Kolokwium 1, grupa 1

25/11/2025

1. Równanie
$$\left(1-t^2\right)x''(t) - 2tx'(t) + n(n+1)x(t) = \frac{1}{t}$$
to niejednorodne równanie Legendre'a. Dla $n = 1$ rozwiązaniem równania jednorodnego (wielomianem Legendre'a P_1) jest funkcja identycznościowa - sprawdź to, a następnie znajdź drugie rozwiązanie (Q_1). Rozwiąż to równanie niejednorodne.

2. Rozwiąż jeden z poniższych podpunktów (a) lub (b)
   (a) Udowodnij następujące twierdzenia:
   - ☛ Dla każdej funkcji $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, poniższe równanie różniczkowe można przekształcić do równania o rozdzielonych zmiennych:
   $$x'(t) = f\left(\frac{x(t)}{t}\right)$$
   - ☛ Niech zadane będzie równanie o rozdzielonych zmiennych:
   $$x'(t) = a(t)b(x(t))$$
   , gdzie $a : A \to \mathbb{R},\ b : B \to \mathbb{R}$ to funkcje ciągłe na pewnych odcinkach. Ponadto, niech $b(x) \neq 0$ dla $x \in B$. Udowodnij, że zabieg "rozbicia" pochodnej na różniczki ma uzasadnienie w formalnym rozwiązywaniu takich równań.

   (b) Rozwiąż następujące zagadnienia Cauchy'ego:
   - ☛ $e^{-t}x'(t) - te^{-x(t)} = 0$, $x(0) = -1$
   - ☛ $y'(x) + y(x)\cos(x) = 0$, $y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1$

3. Rozwiąż jeden z poniższych podpunktów (a) lub (b)
   (a) Rozwiąż następujące równanie różniczkowe metodą szeregów:
   $$\left(t^2-1\right)\frac{d^2x}{dt^2} + 8t\frac{dx}{dt} + 10x = 5$$
   (b) Udowodnij wzór Abela.

4. Znajdź rozwiązanie ogólne następującego układu równań:
$$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 5x - 2y \end{cases}$$

Przykładowe rozwiązania grupy 1

1. Kolejne pochodne funkcji identycznościowej to:

$$P_1(t) = 1 \implies P_1'(t) = 1 \implies P_1''(t) = 0$$

wstawiając je do równania jednorodnego:

$$\begin{aligned}\left(1-t^2\right) P_1''(t) - 2tP_1'(t) + 1\,(1+1)\,P_1(t) &= \left(1-t^2\right)\cdot 0 - 2t\cdot 1 + 2\cdot t\\ &= 0 - 2t + 2t\\ &= 0\end{aligned}$$

co potwierdza, że jest to rozwiązanie równania jednorodnego. Drugie rozwiązanie znajdziemy dzięki:

$$f_2 = f_1 \int \frac{W}{f_1^2} dt$$

Wyznaczamy Wrońskian ze wzoru Abela:

$$\begin{aligned}W(t) &= c\exp\left(-\int \frac{-2t}{1-t^2}dt\right) \qquad \left|\begin{array}{l} u = 1-t^2\\ du = -2tdt\end{array}\right.\\ &= c\exp\left(-\int \frac{du}{u}\right)\\ &= c\exp\left(\ln(u) + \overline{c}\right)\\ &= \tilde{c}\exp\left(\ln\left(1-t^2\right)\right) = \frac{\tilde{c}}{1-t^2}\end{aligned}$$

Stałą $\tilde{c}$ postawimy równą jeden, ponieważ interesuje nas wyłącznie zależność od parametru, zaś skalowanie może zostać "wchłoniete" do dalszych funkcji podczas ostatecznego rozwiazania. Nie musimy stawiać wartości bezwzględnej w logarytmie, ponieważ rozważamy przedział $(-1, 1)$, w którym rozwijaliśmy rozwiązanie w szereg, a w którym $1 - t^2 > 0$. Stąd, licząc dalej

$$\begin{aligned}Q_1(t) &= t\int \frac{1}{1-t^2}\cdot\frac{1}{t^2}dt\\ &= t\int\left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{1-t^2}\right)dt \qquad \left|\ \frac{1}{t^2} + \frac{1}{1-t^2} = \frac{1-t^2+t^2}{t^2(1-t^2)} = \frac{1}{1-t^2}\right.\\ &= t\int t^{-2}dt + \frac{t}{2}\int\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)dt\\ &= t\cdot\left(-t^{-1}\right) + \frac{t}{2}\left(\ln(1+t) - \ln(1-t) + c\right)\end{aligned}$$

gdzie stałą całkowania c stawiamy równą zeru, ponieważ efektywnie i tak jest ona mnożona przez P_1, zatem człon ten zostanie wprowadzony osobno do rozwiązania.

Mając tak policzone rozwiązania dla równnia jednorodnego, przeprowadzamy uzmiennianie stałych:

$$c_1' = -\frac{hf_1}{aW} \qquad c_2' = \frac{hf_2}{aW}$$

W zadaniu $aW = 1$, zaś $h(t) = t^{-1}$. Obliczając zatem:

$$\begin{aligned}
-c_1(t) &= \int \frac{1}{t}\left(-1 + \frac{t}{2}\ln(1+t) - \frac{t}{2}\ln(1-t)\right)dt \\
&= \int \frac{-1}{t}dt + \frac{1}{2}\int \ln(1+t)dt - \frac{1}{2}\int \ln(1-t)dt \\
&= -\ln(t) + \frac{1}{2}\left(t\ln(1+t) - \int \frac{t}{1+t}dt\right) - \frac{1}{2}\left(t\ln(1-t) + \int \frac{t}{1-t}dt\right) \\
&= -\ln(t) + \frac{t}{2}\ln(1+t) - \frac{t}{2}\ln(1-t) - \frac{1}{2}\int\left(\frac{t}{1-t} + \frac{t}{1+t}\right)dt \\
&= -\ln(t) + \frac{t}{2}\ln(1+t) - \frac{t}{2}\ln(1-t) - \frac{1}{2}\int \frac{t+t^2+t-t^2}{1-t^2}dt \\
&= -\ln(t) + \frac{t}{2}\ln(1+t) - \frac{t}{2}\ln(1-t) + \frac{1}{2}\int \frac{-2t}{1-t^2}dt \\
&= -\ln(t) + \frac{t}{2}\ln(1+t) - \frac{t}{2}\ln(1-t) + \frac{1}{2}\ln\left(1-t^2\right) + c \quad \Big| c = 0 \\
&= -\ln(t) + \frac{t}{2}\ln(1+t) - \frac{t}{2}\ln(1-t) + \frac{1}{2}\ln(1+t) + \frac{1}{2}\ln(1-t) \\
&= -\ln(t) + \frac{1+t}{2}\ln(1+t) + \frac{1-t}{2}\ln(1-t)
\end{aligned}$$

