

List 2 - szeregi i funkcje specjalne

1 Metoda szeregów

1. **Powtórka z analizy matematycznej 1:** Dla poniższych funkcji, policz szeregi Taylora w danym punkcie $x = x_0$. Wyznacz resztę. Określ, na jakim przedziale szereg jest zbieżny.

$$(a) \begin{cases} f(x) = e^x \\ x_0 = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} f(x) = \sin(x) \\ x_0 = 0 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} f(x) = \frac{1}{1-x} \\ x_0 = 0 \end{cases}$$
$$(d) \begin{cases} f(x) = \ln(1+x) \\ x_0 = 0 \end{cases} \quad (e) \begin{cases} f(x) = e^{2x} \\ x_0 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (f) \begin{cases} f(x) = \frac{2}{x+1} \\ x_0 = 3 \end{cases}$$

2. W metodzie szeregów uzyskujemy relacje rekurencyjne na kolejne wyrazy. Często jednak możliwym jest zapisanie ich bezpośrednio jako funkcja indeksu sumowania, np.:

$$a_{n+1} = (n+1)a_n \implies a_n = n! a_0$$

Poniżej przedstawiono wyrazy ciągów (niezwiązańych z szeregami funkcyjnymi) definiowane rekurencyjnie. Sprowadź je do postaci jawną, zależącą wyłącznie od argumentu i początkowego wyrazu.

$$(a) a_{n+1} = a_n \quad (b) a_{n+1} = a_n + n + 1 \quad (c) a_{n+1} = \frac{a_n}{n+5}$$
$$(d) a_{n+1} = \frac{n+2}{n+9}a_n \quad (e) a_{n+1} = (a_n)^n \quad (f) a_{n+2} = \frac{n+1}{n}a_n$$
$$(g) a_{n+2} = \frac{(-1)^n}{n}a_n \quad (h) a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$$

3. Równanie różniczkowe ma postać:

$$x''(t) + P(t)x'(t) + Q(t)x(t) = 0$$

gdzie funkcje P, Q podane są niżej.

- ☛ Wykorzystując metodę szeregów, rozwiąż te równania różniczkowe.
- ☛ Podaj zakres stosowności rozwiązania.
- ☛ Gdy otrzymasz relację rekurencyjną na współczynniki, spróbuj zapisać je bezpośrednio w funkcji n , jak w zadaniu wyżej.
- ☛ W których z rozwiązań rozpoznajesz wyrażenia na znane ci funkcje?

$$(a) \begin{cases} P(t) = 0 \\ Q(t) = -1 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} P(t) = -t^2 \\ Q(t) = -1 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} P(t) = -\frac{1}{1-t} \\ Q(t) = -\frac{1}{(1-t)^2} \end{cases}$$
$$(d) \begin{cases} P(t) = \frac{1}{1+t} \\ Q(t) = 0 \end{cases}$$

2 Funkcje Legendre'a

1. Policz wielomiany Legendre'a 0,1,2,3 stopnia, korzystając ze wzoru Rodriguesa:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} \left\{ (t^2 - 1)^n \right\}$$

2. Korzystając z wyniku wyżej, policz funkcje Legendre'a drugiego rodzaju stopnia 0,1,2.

3 Funkcje Hermite'a

Uwaga, choć funkcje Hermite'a nie są bezpośrednio elementem tego kursu, również są rozwiązaniem szeregowym równania różniczkowego. Mają też kilka własności, na których można przećwiczyć zdolności liczenia i dowodzenia. Stąd, pomimo że nie musicie ich Państwo znać, umieszczam kilka zadań.

Własności wielomianów Hermite'a H_n :

- są rozwiązaniami równania różniczkowego Hermite'a:

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2ny(x) = 0$$

- Można je otrzymać ze wzoru Rodriguesa:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left\{ e^{-x^2} \right\}$$

- Funkcja tworząca:

$$e^{-t^2+2xt} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)t^n$$

Zadania:

1. Korzystając ze wzoru Rodriguesa, policz wielomiany Hermite'a stopnia 0,1,2,3. Sprawdź bezpośrednim rachunkiem, że spełniają one równanie Hermite'a.
2. Udowodnij relację rekurencyjną:

$$n > 0 : H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

3. Policz wyznacznik Wrońskiego dla równania Hermite'a.
4. Zbadaj parzystość wielomianów Hermite'a.

4 Funkcje Bessela

Równanie Bessela dane jest jako:

$$0 = x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) \quad (1)$$

1. Znайдź "punkty" osobliwe równania Bessela. Czy któryś z nich jest regularny?

2. Wprowadzając operator oraz funkcję:

$$D := x \frac{d}{dx}, \quad Y(x) = y(x) \cdot x^{-\nu}$$

pokaż, że poniższe równania są alternatywnymi postaciami równania Bessela (1):

