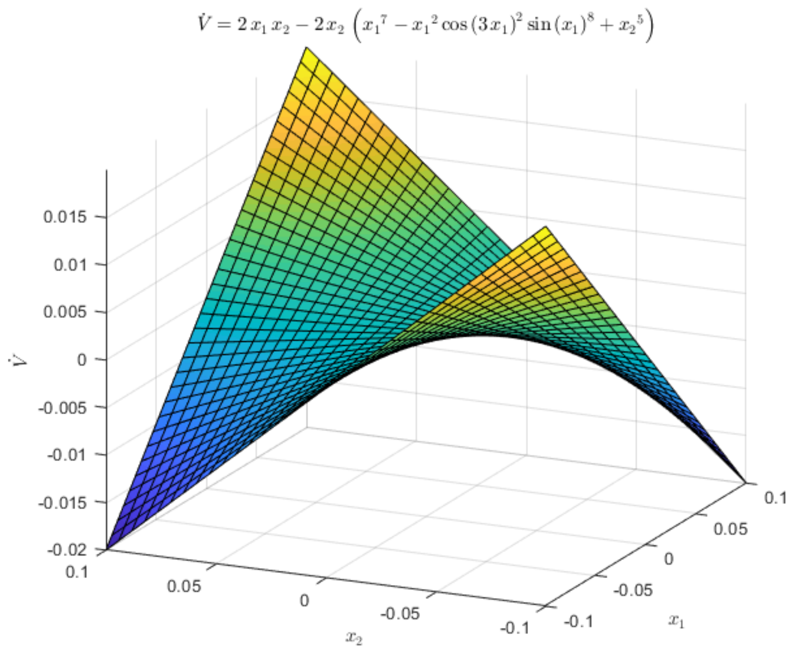


Figura 8: Gráfico de superfície de $\dot{V}_2$ em relação à x_1 e x_2

Mais um vez similar ao anterior, igualmente impossível de tirar alguma conclusão sobre o sistema visto que a função acima não satisfaz as condições do método direto de Lyapunov. Por fim, em uma ultima tentativa vamos escolher mais uma equação:

$$V_3 = \int_0^{x_1} -x_1{}^7 + x_1{}^2 \cos(3x_1)^2 \sin(x_1)^8 - x_2{}^5 \; dx_1 + \frac{x_2{}^2}{2}$$

Cuja derivada é:

$$\dot{V}_3 = \begin{array}{l} -2x_2 - 5x_1 x_2{}^4 \quad x_1{}^7 - x_1{}^2 \cos(3x_1)^2 \sin(x_1)^8 + x_2{}^5 \quad - x_2 \quad \frac{83 x_1{}^2 \cos(2x_1)}{512} - \frac{27 x_1{}^2 \cos(6x_1)}{256} \\ - x_2 \quad \frac{27 x_1{}^2 \cos(8x_1)}{256} - \frac{7 x_1{}^2 \cos(10x_1)}{128} + \frac{x_1{}^2 \cos(12x_1)}{64} - \frac{x_1{}^2 \cos(14x_1)}{512} - \frac{31 x_1{}^2}{256} + x_2{}^5 + x_1{}^7 \end{array}$$

Ressimulando, sob as mesmas condições:

