

Raport - Zadanie numeryczne 3

Grzegorz Janysek

21 listopada 2021

1 Wstęp teoretyczny

1.1

W ogólnym przypadku złożoność numerycznego rozwiązywania układów równań z liniowych to $O(n^3)$. Daje się ją jednak znacząco zmniejszyć stosując algorytmy wykorzystujące strukturę macierzy. Zadanie skupia się na metodzie dla szczególnego rodzaju kwadratowej macierzy żądkiej: macierzy wstęgowej (in. pasmowej). Charakteryzuje się ona tym, że poza główną diagonalą i wstęgą wokół niej, wszystkie elementy są zerowe.

$$\begin{bmatrix} \bullet & \circ & \circ & & & & \\ \circ & \bullet & \circ & \circ & & & \\ & \circ & \bullet & \circ & \circ & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \circ & \bullet & \circ & \circ \\ & & & & \circ & \bullet & \circ & \circ \\ & & & & & \circ & \bullet & \circ \\ & & & & & & \circ & \bullet \end{bmatrix} \quad (1)$$

1.2

Przechowywanie macierzy w pamięci w ogólnym przypadku zajmuje $x * n^2$, gdzie x to rozmiar typu danych. Do zapisania macierzy dla typu danych *float64* konieczne by było:

$$\text{dla } n = 100 : \quad 8\text{B} * 100^2 = 80\text{kB} \quad (2)$$

$$\text{dla } n = 1,000 : \quad 8\text{B} * 1,000^2 = 8\text{MB} \quad (3)$$

$$\text{dla } n = 10,000 : \quad 8\text{B} * 10,000^2 = 800\text{MB} \quad (4)$$

Dla ogólnej macierzy wstęgowej większość elementów to zera, na znanych pozycjach poza wstęgą. Pozwala to na optymalizację polegającą na przechowywaniu jedynie wstęgi w postaci np. tablicy dwuwymiarowej $a \times n$, której rozmiar to $x * a * n$, gdzie x to rozmiar typu danych, a to szerokość wstęgi. Na zapis w ten sposób potrzeba znacząco mniej pamięci. Zakładając szerokość wstęgi $a = 4$ (jak dla macierzy w zadaniu) mamy:

$$\text{dla } n = 100 : \quad 8\text{B} * 4 * 100 = 3.2\text{kB} \quad (5)$$

$$\text{dla } n = 1,000 : \quad 8\text{B} * 4 * 1,000 = 32\text{kB} \quad (6)$$

$$\text{dla } n = 10,000 : \quad 8\text{B} * 4 * 10,000 = 320\text{kB} \quad (7)$$

1.3

Faktoryzacja LU zachowuje strukturę macieży pasmowej. Wiedząc to można pominąć obliczanie elementów macieży L oraz U poza wstęgą, ponieważ z powyższego wynika, że będą one zerowe. Ogranicza to konieczność obliczeń tylko dla elementów wstęgi, których ilość jest rzędu n . Dodatkowo ilość elementów sumy koniecznych do obliczania wartości elementu w L lub w U pozostaje nie większa niż szerokość wstęgi. Wykorzystując to można zmniejszyć złożoność rozkładu dla macieży wstęgowej do $O(n)$.

Otrzymujemy przekształcenia (8, 9) jawnych wzorów na wartości elementów L i U , gdzie p odległością od górnej krawędzi wstęgi elementu u_{ij} , a q jest odległością od lewej krawędzi wstęgi elementu l_{ij}

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=i-p}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \quad (8)$$

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=j-q}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \right) \quad (9)$$

W połączeniu z *back-substitution* i *forward-substitution* których złożoność wynosi $O(n)$, otrzymujemy całkowitą złożoność rozwiązywania układów równań liniowych z macieżą wstęgową wynoszącą $O(n)$

2 Wyniki

3 Podsumowanie

Podczas rozwiązywania układów równań liniowych kluczowa jest znajomość struktury macieży. Pozwala to na dobranie odpowiedniego sposobu przechowywania w pamięci, oraz algorytmu faktoryzacji, potencjalnie dramatycznie zmniejszając zużycie pamięci oraz czas procesora.