

Notatki do kursu
Wstęp do geometrii różniczkowej

Na podstawie wykładu prof. A. Frydryszaka
Z uzupełnieniami

G.D.

Skrypt nie jest pełny, możliwe są błędy i braki

1 Wstęp algebraiczny - pojęcie tensora, jego własności

Podczas wielu rozważań wyjątkowo przydatne jest wprowadzenie tensorów. Ich zastosowania studenci znają już m.in. ze szczególnej teorii względności i mechaniki kwantowej. W tym kursie znajdą zastosowanie pod koniec, podczas rozważania tzw. k -form. Aby zachować formalność, wprowadzimy definicję iloczynu tensorowego przestrzeni liniowych.

Definicja 1.1. Niech \mathbb{V}, \mathbb{W} to przestrzenie liniowe nad ciałem \mathcal{K} . Przez \mathcal{E} oznaczmy przestrzeń liniową formalnych kombinacji liniowych elementów pochodzących z iloczynu kartezjańskiego $\mathbb{V} \times \mathbb{W}$ o współczynnikach z ciała \mathcal{K} , tzn.:

$$\mathcal{E} \ni \sum_{(\vec{v}, \vec{w}) \in \mathbb{V} \times \mathbb{W}} a_{\vec{v}, \vec{w}} (\vec{v}, \vec{w})$$

gdzie współczynniki $a_{v,w} \in \mathcal{K}$ i są równe zero dla prawie wszystkich par. Niech \mathcal{N} to podprzestrzeń \mathcal{E} , rozpięta przez wszystkie wektory postaci:

$$\begin{aligned}(\vec{v} + \vec{u}, \vec{w}) - (\vec{v}, \vec{w}) - (\vec{u}, \vec{w}) \\ (\vec{v}, \vec{w} + \vec{z}) - (\vec{v}, \vec{w}) - (\vec{v}, \vec{z}) \\ (\alpha \vec{v}, \vec{w}) - \alpha (\vec{v}, \vec{w}) \\ (\vec{v}, \beta \vec{w}) - \beta (\vec{v}, \vec{w})\end{aligned}$$

gdzie $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{V}$, $\vec{w}, \vec{z} \in \mathbb{W}$, $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$.

Przestrzeń \mathcal{E}/\mathcal{N} nazywamy iloczynem tensorowym przestrzeni liniowych \mathbb{V} i \mathbb{W} , i zapisujemy ją $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$.

Elementy iloczynu tensorowego często nazywamy tensorami i oznaczamy $v \otimes w \in \mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$.

Tak zdefiniowana przestrzeń ma wiele przydatnych własności. Poniższe twierdzenie pozostawione są jako zadania na ćwiczenia dla studentów:

Twierdzenie 1.1. *Iloczyn tensorowy jest liniowy w pierwszym, jak i w drugim miejscu.*

Definicja 1.2. Tensor $t \in \mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ nazywamy prostym, jeśli istnieją wektory $\vec{v} \in \mathbb{V}$, $\vec{w} \in \mathbb{W}$, takie że:

$$t = \vec{v} \otimes \vec{w}$$

Zadanie: Podaj przykład tensora, który nie jest prosty.

Zadanie: Porównaj iloczyn tensorowy z iloczynem kartezjańskim. Rozważ przestrzenie rzeczywiste $\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ dla różnych n, m .

Definicja 1.3. Niech \mathbb{V} to przestrzeń wektorowa, zaś $\bigotimes_{k=1}^r \mathbb{V}$ to r -krotny iloczyn tensorowy tej przestrzeni. Przez S_r rozumie się grupę permutacji zbioru r -elementowego, zaś $\text{sgn}(\sigma)$ - znak permutacji $\sigma \in S_r$.

Odwzorowanie:

$$\Pi : \bigotimes_{k=1}^r \mathbb{V} \longrightarrow \bigotimes_{k=1}^r \mathbb{V}$$

zadane jako:

$$\Pi \left(\bigotimes_{k=1}^r v_k \right) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \text{sgn}(\sigma) \bigotimes_{k=1}^r v_{\sigma(k)}$$

nazwiemy antysymetryzacją lub rzutowaniem antisymetrycznym

Działanie to będzie istotnie przydatne podczas rozważań k -form. Poniższe twierdzenie przedstawia kilka jego własności, których dowód pozostawia się jako ćwiczenie dla studenta:

Twierdzenie 1.2.

* działanie Π jest liniowe

$$* \Pi\left(\bigotimes_{k=1}^r v_{\sigma(k)}\right) = \operatorname{sgn}(\sigma) \Pi\left(\bigotimes_{k=1}^r v_k\right)$$

$$* \Pi \circ \Pi = \Pi$$

$$* \text{ Niech } a = \bigotimes_{k=1}^r v_k, b = \bigotimes_{k=r+1}^s v_k. \text{ Wówczas:}$$

$$\Pi(a \otimes b) = \Pi(\Pi(a) \otimes b) = \Pi(a \otimes \Pi(b)) = \Pi(\Pi(a) \otimes \Pi(b))$$

2 Topologia, definicja rozmaitości

Definicja 2.1. Przestrzenią topologiczną nazwiemy dwójkę (M, τ) , gdzie:

M - zbiór

τ - rodzina zbiorów $U_\alpha \subset M$, nazywana topologią na M

taką że spełnione są następujące warunki:

$$* M, \emptyset \in \tau$$

$$* U, V \in \tau \Rightarrow U \cap V \in \tau$$

$$* \tau \text{ jest zamknięte na sumy, nawet nieprzeliczalne:}$$

$$(U_\alpha)_{\alpha \in I} \wedge U_\alpha \in \tau \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$$

Elementy M nazywamy punktami, zaś elementy τ - zbiorami otwartymi

W dalszej części, aby wskazać topologię na zadanym zbiorze, stosowana będzie notacja τ_M

Definicja 2.2. Zbiór $A \subset M$ nazywamy domkniętym, gdy $M \setminus A$ jest otwarty

Twierdzenie 2.1.

$$* \text{ Przekrój dowolnej rodziny zbiorów domkniętych jest domknięty}$$

$$* \text{ Suma skończonej rodziny zbiorów domkniętych jest domknięta}$$

$$* \text{ W topologii } \tau_M \text{ zbiory } \emptyset, M \text{ są domknięte}$$

Dowód. Dowód pozostawiono dla studenta. □

Definicja 2.3. Otoczeniem punktu $p \in M$ nazywamy zbiór otwarty $U \in \tau$, taki że $p \in U$

Definicja 2.4. Niech zadane będą przestrzenie topologiczne (M, τ_M) , (N, τ_N) oraz funkcja $f : M \rightarrow N$. Funkcję f nazywamy

$$* \text{ ciągła w punkcie } p \in M, \text{ gdy przeciwobraz otoczenia punktu } f(p) \text{ jest otwarty, tzn:}$$

$$\forall V \in \tau_N : f(p) \in V \implies f^{-1}[V] \in \tau_M$$

$$* \text{ ciągłą, gdy jest ciągła w każdym punkcie } p \in M$$

$$* \text{ otwartą, gdy obrazem każdego otwartego zbioru jest zbiór otwarty, tzn:}$$

$$\forall U \in \tau_M \quad f[U] \in \tau_N$$

Definicja 2.5. Niech zadane będą przestrzenie topologiczne (M, τ_M) , (N, τ_N) oraz funkcja $f : M \rightarrow N$. Funkcję f nazywamy homeomorfizmem, gdy jest ciągłą i otwartą bijekcją.

Definicja 2.6. Przestrzeń topologiczna M jest przestrzenią Hausdorffa, gdy

$$\forall p, q \in M, p \neq q \exists U, V \in \tau_M : p \in U \wedge q \in V \wedge U \cap V = \emptyset$$

tzn. że jesteśmy w stanie rozdzielić dowolne punkty rozmierności, nie zlewając się nam.

Definicja 2.7. Przestrzeń topologiczna M jest nazywana n-wymiarową rozmiernością topologiczną, jeśli spełnione są następujące warunki:

- * jest przestrzenią Hausdorffa
- * ma przeliczalną bazę topologii
- * każdy punkt posiada otwarte otoczenie homeomorficzne z otwartym podzbiorem \mathbb{R}^n

Intuicyjnie, za rozmierność topologiczną uznajemy to, co pod wystarczająco mocną lupą wygląda bardzo podobnie do \mathbb{R}^n

Rozmierność topologiczna jest pierwszym krokiem do rozmierności różniczkowalnej. Aby skonstruować rozmierność różniczkową, trzeba do rozmierności topologicznej dodać jeszcze pewne struktury, dzięki którym usystematyzujemy sposób przenoszenia właściwości z \mathbb{R}^n na rozmierność. Będą to mapy i atlas. Jednak warto pozostać na chwilę przy rozmiernościach topologicznych i wyobrazić sobie pewne przykłady takich przestrzeni. Oczywiście najprostszymi przykładami rozmierności topologicznych są te, które w naturalny sposób można zanurzyć w \mathbb{R}^n .

Definicja 2.8 (pomocnicza). Zanurzeniem przestrzeni topologicznej Ξ w przestrzeń Ω jest odwzorowanie:

$$f : \Xi \longrightarrow \Omega$$

które jest homeomorfizmem na swój obraz $f[\Xi]$.

Za tą formalną definicją kryje się intuicyjne podejście, mówiące że przestrzeń Ξ można w bardzo prosty sposób, bez znaczących zniekształceń, przedstawić jako podzbiór przestrzeni Ω . Innymi słowy, chociaż rozmierność funkcjonuje osobno, my wyobrażamy sobie ją w pewnej przestrzeni rzeczywistej. Przykładowo, prosta z definicji jest zbiorem pojedynczych punktów. Jej przedstawienie w przestrzeni dwu- lub trój-wymiarowej jest zanurzeniem, które pozwala nam zobaczyć jej właściwości. Podobnie klasyczna sfera jest bytem dwuwymiarowym - jednak przedstawiamy ją zwykle w trzech wymiarach, dzięki czemu możemy badać jej właściwości. Jest to właśnie zanurzenie sfery dwuwymiarowej w przestrzeń \mathbb{R}^3 . Przy okazji, taka sfera jest przykładem rozmierności topologicznej.

