

# Raport - Zadanie numeryczne 8

Grzegorz Janysek

22 stycznia 2022

## 1 Wstęp teoretyczny

Celem całkowania numerycznego jest obliczenie zadanej istniejącej całki w efektywny sposób i ze znanym określonym błędem. Aby to osiągnąć można przyjąć strategię przybliżania fragmentów funkcji całkowanej  $f$  za pomocą funkcji  $g$ , tj. interpolować  $f$  za pomocą  $g$ . Funkcje interpolującą  $g$  dobiera się tak aby jej całkę dało się łatwo wyznaczyć analitycznie.

### 1.1

Całkę na każdym przedział całkowania  $[a; x_1], [x_1; x_2] \dots [x_n; b]$  można przybliżyć całką z wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a na tym przedziale. Sum ich wartości będzie całkowita wartość przybliżenia numerycznego całki  $\int_a^b f(x)dx$ . Uzyskujemy w ten sposób metodę kwadratur Newtona-Cotesa. W zależności od doboru stopnia wielomianów interpolacyjnych otrzymujemy następujące kwadratury, odpowiadające kolejno stopniom wielomianów od 1 do 4:

$$\text{Metoda trapezów:} \quad \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2}(f_0 + f_1) \quad (1)$$

$$\text{Metoda Simpsona:} \quad \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6}(f_0 + 4f_1 + f_2) \quad (2)$$

$$\text{Metoda 3/8:} \quad \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) \quad (3)$$

$$\text{Metoda Milne'a} \quad \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{90}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4) \quad (4)$$

Proces zagęszczania przedziałów całkowania powtarza się iteracyjnie do momentu, gdy kolejne wyniki są takie same jak poprzednie z dokładnością do ustalonego małego  $\epsilon$ . Aby nie zminimalizować konieczność obliczania wartości funkcji  $f$ , z każdą iteracją przedziały można dzielić na  $n$  fragmentów (w zależności od metody). Wykorzystując punkty z obliczonymi już wartościami  $f$  na potrzeby kwadratur jako granice nowych przedziałów.

### 1.2

Kwadratury Newtona-Cotesa nie używają z wcześniej obliczonych przybliżeń w kolejnych krokach. Metoda Romberga łączy metodę trapezów i ekstrapolację Richardsona. Na podstawie ciągu poprzednich przybliżeń całki, ekstrapoluje jej wartość. Może być zdefiniowana jako:

$$h_n = \frac{b-a}{2^n}, \quad 1 \leq m \leq n \quad (5)$$

$$R_{1,1} = h_1 [f(a) + f(b)] \quad (6)$$

$$R_{n,1} = h_n \left[ f(a) + \sum_{i=1}^{2^n-1} f(a + ih_n) + f(b) \right] \quad (7)$$

$$R_{n,m} = R_{n,m-1} + \frac{R_{n,m-1} - R_{n-1,m-1}}{4^{m-1} - 1} \quad (8)$$

Tak jak w przypadku kwadratur Newtona-Cotesa istotne jest aby nie obliczać wielokrotnie wartości  $f$  dla tego samego argumentu. Można zauważyć, że poprzedni krok iteracji zawiera połowę wartości  $f$  koniecznych do wyznaczenia kolejnego kroku. Warunkiem zakończenia iteracji jest taka sama wartość  $R_{n,n}$  i  $R_{n-1,n-1}$  z dokładnością do ustalonego małego  $\epsilon$ .

### 1.3

W zadaniu należy zaimplementować dwie funkcje całkujące  $f$  na przedziale  $[a; b]$  z bezwzględnym błędem  $\epsilon$ . Wykorzystując złożoną kwadraturę Newtona-Cotesa z metodą Simpsona oraz Metodę Romberga. Należy następnie obliczyć z błędem  $\epsilon = 10^{-10}$  całki:

$$F_1 \equiv \int_0^1 \sin(x) dx \quad (9)$$

$$F_2 \equiv \int_0^1 \int_0^1 \ln(x^2 + y^2 + 1) dx dy \quad (10)$$

## 2 Wyniki

	całka	metoda Simpsona	metoda Romberga	funkcja biblioteczna
wartość	$F_1$	<b>0.4596976941</b> 413741	<b>0.4596976941</b> 318605	<b>0.4596976941</b> 318602
ilość iteracji	$F_1$	7	5	-
ilość wyliczeń $f$	$F_1$	129	33	-
wartość	$F_2$	<b>0.4266771075</b> 053903	<b>0.4266771075</b> 061421	<b>0.4266771075</b> 258530
ilość iteracji	$F_2$	1164	772	-
ilość wyliczeń $f$	$F_2$	65153	8097	-

Szacowany błąd obliczeń przez metodę biblioteczną w obu przypadkach nie przekracza  $10^{-14}$ . Jako że całka  $F_2$  jest podwójna, dla obu badanych metod, została ona obliczona iteracyjnie. Każde obliczenie funkcji pod zewnętrzną całką wiązało się z obliczeniem wartości całki wewnętrznej. Zrealizowane zostało to z użyciem wyrażenia  $\lambda$ .

## 3 Podsumowanie

Metoda Romberga osiąga zadaną dokładność przy znaczenie mniejszej ilości iteracji i co za tym idzie, mniejszej ilości wyliczeń całkowanej funkcji.