LENGUAJE: CONJUNTOS, APLICACIONES Y RELACIONES

Elemento: a (No) pertenencia: $a \in / \notin A$ Igualdad: $A = B$

Conjunto: A (No) está contenido / es subconjunto: $A \subseteq / \nsubseteq B$ si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$

Producto directo/cartesiano $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i\}$ $A \times A \times \dots \times A = A^n$

Unión de conjuntos $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ para algún } i \in I\}$

Intersección de conjuntos $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ para todo } i \in I\}$

Aplicación de A en B: $f: A \to B$ Imagen $f(a) = b$

Todos los elementos de A tienen asociado algún elemento de B. Según como sea la relación, puede ser:

Inyectiva	Suprayectiva	Biyectiva
No hay dos elementos de A con la misma imagen	Todos los elementos de B están asociados a algún elemento de A	Cada elemento de A está asociado a un único elemento de B, y viceversa
$\forall x, y \in A,\ f(x) = f(y)\ (x = y)$	$\forall b \in B,\ \exists x \in A$ tal que $f(x) = b$	Inyectiva + Suprayectiva

Conjunto Imagen $f(A) := \{f(a) \mid a \in A\} \in B$ Todas las imágenes de la aplicación

Antiimagen $f^{\leftarrow}(B) := \{a \in A \mid f(a) \in B\}$ Todos los elementos iniciales con imagen asociada

Composición $f: A \to B$, $g: B \to C$, $g \circ f: A \to C$ $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Identidad $Id_A: A \to A$, $A \neq 0$ $f \circ Id_A = Id_B \circ f = f$

Inversa (solo biyectiva) $f^{-1}: B \to A$ $f^{-1}(b) = a$ $f^{-1} \circ f = Id_A$ $f \circ f^{-1} = Id_B$

Operación binaria interna: $A \times A \to A$ Ej: $a+b$, ab

Grupo $G \times G \to G$ $f(a,b) = ab$	Cuerpo K, obi $+, \cdot$	Anillo A, obi $+, \cdot$
Asociativa $a(bc) = (ab)c$ Neutro $e \in G$, $ea = ae = a$ Inverso $\exists a' \in G$, $a'a = aa' = e$	$(K, +)$ es grupo conmutativo $(K^* = K - 0, \cdot)$ es grupo conmutativo Distributiva $a(b+c) = ab + ac$	$(A,+)$ ~~conmutativo~~ es grupo conmutativo $(\cdot)$ ~~asociativa~~ obi asociativa Distributiva
Si cumple prop. conmutativa $(ab = ba)$, es grupo abeliano $+ \to$ Neutro 0, inverso $-a$ $\cdot \to$ Neutro 1, inverso a^{-1}	Los cuerpos son anillos Si $ab = 0$, $a = 0$ ó $b = 0$ (sólo si característica cero) Característica: menor número n tal que la suma de n sumandos $1+1+\dots+1$ es igual a 0. Si nunca llega a sumar 0, es de característica cero. n es 0 ó primo.	$(-a)b = a(-b) = -ab$ ~~$a0 = 0a = 0$~~ $a0 = 0a = 0$

CUERPOS FINITOS

Algoritmo de ~~Euclides~~ división: $D = dq + r$, $D, d, q, r \in \mathbb{Z}$, $|r| < |d|$

Máximo común divisor: $mcd(D, d) = mcd(d, r)$

Identidad de Bezout: $au + bv = d$, $mcd(a, b) = d$

$mcd(192, 162) = 6 = 192 \cdot 11 + 162 \cdot (-13)$

Q		1	5	2	2	
R	192	162	30	12	6	0
U	1	0	1	-5	11	
V	0	1	-1	6	-13	

Algoritmo de Euclides

$$\begin{array}{r|l} 192 & 162 \\ 30, & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 162 & 30 \\ 12, & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 30 & 12 \\ 6, & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 6 \\ 0, & 2 \end{array}$$

Alg. Euclides extendido

$30 = 192 - 162 \cdot 1$

$12 = 162 - 30 \cdot 5$

$6 = 30 - 12 \cdot 2$

$6 = 30 - 12 \cdot 2 = \cancel{30 - 162}\,(192 - 162) - (162 - (192 - 162) \cdot 5) = 192 - 162 - 162 + 192 \cdot 5 - 162 \cdot 5$

$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ $\quad a + b = r(a+b, n)$ $\quad ab = r(ab, n)$ $\quad r(x, n)$: resto de x/n

$\mathbb{Z}_n$: Clase de restos módulo n. Si n es primo, $\mathbb{Z}_n$ es cuerpo.

