

Lista 0 - zadania potwórkowe

1 Algebra

1. Rozłóż funkcje wymierne na ułamki proste (jeśli nie pamiętasz co to, zajrzyj do pliku z zajęć z 18 listopada 2025):

$$\frac{x}{(x-2)^2}, \quad \frac{2x^2+7x+7}{x(x+1)(x+3)}, \quad \frac{2x-7}{x-3}, \quad \frac{8x^2-4x+8}{x^4+4}$$

2. Rozwiąż następujące równania macierzowe:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}, \quad Y \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

3. Policz wyznaczniki poniższych macierzy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5+i & 3-i \\ i & -7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 12 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \\ 4 & 20 & 28 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

4. Oblicz poniższe wyrażenia:

$$\frac{5+5i}{3-4i} + \left(\frac{20}{4-3i}\right)^*, \quad \frac{1+i}{1-i}, \quad \left(\frac{1+2i}{2+i}\right)^3$$

5. Przedstaw graficznie zbiory spełniające poniższe warunki:

$$|z+1|=1, \quad |z+2|=|z-5+i|, \quad |2iz+3| \leq 6, \quad -5 < \Re(z) < 6$$

6. Zdiagonalizuj poniższe macierze:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 11 & 14 \\ -7 & -10 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Policz poniższe potęgi:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{121}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^7$$

2 Analiza matematyczna

UWAGA wszystkie poniższe zadania rozwiąż w obrębie funkcji i liczb rzeczywistych.

1. Oblicz poniższe pochodne:

$$\begin{array}{lll} \frac{d}{dx} \sin(x) & \frac{d}{dx} \cos(x) & \frac{d}{dx} \tan(x) \\ \frac{d}{dx} \sinh(x) & \frac{d}{dx} \cosh(x) & \frac{d}{dx} \tanh(x) \\ \frac{d}{dx} e^{x^2} & \frac{d}{dx} \ln(x) & \frac{d}{dx} \arcsin(x) \\ \frac{d}{dx} \arctan(x) & \frac{d}{dx} \arccos(\sin(x)) & \frac{d}{dx} \{x^2 e^x \sin(x)\} \\ \frac{d}{dx} \{(\sin(x))^2 \sin(x^3) \tan(\cos(x))\} & \frac{d}{dx} \{e^x x^3\} & \end{array}$$

2. Oblicz poniższe pochodne:

$$\frac{d^2}{dx^2} e^{x^3} \quad \frac{d^2}{dx^2} \{x^2 e^x\} \quad \frac{d^2}{dx^2} \sin(x^2) \quad \frac{d^2}{dx^2} \{\ln(x) e^x\}$$

3. Oblicz poniższe pochodne:

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\sin(tx)}{x+t^2} \right\} & \frac{\partial}{\partial t} \{e^t \sin(tx) x^2\} \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \{\ln(xe^t)\} & \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \{\arccos(tx^y)\} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\sin(tx)}{x+t^2} \right\} & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{e^t \sin(tx) x^2\} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial}{\partial x} \{\ln(xe^t)\} & \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial t} \{\arccos(tx^y)\} \end{array}$$

4. Oblicz poniższe całki:

$$\begin{array}{lll} \int \sin(x) dx & \int \sinh(x) dx & \int \tan(x) dx \\ \int x^5 dx & \int \frac{1}{x} dx & \int \frac{1}{\sqrt{x+2}} dx \\ \int \frac{1}{x^3 - 3x^3 + 3x - 1} dx & \int \frac{1}{x^2 - 4} dx & \int \frac{1}{1+x^2} dx \end{array}$$

5. Policz poniższe całki przez podstawienie:

$$\begin{array}{llll} \int \frac{x}{x^4+1} dx, & \int \frac{dx}{1+\sqrt{x+2}}, & \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{\ln(x)}}, & \int \frac{1}{1+\sin(x)} dx \\ \int \frac{dx}{\cosh(x)}, & \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx, & \int \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+\sin(x)}} dx, & \int \frac{dx}{x \ln(x)} \end{array}$$

6. Policz poniższe całki przez części:

$$\int x \sin(2x) dx, \quad \int x \cdot 2^{-x} dx, \quad \int \frac{\ln(x)}{x^3} dx, \quad \int e^{-x} \sin(x) dx$$
$$\int \sqrt{x} \arctan(\sqrt{x}) dx, \quad \int x \sin(x) e^x dx, \quad \int \frac{\arccos(x)}{\sqrt{x+1}} dx$$