Przykład 2.1. Przykładowe rozmierności topologicznej:

- * sfera n-wymiarowa, czyli podzbiór n+1-wymiarowej rzeczywistej przestrzeni euklidesowej:

$$S^n := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : \|\vec{x}\| = 1 \}$$

Taka sfera n-wymiarowa jest w naturalny sposób zanurzona w przestrzeni \mathbb{R}^{n+1} . Najczęściej myślimy o sferach jednowymiarowych S^1 - czyli okręgach, i dwuwymiarowych S^2 - klasycznych sferach

- * torus dwuwymiarowy T^2 , który można oczywiście zdefiniować na wiele sposobów. Wygodna do opisu jest definicja jako iloczyn kartezjański dwóch okręgów:

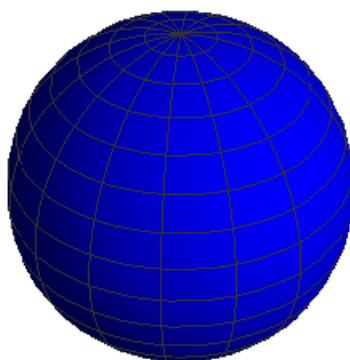
$$T^2 = S^1 \times S^1$$

jednak taka definicja pozbawia nas pewnej intuicji, przydatnej przy definiowaniu kolejnych przykładów. Alternatywnie, torus można przedstawić jako prostokąt o utożsamionych brzegach, co formalnie oznacza:

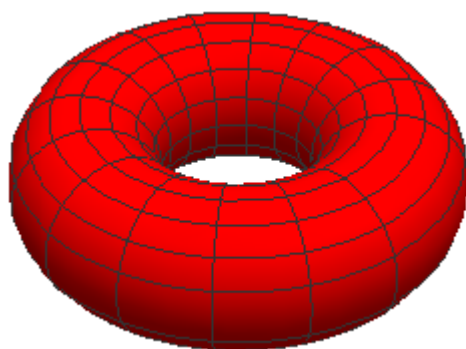
$$T^2 = ([0, 1] \times [0, 1])_{/\sim}$$

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff \begin{cases} x_1 = x_2 \wedge y_1 = 0 \wedge y_2 = 1 \\ y_1 = y_2 \wedge x_1 = 0 \wedge x_2 = 1 \\ x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \end{cases}$$

Takie sklepanie brzegów pokazuje, że ze zwykłego kwadratu można skonstruować różne rozmierności, w zależności od kierunku sklepania. Kolejne przykłady są konstruowane właśnie w taki sposób.



Rysunek 1: Dwuwymiarowa sfera S^2



(a)



(b)

Rysunek 2: Torus: (a) - jego zanurzenie w trójwymiarowej przestrzeni, (b) - „sklejanie” brzegów kwadratu, w celu otrzymania torusa, przebiega wzdłuż zaznaczonych strzałek. Ich kolor świadczy o sklejanych brzegach, ich zwrot - o kierunku sklejania

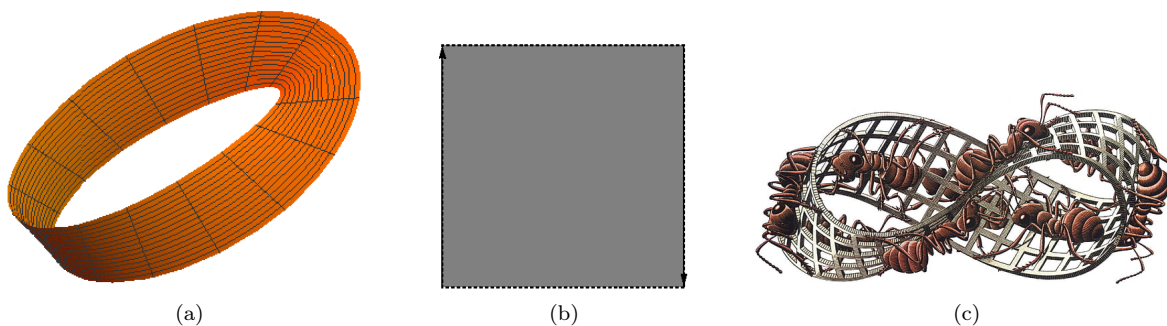
- * wstęga Möbiusa - znany przykład wstęgi, która ma jedną stronę. Otrzymamy ją poprzez sklejanie jednego boku kwadratu, tak aby kierunki sklejania były przeciwne. Należy przy tym pamiętać, że ponieważ chcemy otrzymać coś w bardzo naturalny sposób otwartego, wstęga nie może zawierać brzegu:

$$M = ((0, 1) \times [0, 1])_{/\sim}$$

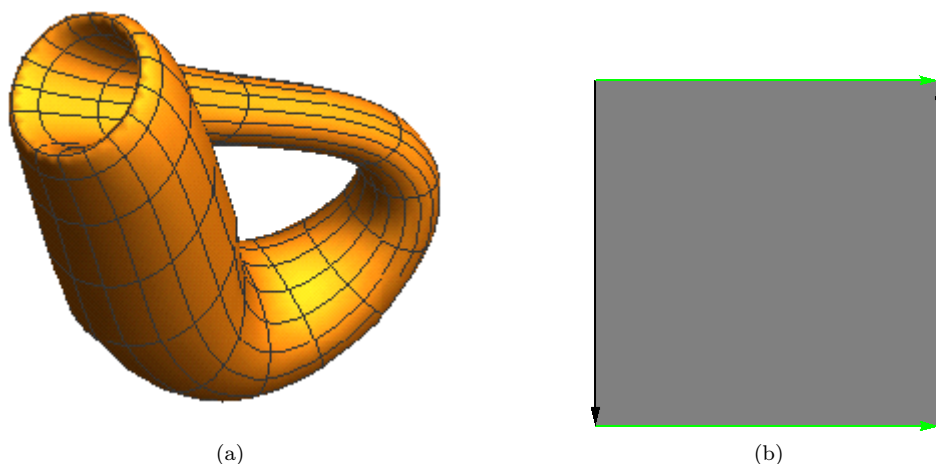
$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff \begin{cases} x_1 = 1 - x_2 \wedge y_1 = 0 \wedge y_2 = 1 \\ x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \end{cases}$$

- * butelka Kleina - rozmaitość, można by rzec, ikoniczna: oto butelka, której wewnątrz i zewnątrz to to samo. Butelka Kleina powstaje poprzez sklejanie kwadratu: jedno zgodne, i jedno przeciwne. W przeciwieństwie do poprzednich przykładów, butelka Kleina nie może być zanurzona w przestrzeni trójwymiarowej. Próby przedstawienia jej w trójwymiarze kończą się stworzeniem sztucznych przecięć - które jednak nie występują w samej butelce. Minimalną przestrzenią do zanurzenia butelki Kleina jest przestrzeń \mathbb{R}^4 .
- * powierzchnia rzutowa - w przypadku dwuwymiarowej powierzchni rzutowej również i ją można przedstawić jako sklejony kwadrat - z tym że w tym przypadku oba klejenia są przeciwne. Podobnie jak butelka Kleina, płaszczyzna rzutowa nie może być przedstawiona w \mathbb{R}^3 bez przecięć. W ogólności, płaszczyznę rzutową n -wymiarową konstruuje się poprzez utożsamienie antypodów na S^n . W przypadku okręgu jest on utożsamny z płaszczyzną rzutową, w wyższych wymiarach - zachęcam do spróbowania sił umysłowych i wyobrażenia sobie kolejnych płaszczyzn rzutowych.

Dotychczas omawiane przykłady stanowiły dwuwymiarowe rozmaitości. Przedstawmy szybko inne, trójwymiarowe rozmaitości:



Rysunek 3: Wstęga Möbiusa: (a) - jej zanurzenie w trójwymiarowej przestrzeni, (b) - „sklejanie” brzegu, przebiega wzdłuż zaznaczonych strzałek, (c) - dzieło autorstwa M.C. Escher, zatytułowane *Möbius Strip II*



Rysunek 4: Butelka Kleina: (a) - jej reprezentacja w trójwymiarowej przestrzeni, które wymusza powstanie nienaturalnych przecięć (w wyższych wymiarach butelka nie przecina się sama ze sobą), (b) - „sklejanie” brzegów kwadratu, w celu otrzymania butelki Kleina, przebiega wzdłuż zaznaczonych strzałek. Ich kolor świadczy o sklejanym brzegach, ich zwrot - o kierunku sklejanym

* kula n -wymiarowa, czyli podzbiór n -wymiarowej rzeczywistej przestrzeni euklidesowej:

$$K^n := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x}\| < 1\}$$

Oczywiście klasycznymi przykładami są kule jednowymiarowe K^1 - odcinki, dwuwymiarowe K^2 - koła, trójwymiarowe K^3 - zwykłe kule.