Inverso: b tal que $ab = 1$. Método para números grandes: Alg. Euclides extendido

Método para n ~~grandes~~ pequeñas: Comparar sucesiones $\begin{cases} n+1, & 2n+1, & 3n+1, \dots \\ 2a, & 3a, & 4a, \dots \end{cases}$

hasta que $xa = \cancel{y(n+1)}\, yn + 1$

Los polinomios son similares a los números enteros en cuanto a propiedades. El algoritmo de Euclides sigue siendo válido para los polinomios ($D(x) = d(x)\,q(x) + r(x)$; $D(x), d(x), q(x), r(x) \in \mathbb{Z}_n[x]$, grad $r(x) <$ grad $d(x)$)

Polinomio irreducible: Polinomios que no se pueden descomponer en dos polinomios no constantes

$\mathbb{Z}_2[x]/\langle p(x) \rangle$: Anillo, conjunto de todos los polinomios de grado menor que $p(x)$

$a(x) + b(x) = r(a(x) + b(x), p(x))$

$a(x)b(x) = r(a(x)b(x), p(x))$

$r(f(x), p(x))$: Resto de $f(x)/p(x)$

Si $p(x)$ es irreducible, $\mathbb{Z}_2[x]/\langle p(x) \rangle$ es cuerpo

$\mathbb{Z}_2[x]/\langle p(x) \rangle$ tiene 2^n elementos, donde n es el grado del polinomio irreducible $p(x)$

Un cuerpo finito de 2^n elementos se puede encontrar así con un polinomio irreducible grado n.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \longrightarrow A|C = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Sistema de ecuaciones — Matriz asociada | ampliada

Op. elementales
$F_i/C_i \to \lambda F_i/C_i$
$F_i/C_i \leftrightarrow F_j/C_j$
$F_i/C_i \to F_i/C_i + \lambda F_j/C_j$

$$A_{3\times 3} \cdot B_{3\times 3} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

Producto de matrices: $A_{m\times n} B_{n\times r} = C_{m\times r}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz escalonada (reducida)

$$n\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = nI_n = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}$$

Matriz identidad — Matriz escalar

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = A \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = A^t$$

Matriz traspuesta

$AA^{-1} = I_n$ — A^{-1} = Matriz inversa/regular

Matriz elemental: I_n tras aplicar op. elementales

$$\begin{array}{c} \text{(filas)} \\ \begin{pmatrix} A & I_n \\ I_m & \end{pmatrix} \\ \text{(columnas)} \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} B & C \\ D & \end{pmatrix} \qquad B = CAD$$

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Triangular inferior — Triangular superior

P = Matriz permutación $\qquad A = PLU$

U → Escalonar A

L → Unos en la diagonal escalares usados para escalonar U cambiados de signo debajo

P → Cambios de fila de A

Toda matriz se puede escalonar con op. elementales

Un sistema es compatible si el nº de filas no nulas de la matriz asociada es el mismo que de la matriz ampliada

$I_mA = AI_n = A \qquad (AB)^t = B^tA^t$

Si A y B son invertibles, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. MATRICES

Espacio vectorial (V)
↓
Subespacio vectorial ($S \subseteq V$)

$V, \{\bar{0}\} \subseteq V$	$\bar{0} \in V, S$
$S_1 \cap S_2 \subseteq V$	$S_1 \cup S_2 \not\subseteq V$
$S_1 + S_2 = \{s_1 + s_2 \mid s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\}$	

$a+b$ (op. interna)		ab (op. externa)		
Asociativa	$(a+b)+c = a+(b+c)$	Asociativa		$(ts)a = t(sa)$
Vector nulo	$\bar{0}$	El. neutro		1
Conmutativa	$a+b = b+a$	Distributiva	en V	$t(a+b) = ta+tb$
Elemento opuesto	$-a$		en K	$(t+s)a = ta+sa$

Propiedades
$0a = \bar{0}$ $\quad t\bar{0} = \bar{0}$
$a+b = a+c \rightarrow b = c$
$ta = \bar{0} \rightarrow t = 0$ ó $a = \bar{0}$
$(-t)a = t(-a)$ $\quad (-1)a = -a$

Combinación lineal: ~~Vector obtenido~~ de la familia de vectores $(a_1, \dots, a_r)$ por un escalar $(x_1 a_1 + \dots + x_r a_r)$

$K < a_1, \dots, a_r >$: Conjunto de todas las c.l. $\longrightarrow S = K < a_1, \dots, a_r > \longrightarrow (a_1, \dots, a_r)$ son generadores de S

Las op. elementales no modifican el espacio generado	El espacio es finitamente generado si la familia generadora es finita

$(a_1, \dots, a_r)$ es linealmente
- Dependiente (ligada) si $\exists x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}$, algún $x_i \neq 0$, tal que $x_1 a_1 + \dots + x_r a_r = \bar{0}$
- Independiente (libre) si no (ninguno de los vectores se pueden obtener a partir de una c.l. de otros)

