Raport - Zadanie numeryczne 4

Grzegorz Janysek

28 listopada 2021

1 Wstęp teoretyczny

1.1

Rozwiązując problem $y = A^{-1}b$, w celu przyspieszenia obliczeń i zmniejszenia zużyciu zasobów, chcemy wykożystać strukturę A. Jeżeli jesteśmy w stanie przedstawić problem jako:

$$y = (B + uv^T)^{-1}b \qquad \text{gdzie} \qquad A = B + uv^T \tag{1}$$

w taki sposób że złożność faktoryzacji B jest mniejsza od złożności faktoryzacji A, możemy wykożystać wzór Shermana-Morrisona:

$$(B + uv^T)^{-1} = B^{-1} - \frac{B^{-1}uv^TB^{-1}}{1 + v^TB^{-1}u} \tag{2}$$

Podstawiając do (1) otrzymujemy

$$y = \left(B^{-1} - \frac{B^{-1}uv^TB^{-1}}{1 + v^TB^{-1}u}\right)b \tag{3}$$

$$y = B^{-1}b - \frac{B^{-1}uv^TB^{-1}b}{1 + v^TB^{-1}u} \tag{4}$$

Zauważmy teraz że B występuje tylko w postaci B^{-1}. Nie chcemy explicite obliczać odwrotności B. To czego potrzebujemy to $B^{-1}b$ oraz $B^{-1}u$.

$$p = B^{-1}b \qquad q = B^{-1}u \tag{5}$$

$$y = p - \frac{qv^Tp}{1 + v^Tq} \tag{6}$$

Problem sprowadza się więc do znalezienia faktoryzacji B w celu obliczenia p i q.

1.2

W ćwiczeniu należy wykożystać srukturę zadanej macierzy A, i rozwiązać $y = A^{-1}b$.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 8 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 8 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 10 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 10 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 10 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 10 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ \vdots \\ 5 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$A \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad b \in \mathbb{R}^N, \quad N = 50 \tag{8}$$

Łatwo można zauważyć że poza wstęgą macierz A zawiera jedynie liczby 1. Pozwala to na zapisanie A jako sumy macierzy wstęgowej i macierzy jedynek: $A = B + uv^T$

$$B = \begin{bmatrix} 9 & 7 & & & & & \\ & 9 & 7 & & & & \\ & & 9 & 7 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & 9 & 7 & \\ & & & & & 9 & 7 \\ & & & & & & 9 \end{bmatrix} \qquad u = v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Kożystając z zależności (5, 6), Musimy rozwiązać dwa układy równań z B. Złożoność faktoryzacji LU maciży wstęgowej, *backward-substitution* i *forward-substitution* to $O(n)$. Pozostałe operacje konieczne do obliczenia y to iloczyn skalarny o złożności $O(n)$, działanie macierzą na wektor o złożności $O(n^2)$, iloczyn zewnętrzny wektorów q i v o złożności $O(n^2)$ oraz mnożenie wektora przez skalar o złożności $O(n)$. Więc całkowita złożność czasowa takiego rozwiązania wynosi $O(n^2)$ w porówaniu do $O(n^3)$ w ogólnym przypadku.

2 Wyniki

Wyniki zgadzają się z obliczonymi bezpośrednio z użyciem metody z biblioteki algebry komputerowej.

$$y = \begin{bmatrix} 0.07525844 \\ 0.07525904 \\ 0.07525827 \\ 0.07525926 \\ 0.07525799 \\ 0.07525963 \\ 0.07525752 \\ 0.07526122 \\ 0.07525546 \\ 0.07526287 \\ 0.07525334 \\ 0.07526559 \\ 0.07524985 \\ 0.07527009 \\ \vdots \\ 0.13379325 \end{bmatrix} \tag{10}$$

3 Podsumowanie

Wzór Shermana-Morrisona jest bardzo dobrym narzędziem znajdywania odwrotności macierzy pod warunkiem że znamy odwrotność jej zaburzenia i jesteśmy w stanie to zaburzenie wyrazić jako produk zewnętrzny dwuch wektorów. Można zyskać na złożności nawet w przypadku gdy nie znamy odwrotność zaburzenia ale jest ono łatwiejsze do obliczenia niż odwrotność samej macierzy. Po przekształceniu może służyć jako narzędzie służące przyspieszeniu rozwiązywania układów równań liniowych zamieniając problem faktoryzacji macieży na problem znajdywania faktoryzacji jej zabutzenia.