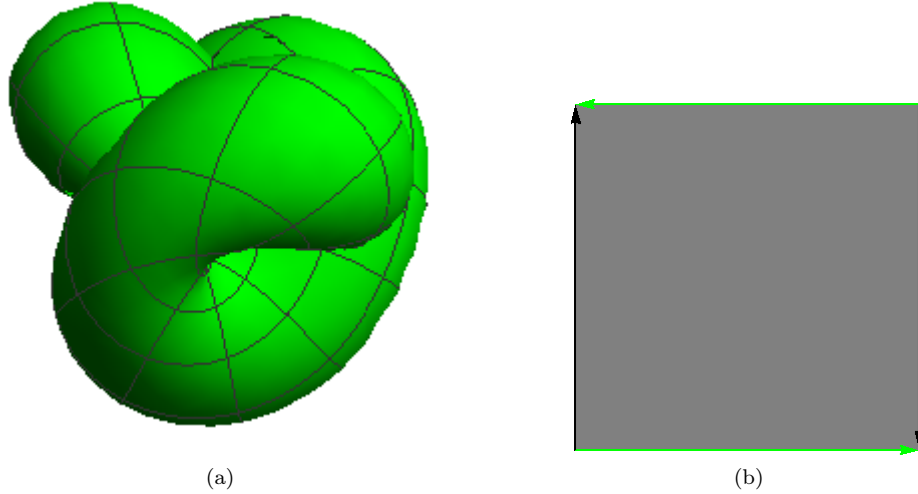
Zauważmy, że kulę definiujemy bez brzegu (stąd ostra nierówność „<”). Jest to o tyle istotne, że podczas przyszłych rozważań interesować nas będą tzw. rozmaitości bez brzegu. Brzeg, z perspektywy geometrii różniczkowej, jest problematyczny - nasze rozważania prowadzone są wyłącznie dla zbiorów otwartych. Co prawda istnieją rozmaitości z brzegiem i matematycy znaleźli sposób na ich opisanie, jednak nie mają one znaczenia w fizyce i nie będziemy ich uwzględniać.

* torus wypełniony (torus z wnętrzem)

Podobnych przykładów można konstruować bardzo wiele. Zauważmy, że topologia pozwala na rozciąganie i ściskanie obiektów, np. przekształcenie kuli w sześciąt (bez brzegu oczywiście). Dzieje się tak ponieważ, podobnie jak w algebrze struktury izomorficzne są niemalże tym samym, dla topologii takim przekształceniem jest homeomorfizm. Stąd kula i sześciąt są topologicznie tym samym, podobnie jak częste zestawienie donuta z kubkiem.

Homeomorfizmy uniemożliwiają jednak wprowadzanie cięć i sklejeń do obiektów¹. Stąd każdorazowe dodanie dziury zmienia zupełnie przestrzeń topologiczną. Czym innym jest zatem kula, czym innym torus, a czymś zupełnie innym

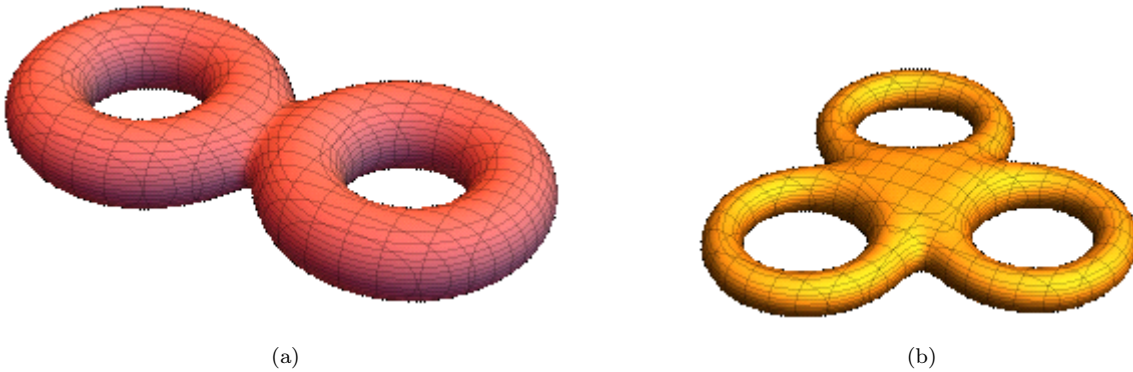
¹Zdanie to może wydawać się na pierwszy rzut oka nienaturalne, ponieważ większość dwuwymiarowych przykładów konstruowali-



Rysunek 5: (a) - Powierzchnia Boya - reprezentacja dwuwymiarowej przestrzeni rzutowej w trójwymiarze, (b) „sklejanie” brzegów kwadratu, w celu otrzymania powierzchni rzutowej, przebiega wzdłuż zaznaczonych strzałek. Ich kolor świadczy o sklejanych brzegach, ich zwrot - o kierunku sklejania

jest znowu powłoka kuli - kula z wyciętą wewnątrz mniejszą kulą z brzegiem, przedstawiona przykładowo jako.:

$$P^n = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} < \|\vec{x}\| < 1 \right\}$$



Rysunek 6: Rozmaitości z różnymi liczbami „dziur”

Wróćmy teraz do definiowania rozmaitości różniczkowalnej - będziemy potrzebować map - tzn. przejść między rozmaitością a przestrzenią \mathbb{R}^n .

Definicja 2.9. Parę (U, φ) , gdzie $U \in \tau$, φ jest homeomorfizmem:

$$\varphi : U \longrightarrow \varphi[U] \subset \mathbb{R}^n$$

nazywamy n-wymiarową mapą, zaś U - zbiorem mapowym

śmy poprzez „sklejanie” brzegów kwadratu, a teraz mówimy o zakazie sklejania. Są to jednak zupełnie różne sytuacje: w przykładach *konstruowaliśmy* całą przestrzeń, stosując pewne utożsamienie, o którym wygodnie jest myśleć jako sklejanie brzegów. Jednak homeomorfizm jest przekształceniem ciągłym i otwartym, które działa na poprzednio zadanej przestrzeni. Warunek ciągłości uniemożliwia wprowadzenie nowej „dziury” tam, gdzie jej nie było.

Ponieważ mapa jest funkcją do przestrzeni wymiarowej, zatem w naturalny sposób ma postać:

$$\varphi(p) = \begin{bmatrix} \varphi^1(p) \\ \varphi^2(p) \\ \vdots \\ \varphi^n(p) \end{bmatrix}$$

Gdzie

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \varphi^i : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

Definicja 2.10. Funkcje składowe mapy φ^i nazywamy współrzędnymi uogólnionymi (lub rzadziej w tym kontekście: współrzędnymi krzywoliniowymi). Będziemy pisać wówczas $\varphi = (\varphi^i)_{i=1}^n$ lub, w sytuacjach oczywistej rozmaitości $\varphi = (\varphi^i)$

Jeśli zadane są n-wymiarowe mapy (U, φ) , (V, ϕ) , wówczas w naturalny sposób pojawić mogą się bijekcje:

$$\phi \circ \varphi^{-1} \quad \varphi \circ \phi^{-1}$$

Definicja 2.11. Funkcję $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ nazywamy \mathcal{C}^k -dyfeomorfizmem, gdy jest k-krotnie różniczkowalną bijekcją i funkcja odwrotna f^{-1} również jest k-krotnie różniczkowalna

W szczególności \mathcal{C}^0 -dyfeomorfizm to homeomorfizm, zaś \mathcal{C}^∞ -dyfeomorfizm to dyfeomorfizm gładki.

Definicja 2.12. n-wymiarowe mapy (U, φ) , (V, ϕ) , (gdzie $U \cap V \neq \emptyset$) zadane na przestrzeni topologicznej M nazywamy \mathcal{C}^k -uzgodnionymi (dla $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$), gdy odwzorowanie przejścia:

$$\phi \circ \varphi^{-1} \Big|_{\varphi[U \cap V]} : \varphi[U \cap V] \longrightarrow \phi[U \cap V]$$

jest \mathcal{C}^k -dyfeomorfizmem

Definicja 2.13. n-wymiarowym atlasem \mathcal{A} na przestrzeni topologicznej M nazywamy rodzinę n-wymiarowych map $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $\alpha \in I$, takich że:

* zbiory mapowe pokrywają całą przestrzeń

$$\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$$

* mapy są parami \mathcal{C}^k -uzgodnione

Definicja 2.14. Mapa (U, φ) jest uzgodniona z atlasem $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in I\}$, gdy jest \mathcal{C}^k -uzgodniona ze wszystkimi mapami atlasu.

Definicja 2.15. Atlas \mathcal{A} jest atlasem maksymalnym, gdy zawiera wszystkie \mathcal{C}^k -uzgodnione mapy.

Atlas maksymalny \mathcal{A} na przestrzeni topologicznej M nazywany jest strukturą \mathcal{C}^k -różniczkową (równoważnie strukturą \mathcal{C}^k -różniczkowalną).

Przykład 2.2. Niech rozmaitością będzie $M = \mathbb{R}$, zaś mapy będą zadane jako:

* (\mathbb{R}, φ) , $\varphi = id$

* (\mathbb{R}, ϕ) , $\phi(x) = x^3$

Wówczas

$$(\phi \circ \varphi^{-1})(x) = x^3$$

jest funkcją gładką, zaś funkcja

$$(\varphi \circ \phi^{-1})(x) = x^{\frac{1}{3}}$$

ma nieciągłą pochodną w $x = 0$. Zatem mapy te nie są \mathcal{C}^1 -uzgodnione

Definicja 2.16. n-wymiarową rozmaitością różniczkową (różniczkowalną) klasy \mathcal{C}^k nazywamy parę (M, \mathcal{A}) , gdzie:

- * M - n-wymiarowa rozmaitość topologiczna
- * \mathcal{A} - n-wymiarowy \mathcal{C}^k -zgodny atlas na M

Przykład 2.3.