Familia vacía → Libre	Familia que contiene una familia ligada → Ligada
Familia contenida en una familia libre → Libre	Familia contiene $\bar{0}$ ó vectores repetidos → Ligada
Espacio vectorial generado con r vectores	→ Cualquier familia con más de r vectores es ligada

Base: Familia generadora libre

Base canónica: Base formada por vectores unitarios

Dimensión: Nº de vectores que forman la base

$(x_1, \dots, x_n)$: Coordenadas
- $a+b = (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)$
- $ta = (tx_1, \dots, tx_n)$

Cambio de coordenadas

Bases: $B = (a_i)$ $\quad \bar{B} = (\bar{a}_i)$

Coordenadas de a respecto a $B / \bar{B}$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$$

Matriz cambio de base de $\bar{B}$ a B

$$P = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$$ (cols = coordenadas de $\bar{B}$ resp. a B)

Matriz cambio de base de B a $\bar{B}$

$Q = P^{-1}$ $\quad (PQ = I_n)$

$X = P\bar{X}$

$\bar{X} = QX$

Toda familia libre de un espacio finitamente generado se puede ampliar hasta formar una base	Si $S \subseteq V$, $\dim S = \dim V$ $\quad S = V$
Si $S, T \subseteq V$, $\dim(S+T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T)$	

Rango de filas/columnas: Dimensión del espacio generado por las filas/columnas de una matriz.

Tras escalonar una matriz, el nº de filas/columnas no nulas es el rango	Sea $A_{n \times n}$, es invertible sólo si su rango de filas es n y es producto de matrices elementales

Aplicación lineal: $f: V \to W$

Homomorfismo. Se preservan las operaciones	$f(a+b) = f(a) + f(b)$	$f(ta) = tf(a)$	$f(\bar{0}) = \bar{0}$

Transformación por A: Aplicación lineal que, dada $A_{m\times n} \in \mathbb{R}$, a cada $X \in \mathbb{R}^n$ asocia $AX \in \mathbb{R}^m$. Si $(e_1, \dots, e_n)$ es base canónica de $\mathbb{R}^n$, $f(X) = f(x_1 e_1, \dots, x_n e_n)$ Ej: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ $T_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y+z \\ 2x+7z \end{pmatrix}$	Sean $(a_1, \dots, a_n)$ base de V, $(b_1, \dots, b_n)$ base de W, existe una única aplicación lineal $f: V \to V$ tal que $f(a_i) = b_i$

Núcleo	$\operatorname{Ker} f = \{a \in V \mid f(a) = \bar{0}\} = f^{\leftarrow}(\bar{0})$	Todos los vectores de V cuya imagen sea $\bar{0}$ en W
Imagen	$\operatorname{Im} f = \{b \in W \mid \exists a \in V \text{ con } f(a) = b\} = f(V)$	Todos los vectores de W que son imagen de algún vector de V

Si $S \subseteq V$, $f(S) \subseteq W$ ($\operatorname{Im} f \subseteq W$)	Si $(a_1, \dots, a_n)$ generan V, $(f(a_1), \dots, f(a_n))$ generan $\operatorname{Im} f$
Si $T \subseteq W$, $f^{\leftarrow}(T) \subseteq V$ ($\operatorname{Ker} f \subseteq V$)	Si f es biyectiva, $(a_1, \dots, a_n)$ es libre solo si lo es $(f(a_1), \dots, f(a_n))$
Si $f: V \to W$, V y W finitamente generados, $\dim V = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f$	

Matriz coordenada: Sea $f: V \to V$, $B_1 = (a_1, \dots, a_n)$ base de V, $B_2 = (b_1, \dots, b_m)$ base de W, es la matriz $A_{m\times n} = (t_{ij})$ tal que $f(a_j) = t_{1j} b_1 + t_{mj} b_m$, $j = 1, \dots, n$

Si x son las coordenadas de $v \in V$, $v = BX$, $(f(a_1), \dots, f(a_n))X = B_2 A X = B_2 y$ (y = coord. $f(v)$)

Dadas dos bases de V y W, $\dim V = n$, $\dim W = m$, existe una correspondencia biyectiva entre las matrices lineales $f: V \to W$ y las matrices $m \times n$

$f: V \to K^n$, que asocia a cada vector sus coordenadas respecto a una base, es lineal y biyectiva	$\dim(\operatorname{Im} f)$ es igual a la dimensión del espacio que generan las columnas de una matriz coordenada cualquiera
~~La~~ matriz coordenada de una composición de aplicaciones es el producto de las matrices coordenadas de las aplicaciones	Una aplicación lineal es biyectiva solo si cualquiera de sus matrices es inversible