Zaś z drugą "stałą" pójdzie nam łatwiej, gdyż:

$$c_2(t) = \int \frac{t}{t}dt = t + c \quad \Big| c = 0$$

Czyli również zostanie "wchłonięta" w część rozwiązania P_1. Stąd rozwiązanie ogólne:

$$x(t) = \tilde{c}_1 t + \tilde{c}_2\left(t\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) - 1\right) + t\left(\ln(t) - \frac{1+t}{2}\ln(1+t) - \frac{1-t}{2}\ln(1-t)\right)$$

2. (a) ☛ Stosując podstawienie:

$$u = x \cdot t^{-1} \implies u' = x' \cdot t^{-1} - x \cdot t^{-2} \implies x' = tu' + x \cdot t^{-1} = tu' + u$$

Zatem

$$x' = tu' + u = f(u) \implies u' = \frac{f(u) - u}{t}$$

Co jest równaniem o rozdzielonych zmiennych. ■

☛

$$\left(\frac{x'(t)}{b(x(t))} - a(t)\right) = 0 \implies$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{x'(t)}{b(x(t))}dt = \int_{t_0}^{t_1} a(t)dt \implies$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{x'(t)}{b \circ x(t)}dt = \left| \begin{array}{l} y = x(t) \\ dy = x'(t)dt \\ x(t_0) = y_0 \\ x(t_1) = y_1 \end{array} \right| = \int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{b(y)} \tag{1}$$

W tym momencie, skoro $b(x) \neq 0$, zatem ma stały znak. Zatem całka $\int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{b(y)} = \mathfrak{B}(y_1)$ jest funkcją monotoniczną, a zatem lokalnie istnieje funkcja odwrotna $\mathfrak{B}^{-1}$. Tym samym lokalnie rozwiązaniem jest:

$$x(t_1) = y_1 = \mathfrak{B}^{-1}\left(\int_{t_0}^{t_1} a(t)dt\right)$$

Przy czym już w momencie (1) widzimy, że doprowadziliśmy do zapisu, który w fizycznym/inżynierskim rozumieniu "otrzymalibyśmy" poprzez:

$$\frac{dx}{dt} = a(t)b(x(t)) \implies \frac{1}{b(x(t))}\frac{dx}{dt} = a(t) \xrightarrow{\cdot dt} \frac{dx}{b(x)} = a(t)dt$$

■

(b) ☛ Rozdzielając zmienne:

$$x'e^x = te^t \implies e^x = \int te^t dt = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + c \implies x(t) = \ln\left(te^t - e^t + c\right)$$

$$-1 = x(0) = \ln(-1+c) = \ln\left(e^{-1}\right) \implies -1 + c = \frac{1}{e} \implies c = \frac{1+e}{e}$$

Ostatecznie:

$$x(t) = \ln\left(te^t - e^t + \frac{1+e}{e}\right)$$

☛ Uwzględniając, że w otoczeniu $x = 0$ funkcja y jest dodatnia, rozdzielając zmienne dostaniemy:

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -\cos(x) \implies \ln(y(x)) = -\sin(x) + c \implies y(x) = \exp(-\sin(x) + c)$$

$$1 = y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \exp\left(-\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + c\right) = \exp(1+c) = \exp(0) \implies c = -1$$

$$y(x) = \exp(-\sin(x) - 1)$$

3. (a) Równanie zawiera funkcje analityczne w otoczeniu $t = 0$, zatem zakładamy rozwiązanie w postaci:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

Poprzez podstawienie do równania, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
5 &= \left(t^2 - 1\right)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + 8t\sum_{n=1}^{\infty} na_n t^{n-1} + 10\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} 8na_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} 10a_n t^n \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n \\
&\qquad + 8a_1 t + \sum_{n=2}^{\infty} 8na_n t^n + 10a_0 + 10a_1 t + \sum_{n=2}^{\infty} 10a_n t^n \\
&= 10a_0 + 18a_1 t - 2a_2 - 6a_3 t + \\
&\qquad + \sum_{n=2}^{\infty} t^n\left(n(n-1)a_n - (n+2)(n+1)a_{n+2} + 8na_n + 10a_n\right)
\end{aligned}$$

Zatem otrzymujemy:

$$5 = 10a_0 - 2a_2 \implies a_2 = 5a_0 - \frac{5}{2}$$
$$0 = 18a_1 - 6a_3 \implies a_3 = 3a_1$$
$$0 = (n(n-1) + 8n + 10)\, a_n - (n+2)(n+1)a_{n+2} \implies a_{n+2} = \frac{n^2 + 7n + 10}{(n+2)(n+1)}a_n$$
$$\implies a_{n+2} = \frac{(n+2)(n+5)}{(n+2)(n+1)}a_n = \frac{n+5}{n+1}a_n$$

(b) Niech zadane będzie równanie różniczkowe:

$$a(t)x''(t) + b(t)x'(t) + c(t) = 0$$

oraz jego rozwiązania f_1, f_2. Wówczas Wrońskianem nazywamy:

$$W = \det \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{bmatrix} = f_1 f_2' - f_2 f_1'$$

Licząc jego pochodną:

$$W' = f_1' f_2' + f_1 f_2'' - f_2' f - 1' - f_2 f_1'' = f_1 f_2'' - f_2 f_1''$$

Z kolei podstawiając do równania rozwiązania, otrzymujemy:

$$\begin{array}{rl} & \left\{ \begin{array}{ll} 0 = af_1'' + bf_1' + cf_1 & \Big| \cdot(-f_2) \\ 0 = af_2'' + bf_2' + cf_2 & \Big| \cdot f_1 \end{array} \right. \\ \hline & \left\{ \begin{array}{l} 0 = -af_2 f_1'' - bf_2 f_1' + cf_2 f_1 \\ 0 = af_1 f_2'' + bf_1 f_2' + cf_1 f_2 \end{array} \right. \\ + & \\ \hline & 0 = a\left(f_1 f_2'' - f_2 f_1''\right) + b\left(f_1 f_2' - f_2 f_1'\right) = aW' + bW \end{array}$$

Rozwiązując ostatnie równanie dostajemy:

$$aW' = -bW \implies \frac{W'}{W} = -\frac{b}{a} \implies W(t) = \exp\left(-\int \frac{b(t)}{a(t)}dt\right)$$

■

4.

