微分方程实验

2022326603159 周迎主

1 题目一

1.1 教材 P129 实验 1,2,4

1. 用 dsolve 求解微分方程的初值问题 $\frac{dy}{dx}+3y=8, y(0)=2$ 的解
解：使用 MATLAB 代码如下：

```
clear;
sym x
y = dsolve('Dy+3*y=8','y(0)=2','x');
display(y);
```

解得 $y=\frac{8}{3}-\frac{2e^{-3x}}{3}$
2. 用 dsolve 求解微分方程的初值问题 $(1+x^2)y''=2xy', y(0)=1, y'(0)=3$ 的解
解：使用 MATLAB 代码如下：

```
clear;
sym x
y = dsolve('(1+x^2)*D2y=2*x*Dy','y(0)=1','Dy(0)=3','x');
display(y);
```

解得 $x*(x^2+3)+1$
4. 用 dsolve 求解微分方程组

$$\begin{cases} 2\frac{dx}{dt}+4x+\frac{dy}{dt}-y=e^t, x(0)=\frac{3}{2} \\ \frac{dx}{dt}+3x+y=0, y(0)=0 \end{cases}$$

的特解
解：使用 MATLAB 代码如下：

```
clear;
[X,Y] = dsolve('2*Dx+4*x+Dy-y=exp(t),Dx+3*Dx+y=0','x(0)=3/2','y(0)=0');
pretty(X)
pretty(Y)
```

解得

$$\begin{cases} x=e^{2t}\frac{\frac{4e^{-t}}{5}+\frac{8}{5}}{8}+e^{\frac{-t}{2}}\frac{2e^{\frac{3t}{2}}+34}{30} \\ y=e^{\frac{-t}{2}}\frac{2e^{\frac{3t}{2}}+34}{15}-e^{2t}\frac{4e^{-t}+8}{5} \end{cases}$$

1.2 教材 P205 实验 1,2,4

1. 选择适当的 ode 函数，求常微分方程的初值问题 $\frac{dy}{dx}+3y=8, y(0)=2$ 的解
解：使用 MATLAB 代码如下：

```
function T1_2_1
[x,y] = ode45(@fun,[0,1],2);
plot(x,y)
xlabel('x')
ylabel('y')
function f = fun(x,y)
f = 8-3*y;
```

所得数值解的图像如下：

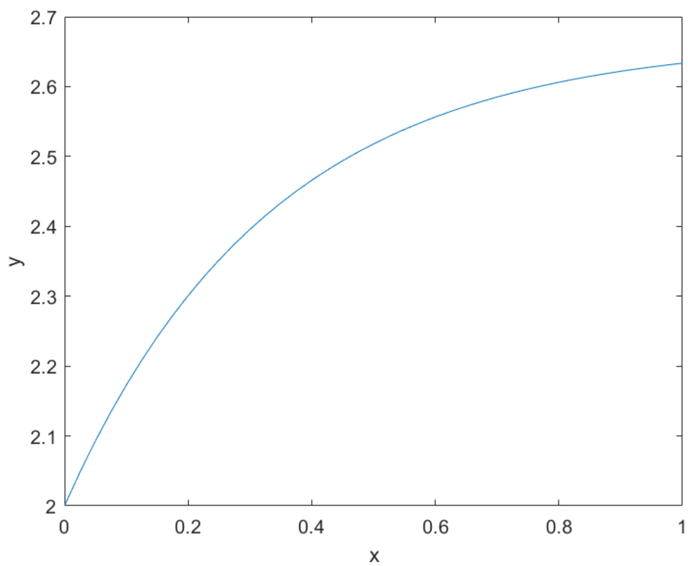

图 1: 题 1.2.1 的数值解图像

2. 选择适当的 ode 函数，求解微分方程的初值问题 $(1+x^2)y''=2xy', y(0)=1, y'(0)=3$ 的解

解：使用 MATLAB 代码如下：

```
function T1_2_2
[x,y] = ode45(@fun,[0,1],[1,3]);
plot(x,y(:,1))
xlabel('x')
ylabel('y')
function f = fun(x,y)
f = [y(2);2*x*y(2)/(1+x^2)];
```

