第三章线性直接法作业

光宗耀祖

2024 年 4 月 17 日

解决问题前，先创建一些可用于题目的函数，如下所示：

Listing 1: Guass 消去法解方程组函数

```
%高斯消去法解方程组
function [x,det_A]=gauss_elimination(A,b)
%获取方程组的规模
[n,~]=size(A);
aug_matrix=[A,b];
for k=1:n-1
    if aug_matrix(k, k) == 0
        % 在当前列中找到一个非零元素所在的行，并与当前行交换
        nonzero_row = find(aug_matrix(k+1:end, k), 1, 'first') + k;
        if isempty(nonzero_row)
            error('系数矩阵非满秩，无法继续消元');
        end
        % 交换当前行与非零元素所在行
        aug_matrix([k,nonzero_row], :) = aug_matrix([nonzero_row,k], :);
    end
    %用不为0的主元消去k行下面的数
    for i=k+1:n
        factor=aug_matrix(i,k)/aug_matrix(k,k);
        aug_matrix(i, k+1:end) = aug_matrix(i, k+1:end) - factor * aug_matrix(k, k+1:end);
    end
end
% 回代过程
x=zeros(n,1);
x(n) = aug_matrix(n, n+1) / aug_matrix(n, n);
    for i = n-1:-1:1
        x(i) = (aug_matrix(i, n+1) - aug_matrix(i, i+1:n) * x(i+1:n)) / aug_matrix(i, i);
    end
```

```
    det_A=1;
        for i=1:n
            det_A=det_A*aug_matrix(i,i);
        end
    end
```

Listing 2: Doolittle 分解函数

```
%对矩阵A进行doolittle分解
function [L,U]=doolittle(A)
    [m,n]=size(A);
    if m~=n
        error('A需要为方阵');
    end
    L=eye(n);
    U=zeros(n,n);
    for r=1:n
        for j=r:n
            U(r,j)=A(r,j)-L(r,1:r-1)*U(1:r-1,j);
        end

        for i=r+1:n
            L(i,r)=(A(i,r)-L(i,1:r-1)*U(1:r-1,r))/U(r,r);
        end
    end
end
```

Listing 3: Doolittle 分解法求解方程组函数

```
function x=solve_doolittle(L,U,b)
    y=zeros(size(b));
    for i=1:length(b)
        j=1:i-1;
        y(i)=b(i)-L(i,j)*(y(j))';
    end
    x=zeros(size(b));
    for i=length(b):-1:1
        j=i+1:length(b);
        x(i)=(y(i)-U(i,j)*(x(j))')/U(i,i);
    end
end
```

Listing 4: Cholesky 分解函数

```
function L=cholesky_decomposition(A)
[n,m]=size(A);
if n~=m
    error('矩阵不是方阵')
else
    for i=1:n
        for j=1:n
            if A(i,j)~=A(j,i)
                error('矩阵不是对称矩阵')
            end
        end
    end
end
eigenvalues = eig(A);
e=length(eigenvalues);
for i=1:e
if eigenvalues(i) < 0
    error('A 不是正定矩阵（通过特征值判据）。');
end
end
    n = size(A, 1);
    L = zeros(n);
    for i = 1:n
        for j = 1:i
            if i == j
                L(i, i) = sqrt(A(i, i) - sum(L(i, 1:i-1).^2));
            else
                L(i, j) = (A(i, j) - sum(L(i, 1:j-1).*L(j, 1:j-1))) / L(j, j);
            end
        end
    end
end
```

1. 用 Gauss 消去法解方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 &= -3 \\ -x_1 \qquad - 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \end{cases}$$

并利用 Gauss 消去法求解系数矩阵的行列式和逆矩阵.

解：使用 MATLAB 求解代码如下

```
A = [1,-1,3;-1,0,3;2,2,4];
b = [3; 1; 0];
[x,det_A]= gauss_elimination(A, b);
disp(x)
disp(det_A)
```

得到结果为 $x_1 = 0.3636, x_2 = -1.2727, x_3 = -0.4545$，系数矩阵的行列式为 -22。

2. 使用 Doolittle 分解法求解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 3 \\ 4x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

解：使用 MATLAB 求解代码如下

```
A=[2,-4,6;4,-9,2;1,-1,3];
b=[3,5,4];
[L,U]=doolittle(A);
x=solve_doolittle(L,U,b);
disp(L)
disp(U)
disp(x)
```

可以得到矩阵 L 和 U 分别为

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0.5 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

解得 $x_1 = 6.95, x_2 = 2.5, x_3 = -0.15$。

3. 线性方程组 $Ax = b$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

对 $A^T A$ 进行 Cholesky 分解

解：使用 MATLAB 求解代码如下

```
A=[2,3,4;1,1,9;1,2,-6];
B=A'*A;
L1=cholesky_decomposition(B);
L2=chol(B);
disp(L1)
disp(L2)
```

可以得到 Cholesky 分解的结果为

$$L=\begin{pmatrix} 2.4495 & 3.6742 & 4.4907 \\ 0 & 0.7071 & -10.6066 \\ 0 & 0 & 0.5774 \end{pmatrix}$$

4. 用 matlab 求解比较下面两个方程组的解.

$$\begin{cases} x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{3}x_3=1 \\ \frac{1}{2}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{4}x_3=0 \\ \frac{1}{3}x_1+\frac{1}{4}x_2+\frac{1}{5}x_3=0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} 1.000x_1+0.50x_2+0.33x_3=1 \\ 0.50x_1+0.33x_2+0.25x_3=0 \\ 0.33x_1+0.25x_2+0.20x_3=0 \end{cases}$$

解：使用 MATLAB 求解代码如下

```
A1=[1,1/2,1/3;1/2,1/3,1/4;1/3,1/4,1/5];
A2=[1.000,0.50,0.33;0.50,0.33,0.25;0.33,0.25,0.20];
b=[1;0;0];
[X1,~]=gauss_elimination(A1,b);
[X2,~]=gauss_elimination(A2,b);
disp(X1)
disp(X2)
```

可以得到第一个方程组的解为 $x_1=9, x_2=-36, x_3=30$，

第二个方程组的解为 $x_1=55.5556, x_2=-277.7778, x_3=255.5556$。

分析产生误差的原因，是因为第一个方程组的系数矩阵的条件数较大，导致数值计算误差。

5. 令

$$A=\begin{pmatrix} 10^{-16} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(1) 用手算精确求解线性方程组 $Ax=b$, 写出 x_1 和 x_2 的计算结果.

(2) 在 matlab 中输入矩阵 A, 并计算 cond(A) .

(3) 编程使用 Guass 消去法求解线性方程组 $Ax=b$, 并和使用 matlab 中输入 $A\backslash b$ 的结果进行比较.

解：使用 MATLAB 求解代码如下

```
A=[10^-16,1;1,1];
b=[2;3];
% T5(2)计算矩阵A的条件数
condition_number = cond(A);
disp(['矩阵A的条件数为：', num2str(condition_number)]);
%T5(3)
[X1,~]=gauss_elimination(A,b);
X2=A\b;
disp(X1)
disp(X2)
```

(1) 由手算可得 $x_1 = \frac{1}{1-10^{-16}}, x_2 = 2 - \frac{1}{10^{16}-1}$。

(2) 计算得到矩阵 A 的条件数为 2.618。

(3) 使用 Gauss 消去法求解得到 $x_1 = 4.4409, x_2 = 2.0000$，使用 MATLAB 内置函数求解得到 $x_1 = 1, x_2 = 2$。

分析产生误差的原因，是因为矩阵 A 的条件数较大，导致数值计算误差。