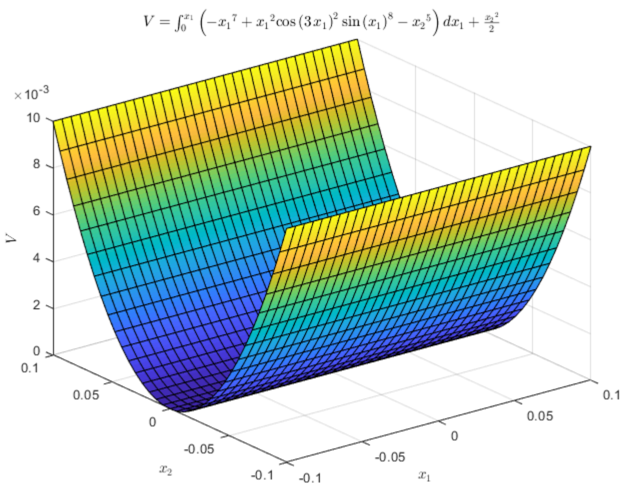


Figura 9: Gráfico de superfície de V_3 em relação à x_1 e x_2

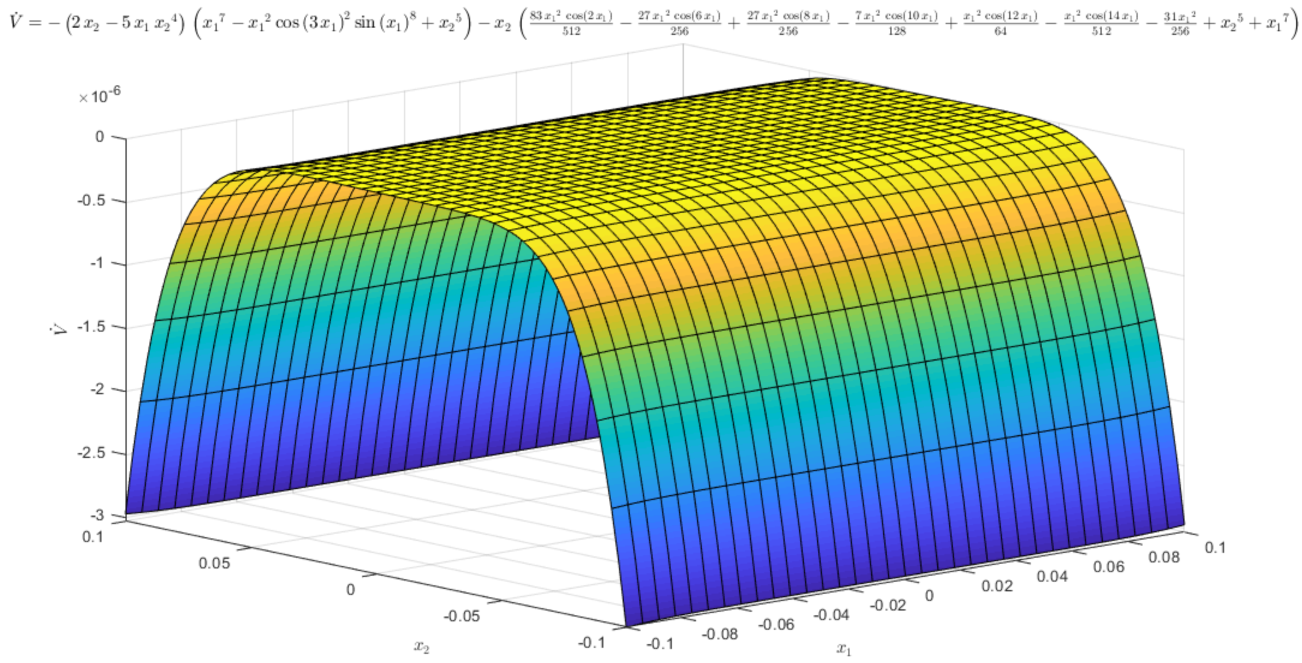


Figura 10: Gráfico de superfície de $\dot V_3$ em relação à x_1 e x_2

Neste caso o resultado é consideravelmente interessante, temos uma situação em que poderíamos tirar alguma conclusão sobre o sistema, mas infelizmente a função V_3 é apenas positiva semi-definida, o que invalida a condição do teorema de Lyapunov.

Aqui apresentei apenas 3 resultados, mas posso afirmar que foram mais de 50 funções diferentes simuladas não em busca de alguma capaz de satisfazer os teoremas de Lyapuno e La Salle, infelizmente este método se mostrou ineficaz para análise da estabilidade do sistema.

Com a falha das propostas anteriores, vamos partir para uma análise linearizada do sistema, afinal ainda temos como aplicar os teoremas de Hartman-Grobman. Vejamos a matriz jacob

$$J = \begin{bmatrix} 0 & \\ 2x_1\cos(3x_1)^2\sin(x_1)^8 - 7x_1^6 - 6x_1^2\cos(3x_1)\sin(3x_1)\sin(x_1)^8 + 8x_1^2\cos(3x_1)^2\cos(x_1)\sin(& \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow J|_{x*=(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow det(\lambda I - J) = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

Verificamos, portanto, que o sistema apresenta dois polos com parte real nula no equil sendo impossível a análise apenas pelo teorema de Hartman-Grobman. Assim, temos um sistema pelo qual não conseguimos afirmar nada devido às limitações de ambos os métodos. Mas utilizando o poder da computação para simular as trajetórias não lineares com um solver do MATLAB:

