

Raport - Zadanie numeryczne 6

Grzegorz Janysek

26 grudnia 2021

1 Wstęp teoretyczny

1.1

Interpolacja za pomocą funkcji sklejanych, in. *splajnów* (ang. spline) adresuje niepożądane zachowanie wielomianów Lagrange’a przy zwiększaniu ilości węzłów. Występujący dla wielomianów wysokiego stopnia problem oscylacji Rungego, jest rozwiązywany poprzez ograniczanie się do wielomianów o niskich stopniach i wyznaczanie innego wielomianu dla każdego przedziału pomiędzy węzłami. Wyznaczanie to odbywa się na podstawie warunków ciągłości funkcji sklejaney oraz ciągłości jej pochodnych w węzłach interpolacji. Uzyskany splajn s rzędu k dla n węzłów $(x_1, x_2 \dots x_n)$ jest *sklejeniem* $n - 1$ wielomianów k -tego stopnia.

$$s(x) = \begin{cases} y_1(x) & \text{dla } x_1 \leq x < x_2 \\ y_2(x) & \text{dla } x_2 \leq x < x_3 \\ y_3(x) & \text{dla } x_3 \leq x < x_4 \\ \vdots & \\ y_{n-1}(x) & \text{dla } x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases} \quad (1)$$

1.2

Najczęściej używa się splajnów kubicznych (ang. cubic spline) tj. splajnów trzeciego rzędu, do konstrukcji którego na każdym przedziale wyznacza się wielomian trzeciego stopnia:

$$y_j(x) = Af_j + Bf_{j+1} + C\xi + D\xi_{j+1} \quad (2)$$

gdzie

$$A = \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} \quad B = \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} \quad (3)$$

$$C = \frac{(A^3 - A)(x_{j+1} - x_j)^2}{6} \quad D = \frac{(B^3 - B)(x_{j+1} - x_j)^2}{6} \quad (4)$$

Z warunku ciągłości pierwszej pochodnej w węzłach wynika że pochodna wielomianu $y_j(x)$ w prawym krańcu przedziału musi się równać pochodnej $y_{j+1}(x)$ w lewym krańcu przedziału. Korzystając z tego faktu i (2, 3, 4) można wyprowadzić wyrażenie będące trójdagonalnym układem równań gdzie niewiadomą jest ξ :

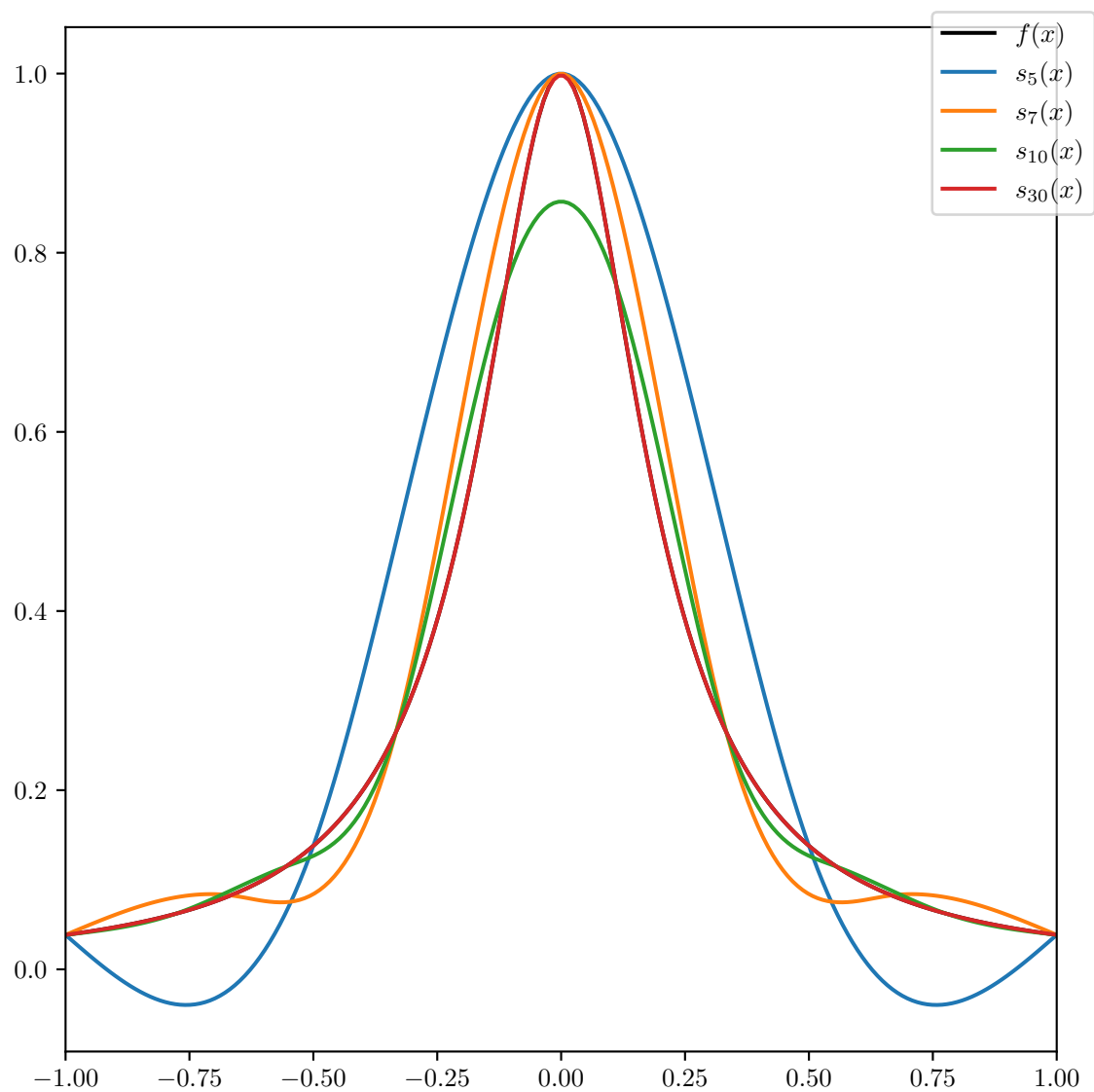
$$\xi_{j-1} \left(\frac{x_j - x_{j-1}}{6} \right) + \xi_j \left(\frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{3} \right) + \xi_{j+1} \left(\frac{x_{j+1} - x_j}{6} \right) = \frac{f_{j+1} - f_j}{x_{j+1} - x_j} - \frac{f_j - f_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \quad (5)$$

Warunki ciągłości nie obejmują skrajnych węzłów x_1 i x_n parametry ξ_0 oraz ξ_n nie są określane przez wyrażenie (5). Najczęściej stosuje się więc naturalny splajn kubiczny dla którego $\xi_0, \xi_n = 0$.

Przypadek węzłów interpolacji będących rozmieszczonych jednorodnie (w równej odległości od siebie) upraszcza się do układu równań, gdzie $d = x_{j+1} - x_j$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \\ \vdots \\ \xi_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{6}{d^2} \begin{bmatrix} f_1 - 2f_2 + f_3 \\ f_2 - 2f_3 + f_4 \\ f_3 - 2f_4 + f_5 \\ f_4 - 2f_5 + f_6 \\ f_5 - 2f_6 + f_7 \\ \vdots \\ f_{n-2} - 2f_{n-1} + f_n \end{bmatrix} \quad (6)$$

2 Wyniki



Rysunek 1: Interpolacja wielomianowa funkcji $y(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ dla jednorodnej dystrybucji n węzłów interpolacyjnych.

3 Podsumowanie