- * **Przestrzeń liniowa** jako rozmaitość

Niech \mathbb{V} będzie izomorficzne z \mathbb{R}^n , zaś zbiór $B = \{\vec{b}_k\}_{k=1}^n$ to baza przestrzeni \mathbb{V} . Definiujemy funkcję φ_B :

$$\begin{aligned}\varphi_B : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{V} \\ \varphi_B : (x^1, x^2, \dots, x^n) &\mapsto \sum_{j=1}^n x^j \vec{b}_j\end{aligned}$$

Konstruujemy topologię na przestrzeni \mathbb{V} : nazwiemy zbiór $U \subset \mathbb{V}$ otwartym, jeśli jego przeciwobraz $\varphi_B^{-1}[U] \subset \mathbb{R}^n$ jest otwarty w \mathbb{R}^n . Czy tak zdefiniowana topologia jest dobra? Tzn. czy nie zależy od wyboru bazy? Weźmy inną bazę $B' = \{\vec{b}'_k\}_{k=1}^n$. Wówczas funkcja:

$$\varphi_{B'}^{-1} \circ \varphi_B : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

jest gładkim dyfeomorfizmem. Wybierzmy $U \subset \mathbb{V}$ otwarty w topologii zadanej przez B .

$$\varphi_{B'}^{-1}[U] = (\varphi_{B'}^{-1} \circ \varphi_B \circ \varphi_B^{-1})[U] = (\varphi_{B'}^{-1} \circ \varphi_B) \circ \varphi_B^{-1}[U]$$

Tzn. przedstawiliśmy zbiór $\varphi_{B'}^{-1}[U]$ jako wynik działania dyfeomorfizmu na zbiór otwarty, stąd jest on zbiorem otwartym. Wynika stąd, że wybrana rodzina zbiorów faktycznie nie zależy od wyboru bazy przestrzeni wektorowej i jest topologią τ .

Mapą jest $(\mathbb{V}, \varphi_B^{-1})$, za razem stanowi to najmniejszy gładki atlas.

- * **Sfera n-wymiarowa** S^n - z mapami rzutu stereograficznego

Sferą n-wymiarową nazywamy:

$$S^n = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{k=0}^n x_k^2 = 1 \right\}$$

Biegunami sfery nazwiemy punkty $(\pm 1, 0, 0, \dots, 0) = \pm \vec{e}_0$. Mapy rzutu stereograficznego definiujemy jako rzut punktu sfery na płaszczyznę \mathbb{R}^n zadaną w \mathbb{R}^{n+1} poprzez $\{0\} \times \mathbb{R}^n$ wzdłuż prostej łączącej ten punkt z odpowiednim biegunem.

$$\begin{aligned}(U_+, \varphi_+), \quad U_+ &= S^n \setminus \{\vec{e}_0\}, \quad \varphi_+ : U_+ \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (U_-, \varphi_-), \quad U_- &= S^n \setminus \{-\vec{e}_0\}, \quad \varphi_- : U_- \longrightarrow \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

niech punkt na sferze opisany jest kierunkiem $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, wówczas:

$$\begin{aligned}\varphi_{\pm}(x_0, \vec{x}) &= \frac{1}{1 \mp x_0} \vec{x} \\ \varphi_{\pm}^{-1}(\vec{x}) &= \left(\pm \frac{\|\vec{x}\|^2 - 1}{\|\vec{x}\|^2 + 1}, \frac{2\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2 + 1} \right)\end{aligned}$$

gdzie $\|\vec{x}\|$ jest normą euklidesową n-wymiarową.

Zadaniem studenta jest wyprowadzić powyższe wzory i sprawdzić, czy tak wybrane mapy zadają gładki atlas.

- * **Okrąg** S^1 Na okręgu można zdefiniować mapy poprzez rzuty z odpowiednich półokręgów:

$$\begin{aligned}(U_1, \varphi_1) : \quad U_1 &= \{(x_1, x_2) \in S^1 : x_1 > 0\}, \quad \varphi_1(x_1, x_2) = x_2 \\ (U_2, \varphi_2) : \quad U_2 &= \{(x_1, x_2) \in S^1 : x_1 < 0\}, \quad \varphi_2(x_1, x_2) = x_2 \\ (U_3, \varphi_3) : \quad U_3 &= \{(x_1, x_2) \in S^1 : x_2 > 0\}, \quad \varphi_3(x_1, x_2) = x_1 \\ (U_4, \varphi_4) : \quad U_4 &= \{(x_1, x_2) \in S^1 : x_2 < 0\}, \quad \varphi_4(x_1, x_2) = x_1\end{aligned}$$

Zbiór tych czterech map tworzy atlas.

Przykład 2.4. Innymi przykładowymi obiektami, rozważanymi często jako rozmaitości

3 Wektory styczne i kostyczne

Wyobrażając sobie rozmaitość, zanurzamy ją zazwyczaj w trójwymiarowej przestrzeni. Niestety takie podejście okazuje się zwodnicze w przypadku wektorów stycznych - podczas zanurzenia wobrażamy sobie wektory styczne w całej przestrzeni, jednak należy zrozumieć, że rozmaitość nie musi istnieć zanurzona w czymś - istnieje ona sama, zatem nie ma zewnętrznego świata, w którym możnaby określać wektory styczne. Z tego powodu definicje wektorów stycznych odbiegają od naturalnych wyobrażeń, zaczerpniętych z przestrzeni rzeczywistych.

Wektory styczne na rozmaitościach można definiować na różne sposoby. W poniższym rozdziale przedstawione zostaną dwie takie definicje. Pierwsza z nich, budująca intuicję, oparta jest na krzywych na rozmaitości. Druga, bardziej praktyczna definicja opiera się na derywacjach liniowych.

Uwaga: rozważamy krzywe gładkie z odcinka $I \subset \mathbb{R}$ (o którym możemy myśleć jako o czasie) w rozmaitość M , $\dim M = m$: $\gamma : I \rightarrow M$. O krzywej mówimy, że jest zaczepiona w punkcie $p \in M$ jeśli $\gamma(0) = p$.

Gdy zadana jest mapa (U, φ) , $p \in U$, $\varphi = \left(\varphi^k\right)_{k=1}^m$ oraz $\varepsilon > 0$ taki że $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \gamma(t) \in U$, wówczas krzywa ma w mapie interpretację $(\varphi \circ \gamma)(t) = \left(\varphi^k(t)\right)_{k=1}^m$

Definicja 3.1. Niech M to rozmaitość gładka wymiaru m . Dwie krzywe (γ_1, γ_2) zaczepione w $p \in M$ nazwiemy równoważnymi, gdy w mapie (U, φ) , $p \in U$:

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff (\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$$

Fakt: Relacja równoważności zadana w definicji 3.1 nie zależy od wyboru mapy.

Dowód. Niech dane będą mapy (U, φ) , (V, ϕ) , takie że $p \in U \cap V$.

Zachodzi:

$$\varphi \circ \phi^{-1}, \phi \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(U \cap V; \mathbb{R}^m)$$

Niech krzywe γ_1, γ_2 będą równoważne w mapie (U, φ) . Wówczas zachodzi:

$$\begin{aligned} (\phi \circ \gamma_1)'(0) &= (\phi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma_1)'(0) \\ &= (\phi \circ \varphi^{-1})'(\varphi(0)) \cdot (\varphi \circ \gamma_1)'(0) \\ &= (\phi \circ \varphi^{-1})'(\varphi(0)) \cdot (\varphi \circ \gamma_2)'(0) \\ &= (\phi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma_2)'(0) \\ &= (\phi \circ \gamma_2)'(0) \end{aligned}$$

□

Zachęca się studenta do sprawdzenia dziedzin funkcji wykorzystanych przy kolejnych przejściach powyższego dowodu.

Definicja 3.2 (Wektor styczny, wersja 1.).

Niech M to gładka rozmaitość. Wektorem stycznym do rozmaitości M w punkcie $p \in M$ nazywamy klasę równoważności krzywych zaczepionych w punkcie p : $[\gamma]_p$

Posiadając zbiór wektorów stycznych, chcielibyśmy znać ich właściwości. Do tej pory mówiliśmy o wektorach, jednak nie wykazaliśmy, że faktycznie nimi są. Na to pytanie odpowiedzi udziela poniższe twierdzenie:

Twierdzenie 3.1. Zbiór wszystkich wektorów stycznych do rozmaitości M w punkcie $p \in M$ tworzy przestrzeń liniową nad \mathbb{R} . Przestrzeń taką nazywa się $T_p M$ (od angielskiego 'tangent' - styczny).

Dowód. Należy zdefiniować odpowiednio dodawanie wektorów oraz mnożenie ich przez skalar. Oczywiście jest, że działania te nie mogą zależeć od wyboru bazy, jednak będziemy korzystać z map podczas ich definiowania. Niech zatem zadana będzie mapa (U, φ) , $p \in U$

* Dodawanie wektorów - będziemy chcieli zdefiniować dodawanie wektorów poprzez dodawanie w mapie:

$$[\gamma_1]_p \oplus [\gamma_2]_p \iff \varphi \circ (\gamma_1 \oplus \gamma_2)(t) = \varphi \circ \gamma_1(t) + \varphi \circ \gamma_2(t)$$

Nastęcza to jednak pewnej trudności: dodanie wartości odpowiadających punktowi p podwaja wartość, przenosząc niejako zaczepienie krzywych. Aby tego uniknąć, należałoby w dodawaniu wprowadzić korektę, przesuwając wynik. Można tego jednak uniknąć, rozważając tzw. mapy centrowane w punkcie p , czyli takie że $\varphi(p) = \vec{0}$. Mapy takie można wprowadzić, ponieważ translacja jest przekształceniem gładkim. Wówczas powyższa definicja dodawania jest ścisła

* Mnożenie przez skalar $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda[\gamma]_p \iff \varphi \circ (\lambda\gamma)(t) = \lambda \cdot (\varphi \circ \gamma)(t)$$

□

Fakt: $\dim T_p M = \dim M$

Chcemy teraz wprowadzić wektory styczne poprzez derywację, w tym celu jednak musimy pierwotnie wprowadzić funkcje gładkie, na które te derywację mogą działać.