所得数值解的图像如下：

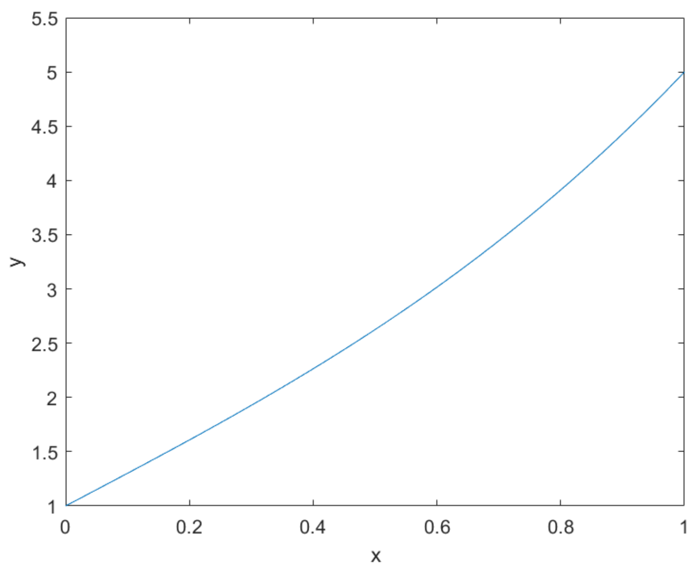

图 2: 题 1.2.2 的数值解图像

4. 选择适当的 ode 函数，求解微分方程组

$$\begin{cases} 2\frac{dx}{dt} + 4x + \frac{dy}{dt} - y = e^t, x(0) = \frac{3}{2} \\ \frac{dx}{dt} + 3x + y = 0, y(0) = 0 \end{cases}$$

的特解

解：使用 MATLAB 代码如下：

```
function T1_2_4
[t,y] = ode45(@fun,[0,1],[3/2,0]);
plot(t,y(:,1),t,y(:,2))
xlabel('t')
ylabel('x/y')
legend('x(t)', 'y(t)')
function f=fun(t,y)
f=[-3*y(1)-y(2);2*y(1)+3*y(2)+exp(t)];
```

所得数值解的图像如下：

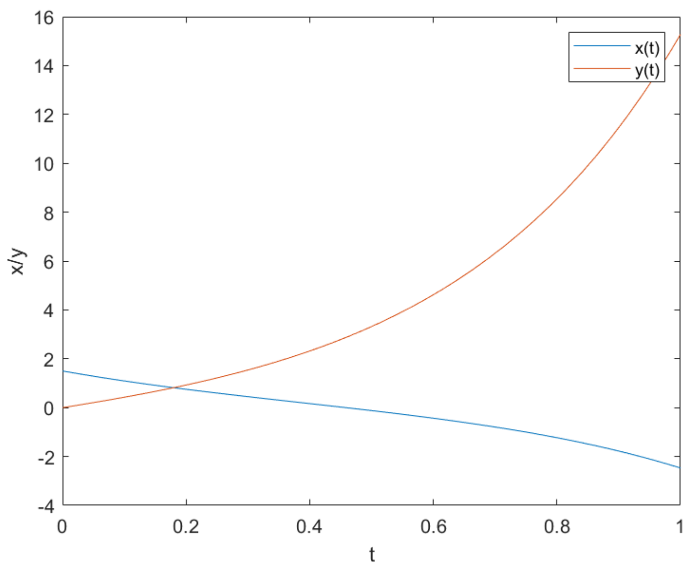

图 3: 题 1.2.4 的数值解图像

2 题目二

例 2 一根长度为 l 的金属杆被水平地夹在两端垂直的支架上，一端的温度恒为 T1，另一端温度恒为 T2，(T1、T2 为常数，T1 > T2)。金属杆横截面积为 A，截面的边界长度为 B，它完全暴露在空气中，空气温度为 T3，(T3 < T2，T3 为常数)，导热系数为 α，试求金属杆上的温度分布 T(x)。(设金属杆的导热率为 λ)

解：以 T1 为参考点，设金属杆的温度分布为 T(x)
dt 时间内通过距离 0 点 x 处截面的热量为

$$dQ_1 = -\lambda AT'(x)dt$$

dt 时间内通过距离 0 点 x+dx 处截面的热量为

$$dQ_2 = -\lambda AT'(x+dx)dt$$

由泰勒公式展开得：

$$T'(x+dx) = T'(x) + T''(x)dx$$

即：

$$dQ_2 = -\lambda AT'(x)dt + \lambda AT''(x)dxdt$$

金属杆的微元 [x, x+dx] 在 dt 内获得热量为：

$$dQ_3 = \lambda AT''(x)dxdt$$

同时微元向空寂散发出的热量为：

$$dQ_4 = -\alpha Bdx(T(x) - T_3)dt$$

系统处于平衡状态，故有：

$$\lambda AT''(x)dxdt = -\alpha Bdx(T(x) - T_3)dt$$

所以金属杆各处温度 T(x) 满足微分方程：

$$T''(x) = \frac{\alpha B}{\lambda A}(T - T_3)$$

运用 MATLAB 求解该微分方程，得到温度分布 T(x) 的解析解为

$$T(x) = C_1 e^{\sqrt{\frac{\alpha B}{\lambda A}}x} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{\alpha B}{\lambda A}}x} + T_3$$