Uwaga! Wszystkie grupy miały za zadanie rozwiązać układ równań. W każdej grupie zamieszczam przykład innego sposobu rozwiązywania

W tym przykładzie postaramy się wyeliminować jedną funkcję, otrzymując układ jednej funkcji w drugiej pochodnej, aby skorzystać z wiedzy dotyczącej równań drugiego rzędu[1]. Mamy układ równań:

$$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 5x + 2y \end{cases}$$

[1]Należy zauważyć, że zazwyczaj praktykuje się podejście odwrotne: równania wyższych rzędów przedstawia się jako układy równań rzędów niższych

Z pierwszego równania:

$$y = 2x - x' \implies y' = 2x' - x''$$

Podstawiajac do drugiego równania:

$$2x' - x'' = y' = 5x + 2y = 5x + 2(2x - x') = 5x + 4x - 2x' = 9x - 2x'$$

Zatem grupując wyrazy:

$$x'' - 4x' + 9x = 0$$

Postulujemy rozwiązanie w postaci $x(t) = e^{rt}$, $r \in \mathbb{R}$, otrzymujemy wielomian charakterystyczny:

$$e^{rt}\left(r^2 - 4r + 9\right) = 0 \implies r^2 - 4r + 9 = 0$$

$$r = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 9}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-20}}{2} = 2 \pm i\sqrt{5}$$

co oznacza rozwiązania w postaci części rzeczywistej oraz urojonej z funkcji:

$$e^{(2 \pm i\sqrt{5})t} = e^{2t} \cos\left(\sqrt{5}t\right) \pm ie^{2t} \sin\left(\sqrt{5}t\right)$$

Zatem:

$$x(t) = c_1 e^{2t} \cos\left(\sqrt{5}t\right) + c_2 e^{2t} \sin\left(\sqrt{5}t\right)$$

Żeby policzyć $y(t)$ musimy wziąć pochodną z x, zatem:

$$\begin{aligned}
x'(t) &= 2c_1 e^{2t} \cos\left(\sqrt{5}t\right) - \sqrt{5}c_1 e^{2t} \sin\left(\sqrt{5}t\right) + 2c_2 e^{2t} \sin\left(\sqrt{5}t\right) + \sqrt{5}c_2 e^{2t} \cos\left(\sqrt{5}t\right) \\
&= 2x(t) + \sqrt{5}e^{2t}\left(c_2 \cos\left(\sqrt{5}t\right) - c_1 \sin\left(\sqrt{5}t\right)\right) \\
&\implies y(t) = 2x(t) - x'(t) = \sqrt{5}e^{2t}\left(c_1 \sin\left(\sqrt{5}t\right) - c_2 \cos\left(\sqrt{5}t\right)\right)
\end{aligned}$$

Kolokwium 1, grupa 2

25/11/2025

1. Energia całkowita obwodu RLC jest sumą:
   - ☛ energii zawartej w kondensatorze $E_C = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$
   - ☛ energii pola magnetycznego cewki: $E_L = \frac{1}{2}LI^2$
   - ☛ ciepła wydzielonego na oporniku: $E_R = \int I^2 R dt$

   Wiedząc, że natężenie płynącego prądu jest zmianą ładunku w czasie $I = \frac{dQ}{dt}$, wyznacz równanie opisujące ładunek na kondensatorze Q. Następnie rozwiąż to równanie. Załóż, że energia całkowita jest stała, zaś ładunek w czasie $t = 0$ był maksymalny (cała energia zgromadzona wyłącznie na kondensatorze) i równy $Q(0) = 1$, $Q'(0) = 0$. Do obliczeń użyj $C = L = R = 1$. Naszkicuj rozwiązanie $Q(t)$.

   Podpowiedź: zróżniczkuj energię całkowitą. Po przekształceniach otrzymasz $I \cdot (\dots) = 0$, oczekiwane równanie znajduje się w nawiasie.

2. Rozwiąż jeden z poniższych podpunktów (a) lub (b)

   (a) Udowodnij poniższe twierdzenia:
   - ☛ Dla funkcji ciągłych (na odcinku I) $p, f \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R})$ oraz $r \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ poniższe równanie zwane jest równaniem Bernoulliego:

     $$x'(t) + p(t)x(t) = f(t)\Big(x(t)\Big)^r$$

     Udowodnij, że można je sprowadzić do równania liniowego pierwszego rzędu.
   - ☛ Niech zadane będzie równanie o rozdzielonych zmiennych:

     $$x'(t) = a(t)b(x(t))$$

     , gdzie $a : A \to \mathbb{R}$, $b : B \to \mathbb{R}$ to funkcje ciągłe na pewnych odcinkach. Ponadto, niech $b(x) \neq 0$ dla $x \in B$. Udowodnij, że zabieg "rozbicia" pochodnej na różniczki ma uzasadnienie w formalnym rozwiązywaniu takich równań.

   (b) Rozwiąż następujące zagadnienie Cauchy'ego:

   $$y'(x) = \exp\left(x + y(x)\right), \qquad y(1) = 2$$

   oraz wyznacz przedział, na którym ma ono zastosowanie.

3. Rozwiąż jeden z poniższych podpunktów (a) lub (b)

   (a) Rozwiąż następujące równanie różniczkowe metodą szeregów:

$$\left(t^2-1\right)\frac{d^2x}{dt^2}+6t\frac{dx}{dt}+4x=-4$$

   (b) Wiedząc, że funkcją tworzacą dla wielomianów Legendre'a jest:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tw+w^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(t)w^n$$

   udowodnij relację różniczkową:

$$nP_n(t)=tP_n'(t)-P_{n-1}'(t)$$

4. Znajdź rozwiązanie układu równań:

$$\begin{cases} x'=2x+y \\ y'=3x+4y \end{cases}$$

Przykładowe rozwiązania grupy 2

1. Energia całkowita będzie równa:

$$E_c = \frac{Q^2}{2} + \frac{I^2}{2} + \int I^2 dt$$

zatem po zróżniczkowaniu względem czasu:

$$0 = QQ' + II' + I^2$$

wiedząc, że $I = Q'$ otrzymujemy:

$$0 = QI + IQ'' + IQ' = I\left(Q + Q'' + Q'\right)$$

A zatem oczekiwane równanie różniczkowe liniowe to:

$$0 = Q + Q' + Q''$$

Postulujemy rozwiązanie w postaci $Q(t) \propto \exp(\alpha t)$ otrzymując wielomian charakterystyczny:

$$0 = 1 + \alpha + \alpha^2 \implies \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

stąd dwa liniowo niezależne rozwiązania to:

$$Q_1(t) = \Re\left(e^{-\frac{1}{2}t} e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}t}\right) = e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \qquad Q_2(t) = \Im\left(e^{-\frac{1}{2}t} e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}t}\right) = e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