$$(D^2 - \nu^2)y(x) + x^2y(x) = 0 \quad (2)$$

$$D^2Y(x) + 2\nu DY(x) + x^2Y(x) = 0 \quad (3)$$

3. Sprawdź bezpośrednim rachunkiem, że funkcja:

$$J_{1/2}(t) = \frac{\sqrt{2} \sin(t)}{\sqrt{\pi t}}, \quad J_{-1/2}(t) = \frac{\sqrt{2} \cos(t)}{\sqrt{\pi t}}$$

jest rozwiązaniem równania Bessela dla $\nu = \pm 1/2$

4. Wiedząc, że funkcja tworząca funkcji Bessela 1. rodzaju dana jest jako:

$$\exp\left(\frac{t}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(t)x^n, \quad x \neq 0 \quad (4)$$

wyprowadź wzory:

$$J'_n(t) = \frac{1}{2} \left(J_{n-1}(t) - J_{n+1}(t) \right) \quad (5)$$

$$2nJ_n(t) = t \left(J_{n-1}(t) + J_{n+1}(t) \right) \quad (6)$$

5. Korzystając ze wzorów (5), (6) udowodnij poniższą relację:

$$\frac{d}{dt} \left(t^{\pm n} J_n(t) \right) = \pm t^{\pm n} J_{n \mp 1}(t) \quad (7)$$

oraz jej implikację:

$$\left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^m \left(t^{\pm n} J_n(t) \right) = (\pm 1)^m t^{\pm n - m} J_{n \mp m}(t) \quad (8)$$

6. Odwołując się do szeregu definiującego funkcję Bessela 1. rodzaju:

$$J_\nu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(1 + \nu + n)} \left(\frac{t}{2} \right)^{2n+\nu} \quad (9)$$

wykaż

- poprzez oszacowanie, że dla $\nu \notin \mathbb{Z}$ funkcje te są liniowo niezależne
- dla $\nu \in \mathbb{Z}$, że funkcje te są liniowo zależne.

7. Funkcje:

$$I_\nu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \Gamma(1 + \nu + n)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+\nu} \quad (10)$$

są rozwiązaniami tzw. zmodyfikowanego równania Bessela:

$$t^2 x''(t) + tx'(t) - (t^2 + \nu^2)x(t) = 0$$

Udowodnij, że spełniają następujące relacje:

$$I_\nu(t) = i^{-\nu} J_\nu(it) \quad (11)$$

$$I_{-m}(t) = I_m(t), \quad m \in \mathbb{N} \quad (12)$$

8. Korzystając z podstawienia $x(t) = y(t)/t$, znajdź rozwiązanie poniższego równania różniczkowego:

$$x''(t) + \frac{3}{t}x'(t) + \left(j^2 + \frac{1}{t^2}\right)x(t) = 0$$

9. Korzystając z podstawienia $x(t) = y(t)/\sqrt{t}$, znajdź rozwiązanie poniższego równania różniczkowego:

$$t^2 x''(t) + 2tx'(t) + \left(9t^2 + \frac{1}{4}\right)x(t) = 0$$

10. Korzystając z podstawienia $t = s^2$, znajdź rozwiązanie poniższego równania różniczkowego:

$$tx''(t) + x'(t) + \frac{x(t)}{4} = 0$$

11. Udowodnij, że funkcja Γ Eulera spełnia własność silni, tzn.

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

5 Równania różniczkowe cząstkowe

Niech $u \equiv u(x, t)$. Wprowadźmy uproszczoną notację:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \partial_x u, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \partial_t u$$

1. Rozwiąż poniższe równania różniczkowe. W tym celu scałkuj je po odpowiedniej zmiennej.

$(a) \partial_x u = 1$	$(b) \partial_x u = t^5$	$(c) \partial_x u = f(t)u$
$(d) \partial_x u = 3x^2 + t$	$(e) \partial_x \partial_x u = 2$	$(f) \partial_x \partial_t u = 1$

2. Rozwiąż poniższe równania cząstkowe, na przykład znajdując odpowiednie podstawienie:

$(a) \partial_x \partial_t u + 3\partial_x u = 0$	$(b) \partial_x \partial_x u - \partial_x u - t = 0$	$(c) \partial_t u - \partial_t \partial_t u = x$
---	--	--

3. Rozwiąż poniższe zagadnienie różniczkowo-brzegowe:

$$\begin{cases} \partial_x \partial_t u + 2t \partial_x u - 4tx = 0 \\ u(x, 0) = x^2 + e^{x^2} \\ u(0, t) = e^{-t^2} - t^2 \end{cases}$$

4. Rozwiąż poniższe równania różniczkowe, zakładając rozdzielenie zmiennych:

$$(a) \partial_t u = \alpha \partial_x u \quad (b) \begin{cases} \partial_t u - \partial_x \partial_x u = 0 \\ \partial_x u(0, t) = 0 \\ \partial_x u(1, t) = 0 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} \partial_x \partial_x u - 9 \partial_t \partial_t u = 0 \\ u(x, 0) = x \\ \partial_x u(x, 0) = 0 \end{cases}$$