

Raport - Zadanie numeryczne 8

Grzegorz Janysek

22 stycznia 2022

1 Wstęp teoretyczny

Celem całkowania numerycznego jest obliczenie zadanej istniejącej całki w efektywny sposób i ze znanym określonym błędem. Aby to osiągnąć można przyjąć strategię przybliżania fragmentów funkcji całkowanej f za pomocą funkcji g , tj. interpolować f za pomocą g . Funkcje interpolującą g dobiera się tak aby jej całkę dało się łatwo wyznaczyć analitycznie.

1.1

Całkę na każdym przedział całkowania $[a; x_1], [x_1; x_2] \dots [x_n; b]$ można przybliżyć całką z wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a na tym przedziale. Sum ich wartości będzie całkowita wartość przybliżenia numerycznego całki $\int_a^b f(x)dx$. Uzyskujemy w ten sposób metodę kwadratur Newtona-Cotesa. W zależności od doboru stopnia wielomianów interpolacyjnych otrzymujemy następujące kwadratury, odpowiadające kolejno stopniom wielomianów od 1 do 4:

$$\text{Metoda trapezów:} \quad \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2}(f_0 + f_1) \quad (1)$$

$$\text{Metoda Simpsona:} \quad \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6}(f_0 + 4f_1 + f_2) \quad (2)$$

$$\text{Metoda 3/8:} \quad \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) \quad (3)$$

$$\text{Metoda Milne'a} \quad \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{90}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4) \quad (4)$$

Proces zagęszczania przedziałów całkowania powtarza się iteracyjnie do momentu, gdy kolejne wyniki są takie same jak poprzednie z dokładnością do ustalonego małego ϵ . Aby nie zminimalizować konieczność obliczania wartości funkcji f , z każdą iteracją przedziały można dzielić na n fragmentów (w zależności od metody). Wykorzystując punkty z obliczonymi już wartościami f na potrzeby kwadratur jako granice nowych przedziałów.

1.2

Kwadratury Newtona-Cotesa nie używają z wcześniej obliczonych przybliżeń w kolejnych krokach. Metoda Romberga łączy metodę trapezów i ekstrapolację Richardsona. Na podstawie ciągu poprzednich przybliżeń całki, ekstrapoluje jej wartość. Może być zdefiniowana jako:

$$h_n = \frac{b-a}{2^n}, \quad 1 \leq m \leq n \quad (5)$$

$$R_{1,1} = h_1 [f(a) + f(b)] \quad (6)$$

$$R_{n,1} = h_n \left[f(a) + \sum_{i=1}^{2^n-1} f(a + ih_n) + f(b) \right] \quad (7)$$

$$R_{n,m} = R_{n,m-1} + \frac{R_{n,m-1} - R_{n-1,m-1}}{4^{m-1} - 1} \quad (8)$$

Tak jak w przypadku kwadratur Newtona-Cotesa istotne jest aby nie obliczać wielokrotnie wartości f dla tego samego argumentu. Można zauważyć, że poprzedni krok iteracji zawiera połowę wartości f koniecznych do wyznaczenia kolejnego kroku. Warunkiem zakończenia iteracji jest taka sama wartość $R_{n,n}$ i $R_{n-1,n-1}$ z dokładnością do ustalonego małego ϵ .

1.3

W zadaniu należy zaimplementować dwie funkcje całkujące f na przedziale $[a; b]$ z bezwzględnym błędem ϵ . Wykorzystując złożoną kwadraturę Newtona-Cotesa z metodą Simpsona oraz Metodę Romberga. Należy następnie obliczyć z błędem $\epsilon = 10^{-10}$ całki:

$$F_1 \equiv \int_0^1 \sin(x) dx \quad (9)$$

$$F_2 \equiv \int_0^1 \int_0^1 \ln(x^2 + y^2 + 1) dx dy \quad (10)$$

2 Wyniki

	całka	metoda Simpsona	metoda Romberga	funkcja biblioteczna
wartość	F_1	0.4596976941413..	0.4596976941318..	0.4596976941318..
ilość iteracji	F_1	7	5	-
ilość wyliczeń f_1	F_1	129	33	-
wartość	F_2	0.4266771075053..	0.4266771075061..	0.4266771075258..
ilość iteracji	F_2	1164	772	-
ilość wyliczeń f_2	F_2	65153	8097	-

Szacowany błąd obliczeń przez metodę biblioteczną w obu przypadkach nie przekracza 10^{-14} . Jako że całka F_2 jest podwójna, dla obu badanych metod, została ona obliczona iteracyjnie. Każde obliczenie funkcji pod zewnętrzną całką wiązało się z obliczeniem wartości całki wewnętrznej. Zrealizowane zostało to z użyciem wyrażenia λ .

3 Podsumowanie

Metoda Romberga osiąga zadaną dokładność przy znaczenie mniejszej ilości iteracji i co za tym idzie, mniejszej ilości wyliczeń całkowanej funkcji. Podczas implementacji obu metod niezwykle istotne jest aby nie obliczać ponownie znanych już wartości całkowanej funkcji.