Ogólne rozwiązanie to zatem:

$$Q(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(c_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$$

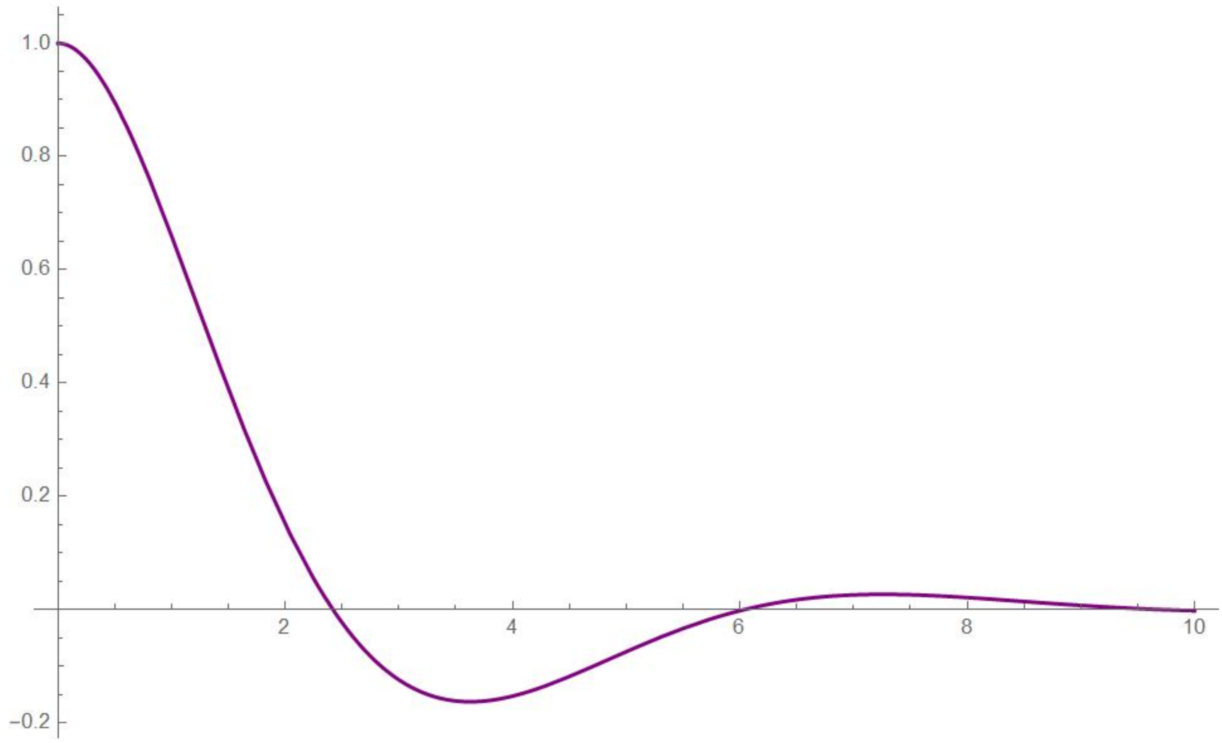
Zaś z warunków brzegowych otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
1 &= Q(0) = c_1 \\
0 &= Q'(0) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)\Bigg|_{t=0} + \\
&\qquad + e^{-\frac{1}{2}t}\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)\Bigg|_{t=0} \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}c_2 \implies c_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Stąd ostateczne rozwiązanie:

$$Q(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$$

W celu stworzenia wykresu/szkicu, zauważamy że funkcja gwałtownie maleje (jak $e^{-t/2}$), a dodatkowo oscyluje. Zaczyna w jedynce i zanika - wykres taki przestawia 1



Rysunek 1: Wykres funkcji ładunku na kondensatorzeod czasu

2. (a) ☛ Aby rozwiązać to zadanie, stosujemy podstawienie $u = x^{1-r}$. Wówczas

$$u = x^{1-r} \implies x = u^{\frac{1}{1-r}}$$
$$u' = (1-r)x^{-r}x' \implies x' = \frac{u'x^r}{1-r}$$

Wstawiając do równania:

$$\begin{aligned} x' + px &= fx^r && \Big| u = x^{1-r} \\ \frac{u'x^r}{1-r} + px &= fx^r && \Big| \cdot x^{-r} \\ \frac{u'}{1-r} + px^{1-r} &= f && \Big| u = x^{1-r} \\ \frac{u'(t)}{1-r} + p(t)u(t) &= f(t) \end{aligned}$$

trzymujemy równanie liniowe dla $u(t)$. ■

☛ Jak dla grupy 1. ■

(b) Zagadnienie możemy rozwiązać rozdzielając zmienne:

$$y'e^{-y} = e^x \implies -e^{-y} = e^x - c \implies y = -\ln(c - e^x)$$

stąd

$$\ln\left(e^2\right) = 2 = y(1) = -\ln\left(c - e^1\right) \implies c = e^{-2} + e$$

I ostateczne rozwiązanie:

$$y(x) = -\ln\left(e^{-2} + e - e^x\right)$$

Aby wyznaczyć przedział, w którym to rozwiązanie obowiązuje $x \in A$:

☛ obowiązuje tam równanie różniczkowe (np. brak osobliwości itd.), ale to nie wprowadza ograniczeńw naszym przypadku

☛ Rozwiązanie obowiązuje tylko w przedziale (np. rozdzielonym osobliwościami), w którym znajduje się warunek brzegowy, stąd $1 \in A$

Logarytm jest określony dla liczb rzeczywistych tylko dla argumentów większych od zera, stąd:

$$0 < e^{-2} + e - e^x \implies e^x < e^{-2} + e \implies x < \ln\left(e^{-2} + e\right)$$

