Raport - Zadanie numeryczne 7

Grzegorz Janysek

28 grudnia 2021

1 Wstęp teoretyczny

1.1

Interpolacja za pomocą funkcji sklejanych, in. *splajnów* (ang. spline) adresuje niepożądane zachowanie wielomianów Lagrange'a przy zwiększaniu ilości węzłów. Występujący dla wielomianów wysokiego stopnia problem oscylacji Rungego, jest rozwiązywany poprzez ograniczanie się do wielomianów o niskich stopniach i wyznaczanie innego wielomianu dla każdego przedziału pomiędzy węzłami. Wyznaczanie to odbywa się na podstawie warunków ciągłości funkcji sklejanej oraz ciągłości jej pochodnych w węzłach interpolacji. Uzyskany splajn s rzędu k dla n węzłów $(x_1, x_2 \cdots x_n)$ jest *sklejeniem* $n-1$ wielomianów k-tego stopnia.

$$s(x) = \begin{cases} y_1(x) & \text{dla} \quad x_1 \leq x < x_2 \\ y_2(x) & \text{dla} \quad x_2 \leq x < x_3 \\ y_3(x) & \text{dla} \quad x_3 \leq x < x_4 \\ \vdots & \\ y_{n-1}(x) & \text{dla} \quad x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases} \tag{1}$$

1.2

Najczęściej używa się splajnów kubicznych (ang. cubic spline) tj. splajnów trzeciego rzędu, do konstrukcji którego na każdym przedziale wyznacza się wielomian trzeciego stopnia:

$$y_j(x) = Af_j + Bf_{j+1} + C\xi + D\xi_{j+1} \tag{2}$$

gdzie

$$A = \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} \qquad B = \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} \tag{3}$$

$$C = \frac{(A^3 - A)(x_{j+1} - x_j)^2}{6} \qquad D = \frac{(B^3 - B)(x_{j+1} - x_j)^2}{6} \tag{4}$$

Z warunku ciągłości pierwszej pochodnej w węzłach wynika że pochodna wielomianu $y_j(x)$ w prawym krańcu przedziału musi się równać pochodnej $y_{j+1}(x)$ w lewym krańcu przedziału. Korzystając z tego faktu i (2, 3, 4) można wyprowadzić wyrażenie będące trójdiagonalnym układem równań gdzie niewiadomą jest ξ:

$$\xi_{j-1}\left(\frac{x_j - x_{j-1}}{6}\right) + \xi_j\left(\frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{3}\right) + \xi_{j+1}\left(\frac{x_{j+1} - x_j}{6}\right) = \frac{f_{j+1} - fj}{x_{j+1} - x_j} - \frac{f_j - fj - 1}{x_j - x_{j-1}} \tag{5}$$

Warunki ciągłości nie obejmują skrajnych węzłów x_1 i x_n parametry ξ_0 oraz ξ_n nie są określane przez wyrażenie (5). Najczęściej stosuje się wiec naturalny splajn kubiczny dla którego $\xi_0, \xi_n = 0$.

