Obracanie dustrybuanty - Zadanie 3.3

Grzegorz Janysek

12 listopada 2021

Zadana funkcja gęstości prawdopodobieństwa

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, -1] \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} & x \in (-1, 0] \\ \frac{1}{3} & x \in (0, 2] \\ -\frac{1}{3}x + 1 & x \in (2, 3] \\ 0 & x \in (3, +\infty) \end{cases} \tag{1}$$

Obliczanie dustrybuanty $F_X(x)$ na podstawie funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f_X(x)$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(t)dt \tag{2}$$

$$\text{dla } x \in (-\infty, -1] : \qquad F_X(x) = 0 \tag{3}$$

$$\text{dla } x \in (-1, 0] : \qquad F_X(x) = F_X(-1) + \int_{-1}^{x} (\frac{1}{3}t + \frac{1}{3})dt = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{6} \tag{4}$$

$$\text{dla } x \in (0, 2] : \qquad F_X(x) = F_X(0) + \int_{0}^{x} \frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6} \tag{5}$$

$$\text{dla } x \in (2, 3] : \qquad F_X(x) = F_X(2) + \int_{2}^{x} (-\frac{1}{3}t + 1)dt = -\frac{1}{6}x^2 + x - \frac{1}{2} \tag{6}$$

$$\text{dla } x \in (3, +\infty) : \qquad F_X(x) = 1 \tag{7}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, -1] \\ \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{6} & x \in (-1, 0] \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{6} & x \in (0, 2] \\ -\frac{1}{6}x^2 + x - \frac{1}{2} & x \in (2, 3] \\ 1 & x \in (3, +\infty) \end{cases} \tag{8}$$

Obliczanie funkcji odwrotnej do $F_X(x)$ dla $x \in (-1, 0] \implies F_X(x) \in (0, \frac{1}{6})$

$$F_X(y) = \frac{1}{6}y^2 + \frac{1}{3}y + \frac{1}{6} \tag{9}$$

$$x = \frac{1}{6}y^2 + \frac{1}{3}y + \frac{1}{6} \tag{10}$$

$$x = \frac{1}{6}(y^2 + 2y + 1) \tag{11}$$

$$6x = (y+1)^2 \tag{12}$$

$$\sqrt{6x} - 1 = y \tag{13}$$

$$\text{stąd, dla } x \in (0, \frac{1}{6}) : F_X^{-1}(x) = \sqrt{6x} - 1 \tag{14}$$

Postępowanie wygląda alanlogicznie dla pozostałych zakresów, otrzymujemy:

$$f_X(x) = \begin{cases} \sqrt{6x} - 1 & x \in (0, \frac{1}{6}] \\ 3x - \frac{1}{2} & x \in (\frac{1}{6}, \frac{5}{6}] \\ 3 - \sqrt{6 - 6x} & x \in (\frac{5}{6}, 1] \end{cases} \tag{15}$$

Przekształcenie zmennej losowej jednorodnej za pomocą $F_X^{-1}(x)$ pozwala na uzyskanie zmiennej losowej o zadanej funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f_x(x)$