Definicja 3.3. Zbiór gładkich funkcji na otoczeniu punktu $p \in M$ oznaczamy $\mathcal{F}(M, p)$:

$$\mathcal{F}(M, p) := \{f \in C^\infty(M; \mathbb{R}) : \exists U \in \tau_M, p \in U, f : U \longrightarrow \mathbb{R}\}$$

Definicja 3.4. Niech M to m -wymiarowa rozmaitość gładka. Niech zadana będzie funkcja gładka $f \in \mathcal{F}(M, p)$ oraz mapa (U, φ) , taka że $p \in M$, $\varphi = (\varphi^k)_{k=1}^m$. Definiujemy:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^k} \right)_p f := \left. \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^k} \right|_{\varphi(p)}$$

Definicja 3.5. Niech dana będzie M rozmaitość gładka oraz funkcje gładkie $f, g \in \mathcal{F}(M, p)$ zadane na odpowiednich zbiorach U_f, U_g :

$$\begin{aligned} f &: U_f \rightarrow \mathbb{R} \\ g &: U_g \rightarrow \mathbb{R} \\ p &\in U_f \cap U_g \end{aligned}$$

Funkcje f, g nazwiemy równoważnymi:

$$f \sim g \iff \exists W \in \tau_M, p \in W \subset U_f \cap U_g : f|_W = g|_W$$

Fakt: Powyższa relacja jest relacją równoważności.

Dowód. Dowód pozostawiony jest jako zadanie dla studenta. □

Definicja 3.6. Klasę równoważności $[f]_p$ nazywamy kiełkiem w punkcie p . Zbiór kiełków nazywamy żdzębem i oznaczamy $\mathcal{O}_{M,p}$

$$\mathcal{O}_{M,p} := \mathcal{F}(M, p)_{/\sim}$$

Fakt: Żdzębło ma strukturę pierścienia.

Dowód. Dowód pozostawiony jest jako zadanie na ćwiczenia. □

Definicja 3.7. Funkcję gładką $f \in C^\infty(M; \mathbb{R})$ spełniającą w pewnej mapie (U, φ) warunek:

$$(f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p)) = 0$$

nazywamy stacjonarną

Definicja 3.8. Kiełek $[f]_p$ nazywamy stacjonarnym, gdy dla pewnej mapy (U, φ) i $f \in [f]_p$ zachodzi:

$$(f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p)) = 0$$

Zbiór kielków stacjonarnych w punkcie p oznaczamy $\mathcal{S}_{M,p}$

Twierdzenie 3.2. Niech M to gładka rozmaitość m -wymiarowa z mapą (U, φ) , $p \in U \in \tau_M$. Wówczas operacje:

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^k} \right)_p \right\}_{k=1}^m$$

określone na $\mathcal{O}_{M,p}$ opisane w definicji 3.4 mają następujące własności:

- * są liniowe
- * znikają na kielkach stacjonarnych

Dodatkowo, każde odwzorowanie liniowe Y_p zadane na $\mathcal{O}_{M,p}$ znikające na $\mathcal{S}_{M,p}$ można przedstawić jednoznacznie jako:

$$Y_p = \sum_{k=1}^m \lambda^k \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^k} \right)_p$$

gdzie $\lambda^k \in \mathbb{R} \ \forall \ k \in \{1, \dots, m\}$

Dowód. Ten dowód mam pomieszany i niepełny niestety

□

Uwaga: Odwzorowanie zadane jako:

$$Y : \mathcal{O}_{M,p} \longrightarrow \mathbb{R}$$

postrzegane może być też jako:

$$Y : \mathcal{O}_{M,p} / \mathcal{S}_{M,p} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Ponieważ jest ono liniowe, zatem:

$$Y \in (\mathcal{O}_{M,p} / \mathcal{S}_{M,p})^*$$

Definicja 3.9. Niech M to rozmaitość gładka. Derywacją liniową w punkcie $p \in M$ nazywamy odwzorowanie:

$$D_p : \mathcal{O}_{M,p} \longrightarrow \mathbb{R}$$

takie że dla dowolnych $f, g \in \mathcal{O}_{M,p}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- * $D_p([f] \cdot [g]) = D_p([f]) \cdot [g](p) + [f](p) \cdot D_p([g])$
- * $D_p(\alpha \cdot [f] + \beta \cdot [g]) = \alpha \cdot D_p([f]) + \beta \cdot D_p([g])$

Czyli zgodnie z nazwą, odwzorowanie to musi być liniowe, a także spełniać regułę Leibniza.

Definicja 3.10. Wektorem stycznym do rozmaitości M w punkcie $p \in M$ nazywamy liniową derywację na $\mathcal{O}_{M,p}$ zanikającą na kielkach stacjonarnych.

Ta definicja wektora stycznego jest o tyle wygodna, że mamy faktyczne narzędzia aby analizować rzeczony wektory.

Przykład 3.1. Najprostszym możliwym przykładem będzie $M = \mathbb{R}$ z mapą (\mathbb{R}, id) . Niech $x \in \mathbb{R}$, zaś t - to współrzędne \mathbb{R} . Niech zadana będzie funkcja $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Wówczas:

$$\left(\frac{\partial}{\partial(id)} \right)_x f = \frac{d(f \circ id)(t)}{dt} \Big|_x = \frac{df(t)}{dt} \Big|_x = f'(x)$$

Zdefiniowaliśmy wektory styczne na dwa sposoby. Częściej będziemy odwoływać się do tej drugiej definicji, jednak teraz należy jeszcze pokazać, że te definicje nie są sprzeczne. Oczywiście rozważania prowadzone są na zupełnie różnych bytach - pierwsza definicja dotyczy krzywych, druga derywacji. Jednak obie definicje mogą być uważane za równoważne w tym sensie, że omawiane przestrzenie są izomorficzne.

Twierdzenie 3.3. Niech M - gładka rozmaitość, $p \in M$.
Niech $v_p = [\gamma]_p$ to wektor styczny pierwszej definicji. Wówczas odwzorowanie:

$$L_v(f) = (f \circ \gamma)'(0)$$

jest deriwacją liniową zanikającą na $\mathcal{S}_{M,p}$. Natomiast odwzorowanie $v \mapsto L_v$ jest homomorfizmem między $T_p M$ a $(\mathcal{O}_{M,p}/\mathcal{S}_{M,p})^*$

Dowód.

1. Należy pokazać, że L zanika na kielkach stacjonarnych. Niech zadany będzie kielka stacjonarny $[f] \ni f$ oraz wektor $v = [\gamma] \ni \gamma$. Wówczas w mapie (U, φ) , $U \ni p$:

$$\begin{aligned} L_v(f) &= (f \circ \gamma)'(0) \\ &= (f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma)'(0) \\ &= ((f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma))'(0) \\ &= (f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p)) \cdot (\varphi \circ \gamma)'(0) \stackrel{\diamond}{=} 0 \end{aligned}$$

Co wynika z faktu, że w kroku \diamond zastosowana została stacjonarność kielka.

2. Należy pokazać, że L jest deriwacją liniową.

$$\begin{aligned} L_v([f] \cdot [g]) &= ((f \cdot g) \circ \gamma)'(0) \\ &= ((f \circ \gamma) \cdot (g \circ \gamma))'(0) \\ &\stackrel{\heartsuit}{=} (f \circ \gamma)'(0) \cdot g(\gamma(0)) + f(\gamma(0)) \cdot (g \circ \gamma)'(0) \\ &= L_v([f]) \cdot g(p) + f(p) \cdot L_v([g]) \end{aligned}$$

Gdzie w kroku \heartsuit wykorzystano regułę Leibniza dla funkcji rzeczywistej. W analogiczny sposób sprawdza się liniowość działania, pozostawia się to zatem do samodzielnego sprawdzenia przez studentów.

3. Niech zadane będą wektory $[\gamma_1] \ni v_1 \neq v_2 \in [\gamma_2]$. Oznacza to, że w mapie (U, φ) zachodzi:

$$(\varphi \circ \gamma_1)'(0) \neq (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$$

Zatem istnieje indeks $i \in \{1, \dots, m\}$, taki że:

$$(\varphi^i \circ \gamma_1)'(0) \neq (\varphi^i \circ \gamma_2)'(0)$$

Wynika stąd:

$$L_{v_1} \neq L_{v_2}$$

4. Przekształcenie $v \mapsto L_v$ jest surjekcją. Weźmy mapę (U, φ) , wówczas:

$$L = \sum_{k=1}^m \lambda^k \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^k} \right)_p$$

dla pewnego wektora $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^m$. Korzystając z tego wektora, rozważmy krzywą zadaną jako:

$$\gamma(t) = \varphi^{-1}(\varphi(p) + t \cdot \vec{\lambda})$$

Zatem:

$$f \circ \gamma(t) = f \circ \varphi^{-1}(\varphi(p) + t \cdot \vec{\lambda})$$

$$\begin{aligned}
(f \circ \gamma)'(t) &= (f \circ \varphi^{-1}) \Big|_{\varphi(p)} \cdot \vec{\lambda} \\
&= \sum_{k=1}^m \lambda^k \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial \varphi^k} \Big|_{\varphi(p)} \\
&= L_{[\gamma]}([f])
\end{aligned}$$

□

Wniosek:

$$T_p M \simeq (\mathcal{O}_{M,p} / \mathcal{I}_{M,p})^*$$

Chodźmy dalej i zobaczmy jak tak naprawdę działają wektory styczne. Rozważmy wektor styczny v_p w punkcie $p \in M$ rozpatrywany w mapie (U, φ) , $p \in U$:

$$v_p = \sum_{j=1}^m a^j \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right)_p, \quad a^j \in \mathbb{R}$$

Taki wektor, działając jako derywacja, ma jawną postać:

$$\begin{aligned}
v_p(f) &= \sum_{j=1}^m a^j \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right)_p f \\
&= \sum_{j=1}^m a^j \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} \Big|_{\varphi(p)}
\end{aligned}$$