3. (a) Funkcje występujące jawnie w równaniu różniczkowym są analityczne w otoczeniu $t = 0$, zatem przyjmujemy rozwiązanie w postaci:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

i podstawiamy do równania, szukając relacji pomiędzy współczynnikami a_n

$$\begin{aligned}
-4 &= \left(t^2 - 1\right) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + 6t \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} + 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} 6n a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n t^n \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2} t^n + \sum_{n=1}^{\infty} 6n a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n t^n \\
&= -2a_2 - 6c_3 t + 6a_1 t + 4a_0 + 4a_1 t + \\
&\qquad + \sum_{n=2}^{\infty} t^n \left(n(n-1)a_n + 6n a_n + 4a_n - (n+2)(n+1)a_{n+2}\right)
\end{aligned}$$

Co daje zestaw:

$$\begin{aligned}
&-4 = -2a_2 + 4a_0 \implies a_2 = 2a_0 + 2 \\
&0 = -6c_3 + 10a_1 \implies c_3 = \frac{5}{3}a_1 \\
&0 = n(n-1)a_n + 6n a_n + 4a_n - (n+2)(n+1)a_{n+2} \implies a_{n+2} = \frac{n(n-1) + 6n + 4}{(n+1)(n+2)} a_n
\end{aligned}$$

$$a_{n+2} = \frac{n^2 + 5n + 4}{(n+1)(n+2)} a_n = \frac{(n+1)(n+4)}{(n+1)(n+2)} a_n = \frac{n+4}{n+2} a_n$$

(b) Różniczkując funkcję tworzącą

$$f(t, w) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tw + w^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) w^n$$

po t otrzymamy:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} f(t,w) &= -\frac{1}{2} \cdot (1-2tw+w^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2w) \\
&= \frac{w}{1-2tw+w^2} \cdot f(t,w) \\
\frac{\partial}{\partial t} f(t,w) &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) w^n \right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{dP_n}{dt}(t) w^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(t) w^n
\end{aligned}$$

Co więcej, różniczkując tym razem po w:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial w} f(t,w) &= -\frac{1}{2} \cdot (1-2tw+w^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (2w-2t) \\
&= \frac{t-w}{1-2tw+w^2} \cdot f(t,w) \\
\frac{\partial}{\partial w} f(t,w) &= \frac{\partial}{\partial w} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) w^n \right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(t) w^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) P_{n+1}(t) w^n
\end{aligned}$$

Stąd

$$\frac{1}{w}\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{t-w}\frac{\partial f}{\partial w}$$

$$\begin{aligned}
0 &= w\frac{\partial f}{\partial w} - (t-w)\frac{\partial f}{\partial t} \\
&= w\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(t)w^n + (w-t)\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(t)w^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(t)w^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(t)w^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} tP_n'(t)w^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(t)w^n + \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}'(t)w^n - \sum_{n=1}^{\infty} tP_n'(t)w^n - tP_0'(t) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} w^n \Big(nP_n(t) + P_{n-1}'(t) - tP_n'(t)\Big) - tP_0'(t)
\end{aligned}$$

Stąd:

$$\begin{aligned}
&P_0(t) = const \\
&0 = nP_n(t) + P_{n-1}'(t) - tP_n(t)
\end{aligned}$$

gdzie druga równość jest oczekiwaną relacją ■

4. Układ równań, na którym pracujemy, ma postać:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Aby skorzystać ze wzoru, który podałem w notatkach z dnia 04/11/2025:

$$\vec{x}(t) = \sum_{\lambda} c_\lambda e^{\lambda t} \vec{v}_\lambda$$

potrzebujemy uzyskać wartości własne λ oraz wektory własne $\vec{v}_\lambda$. Obliczamy zatem:

$$\begin{aligned} 0 &= \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) - 3 \\ &= 8 - 6\lambda + \lambda^2 - 3 = 5 - 6\lambda + \lambda^2 \\ &= (\lambda - 5)(\lambda - 1) \end{aligned}$$

Zatem wartości własne to $\lambda = 1$ oraz $\lambda = 5$. Aby policzyć wektory własne:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{bmatrix} \vec{v}_\lambda \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2-5 & 1 \\ 3 & 4-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3a + b \\ 3a - b \end{bmatrix} \implies \vec{v}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2-1 & 1 \\ 3 & 4-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a + b \\ 3a + 3b \end{bmatrix} \implies \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Stąd ogólne rozwiązanie:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_5 e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^t + c_5 e^{5t} \\ -c_1 e^t + 3 c_5 e^{5t} \end{bmatrix}$$

Kolokwium 1, grupa 3

25/11/2025

1. Na żelazną kulkę o masie $m = 1$ umieszczoną w lepkiej cieczy działa oscylująca siła (np. magnetyczna) $\vec{F} = \cos(t)\hat{x}$. Gdy kulka się porusza, działa na nią również opór cieczy $\vec{F}_{op} = -\vec{v}$ proporcjonalny do prędkości. Zakładając, że w momencie $t = 0$ kulka znajduje się w spoczynku, napisz równanie ruchu. Rozwiąż je, a następnie naszkicuj wykres $x(t)$

   Podpowiedź: zacznij od drugiej zasady mechaniki Newtona. Oczekiwane równanie różniczkowe jest równaniem oscylatora harmonicznego bez "sprężyny".

2. Rozwiąż jeden z poniższych podpunktów (a) lub (b)

   (a) Udowodnij następujące twierdzenia:

   ☛ Dla każdej funkcji $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, poniższe równanie różniczkowe można przekształcić do równania o rozdzielonych zmiennych:

   $$x'(t) = f\left(ax(t) + bt + c\right), \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

   ☛ Niech zadane będzie równanie o rozdzielonych zmiennych:

   $$x'(t) = a(t)b(x(t))$$

   , gdzie $a : A \to \mathbb{R}$, $b : B \to \mathbb{R}$ to funkcje ciągłe na pewnych odcinkach. Ponadto, niech $b(x) \neq 0$ dla $x \in B$. Udowodnij, że zabieg "rozbicia" pochodnej na różniczki ma uzasadnienie w formalnym rozwiązywaniu takich równań.

