

Raport - Zadanie numeryczne 5

Grzegorz Janysek

16 grudnia 2021

1 Wstęp teoretyczny

1.1

Rozwiązywanie układów równań liniowych za pomocą metod iteracyjnych polega na znalezieniu przybliżenia dokładnego wyniku na drodze skończonej liczby iteracji poczynając od dowolnie wybranego wektora. Uzyskuje się to powtarzając obliczenia i znajdując z każdą kolejną iteracją lepsze przybliżenie rozwiązania równania.

Wykonanie rozkładu macierzy w arytmetyce dokładnej pozwala na obliczenie ścisłego wyniku, natomiast w przypadku omawianych metod iteracyjnych ścisły wynik musiałby być efektem iteracji których ilość dąży do nieskończoności. W praktyce dokładność przybliżenia; ograniczoną typem danych, wybiera się dowolnie. Mniejszy błąd przybliżenia wyniku równania uzyskiwany jest większą liczbą iteracji.

Szybkością zbiegania metody iteracyjnej określa się tempo z jakim maleje błąd przybliżenia wyniku z każdą kolejną iteracją. Zakładając stałą złożoność iteracji, metoda która dla danego problemu zbiega się szybciej będzie lepsza.

1.2

Porównywane dalej metody to metoda *Jacobiego* i metoda *Gaussa-Seidela* należą do ogólnej kategorii metod iteracyjnych:

$$Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b \quad (1)$$

Gdzie indeks k oznacza numer iteracji. Dla równania $Ax = b$, $A = M - N$ jest podziałem wybranym w różny sposób w zależności od metody iteracyjnej. Podział dla metody *Jacobiego* (2) i *Gaussa-Seidela* (3)

$$A = D + (L + U) \quad M = D \quad N = -(L + U) \quad (2)$$

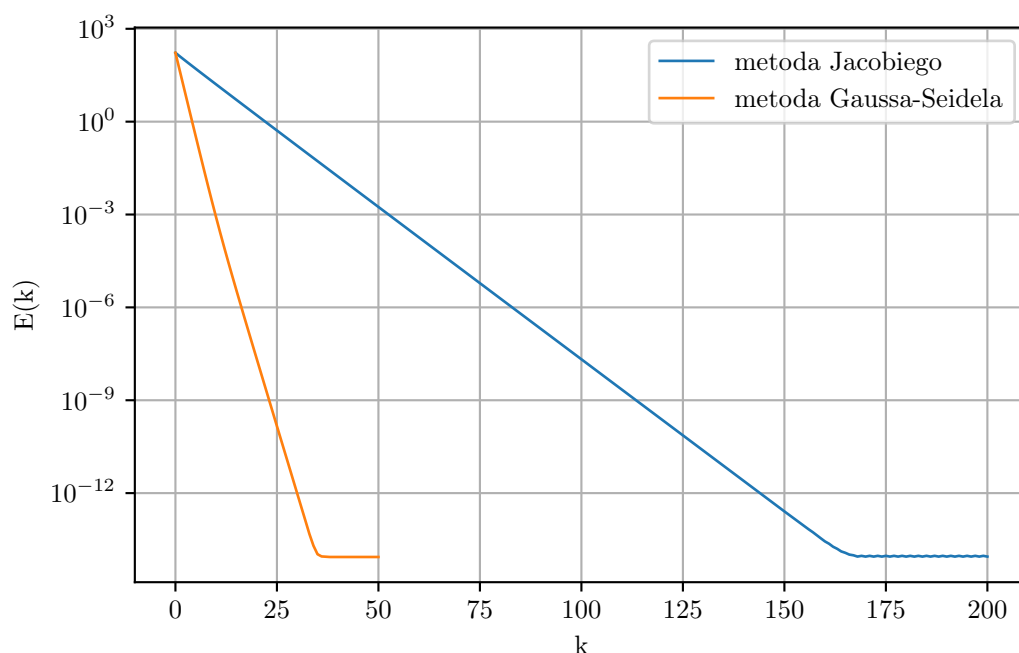
$$A = (D + L) + U \quad M = D + L \quad N = -U \quad (3)$$

Z powyższych wzorów można wyprowadzić wyrażenia na i -ty element wektora w $k + 1$ iteracji odpowiednio dla obu metod:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^N a_{ij}x_j^{(k)} \right) \quad (4)$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^N a_{ij}x_j^{(k)} \right) \quad (5)$$

2 Wyniki



Rysunek 1: Bezwzględny błąd przybliżenia wyniku E od ilości iteracji k dla metod *Jacobiego* i *Gaussa-Seidela*

3 Podsumowanie

Przewaga metod iteracyjnych jest widoczna gdy rozwiązanie równania za pomocą faktoryzacji macierzy staje się zbyt kosztowne.

Dla gęstej macierzy A złożoność rozkładu to $O(n^3)$. Złożoność pojedynczej iteracji dla takiej macierzy to $O(n^2)$, stąd złożoność metody iteracyjnej dla k iteracji $O(k * n^2)$. Jeżeli n jest bardzo duże i z przyczyn praktycznych nie możliwa jest faktoryzacja, metody iteracyjne pozwalają na uzyskanie przybliżenia i poprawianie go w kolejnych krokach w przypadku nie wystarczającej dokładności, przez co są bardziej plastyczne od rozkładu.

W porównywanych metodach iteracyjnych istotne jest aby wykozystać strukturę macierzy i nie iterować po znanych elementach zerowych. W równaniu z zadania pozwala to na osiągnięcie liniowej złożoności pojedynczej iteracji.