Zobaczmy teraz, jak transformacji ulega ta postać, gdy rozpatrujemy różne mapy. Weźmy zatem alternatywną mapę (V, ψ) , $p \in U \cap V \neq \emptyset$ i rozpatrzmy transformację na przecięciu się map

$$v_p = \sum_{k=1}^m a^k \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^k} \right)_p = \sum_{j=1}^m b^j \left(\frac{\partial}{\partial \psi^j} \right)_p$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial \psi^j} \right)_p f &= \frac{\partial (f \circ \psi^{-1})}{\partial y^j} \Big|_{\psi(p)} \\
&= \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \psi^{-1})}{\partial y^j} \Big|_{\psi(p)} \\
&= \frac{\partial ((f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \psi^{-1}))}{\partial y^j} \Big|_{\psi(p)} \\
&\stackrel{(\heartsuit)}{=} \sum_{i=1}^m \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p)} \cdot \frac{\partial (\varphi^i \circ \psi^{-1})}{\partial y^j} \Big|_{\psi(p)} \\
&= \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial \psi^j} \right)_p \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right)_p f
\end{aligned}$$

Jak widzimy, chociaż interesuje nas wyłącznie przekształcenie wektorów, musimy rozważać je w kontekście działania na funkcję. W momencie oznaczonym (\heartsuit) skorzystaliśmy z tego, że:

$$(\varphi \circ \psi^{-1})^i = x^i(\vec{y})$$

tzn. że złożenie map jest funkcją z $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

Powyższe przekształcenie jest prawdziwe dla każdego indeksu j , zatem:

$$\begin{aligned} v_p &= \sum_{j=1}^m b^j \left(\frac{\partial}{\partial \psi^j} \right)_p \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m b^j \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial \psi^j} \right)_p \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right)_p \\ &= \sum_{i=1}^m a^i \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right)_p \end{aligned}$$

Stąd wynika bezpośrednio:

$$a^i = \sum_{j=1}^m b^j \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial \psi^j} \right)_p \quad b^j = \sum_{i=1}^m a^i \left(\frac{\partial \psi^j}{\partial \varphi^i} \right)_p$$

Widzimy, że zgodnie z oczekiwaniami wektory ulegają standardowej transformacji związanej ze zmianą bazy - ponieważ mapa na rozmaitości indukuje baze w przestrzeni stycznej w punkcie.

W powyższym rozumowaniu pokazaliśmy, w jaki sposób prezentuje się wektor styczny w różnych mapach, a tym samym - różnych bazach. Chcielibyśmy pójść jeszcze o krok dalej - jak można przekształcać wektory styczne, jeśli przemieszczamy się między rozmaitościami. Wybieramy sobie ulubiony wektor styczny do rozmaitości, ale z jakiegoś powodu potrzebujemy mieć go w innym miejscu, albo nawet powiązanym z inną rozmaitością. Takie przejście jest możliwe dzięki zastosowaniu tzw. odwzorowania stycznego. Ponieważ rozważamy dwie postaci wektorów stycznych, zatem i odwzorowanie styczne będziemy definiować na dwa równoważne sposoby.

Definicja 3.11 (odwzorowanie styczne dla wektorów jako klas krzywych). Niech h to odwzorowanie różniczkowalne rozmaitości gładkich:

$$h : M \rightarrow N$$

Odwzorowaniem stycznym $d_p h$ w punkcie $p \in M$ nazwiemy odwzorowanie zadane jako:

$$\begin{aligned} d_p h : T_p M &\longrightarrow T_{h(p)} N \\ d_p h : [\gamma]_p &\longmapsto [h \circ \gamma]_{h(p)} \end{aligned}$$

Definicja 3.12 (odwzorowanie styczne dla wektorów jako derywacji). Niech h to odwzorowanie różniczkowalne rozmaitości gładkich

$$h : M \longrightarrow N$$

Odwzorowaniem stycznym $d_p h$ w punkcie $p \in M$ nazwiemy odwzorowanie:

$$d_p h(v_p) f := v_p \{f \circ h\}$$

dla dowolnej funkcji f określonej na otoczeniu $h(p) \in N$

Odwzorowania styczne będą często przewijać się w naszych rozważaniach (być może ze zmienioną notacją), zatem warto poznać ich własności.

Fakt: Odwzorowania styczne są działaniem liniowym.

Dowód. Niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $v_p, w_p \in T_p M$

$$\begin{aligned} d_p h(\alpha \cdot v_p + \beta \cdot w_p) f &= (\alpha v_p + \beta w_p) \{f \circ h\} \\ &= (\alpha v_p) \{f \circ h\} + (\beta w_p) \{f \circ h\} \\ &= \alpha \cdot v_p \{f \circ h\} + \beta \cdot w_p \{f \circ h\} \\ &= \alpha \cdot d_p h(v_p) f + \beta \cdot d_p h(w_p) f \end{aligned}$$

□

Twierdzenie 3.4 (o składaniu odwzorowań stycznych). *Niech zadane będą gładkie rozmaitości M, N, P oraz odwzorowania gładkie między nimi:*

$$\begin{aligned} h &: M \longrightarrow N \\ g &: N \longrightarrow P \end{aligned}$$

Wówczas dla każdego $p \in M$ istnieje odwzorowanie styczne $d_p(g \circ h)$, które można zadać jako:

$$d_p(g \circ h) = d_{h(p)}g \cdot d_ph$$

Fakt: Odwzorowanie styczne do funkcji identycznościowej jest funkcją identycznościową.

Dowód.

$$d_p(id)(v_p)f = v_p(f \circ id) = v_p(f)$$

□

Twierdzenie 3.5. *Niech g to dyfeomorfizm między rozmaitościami gładkimi M, N : $g \in \text{Diff}(M; N)$*

Wówczas:

$$(d_pg)^{-1} = d_{g(p)}(g^{-1})$$

Dowód.

$$(id)_p = d_p(id) = d_p(g^{-1} \circ g) = d_{g(p)}(g^{-1}) \cdot d_pg$$

□

Zanim wrócimy do rozważań przestrzeni stycznych, jeszcze przez chwilę skupmy się na odwzorowaniach stycznych. Zauważmy, że jeśli rozważamy odwzorowanie $f \in C^\infty(M; \mathbb{R})$, wówczas:

$$\begin{aligned} M &\xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ T_pM &\xrightarrow{d_pf} T_{f(p)}\mathbb{R} \simeq \mathbb{R} \\ d_pf(v) &= v(f) \Big|_p \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ponieważ wiemy już, że odwzorowania styczne są liniowe, mamy zatem do czynienia z funkcjonałem liniowym. Wiemy też z algebry, że przestrzeń ciągłych funkcjonałów liniowych nad przestrzenią liniową nazywamy przestrzenią dualną. W przypadku rozważania rozmaitości, przestrzeni tej nadaje się specjalną nazwę.

Definicja 3.13. Przestrzenią kostyczną do rozmaitości M w punkcie $p \in M$ nazwiemy przestrzeń dualną do przestrzeni stycznej w tym punkcie. Oznaczamy ją:

$$T_p^*M := (T_pM)^*$$

Elementy przestrzeni kostycznej $\omega_p \in T_p^*M$ nazywamy kowektorami.

Działanie kowektora na wektor $\omega(v) \in \mathbb{R}$ nazywamy naturalnym parowaniem (lub parą dualną) i oznaczamy poprzez:

$$\langle \omega, v \rangle := \omega(v)$$

Uwaga: Powyższa notacja może być czasami mylona z iloczynem skalarnym. Na tym kursie jednak nie stosujemy iloczynu skalarnego, zatem pozostaniemy przy niej. Powyższa notacja sugeruje intuicyjne traktowanie naturalnego parowania jako odwzorowania dwuliniowego:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : T_p^*M \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$$

Zauważmy również, że w przypadku przestrzeni Hilberta iloczyn skalarny jest naturalną interpretacją pary dualnej², jako że $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}$. Jednak pojęcie pary dualnej jest szersze obejmuje wszystkie przestrzenie z przestrzeniami dualnymi.

Notacja: W przypadku odwzorowań stycznych stosuje się dwie równoważne konwencje notacyjne:

$$d_ph \equiv h_{*,p}$$

²Przy czym zauważyć należy, że bezpośrednią analogią jest iloczyn skalarny w przestrzeniach Hilberta nad ciałem liczb rzeczywistych. Dzieje się tak, ponieważ klasyczny iloczyn skalarny jest definiowany jako liniowy w jednym argumencie, zaś antyliniowy w drugim.

Za niedługo uogólnimy przestrzeń styczną w punkcie do przestrzeni stycznej. Wówczas odwzorowania styczne będą mogły być analizowane w oderwaniu od punktu i zapis staje się jeszcze czytelniejszy:

$$dh \equiv h_*$$

Może zaskakiwać potrzeba wprowadzenie dwóch notacji na ten sam byt. Faktycznie, bardziej naturalnym wydaje się być zapis dh , i w wielu przypadkach go się używa - będziemy go stosować m.in. do określania naturalnej bazy przestrzeni dualnej. Druga notacja h_* ma sens podczas rozważań transformacji przestrzeni kostycznej.

Definicja 3.14. Rozważmy rozmaitości gładkie M , N oraz odwzorowanie gładkie między nimi $h \in \mathcal{C}^\infty(M; N)$. Odwzorowaniem dualnym do $dh \equiv h_*$ nazwiemy odwzorowanie

$$h^* : T_{h(p)}^* N \longrightarrow T_p^* M$$

zadane jako:

$$\langle h_{h(p)}^* \omega, v \rangle := \langle \omega, h_{*,p} v \rangle$$

dla każdego $\omega \in T_{h(p)}^* N$, $v \in T_p M$

Ponownie wybiegając w przyszłość, przy omawianiu przestrzeni stycznej i przestrzeni kostycznej porzucimy punkt (argument) i zapiszemy w bardzo wygodny sposób

$$\boxed{\langle h^* \omega, v \rangle = \langle \omega, h_* v \rangle}$$

Widzimy, że notacja naturalnego parowania staje się bardzo praktyczna i czyni powyższą definicję czytelną.

