

Lista 1 - równania różniczkowe

1 Równania pierwszego stopnia

1.1 Równania jednorodne

1. Rozwiąż poniższe równania różniczkowe, $y \equiv y(x)$:

$$\begin{aligned} y' &= 1, & y' &= x, & y' &= y, & y' &= y^n, n \in \mathbb{N}_{>5} \\ yy' &= -x, & y' &= 2xy^2, & y' &= y + ty \\ y' &= e^{-y+x} \end{aligned}$$

2. Rozwiąż poniższe zagadnienia Cauchy'ego, $y \equiv y(x)$. Dla każdego rozwiązania sprawdź, na jakiej dziedzinie ono obowiązuje.

$$\begin{aligned} \begin{cases} y' = y^2(1 + 3x^2) \\ y(0) = 1 \end{cases} & ; & \begin{cases} y(x^2 - 1)y' = x(1 - y^2) \\ y(e) = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} \ln(y)y'/y = \sin(x) \\ y(\pi) = 3 \end{cases} & ; & \begin{cases} y + xy' = \tan(x) \\ y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

1.2 Równania niejednorodne

Przypomnijmy, należy rozwiązać najpierw równanie jednorodne, a następnie założyć $c \mapsto c(t)$, i podstawić do oryginalnego równania różniczkowego.

- Rozwiąż poniższe zagadnienia Cauchy'ego, $y \equiv y(x)$. Sprawdź dziedzinę rozwiązania

$$\begin{aligned} \begin{cases} y' + y = 3x \\ y(0) = 1 \end{cases} & ; & \begin{cases} xy' - y = x^3 \sin(x) \\ y(\pi) = \pi \end{cases} \end{aligned}$$

2 Równania drugiego (i wyższego) stopnia

1. Policz wrońskian uzyskany z poniższych zestawów funkcji:

$$\begin{aligned} \begin{cases} f_1(x) = x \\ f_2(x) = e^x \end{cases} & ; & \begin{cases} f_1(x) = \sin(x) \\ f_2(x) = \cos(x) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} f_1(x) = x \\ f_2(x) = e^x \\ f_3(x) = \sin(x) \end{cases} & ; & \begin{cases} f_1(x) = x^2 \\ f_2(x) = 1/x^2 \\ f_3(x) = 2^x \end{cases} \end{aligned}$$

2. Rozwiąż poniższe równania różniczkowe o stałych współczynnikach, $y \equiv y(x)$. Otrzymane rozwiązanie powinno być funkcją rzeczywistą.

$$\begin{array}{lll} (a) y'' + 2y' + y = 0 & (b) y'' + 2y' + 3y = 0 & (c) 3y'' + 2y' - 5y = 0 \\ (d) y'' + y = 0 & (e) y'' - 8y - 2y' = 0 & (f) y'' + 3y - 2y' = 0 \\ (g) y''' + y' = 0 & (h) y''' - 2y'' - y' + 2y = 0 & (i) y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0 \end{array}$$

3. Dla powyższych równań różniczkowych przyjąć warunki początkowe, odpowiednio:

$$\begin{array}{lll} (a) \begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases} & (b) \begin{cases} y\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) = 0 \\ y'\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) = 1 \end{cases} & (c) \begin{cases} y(1) = e \\ y'(1) = e \end{cases} \\ (d) \begin{cases} y(\pi/2) = 0 \\ y'(\pi/2) = 10 \end{cases} & (e) \begin{cases} y(1) = 1 \\ y'(1) = e \end{cases} & (f) \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) = e \end{cases} \end{array}$$

W każdym przypadku zbadaj dziedzinę rozwiązania. Określ, w jakim przedziale jest ono jednoznaczne.

4. Rozwiąż poniższe równania różniczkowe, podstawiając odpowiedni ansatz. Rozwiązanie powinno być funkcją rzeczywistą.

$$\begin{array}{lll} (a) x^2 y'' + xy' + y = 0 & (b) x^2 y'' - xy' + y = 0 & (c) x^2 y'' + xy' - y = 0 \\ (d) x^3 y''' + 2x^2 y'' + xy' - y = 0 & (e) x^3 y''' + x^2 y'' + xy' = 0 \end{array}$$

5. Dla powyższych równań różniczkowych, załóż następujące warunki brzegowe i wyznacz rozwiązanie szczególne:

$$\begin{array}{lll} (a) \begin{cases} y(e^\pi) = 0 \\ y'(e^{2\pi}) = 1 \end{cases} & (b) \begin{cases} y(1) = \\ y'(e) = 3 \end{cases} & (c) \begin{cases} y(1) = 5 \\ y'(1) = 1 \end{cases} \\ (d) \begin{cases} y(e^\pi) = 0 \\ y'(e^\pi) = 1 \\ y''(e^\pi) = 2 \end{cases} & (e) \begin{cases} y(e^\pi) = 0 \\ y'(e^\pi) = 0 \\ y''(e^\pi) = 1 \end{cases} \end{array}$$

W każdym przypadku zbadaj dziedzinę rozwiązania. Określ, w jakim przedziale jest ono jednoznaczne.

