

Raport - Zadanie numeryczne 3

Grzegorz Janysek

21 listopada 2021

1 Wstęp teoretyczny

1.1

W ogólnym przypadku złożoność numerycznego rozwiązywania układów równań z liniowych to $O(n^3)$. Daje się ją jednak znacząco zmniejszyć stosując algorytmy wykorzystujące strukturę macierzy. Zadanie skupia się na metodzie dla szczególnego rodzaju kwadratowej macierzy żądkiej: macierzy wstęgowej (in. pasmowej). Charakteryzuje się ona tym że poza główną diagonalą i wstęgą wokół niej wszystkie elementy są zerowe.

$$\begin{bmatrix} \bullet & \circ & \circ & & & & \\ \circ & \bullet & \circ & \circ & & & \\ & \circ & \bullet & \circ & \circ & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \circ & \bullet & \circ & \circ \\ & & & & \circ & \bullet & \circ & \circ \\ & & & & & \circ & \bullet & \circ \\ & & & & & & \circ & \bullet \end{bmatrix} \quad (1)$$

1.2

Przechowywanie macierzy w pamięci w ogólnym przypadku zajmuje $x * n^2$, gdzie x to rozmiar typu danych. Do zapisania macierzy z zadania dla typu danych *float64* konieczne by było:

$$\text{dla } N = 100 : \quad 8B * 100^2 = 80kB \quad (2)$$

$$\text{dla } N = 1,000 : \quad 8B * 1,000^2 = 8MB \quad (3)$$

$$\text{dla } N = 10,000 : \quad 8B * 10,000^2 = 800MB \quad (4)$$

Dla ogólnej macierzy wstęgowej większość elementów to zera na znanych pozycjach poza wstęgą. Pozwala to na optymalizację polegającą na przechowywaniu jedynie wstęgi, w postaci np. tablicy dwuwymiarowej $a \times n$ której rozmiar to $x * a * n$, gdzie a to szerokość wstęgi.

$$\text{dla } N = 100 : \quad 8B * 4 * 100 = 3.2kB \quad (5)$$

$$\text{dla } N = 1,000 : \quad 8B * 4 * 1,000 = 32kB \quad (6)$$

$$\text{dla } N = 10,000 : \quad 8B * 4 * 10,000 = 320kB \quad (7)$$

1.3

Faktoryzacja LU zachowuje strukturę macieży pasmowej. Wiedząc to można pominąć obliczanie elementów macieży L oraz U poza wstęgą, ponieważ z powyższego wynika że będą one zerowe. Ogranicza to konieczność obliczeń tylko dla elementów wstęgi, których ilość jest rzędu n . Dodatkowo ilość elementów sumy koniecznych do obliczania wartości elementu w L lub w U pozostaje nie większa niż szerokość wstęgi. Wykozystując to można zmniejszyć złożoność rozkładu dla macieży wstęgowej do $O(n)$. W połączeniu z *back-substitution* i *forward-substitution* których złożoność wynosi $O(n)$, otrzymujemy całkowitą złożoność rozwiązywania układów równań liniowych z macieżą wstęgową wynoszącą $O(n)$

2 Wyniki

3 Podsumowanie

Podczas rozwiązywania układów równań liniowych kluczowa jest znajomość struktury macieży. Pozwala to na dobranie odpowiedniego sposobu przechowywania w pamięci, oraz algorytmu faktoryzacji, potencjalnie dramatycznie zmniejszając zużycie pamięci oraz czas procesora.