Uwaga: zauważmy, że odwzorowanie dualne jest definiowane niejako „w drugą stronę”

$$\begin{array}{ccccc} p \in & M & \xrightarrow{h} & N \\ & T_p M & \xrightarrow{h_*} & T_{h(p)} N \\ & T_p^* M & \xleftarrow{h^*} & T_{h(p)}^* N \end{array}$$

Z tego powodu często nazywane jest „cofaniem” kowektora.

W celu przeciwiczenia notacji oraz zaznajomienia się z odwzorowaniami stycznymi i dualnymi, jako zadanie na ćwiczenia dowód poniższego twierdzenia pozostawia się studentom:

Twierdzenie 3.6. Niech $p \in M$, $h \in \mathcal{C}^\infty(M; \cdot)$, $f \in \mathcal{C}^\infty(N; \mathbb{R})$, $\omega \in T_{h(p)}^* N$. Wówczas zachodzi:

$$* (h^* df)_p = d_p (f \circ h)$$

$$* (h^* (f\omega))_p = ((f \circ h) h^* \omega)_p$$

Uwaga: pamiętać należy, że rozważamy kowektory z mnożeniem punktowym przez funkcje jako elementy pierścienia. Oznacza to w praktyce pewną konwencję notacji: rozważamy ogólnie pola wektorowe X i kowektorowe ω , jednak interesuje nas zawsze wynik tego działania, czyli odpowiednio wektor $X(p)$ lub kowektor $\omega(p)$. Zazwyczaj jednak interesują nas ich ogólne własności - nie jako działania tworzącego wektor/kowektor, tylko tych bytów. Dlatego pomijamy argument - w tym sposób oznaczamy, że coś zachodzi dla każdego punktu z osobna. Jednak rozważania powinniśmy prowadzić zazwyczaj w ustalonym dowolnym punkcie.

Zastanówmy się teraz, jaką bazę możemy wybrać w przypadku przestrzeni kostycznej. Jak już zostało wspomniane, w tym przypadku będziemy stosować notację dh . Podobnie, jak w przypadku bazy przestrzeni stycznej, będziemy chcieli wybrać bazę powiązaną z mapą. Rozważmy zatem rozmaitość gładką M , $\dim M = m$ i zadaną na niej mapę $(U\varphi)$, $p \in U \in \tau_M$, $\varphi = (\varphi^j)_{j=1}^m$. Przypomnijmy, że bazą przestrzeni stycznej w punkcie $p \in M$ jest zbiór derywacji:

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right)_p \right\}_{j=1}^m \subset T_p M$$

Bazę przestrzeni dualnej zadamy w bardzo intuicyjny sposób:

$$\left\langle d_p \varphi^i, \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right)_p \right\rangle$$

Zauważymy bowiem, że zgodnie z definicją kowektora (wektora kostycznego):

$$\begin{aligned} \left\langle d_p \varphi^i, \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right)_p \right\rangle &= d_p \varphi^i \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right)_p \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right) \varphi^i \Big|_p \\ &= \delta_j^i \end{aligned}$$

Wnioskujemy zatem, że bazy:

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right)_p \right\}_{j=1}^m \quad \{d_p \varphi^i\}_{i=1}^m$$

są bazami dualnymi.

Związanie bazy z mapą pociąga w konsekwencji zależność reprezentacji kowektora w zależności od wyboru mapy. Zwieńczymy ten rozdział przedstawiając szybko, jak transformować będą się współrzędne kowektorów przy zmianie mapy. Niech zatem zadane będą mapy (U, φ) oraz (V, ψ) . Wówczas

$$T_p^* M \ni \omega = \sum_{j=1}^m \omega_j d_p \varphi^j = \sum_{i=1}^m \omega_i' d_p \psi^i$$

j -tą współrzędną kowektora ω w bazie związanej z mapą (U, φ) możemy policzyć jako:

$$\begin{aligned} \omega_j &= \left\langle \omega, \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right)_p \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^m \omega_i' \cdot d_p \psi^i, \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right)_p \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \omega_i' \left\langle d_p \psi^i, \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right)_p \right\rangle \end{aligned}$$

Znamy jednak reguły transformacji wektorów stycznych i teraz z tego skorzystamy:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right)_p &= \sum_{l=1}^m a^l \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^l} \right)_p = \sum_{k=1}^m b^k \left(\frac{\partial}{\partial \psi^k} \right)_p, \quad a^l = \delta_l^j \\ b^k &= \sum_{l=1}^m a^l \left(\frac{\partial \psi^k}{\partial \varphi^l} \right)_p = \left(\frac{\partial \psi^k}{\partial \varphi^j} \right)_p \end{aligned}$$

Zatem:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right)_p = \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial \psi^k}{\partial \varphi^j} \right)_p \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \psi^k} \right)_p$$

Stąd bezpośrednio:

$$\begin{aligned} \omega_j &= \left\langle \omega, \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right)_p \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^m \omega_i' \cdot d_p \psi^i, \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial \psi^k}{\partial \varphi^j} \right)_p \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \psi^k} \right)_p \right\rangle \\ &= \sum_{i,k=1}^m \omega_i' \cdot \left(\frac{\partial \psi^k}{\partial \varphi^j} \right)_p \cdot \left\langle d_p \psi^i, \left(\frac{\partial}{\partial \psi^k} \right)_p \right\rangle \\ &= \sum_{i,k=1}^m \omega_i' \cdot \left(\frac{\partial \psi^k}{\partial \varphi^j} \right)_p \cdot \delta_i^k \\ &= \sum_{k=1}^m \omega_k' \cdot \left(\frac{\partial \psi^k}{\partial \varphi^j} \right)_p \end{aligned}$$

Zestawmy zatem teraz transformacje zarówno wektorów stycznych, jak i kowektorów. Jeśli zadane są jako:

$$T_p M \ni v = \sum_{i=1}^m v^i \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right)_p = \sum_{j=1}^m v'^j \left(\frac{\partial}{\partial \psi^j} \right)_p$$

$$T_p^* M \ni \omega = \sum_{i=1}^m \omega_i \cdot d_p \varphi^i = \sum_{j=1}^m \omega'_j \cdot d_p \psi^j$$

Wówczas:

$$v^i = \sum_{j=1}^m v'^j \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial \psi^j} \right)_p$$

$$\omega_j = \sum_{k=1}^m \omega'_k \left(\frac{\partial \psi^k}{\partial \varphi^j} \right)_p$$

Jak widzimy, wektory transformują się *kontrawariantnie*, zaś kowektory - *kowariantnie*.

4 Wiązka styczna

Do tej pory zdefiniowaliśmy i badaliśmy przestrzenie styczne w punkcie. Są to zupełnie odizolowane przestrzenie, między którymi (na razie) nie potrafimy przejść. Pracowanie jednak na takich zupełnie osobnych przestrzeniach jest jednak bardzo niewygodne. Z tego powodu chcemy skonstruować jedną, dużą przestrzeń. Będzie to takie sztuczne zespolenie, niemniej intuicyjnie będziemy pracować i myśleć o tym jako o jednej całości.

Definicja 4.1. Wiązką styczną do rozmaitości M nazywamy symę rozłączną przestrzeni stycznych:

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_p M := \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M$$

O punktach, do których przyłączone są przestrzenie styczne, można myśleć jako o indeksach numerujących kolejne „przekroje” wiązki stycznej.

Wszystkie nasze rozważania rozpoczęliśmy od konstruowania topologii i struktury różniczkowej na zbiorach. Wiązka styczna też jest bardzo dużym zbiorem, zatem spróbujmy zadać topologię na TM .

Niech (U, φ) to mapa na M , $p \in U$. Bazą przestrzeni stycznej jest:

$$T_p M \supset \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right) \right\}_{i=1}^m$$

$$T_p M \ni X_p = \sum_{i=1}^m a^i(X_p) \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right)_p$$

oczywiście wiemy, że zachodzi też:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^m \\ T_p M & \xrightarrow{d_p \varphi} & T_p \mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^m \end{array}$$

Zatem:

$$\begin{aligned} d_p \varphi(X_p) &= \sum_{i=1}^m a^i(X_p) \cdot d_p \varphi \left(\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right)_p \right) \\ &= \sum_{i=1}^m a^i(X_p) \vec{e}^i \end{aligned}$$

Gdzie \vec{e}^i to wersor i -tej współrzędnej w \mathbb{R}^m . Stąd:

$$d_p \varphi(X_p) = \begin{bmatrix} a^1(X_p) \\ \vdots \\ a^m(X_p) \end{bmatrix}$$

Wprowadźmy zatem wiązkę styczną do zbioru mapowego:

$$TU := \bigsqcup_{p \in U} T_p U = \bigsqcup_{p \in U} T_p M$$

oraz weźmy parę:

$$\tilde{\varphi} = (\varphi, d\varphi)$$

$$\tilde{\varphi} : TU \longrightarrow \varphi[U] \times \mathbb{R}^m$$

$$\tilde{\varphi} : (p, X_p) \longmapsto (\varphi(p), d_p \varphi(X_p)) = (\varphi^1(p), \dots, \varphi^m(p), a^1(X_p), \dots, a^m(X_p))$$

Ponieważ $\varphi, d\varphi$ są izomorfizmami, w naturalny sposób izomorfizmem jest również $\tilde{\varphi}$:

$$\tilde{\varphi}^{-1}(\vec{x}, \vec{a}) = \left(p(\vec{x}), \sum_{i=1}^m a^i \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right)_{p(\vec{x})} \right)$$

Zadanie topologii na zbiorze to nic innego, jak określenie jakie zbiory będziemy nazywać otwartymi. Dla wiązki stycznej naturalne zbiory powstają poprzez:

Definicja 4.2. $A \subset TU$ jest zbiorem otwartym, wtedy i tylko wtedy gdy $\tilde{\varphi}[A]$ jest otwarty w przestrzeni $\varphi[U] \times \mathbb{R}^m$

Przy czym stosujemy naturalną topologię iloczynu kartezjańskiego.