Cambio de coordenadas

$f: R^n \to R^m$

$$\begin{tikzcd}
B_1 \arrow[r, "A"', "AX = y"] \arrow[d, shift right, "X = P_1 \bar{X}"'] & B_2 \arrow[d, shift right, "\bar{y} = P_2^{-1} y"'] \\
\bar{B}_1 \arrow[r, "B", "B\bar{X} = \bar{y}"'] \arrow[u, shift right, "\bar{X} = P_1^{-1} X"'] & \bar{B}_2 \arrow[u, shift right, "y = P_2 \bar{y}"']
\end{tikzcd}$$

$B = PAQ$ $P = P_2^{-1}$ $Q = P_1$

rango de filas = rango de columnas

Si rango $A = r$, existen P y Q inversibles tal que $A = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$

A es equivalente a B solo si rango A = rango B

Sea $AX = B$ un sistema de ecuaciones, es:

Compatible $\to$ rango A = rango $(A|B)$
- $\to$ rango A = nº incógnitas $\to$ solución única
- $\to$ rango A < nº incógnitas $\to$ solución no única

Si x_1 es solución, $\{x_1 + x \mid AX = \bar{0}\}$ es el conjunto de todas las soluciones

APLICACIONES LINEALES Y MATRICES

Caso 2x2 $\quad Det: K^2 \times K^2 \to K^2$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad |A| = ad - bc$$

$$(A_1, A_2) = \left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right)$$

Caso 3x3 $\quad Det: K^3 \times K^3 \times K^3 \to K^3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Regla de Sarrus:

$$+ \qquad -$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} = |A|$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \longrightarrow A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{(n-1)1} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

$$|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} |A_{1n}|$$

$$Det: \underbrace{K^n \times \cdots \times K^n}_{(n \text{ veces})} \to K^n$$

- Es lineal: $Det(\ldots, A_{i-1}, tB + C, A_{i+1}, \ldots) = t\,Det(\ldots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \ldots) + Det(\ldots, A_{i-1}, C, A_{i+1}, \ldots)$
- Si dos ~~columnas~~ filas son iguales, el determinante es 0
- El determinante de la matriz identidad es 1
- Si dos columnas son iguales, el determinante es 0
- Intercambiar dos columnas o filas cambia el signo del determinante
- Si los vectores son ligados, el determinante es 0
- Sumar a una fila/columna el múltiplo de otra no altera el determinante
- $|tA| = t^n |A|$
- $|AB| = |A||B|$
- $|A| = |A^t|$
- Si A es triangular, $|A| = a_{11} \cdots a_{nn}$
- $|A| \neq 0 \to A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A^t)^t$
- $Adj(A)^t A = A\,Adj(A)^t = |A| I_n$
- $(Adj\,A)_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$
- A tiene rango n solo si $|A| \neq 0$
- Sean $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ vectores de la base canónica, si $f(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = 0$ entonces $f(\varepsilon_{i_1}, \ldots, \varepsilon_{i_n}) = 0$, y si $t = F(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ entonces $F(A_1, \ldots, A_n) = t\,Det(A_1, \ldots, A_n)$

DETERMINANTES

Endomorfismo: Aplicaciones lineales donde los espacios inicial y final coinciden ($h = T_A$, $h(X) = AX$)

Si A y B son las matrices coordenadas de un endomorfismo h, $A = PBP^{-1}$ (A y B semejantes) (A diagonalizable)

Valor propio: $t \in K$ si $\exists \bar{0} \neq a \in V$ tal que $h(a) = ta$, a llamado vector propio ($\bar{0} \neq X$ tal que $AX = tX$)

Si t es el valor propio de h, rango $(tI_n - A) \neq n$ y $\lvert tI_n - A \rvert = 0$	$\lvert xI_n - A \rvert \in K[x]$: Polinomio característico
$(tI_n - A)X = 0$	Dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico, y los mismos valores propios

---

Subespacio fundamental: El correspondiente a t del endomorfismo h: $S(t) = \{a \in V \mid ha = ta\}$

$\dim S(t) = n - \text{rango}(tI_n - A)$	$\dim(S(t_1) + \dots + S(t_r)) = \dim S(t_1) + \dots + \dim S(t_r)$	$1 \leq \dim S(t) \leq n$
Si h es diagonalizable, $S(t_1) + \dots + S(t_r) = V$, $\dim S(t_1) + \dots + S(t_r) = V$, y todo valor t tiene $\dim S(t)$ es igual a la multiplicidad de t como raíz del polinomio característico.		

Calculo aproximado de vectores propios:

Si A es diagonalizable, tiene un valor propio t_1 de multiplicidad 1 tal que $|t_1| > |t_i|$,

$\cancel{\frac{1}{t_1^n} A^n X_0 \approx \frac{t_1^n}{t_1^n} s_1 a_1}$ $\boxed{A^n X_0 \simeq t_1^n s_1 a_1}$, mejorando la aproximación con el tamaño de n