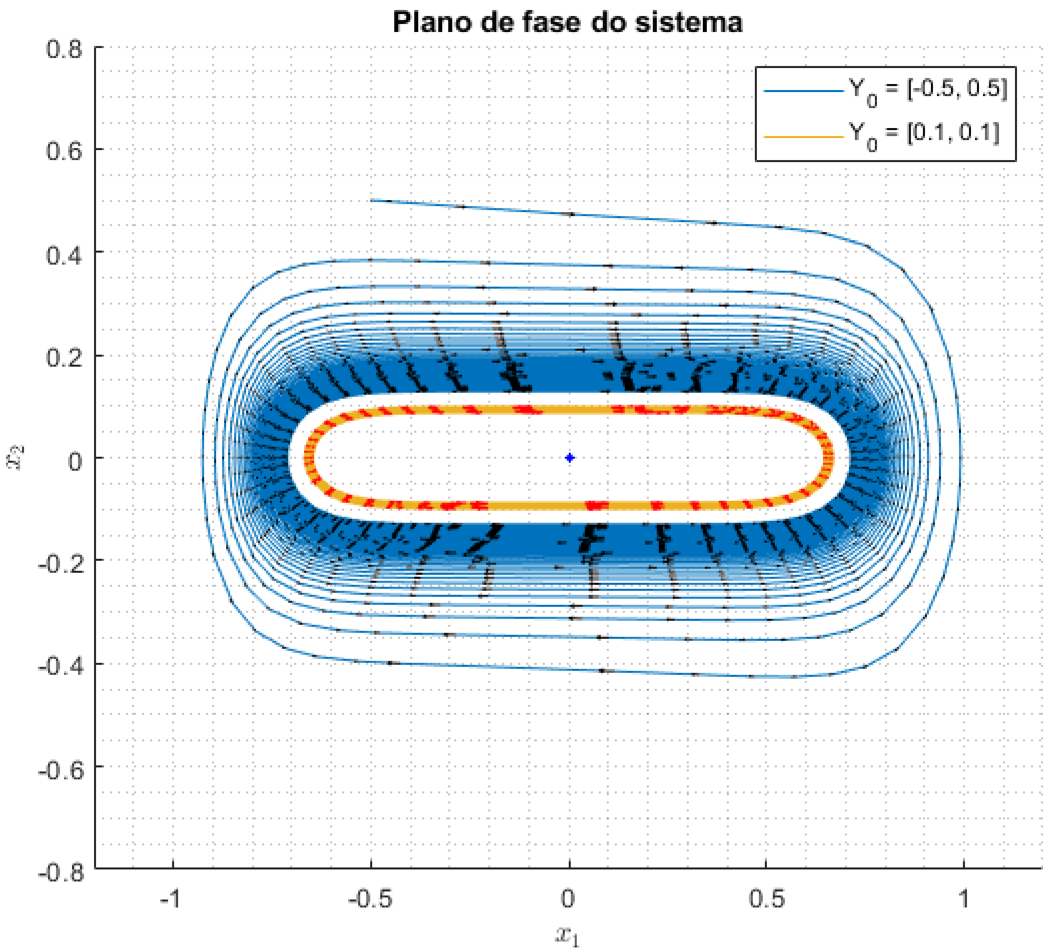


Figura 11: Plano de fase com velocidade de fase para o item 3

Assim podemos visualizar, de forma conclusiva, o comportamento do equilíbrio (0, 0), que aparenta ser assintoticamente estável. A primeira simulação ele parecia ser um centro ou ciclo limite, mas dado o devido tempo de simulação, $t > 100000\,s$ as trajetórias parecem tender ao equilíbrio. Na imagem acima simulei com um valor menor, para deixar mais evidente convergência mas ainda tendo formas de trajetória e não algum tipo de pintura abstrata.