3 Równania drugiego stopnia niejednorodne

1. W zadaniu 2 z rozdziału 2 wprowadź czynnik niejednorodny, podany poniżej (tzn. niech równanie zamiast $= 0$, będzie równe poniższemu wyrażeniu). Znajdź rozwiązania ogólne takich równań niejednorodnych.

$$\begin{array}{lll} (a) \cos(x) & (b) x & (c) e^x \\ (d) x & (e) e^{2x} & (f) x^3 \end{array}$$

2. W zadaniu 4 z rozdziału 2 wprowadź czynnik niejednorodny, podany poniżej (tzn. niech równanie zamiast $= 0$, będzie równe poniższemu wyrażeniu). Znajdź rozwiązania ogólne takich równań niejednorodnych.

$$\begin{array}{lll} (a) 1 & (b) x^6 & (c) \frac{1}{x} \end{array}$$

4 Układy równań liniowych pierwszego stopnia

Rozwiąż poniższe układy równań

$$\begin{array}{ll} (a) \quad \begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 5y(t) \\ y'(t) = -2x(t) - 2y(t) \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} & (b) \quad \begin{cases} x'(t) = -2x(t) + y(t) + e^t \\ y'(t) = x(t) - 2y(t) + e^t \end{cases} \\ (c) \quad \begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) - 2y(t) \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 10 \end{cases} & (d) \quad \begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) - z(t) \\ z'(t) = 2x(t) - y(t) \end{cases} \\ (e) \quad \begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + t^2 \\ y'(t) = -x(t) + y(t) + 1 \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} & \end{array}$$

Zauważmy, że w przykładzie (e), wyznacznik macierzy jest równy zeru. Pamiętajmy jednak, że możemy zastosować różne metody rozwiązywania takiego układu, w tym również uzmiennianie stałych (znajdujemy wektory i wartości własne, postępujemy jak w przypadku jednorodnym a następnie zakładamy że stałe są funkcjami i podstawiamy całość do równania różniczkowego) lub eliminacji (podstawienia jednego równania do drugiego).

5 Zadania koncepcyjne

- ☛ Zaproponuj równanie różniczkowe pierwszego stopnia, którego rozwiązaniem szczególnym jest funkcja kwadratowa.
- ☛ Zaproponuj zagadnienie Cauchy'ego, którego rozwiązaniem jest funkcja identycznościowa.
- ☛ Zaproponuj równanie różniczkowe (jedno!) drugiego stopnia, którego rozwiązaniami szczególnymi są funkcje:

$$x_1(t) = e^{2t} \qquad x_2(t) = e^{10t}$$

- ☛ Zaproponuj równanie różniczkowe (jedno!) drugiego stopnia, którego rozwiązaniami szczególnymi są funkcje:

$$x_1(t) = e^{2t} \qquad x_2(t) = te^{2t}$$

- ☛ Zaproponuj równanie różniczkowe (jedno!) drugiego stopnia, którego rozwiązaniami szczególnymi są funkcje:

$$x_1(t) = e^{2t} \cos(\sqrt{3}t) \qquad x_2(t) = e^{2t} \sin(\sqrt{3}t)$$

- ☛ Zaproponuj równanie różniczkowe (jedno!) drugiego stopnia, którego jednym z rozwiązań jest $x_1(t) = t^3 \ln(t^2)$

- ☛ Prędkość rozpadu pierwiastka promieniotwórczego jest wprost proporcjonalna do masy substancji, która nie uległa jeszcze rozpadowi. Czasem połowicznego rozpadu nazywamy czas, po którym połowa początkowej masy ulegnie rozpadowi. Czas połowicznego rozpadu neptunu-241 wynosi około 14 minut. Zaproponuj równanie opisujące zmianę masy neptunu-241 w czasie. Jeśli początkowa masa wynosiła 100 kg, to ile tego izotopu pozostanie po (a) 7 minutach, (b) 70 minutach.