Raport - Zadanie numeryczne 1

Grzegorz Janysek

18 października 2021

1 Wstęp teoretyczny

Wyniki obliczeń numerycznych są obarczone błędami. Mogą one wynikać z pomyłek człowieka podczas tworzenia i implementacji algorytmów numerycznych, jak i z samej natury obliczeń numerycznych. Dysponując skończoną pamięcią nie jest możliwe reprezentowanie wszystkich liczb rzeczywistych. Niniejsze zadanie skupia się na ukazaniu wpływu błędów wynikających z zaokrągleń oraz doboru algorytmu, na wyniki obliczeń.

Rozpatrywaneym przykładem jest różniczkowanie numeryczne. Jak wiadomo pochodna funkcji $f(x)$ wyraża się ilorazem różnicowym:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Możliwe jest obliczenie przybliżonej wartości $f'(x_0)$ zastępując $h \to 0$ na określone małe h. Kożystając z definicji pochodnej wyprowadzono dwie metody na jej przybliżenie numeryczne: (Metoda a), (Metoda b).

$$f'(x) \approx D_h f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{Metoda a}$$

$$f'(x) \approx D_h f(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \tag{Metoda b}$$

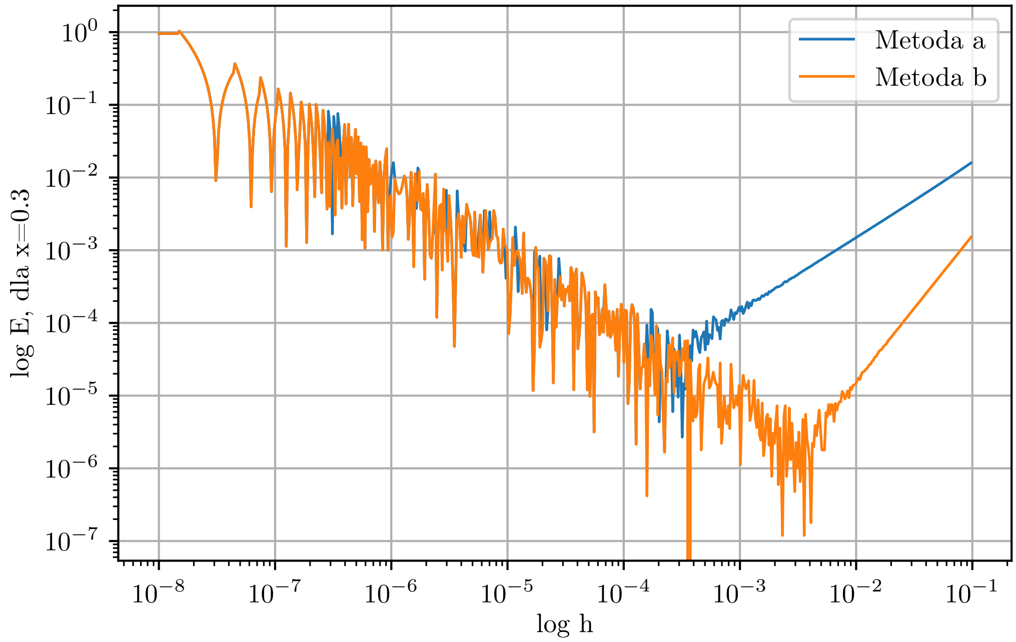
Naturalna może być chęć dobrania możliwie jak naj mniejszego h. Wiadomo jednak że dzielenie przez małą liczbę prowadzi może prowadzić do znaczącego błędu. Z kolei dobranie zbyt dużego h w oczywisty sposób prowadzi do błędu związanego z "oddaleniem się" od siebie punktów x i $x + h$

2 Wyniki

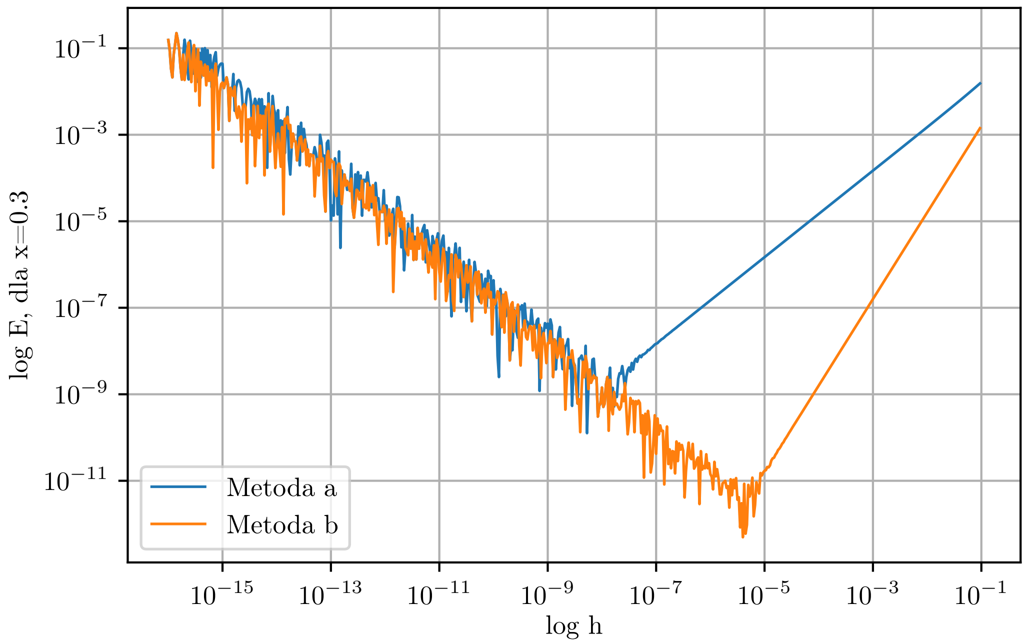
Ponożej (1, 2) perzedstawiono wykresy błędu E funkcji $sin(x)$, $x = 0.3$, w zależności doboru h, typu danych oraz metody różniczkowania. Błąd jest obliczany z następującego wzoru:

$$E = |D_h f(x) - f'(x)|$$

$$E = |D_h sin(x) - cos(x)|$$



Rysunek 1: Zależność błędu od doboru h dla `float32`



Rysunek 2: Zależność błędu od doboru h dla `float64`

Można wyróżnić dwie części każdego z wykresów: tą po lewej stronie minimum błędu i tą po prawej. Po lewej stronie błąd jest wynikiem zaokrągleń małych h, i widoczny jest w postaci szumu numerycznego. Po prawej stronie błąd rośnie liniowo wraz z doborem większych wartości h. Metoda b pozwala na uzyskanie znacząco mniejszego błędu.

3 Podsumowanie

Wyniki pokazują kluczowość kwestii doboru parametru h podczas różniczkowania numerycznego. Wartość błędu może być większa o nawet 10 rzędów wielkości od optymalnej przy złym doborze. Wykresy ukazują też w jaki sposób typ danych wpływa na minimalną wartość błędu (dwukrotne zwiększenie zapotrzebowania na pamięć umożliwiło zwiększenie dokładności około 2.5 rzędów wielkości)