3.4 Solução:

Vamos, novamente, começar a análise definindo os pontos de equilíbrio deste ultimo sistema, primeiro transformando as variáveis:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -(x_1 - 1)^2 x_2^7 - x_1 + sen(x_1 \pi/2) \end{cases}$$

Deste sistema vemos claramente, mas, também prova-se pelo MATLAB, que a origem é um ponto de equilíbrio. Entretanto, neste caso, os pontos $(1, 0)$ e $(-1, 0)$ também são pontos de equilíbrio, logo a análise deve ser feita para 3 pontos distintos. Assim, para evitar ficar colocando diversos gráficos semelhantes apenas deslocando os pontos de equilíbrio para a origem, pretendo pular esta parte de estimação de funções de Lyapunov não, reportando que testei diversas funções, para os três pontos, e, apesar de encontrar casos extremamente próximos das condições necessárias, como abaixo:

$$V = \frac{-\int_0^{x_2} \left(\sin\left(\frac{\pi x_1}{2}\right) - x_1 - x_2 (x_1 - 1)^2 \right) dx_2}{0.58} + \int_0^{x_1} \left(\sin\left(\frac{\pi x_1}{2}\right) - x_1 - x_2 (x_1 - 1)^2 \right) dx_1 - \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^3}{2}$$

Retorna a seguinte expressão para sua derivada:

$$\dot{V} = \left(x_1 - \sin\left(\frac{\pi x_1}{2}\right) + x_2^7 (x_1 - 1)^2 \right) \left(\frac{39 x_1}{20} - \frac{92 x_2}{17} + \frac{50 \cos\left(\frac{\pi x_2}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{4}\right)}{17} - \frac{39 x_1^2}{20} + \frac{13 x_1^3}{20} + \frac{75}{1} \cdots \right.$$
$$\left. - x_2 \left(\frac{39 x_1}{20} + \frac{39 x_2}{20} - \frac{39 x_1 x_2}{10} - \frac{39 \cos\left(\frac{\pi x_1}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi x_1}{4}\right)}{10} + \frac{39 x_1^2 x_2}{20} + \frac{3 x_1^2}{2} \right) \right.$$

Resultando na seguinte simulação:

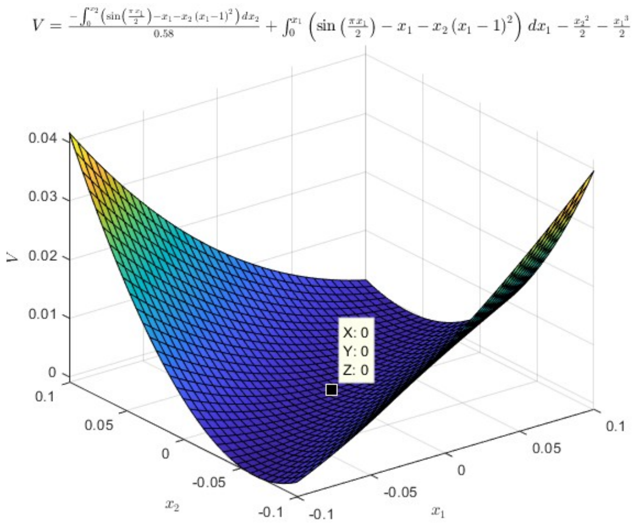


Figura 12: Gráfico de superfície de V em relação à x_1 e x_2

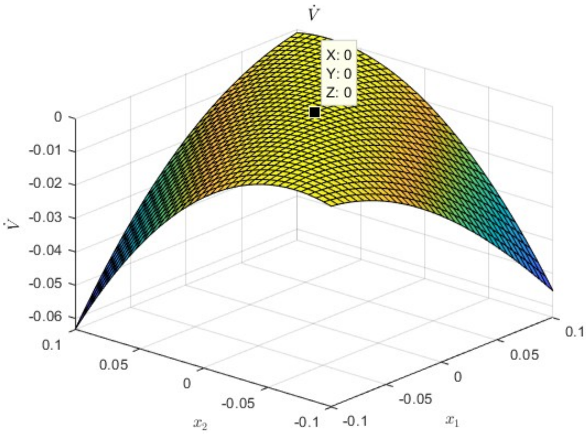


Figura 13: Gráfico de superfície de $\dot{V}$ em relação à x_1 e x_2

notar que neste caso as funções são quase perfeitas, exceto, no caso de V, por um pequeno intervalo em torno de $x_1 = -0.1$ e $x_2 \approx -0.06$ em que a função acaba assumindo valores negativos. Já em $\dot{V}$ temos a região em $x_1 = 0.1$ e $x_2 \approx 0.06$ em que a função assume valores ligeiramente positivos. Variei constantemente os coeficientes mas parece ocorrer uma espécie de relação cruzada entre as funções, se eu torno uma positiva definida no intervalo, a outra se torna mais positiva também, e vice-versa, acabando sendo praticamente impossível encontrar um valor exato. Outro problema é que me sinto inseguro em afirmar que é possível escolher uma região menor em torno do equilíbrio que exclua estes intervalos problemáticos, visto que no MATLAB ao reduzir o intervalo de forma suficiente ele reproduz o problema, a função que aparece é a mesma com valores no eixo-Z um pouco menores apenas. Enfim, esse foi o mais perto que consegui chegar, como realmente é consideravelmente perto achei válido expor aqui, mas para não prolongar ainda mais o relatório vou omitir outras funções, bem como os outros pontos. Com este propósito também vou emitir o gradiente variante, que novamente não fornece equações de simples resolução analítica, ou mesmo computacional, dada a complexidade do sistema.

Com a falha das propostas anteriores, vamos partir para uma análise linearizada do sistema, afinal ainda temos como aplicar os teoremas de Hartman-Grobman. Vejamos a matriz jacobiana:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (2-2x_1)\,x_2^7 + \frac{\pi\cos\left(\frac{\pi x_1}{2}\right)}{2} - 1 & -7\,x_2^6\,(x_1-1)^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow J|_{x*=(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\pi}{2}-1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow det(\lambda I - J) = \lambda^2 - \frac{\pi}{2} + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi-2}}{2}$$

$$\Rightarrow J|_{x*=(1,0)} = J|_{x*=(-1,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow det(\lambda I - J) = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

Assim é possível verificar que o ponto $(0,0)$ apresenta dois autovalores de opostos, indicando que trata-se de uma sela, tanto no sistema linearizado quanto no não linear, já os outros dois pontos apresentam autovalores de parte real nula, que impossibilita a análise precisa apenas pelo teorema de Hartman-Grobman. Nestes casos, também, ao tentar utilizar o teorema de Henry-Carr acabamos incorrendo em pares de autovetores L.D. Para analisar de forma os casos vamos utilizar todo o poder da computação para traçar as trajetórias não lineares utilizando o solver diferencial do MATLAB, temos:

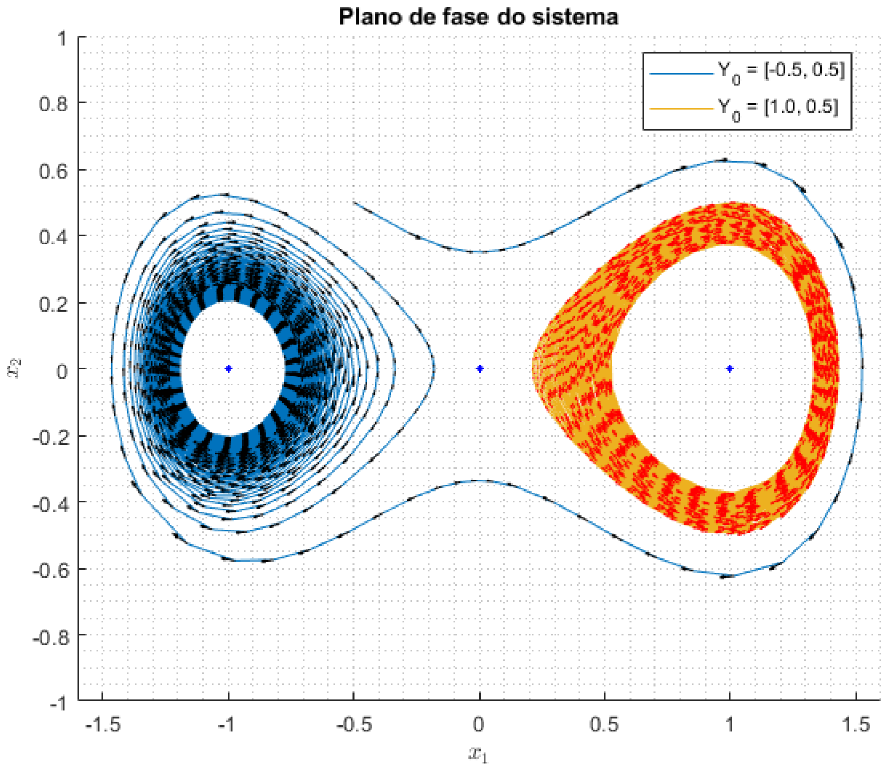


Figura 14: Plano de fase com velocidade de fase para o item 4

Assim podemos visualizar o comportamento de sela do ponto $(0, 0)$, mas vemos que os outros pontos aparentam ser assintoticamente estáveis. A primeira simulação eles pareciam ser centros ou ciclos limites, mas dado o devido tempo de simulação as trajetórias parecem tender ao equilíbrio. É interessante inferir, pelo gráfico acima, que o ponto $(-1, 0)$ possui um domínio de atração aparentemente maior que dos outros pontos.

4 Segundo exercício

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -6x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3 \end{cases}$$

Compare: Estabilidade linearizada X método direto de Lyapunov

4.1 Solução

A fim de realizar a comparação requisitada, vamos iniciar com a estabilidade linearizada, que é mais simples. Começamos, como sempre, determinando o equilíbrio do sistema:

$$\begin{cases} -6x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 = x_2 \\ x_1 = 3x_2 + x_2^3 \end{cases} \Rightarrow 8x_2 + 3x_2^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_0^* = (0, 0) \\ x_1^* = (\pm\frac{2\sqrt{6}}{9} i, \pm\frac{2\sqrt{6}}{3} i) \end{cases}$$

Vamos considerar apenas que $x \in \mathbb{R}^2$, desconsiderando as raízes imaginárias, temos que a origem é o único ponto de equilíbrio. Calculando agora o jacobiano:

$$J = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -6x_2^2 - 6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow J|_{x*=(0,0)} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow det(\lambda I - J) = (\lambda + 6)^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} \lambda_1 = -4 \\ \lambda_2 = -8 \end{cases}$$

Assim podemos analisar que, tanto no sistema linearizado quanto não linearizado, o equilíbrio é assintoticamente, localmente estável. Assim conclúida a análise com o teorema de Hartman-Grobman, vamos analisar o sistema com o teorema de Lyapunov.

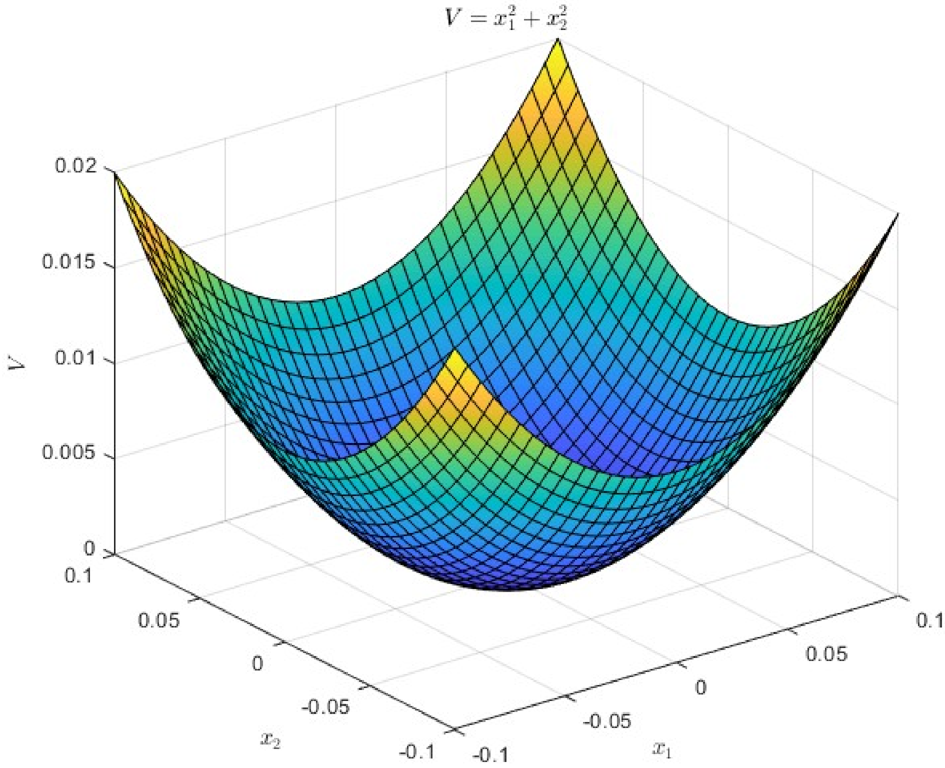
Vamos tomar uma candidata a função de Lyapunov dada pela função convexa mais básica no $\mathbb{R}^2$:

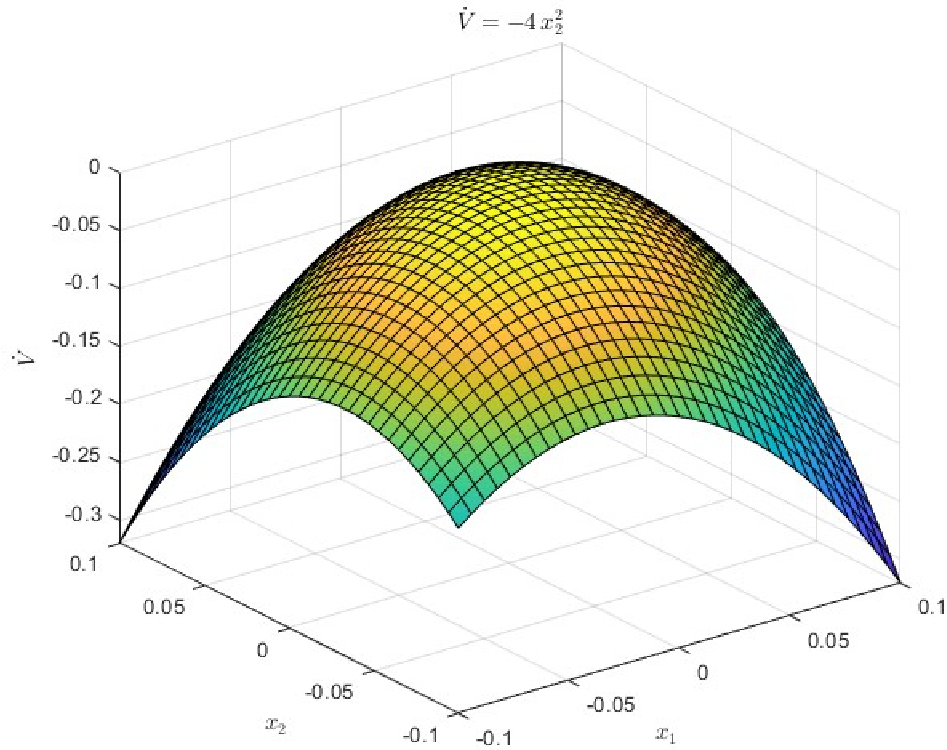
$$V(x) = x_1^2 + x_2^2$$

Temos, portanto, que a $V(x)$ é positiva definida e ilimitada. Sua derivada tem valor:

$$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 = 2x_2\dot{x}_2 = -2x_2(2x_2^3 + 6x_2 - 2x_1) - 2x_1(6x_1 - 2x_2) = -4x_2^4$$

Como o termo x_2^4 é sempre positivo, e como este tem um sinal negativo na frente, podemos dizer que a derivada de nossa candidata é negativa definida e ilimitada, como indicam as imagem abaixo:





Assim, pelo teorema de Lyapunov, podemos dizer que a origem do sistema é globalmente assintoticamente estável. Em comparação, isso relatando sobre todos os exercícios, vemos que o teorema de Lyapunov pode fornecer conclusões muito mais fortes que uma análise linearizada, visto que é possível concluir a estabilidade global do ponto, coisa que não era possível fazer antes.Em contrapartida a análise linearizada é sempre muito simples de ser feita, mesmo analiticamente, enquanto as condições suficientes de Lyapunov tornam a análise possivelmente muito complexa mesmo com o auxílio do computador, principalmente quando o sistema é muito complexo, dificultando o uso de métodos para encontrar uma candidata. Isto é tanto verdade que hoje existem pesquisas visando a implementação de redes neurais para cálculo dessas funções candidatas.

Grupo Turing

Grupo de Extensão da Universidade de São Paulo (USP)
R turing.usp@gmail.com
/ grupoturing.netlify.com
g facebook.com/grupoturing.usp
medium.com/turing-talks
° linkedin.com/company/grupo-turing