   (b) Rozwiąż następujące zagadnienia Cauchy'ego:

   ☛ $y'(t) = y(t) + t$, $y(0) = 1$

   ☛ $tx'(t) + x(t) - e^t = 0$, $x(3) = -3$

3. Rozwiąż jeden z poniższych podpunktów (a) lub (b)

   (a) Wiedząc, że funkcją tworzacą dla wielomianów Legendre'a jest:

   $$\frac{1}{\sqrt{1 - 2tw + w^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)w^n$$

   udowodnij relację rekurencyjną:

   $$(n+1)P_{n+1}(t) = (2n+1)tP_n(t) - nP_{n-1}(t)$$

(b) Korzystając z powyższej relacij rekurencyjnej, przyjmując $P_0(t) = 1$, $P_1(t) = t$, oblicz P_2, P_3. Następnie, bezpośrednim rachunkiem, pokaż że są one rozwiązaniami równania Legendre'a:

$$\left(1 - t^2\right) x''(t) - 2tx'(t) + n(n+1)x(t) = 0$$

4. Znajdź rozwiązanie następującego zagadnienia Cauchy'ego:

$$\begin{cases} x' = 3x + z \\ y' = 4y \\ z' = x + 3z \end{cases}$$

Przykładowe rozwiązania grupy 3

1. Zgodnie z drugą zasadą mechaniki Newtona:

$$m\vec{x}''(t) = \vec{F}_{total}$$

zaś z treści zadania wynika, że całkowita siłą działająca na kulkę jest równa sile wymuszającej $\vec{F}$ i sile oporów $\vec{F}_{op}$, zatem:

$$m\vec{x}''(t) = \cos(t)\hat{x} - \vec{v}$$

przy czym $m = 1$. Ponieważ w momencie początkowym kulka się nie porusza, układ redukuje się do jednego wymiaru - zgodnie z wersorem siły $\hat{x}$, zatem otrzymujemy:

$$x''(t) = -x'(t) + \cos(t) \implies x''(t) + x'(t) = \cos(t)$$

Jest to niejednorodne liniowe równanie różniczkowe drugiego rzędu. Rozwiązujemy je poprzez znalezienie rozwiązań jednorodnych oraz uzmiennianie parametrów.

☛ Rozwiązujemy równanie jednorodne:

$$x'' + x' = 0$$

Oczywistym rozwiązaniem jest funkcja stała (wówczas pochodne się zerują. Z drugiej strony możemy równanie scałkować, otrzymując:

$$x'' = -x' \implies x'(t) \propto e^{-t}$$

i stąd wybieramy $x(t) = e^{-t}$. Alternatywnie, bez "zgadywania" rozwiązujemy wielomian charakterystyczny uzyskany przez podstawienie ansatzu $x(t) = e^{rt}$, wówczas:

$$x'' + x' = r^2e^{rt} + re^{rt} = 0 \implies r^2 + r = 0 \implies r = 0 \vee r = -1$$

otrzymując (oczywicie) te same rozwiązania

$$x_1(t) = 1, \qquad x_2(t) = e^{-t}$$

☛ Kolejnym krokiem jest uzmiennianie stałej. Korzystamy ze wzorów:

$$c_1' = -\frac{hx_2}{aW}, \qquad c_2' = \frac{hx_1}{aW}$$

przy czym w naszym przypadku $a(t) = 1$, $h(t) = \cos(t)$, zaś Wrońskian:

$$W = \det\begin{bmatrix} 1 & e^{-t} \\ 0 & -e^{-t} \end{bmatrix} = -e^{-t}$$

Zatem:

$$c_1(t) = -\int \frac{\cos(t)e^{-t}}{-e^{-t}}dt = \int \cos(t)dt = \sin(t) + \tilde{c}_1$$

$$c_2(t) = \int \frac{\cos(t) \cdot 1}{-e^{-t}}dt = -\int \cos(t)e^{t}dt$$

Ostatnią całkę można policzyć na przykład poprzez "zapętlone" całkowanie przez części

$$\begin{aligned} c_2(t) = -\int \cos(t)e^t dt &= -\sin(t)e^t + \int \sin(t)e^t dt \\ &= -\sin(t)e^t - \cos(t)e^t + \int \cos(t)e^t dt + 2\tilde{c}_2 \\ &\implies 2c_2(t) = -e^t(\sin(t) + \cos(t)) + 2\tilde{c}_2 \\ &\implies c_2(t) = -\frac{e^t}{2}(\sin(t) + \cos(t)) + \tilde{c}_2 \end{aligned}$$

Stąd rozwiązanie ogólne:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t)c_1(t) + x_2(t)c_2(t) = 1\sin(t) + \tilde{c}_1 - e^{-t} \cdot \frac{e^t}{2}(\cos(t) + \sin(t)) + e^{-t}\tilde{c}_2 \\ &= \sin(t) + \tilde{c}_1 - \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{2}\sin(t) + e^{-t}\tilde{c}_2 \\ &= \tilde{c}_1 + \frac{1}{2}(\sin(t) - \cos(t)) + e^{-t}\tilde{c}_2 \end{aligned}$$

Z warunku początkowego:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{1}{2}(\cos(t) + \sin(t)) - e^{-t}\tilde{c}_2 \\ 0 = x'(0) &= \frac{1}{2} - \tilde{c}_2 \implies \tilde{c}_2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Jak łatwo się domyślić, można nałożyć drugi warunek początkowy:

$$\begin{aligned} x(0) &= a = const \\ &= \tilde{c}_1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \tilde{c}_1 \end{aligned}$$

stąd widzimy, że jest to jedynie czynnik przesuwający położenie w ukłądzie współrzędnych - co jest logiczne, wybór układu zależy od nas, stąd równie dobrze moglibyśmy postawić $x(0) = 0$ jak i $x(0) = 10^{80}$, jednak z tym pierwszym stanowczo jest łatwiej pracować. Ostateczne rozwiazanie zatem ma postać:

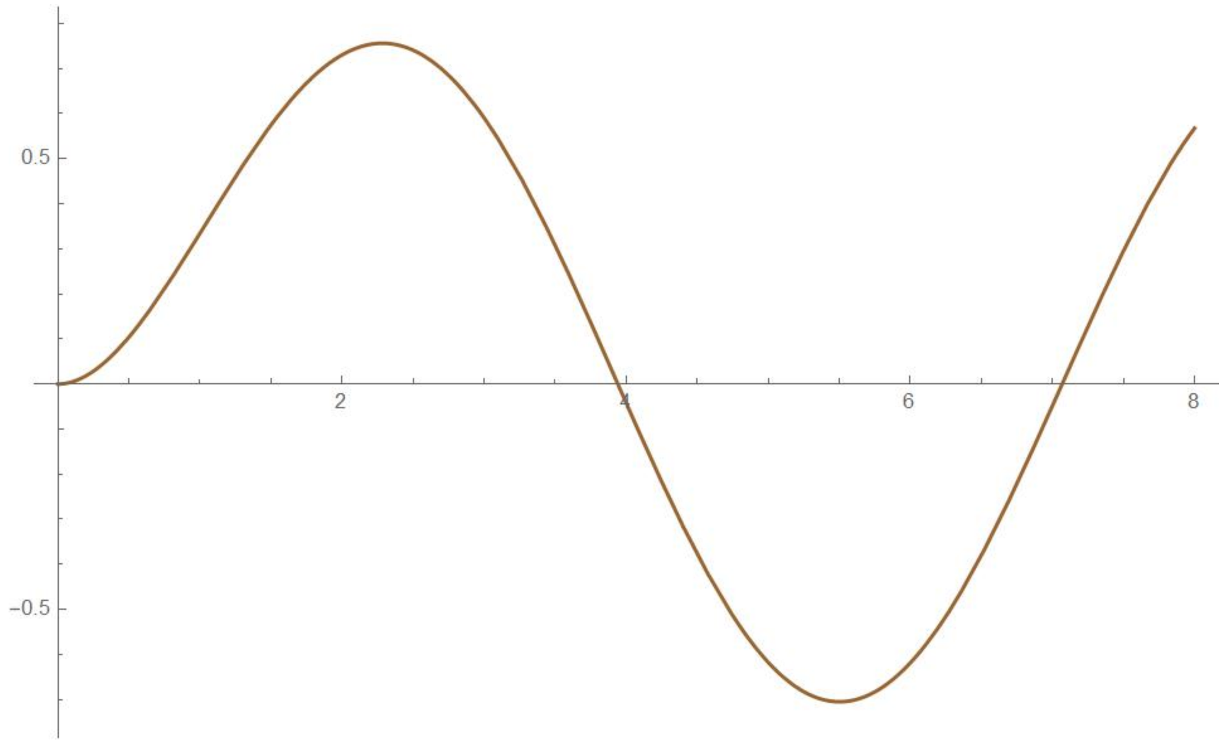
$$x(t) = x(0) + \frac{1}{2}(\sin(t) - \cos(t)) + \frac{1}{2}e^{-t}$$

Aby naszkicować wykreś przyjmijmy $x(0) = 0$. Zauważamy, że kombinacje liniowe sinusa i cosinusa są zawsze funkcją sinus (po prostu "falującą" funkcja) tylko najwyżej przesuniętą w fazie. Dla naszych danych możemy się spodziewać, że funkcja ta będzie rosła dla małych $t > 0$ (skoro druga pochodna zachowuje się jak $\cos(t) > 0$ w tym przedziale lub bardziej fizycznie, skoro kulkę popycha jakaś siła, to tam się zacznie wychylać). Czynnik eksponencjalny wprowadza niewielką poprawę przy pierwszych "falach", a następnie szybko zanika. Komputerowo stworzony wykres przedstawia grafika 2.

2. (a) ☛ Stosujemy podstawienie:

$$u = ax + bt + c \implies u' = ax' + b \implies u' = af(u) + b$$

co jest równaniem o zmiennych rozdzielonych ■



Rysunek 2: Wykres funkcji położenia żelaznej kulki od czasu dla $x(0) = 0$

- ☛ Jak dla grupy 1. ■

(b) ☛ Rozwiązując równanie jednorodne dostajemy $y(t) = e^t$. Następnie, korzystając z uzmienniania parametru postulujemy $y(t) = c(t)e^t$, wstawiając do równania otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 0 &= y'(t) - y(t) - t \\ &= c'(t)e^t + c(t)e^t - c(t)e^t - t \\ &= c'(t)e^t - t \\ &\implies c'(t) = te^{-t} \\ &= c(t) = \int te^{-t}dt = -te^{-t} + \int e^{-t}dt = -te^{-t} - e^{-t} + \tilde{c} \end{aligned}$$

Stąd rozwiązanie:

$$y(t) = e^t \cdot (\tilde{c} - te^{-t} - e^{-t}) = e^t\tilde{c} - t - 1$$

Po podstawieniu warunków początkowych:

$$1 = y(0) = \tilde{c} - 1 \implies \tilde{c} = 2$$

Stąd ostateczne równanie, rozwiązujące zagadnienie Cauchy;ego:

$$y(t) = 2e^t - t - 1$$

- ☛ Rozwiązując równanie jednorodne dostajemy:

$$\begin{aligned} &\frac{x'}{x} = -\frac{1}{t} \implies \ln(x) = -\ln(t) + c = -\ln(t) + \ln(\tilde{c}) = \ln\left(\frac{\tilde{c}}{t}\right) \\ &\implies x(t) = \frac{\tilde{c}}{t} \end{aligned}$$

Alternatywnie, skoro przy każdej n-tej pochodnej stoi n-ta potęga rgumentu, postulujemy rozwiązanie w postaci $x(t) = t^r$, $r \in \mathbb{R}$ i rozwiązujemy:

$$trt^{r-1} + t^r = 0 \implies r = -1$$

Następnie, ponownie uzmienniając stałą $x(t) = \tilde{c}(t)/t$:

$$\begin{aligned}
0 &= t\frac{d}{dt}\left(\frac{\tilde{c}(t)}{t}\right) + \frac{\tilde{c}(t)}{t} - e^t \\
&= t\frac{\tilde{c}'(t)}{t} - t\frac{\tilde{c}(t)}{t^2} + \frac{\tilde{c}(t)}{t} - e^t \\
&= \tilde{c}'(t) - e^t \\
&\implies \tilde{c}(t) = e^t + \bar{c}
\end{aligned}$$

Otrzymujemy funkcję:

$$x(t) = \frac{\bar{c}}{t} + \frac{e^t}{t}$$

Z warunku brzegowego:

$$-3 = x(3) = \frac{\bar{c}}{3} + \frac{e^3}{3} \implies \bar{c} = -9 - e^3$$

Czyli rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego jest funkcja:

$$x(t) = \frac{e^t - 9 - e^3}{t}$$

3. (a) Różniczkując funkcję tworzącą

$$f(t,w) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tw + w^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)w^n$$

po w otrzymamy:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial w} f(t,w) &= -\frac{1}{2} \cdot (1 - 2tw + w^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (2w - 2t) \\
&= \frac{t - w}{1 - 2tw + w^2} \cdot f(t,w) \\
\frac{\partial}{\partial w} f(t,w) &= \frac{\partial}{\partial w}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)w^n\right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(t)w^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(t)w^n
\end{aligned}$$

stąd:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(t)w^n = \frac{t - w}{1 - 2tw + w^2} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)w^n$$