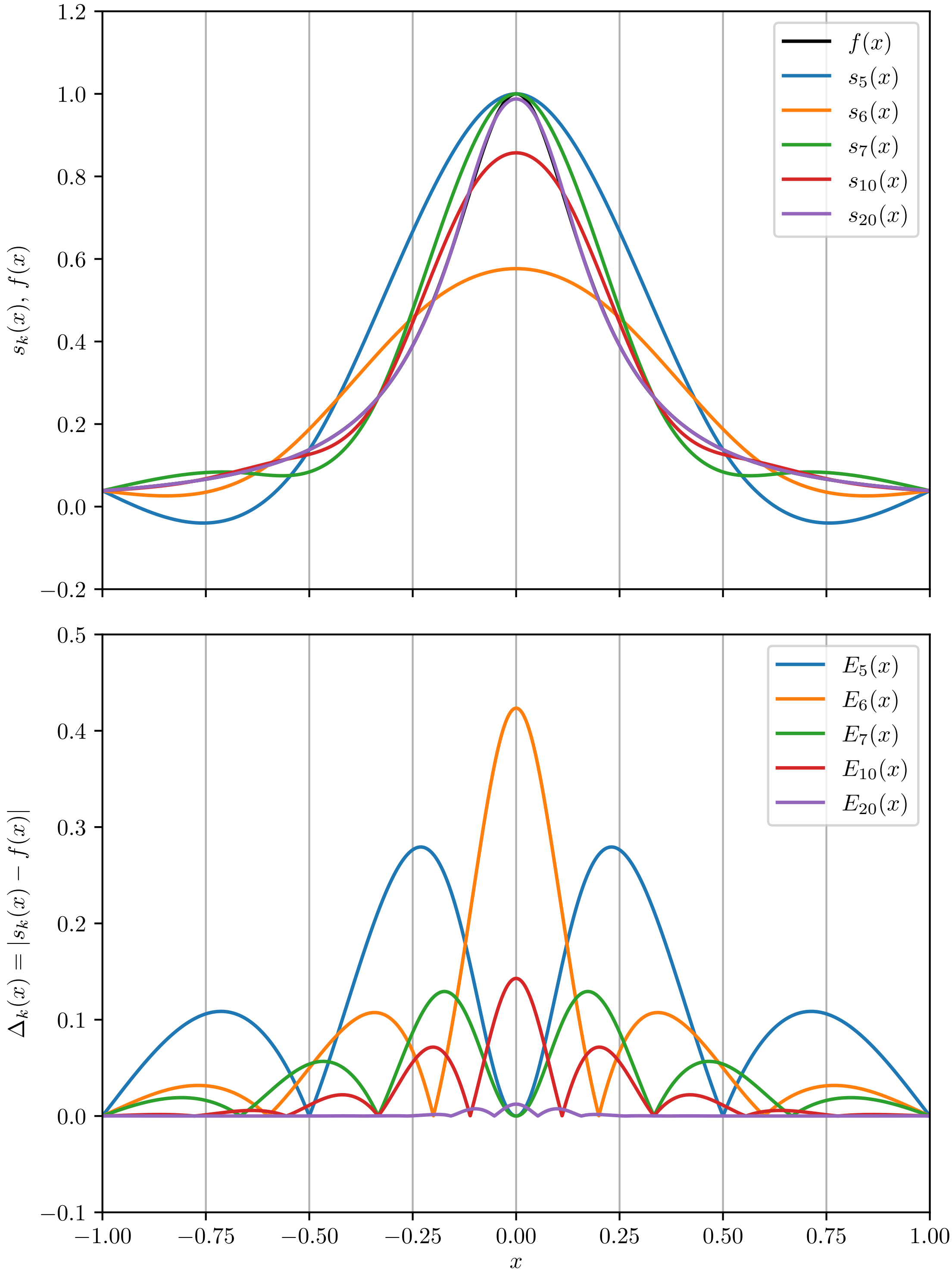
Przypadek węzłów interpolacji będących rozmieszczonych jednorodnie (w równej odległości od siebie) upraszcza się do układu równań, gdzie $d = x_{j+1} - x_j$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \\ \vdots \\ \xi_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{6}{d^2} \begin{bmatrix} f_1 - 2f_2 + f_3 \\ f_2 - 2f_3 + f_4 \\ f_3 - 2f_4 + f_5 \\ f_4 - 2f_5 + f_6 \\ f_5 - 2f_6 + f_7 \\ \vdots \\ f_{n-2} - 2f_{n-1} + f_n \end{bmatrix} \tag{6}$$

1.3

Niech $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$, w zadaniu należy wyznaczyć interpolację funkcji $f(x)$ naturalnym splajnem kubicznym $s_k(x)$ dla kilku k, gdzie k jest rzędem splajnu oraz przeanalizować błąd interpolacji $\Delta_k = |s_k(x) - f(x)|$. Węzły są rozmieszczone jednorodnie w przedziale $[-1; 1]$.

2 Wyniki



Rysunek 1: Dla wybranych rzędów k: interpolacja naturalnymi splajnami kubicznymi $s_k(x)$ funkcji $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$, błąd interpolacji $\Delta_k = |s_k(x) - f(x)|$. Węzły interpolacji są rozmieszczone jednorodnie.

Na podstawie rys. 1 widać że wraz ze zwiększaniem rzędu splajnu s maleje błąd interpolacji. Nie są widoczne skutki uboczne zwiększania ilości węzłów, takie jak oscylacje Rungego dla interpolacji wielomianowej. Błąd interpolacji w węzłach wynosi 0 dla każdego rzędu k, rośnie za każdym węzłem x_j osiągając maksimum lokalne w około połowie przedziału $x \in [x_j; x_{j+1}]$, a następnie maleje do 0 w następnym węźle x_{j+1}.

Można też zauważyć że dla badanej funkcji f amplituda błędu może wzrosnąć po zwiększaniu rzędu splajnu, dzieje się tak dla $k = 5$ i $k = 6$. Funkcja f jest symetryczna względem $x = 0$, więc dla nieparzystych rzędów jeden z węzłów wypada zawsze w osi symetrii (rys. 1: $k = 5, k = 7$). Dla parzystych rzędów splajnu maksimum błędu znajduje się w osi symetrii $x = 0$, gdzie wypada środek przedziału między kolejnymi węzłami, a $f(x)$ zmienia się naj szybciej.

3 Podsumowanie

Metoda interpolacji za pomocą funkcji sklejanych pozwala na osiągniecie dowolnego przybliżenia funkcji interpolowanej (pod warunkiem możliwości uzyskania nowych wartości funkcji interpolowanej w węzłach), zwiększając rząd splajnu. Pomimo bazowania na wielomianach nie przejawia problemów z oscylacjami Rungego dzięki używaniu niskich stopni. Najczęściej używaną formą interpolacji splajnami są splajny kubiczne, których wyznaczenie dla węzłów rozmieszczonych w równych odległościach upraszcza się znacząco.