使用 MATLAB 代码如下：

```
clear;
syms x
T = dsolve('D2T=alpha*B/(lambda*A)*(T-T3)','x');
display(T);
```

3 题目三

从制冰厂购买了一块立方体的冰块，在运输途中发现，第一小时大约融化了 1/4
（1）求冰块全部融化要多长时间（假设气温不变）
（2）如运输时间要 2 小时，问：运输途中冰块大约融化掉多少？
注：不用指数模型，否则会显示无穷长的时间，冰块才能全部融化。
建议考虑：融化速度与面积等有关。

解：设冰块的边长为 L(t)，初始长度为 1，即 $L(0) = 1$
假设融化速度与表面积成正比，比例系数为 k
则冰块的体积为

$$V(t) = L^3(t)$$

其表面积为

$$S(t) = 6L^2(t)$$

其融化速度为

$$\frac{dV}{dt} = -kS(t)$$

将 V(t) 和 S(t) 代入上式得

$$\frac{dL}{dt} = -2kL(t)$$

求解该线性方程组的解，得到冰块的边长 L(t) 的解为

$$L(t) = 1 - 2kt$$

使用 MATLAB 代码如下

```
clear;
syms t
L = dsolve('Dl=-2*k','l(0)=1','t');
display(L);
```

由题可知

$$V(1) = 1 - \frac{1}{4} = L^3(1)$$

解得

$$k = \frac{1 - \sqrt[3]{\frac{3}{4}}}{2}$$

对问题（1）求解方程：

$$L(t) = 0$$

解得

$$t = \frac{1}{2k} = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{\frac{3}{4}}}$$

对问题（2）当 t=2 时，代入 V(t) 得

$$V(2) = L^3(2) = 2\sqrt[3]{\frac{3}{4}} - 1 \approx 0.8171$$

4 题目四

正常人身上也有癌细胞，一个癌细胞直径约为 10μm，重约 0.001μg，
(1) 当患者被查出患有癌症时，通常直径已有 1cm 以上（即已增大 1000 倍），由此容易算出癌细胞转入活动期已有 300 多天，故如何在早期发现癌症是攻克癌症的关键之一。
(2) 手术治疗常不能割去所有癌细胞，故有时需进行放射疗法。射线强度太小无法杀死癌细胞，太强病人身体又吃不消且会使病人免疫功能下降。一次照射不可能杀死全部癌细胞。
请设计一个可行的治疗方案（医生认为当体内癌细胞数小于 100000 个时即可凭借体内免疫系统杀灭）。

解：设癌细胞的数量为 N(t)，
假设癌细胞的增长速度与癌细胞的数量成正比，比例系数为 k
在无干扰的条件下癌细胞的数量为

$$\frac{dN}{dt} = kN(t)$$

求解该线性方程组的解，得到癌细胞的数量 N(t) 的解析解为

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$

使用 MATLAB 代码如下

```
clear;
syms t
N = dsolve('Dn=k*n','n(0)=1','t');
display(N);
```

不妨设初始值 $N_0 = 1$，则有

$$N(t) = e^{kt}$$

由题可知当患者被查出患有癌症时，癌细胞数量约为 10^9，且细胞转入活动期已有 300 多天，故有

$$N(300) = 10^9 = e^{300k}$$

解得

$$k = \frac{3\ln 10}{100}$$

即

$$N(t) = e^{\frac{3\ln 10}{100}t}$$

同时也可以估算出癌细胞约繁衍了 27 代，则其繁衍周期约为 11 天
不妨设 11 天为一个疗程，每个疗程放射疗法杀死癌细胞的比例系数为 r=0.8
假设 $M(i)$ 为第 i 个疗程后剩余的癌细胞数量
考虑手术可以切除 90% 癌细胞，即此时

$$M(0) = 10^8$$

同时 $M(i)$ 满足

$$M(i) = 0.2(M(i-1)e^{\frac{33\ln 10}{100}})$$

当 $M(i) < 10^5$ 时，即可凭借体内免疫系统杀灭
解得

$$i \geq 9$$

即至少需要 9 个疗程，间隔约 11 天。
使用 MATLAB 代码如下

```
clear;
M(1) = 10^8;
i=1;
while M(i)>10^5
    i=i+1;
    M(i)=0.2*M(i-1)*exp(3*log(10)/100*11);
end
disp(i-1)
disp(M(i))
```