a zatem, przenosząc wszystko na jedną stronę:

$$\begin{aligned}
0 &= (1-2tw+w^2)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(t)w^n - t\sum_{n=0}^{\infty}P_n(t)w^n + w\sum_{n=0}^{\infty}P_n(t)w^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(t)w^n - \sum_{n=0}^{\infty}2t(n+1)P_{n+1}(t)w^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(t)w^{n+2} \\
&\quad - \sum_{n=0}^{\infty}tP_n(t)w^n + \sum_{n=0}^{\infty}P_n(t)w^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(t)w^n - \sum_{n=1}^{\infty}2tnP_n(t)w^n + \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)P_{n-1}(t)w^n \\
&\quad - \sum_{n=0}^{\infty}tP_n(t)w^n + \sum_{n=1}^{\infty}P_{n-1}(t)w^n \\
&= P_1(t) + 2P_2(t)w - 2tP_1(t)w - tP_0(t) - tP_1(t)w + P_0(t)w \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty}w^n\left((n+1)P_{n+1}(t) - 2ntP_n(t) + (n-1)P_{n-1}(t) - tP_n(t) + P_{n-1}(t)\right)
\end{aligned}$$

stąd porównując wyrazy prz odpowiednich potęgach w otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
w^0 &\implies 0 = P_1(t) - tP_0(t) \\
w^1 &\implies 0 = 2P_2(t) - 2tP_1(t) - tP_1(t) + P_0(t) \\
w^n &\implies 0 = (n+1)P_{n+1}(t) - (2n+1)tP_n(t) + nP_{n-1}(t)
\end{aligned}$$

gdzie druga implikacja zachodzi dla $n = 1$, zaś trzecia jest wzorem oczekiwanym dla $n \geqslant 2$ ■

(b) Przekształcając wzór rekurencyjny, otrzymamy:

$$P_{n+1}(t) = \frac{2n+1}{n+1}tP_n(t) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(t)$$

Zatem, obliczenia oraz sprawdzenie czy spełniają równanie Legendre'a:

☛ P_2

$$\begin{aligned}
P_2(t) = P_{1+1}(t) &= \frac{2\cdot 1+1}{1+1}tP_1(t) - \frac{1}{1+1}P_{1-1}(t) \\
&= \frac{3}{2}t\cdot t - \frac{1}{2}\cdot 1 \\
&= \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} P_2(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2} \\ P_2'(t) = 3t \\ P_2''(t) = 3 \end{cases}$$

Zatem podstawiając:

$$\begin{aligned}
(1-t^2)P_2''(t) - 2tP_2'(t) + 2(2+1)P_2(t) &= (1-t^2)\cdot 3 - 2t\cdot 3t + 6\cdot\left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right) \\
&= 3 - 3t^2 - 6t^2 + 9t^2 - 3 \\
&= 0
\end{aligned}$$

☛ P_3

$$\begin{aligned}P_3(t) = P_{2+1}(t) &= \frac{2\cdot 2+1}{2+1}t\cdot P_2(t) - \frac{2}{2+1}P_{2-1}(t)\\ &= \frac{5}{3}t\cdot\left(\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2}\right)-\frac{2}{3}t\\ &= \frac{5}{2}t^3-\frac{5}{6}t-\frac{2}{3}t\\ &= \frac{5}{2}t^3-\frac{3}{2}t\end{aligned}$$

$$\begin{cases} P_3(t) = \frac{5}{2}t^3-\frac{3}{2}t\\ P_3'(t) = \frac{15}{2}t^2-\frac{3}{2}\\ P_3''(t) = 15t\end{cases}$$

Zatem podstawiając:

$$\begin{aligned}&(1-t^2)P_2''(t) - 2tP_2'(t) + 3(3+1)P_2(t) =\\ &\quad = (1-t^2)\cdot 15t - 2t\cdot\left(\frac{15}{2}t^2-\frac{3}{2}\right) + 12\cdot\left(\frac{5}{2}t^3-\frac{3}{2}t\right)\\ &\quad = 15t-15t^3-15t^3+3t+30t^3-18t\\ &\quad = 0\end{aligned}$$

4. Po pierwsze przepraszam za błąd, nie ma warunków brzegowych, więc nie jest to zagadnienie Cauchy'ego, tylko układ równań różniczkowych.

   Przechodząc do rozwiązania: zauważamy, że w ukłądzie występuje funkcja, której pochodna nie zależy od innych funkcji: y. Zatem możemy rozwiązać jej równanie niezależnie, otrzymując bezpośrednio:

$$y(t) = c_y e^{4t}$$

   Pozostałe równania tworzą układ, opisany równaniem macierzowym:

$$\begin{bmatrix} x' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

   Wyznaczamy wartości własne powyższej macierzy:

$$0 = \det\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = 9-6\lambda+\lambda^2-1 = \lambda^2-6\lambda+8$$

$$\lambda = \frac{6\pm\sqrt{36-4\cdot 8}}{2} = \frac{6\pm 2}{2} \in \{2,4\}$$

   Zaś wektory własne z nimi związane:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2 & 1 \\ 1 & 3-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (a+b)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\implies b = -a \implies \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-4 & 1 \\ 1 & 3-4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (a-b)\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\implies b = a \implies \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Stąd, korzystając ze wzoru z wykładu:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \exp\left(t \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Macierz odwrotną policzymy:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Zatem, mnożąc macierze, dostajemy:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & -e^{2t} \\ e^{4t} & e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{2t}+e^{4t} & -e^{2t}+e^{4t} \\ -e^{2t}+e^{4t} & e^{2t}+e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (e^{2t}+e^{4t})c_1 + (-e^{2t}+e^{4t})c_2 \\ (-e^{2t}+e^{4t})c_1 + (e^{2t}+e^{4t})c_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{2t}\frac{c_1-c_2}{2} + e^{4t}\frac{c_1+c_2}{2} \\ e^{2t}\frac{-c_1+c_2}{2} + e^{4t}\frac{c_1+c_2}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Wybierając inne stałe:

$$\tilde{c}_1 = \frac{c_1-c_2}{2}, \qquad \tilde{c}_2 = \frac{c_1+c_2}{2}$$

zapiszemy pełne rozwiązanie zadania jako:

$$\begin{cases} x(t) = \tilde{c}_1 e^{2t} + \tilde{c}_2 e^{4t} \\ y(t) = c_y e^{4t} \\ z(t) = -\tilde{c}_1 e^{2t} + \tilde{c}_2 e^{4t} \end{cases}$$