Izomorfizm, który skonstruowaliśmy powyżej, okazuje się być potrzebną nam mapą

$$TU \simeq \tilde{U} \times \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^{2m}$$

jest dyfeomorficzne ze zbiorem otwartym w \mathbb{R}^{2m} , zatem:

Twierdzenie 4.1. *Jeśli $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ jest atlasem gładkim na rozmaitości M , to $\{(TU_\alpha, \tilde{\varphi}_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ jest atlasem gładkim na TM*

Dowód. Dowód oczywiście później □

Wniosek: Wiązka styczna to rozmaitość gładka, jej wymiar $\dim TM = 2 \cdot \dim M$

Przestrzenie styczne pokazały nam, że w każdym punkcie rozmaitości można „doczepić” do niej przestrzeń liniową. Wiązka styczna jest dowodem na to, że takie przestrzenie mogą „zlać się” w jedną całość. Dobrze byłoby, gdybyśmy mogli powtórzyć te operacje nie ograniczając się wyłącznie do przestrzeni/wiązek stycznych. Okazuje się, że możemy coś takiego przeprowadzić - w ogólności mówimy wówczas o wiązkach wektorowych.

Definicja 4.3. Wiązką wektorową rzędu r nazywamy trójkę: (M, π, E) , gdzie:

M - rozmaitość gładka, zwana bazą wiązki

E - rozmaitość gładka, zwana przestrzenią totalną wiązki

π - odwzorowanie z przestrzeni totalnej w bazę wiązki, zwane rzutowaniem lub projekcją, takie że: $\forall p \in M \quad \pi^{-1}[\{p\}]$ (tzn. włókno wiązki nad punktem E_p) jest przestrzenią liniową nad \mathbb{R} wymiaru r

takie że dla każdego punktu rozmaitości $p \in M$ istnieje zbiór otwarty zawierający ten punkt $p \in U \in \tau_M$ oraz dyfeomorfizm:

$$\phi : \pi^{-1}[U] \longrightarrow U \times \mathbb{R}^r$$

zachowujący włókno:

$$\phi[\pi^{-1}[\{p\}]] = \{p\} \times \mathbb{R}^r$$

oraz taki, że jego obcięcie do włókna: $\phi|_{\pi^{-1}[\{p\}]}$ jest odwzorowaniem liniowym

Parę (ϕ, U) nazywamy lokalną trywializacją wiązki (M, π, E)

Rodzinę $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ nazwiemy pokryciem otwartym trywializującym jeśli

$$\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$$

Przykład 4.1. Niech rozmaitością będzie okrąg: $M = S^1$, wówczas $T_p S^1 \simeq \mathbb{R}$. Możemy „przykleić” zatem proste rzeczywiste do punktów okręgu. Jednak w zależności od sposobu przyklejania, możemy uzyskać np. nieskończony cylinder lub nieskończoną wstęgę Möbiusa

Przykład 4.2. Jeśli $E = TM$, wówczas:

$$\pi(p, X_p) = p \in M$$

Zaś lokalną trywializacją jest układ map.

Sprawdźmy, jak wiązki wektorowe zachowują się przy przejściach między różnymi rozmaitościami:

Weźmy wiązki wektorowe (M, π_E, E) oraz (N, π_F, F) . Mogą mieć one różne rzędy.

Definicja 4.4. Homomorfizmem wiązek nazywamy parę odwzorowań (f, \tilde{f}) , takich że:

* spełniają zależność:

$$\pi_F \circ \tilde{f} = f \circ \pi_E$$

co jest równoważne temu, że następujący diagram komutuje:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\tilde{f}} & F \\ \pi_E \downarrow & & \downarrow \pi_F \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

* odwzorowanie \tilde{f} jest liniowe na każdym włóknie

Uwaga: dla gładkiego odwzorowania h między rozmaitościami M, N z naturalnym rzutowaniem z wiązki stycznej:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{h} & N \\ \pi_{TM} \uparrow & & \uparrow \pi_{TN} \\ TM & \xrightarrow{\tilde{h}} & TN \end{array}$$

oraz odwzorowaniem \tilde{h} zadany:

$$\tilde{h}(p, X_p) := (h(p), dh(X_p))$$

para (h, \tilde{h}) jest homomorfizmem wiązek wektorowych.

5 Pola wektorowe, cz.1.

Wiązki styczne, a w ogólności: wiązki wektorowe, dają nam olbrzymi wybór, jakie wektory moglibyśmy rozpatrywać w każdym punkcie rozmaitości. Z fizycznego punktu widzenia jednak nie interesują nas zazwyczaj wszystkie możliwe wektory styczne - raczej chcielibyśmy patrzeć na określoną ich grupę. Co więcej, bardzo interesujące jest jak powiązane mogą być ze sobą wektory styczne do różnych punktów. Z tego powodu będziemy rozważać funkcje, które każdemu punktowi rozmaitości przyporządkowują dokładnie jeden wektor.

Definicja 5.1. Cięciem wiązki wektorowej (M, π, E) nazywamy odwzorowanie s :

$$s : M \longrightarrow E$$

takie że:

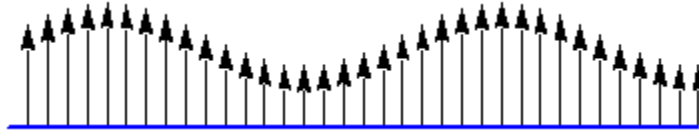
$$\pi \circ s = id_M$$

Gdy s jest gładkie, mówimy o cięciu gładkim

Intuicyjnie, chcemy mieć funkcję która punktowi $p \in M$ przypisuje wektor zaczepiony w tym punkcie. Dla wiązki stycznej, gdzie zaczepienie wektora jest zawarte w jego definicji:

$$\forall p \in M \quad s(p) \in T_p M$$

I takie cięcia nas będą najbardziej interesowały:



Rysunek 7: Abstrakcyjne wyobrażenie pola wektorowego jako wektorów stycznych, „zaczepionych” w punktach rozmaitości, którą jest prosta

Definicja 5.2. Polem wektorowym nazywamy gładkie cięcie wiązki stycznej.

Abstrakcyjnie myślimy o tym jako o przyporządkowaniu wektorów punktom. Bardziej graficznie myślimy o tym, jako całej masie strzałek (wektorów), które zostały do rozmaitości tak przyczepione, aby nie zmieniały się za bardzo, gdy są „blisko” siebie³.

Przykład 5.1. Cięcie zerowe istnieje zawsze, ponieważ w przestrzeni liniowej, jaką jest wiązka, zawsze występuje wektor zerowy. Jest to cięcie trywialne. Nas będą raczej interesowały niezerowe cięcia.

Przykład 5.2. Rozważmy dwuwymiarową przestrzeń rzeczywistą jako rozmaitość:

$$M = \mathbb{R}^2 \quad TM = T\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^4 \ni (x, y; a_x, a_y)$$

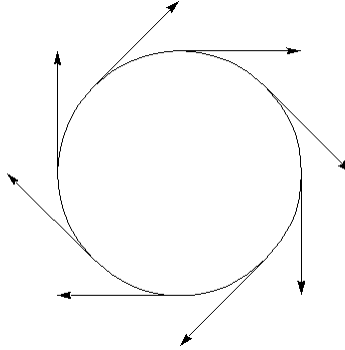
Podczas gdy pola wektorowe zadane będą poprzez:

$$TM \ni X_{(x,y)} = a_x \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) + a_y \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Definicja 5.3. Cięcie wiązki wektorowej (M, π, E) nazywamy nigdzie nieznikającym, gdy

$$\forall p \in M \quad s(p) \neq \vec{0}_{E_p}$$

Przykład 5.3. Na okręgu z wiązką styczną można zadać nigdzie nieznikające pola wektorowe. Jednak już na sferze



Rysunek 8: Potencjalne nigdzie nieznikające pole wektorowe zadane na okręgu

dwuwymiarowej nie da rady tego zrobić - wynika to z niemożliwości „uczesania” sfery. Mówimy zatem, że sfera S^2 nie jest paralelizowalna

Fakt: Niech s, t to gładkie cięcia wiązki wektorowej (M, π, E) , zaś f to gładka funkcja $f \in C^\infty(M; \mathbb{R})$. Wówczas:

* $s + t$ jest gładkim cięciem, przy czym:

$$\forall p \in M \quad (s + t)(p) = s(\vec{p}) + t(\vec{p})$$

³„Blisko” jest pojęciem nieadekwatnym, ponieważ na rozmaitości w założeniu nie mierzymy odległości, jednak warto tak intuicyjnie to rozumieć

* $f \cdot s$ jest gładkim cięciem:

$$(f \cdot s)(p) = f(p) \cdot s(\vec{p})$$

Definicja 5.4. Przez symbol $\Gamma^\infty(E)$ oznaczamy zbiór wszystkich gładkich cięć wiązki (M, π, E)

Wnioski:

- * $\Gamma^\infty(E)$ jest przestrzenią liniową nad \mathbb{R}
- * $\Gamma^\infty(E)$ jest modułem nad pierścieniem funkcji gładkich $\mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{R})$
- * dla $U \in \tau_M$ możemy rozważać jako subwiązkę (podwiązkę), tzn.

$$\left(U, \pi|_U, E_U \right)$$

wówczas $\Gamma^\infty(E_U)$ spełnia poprzednie wnioski

Teraz chcemy poznać dokładniej wiązki wektorowe - podstawą do opisu przestrzeni wektorowych są ich bazy. Podobnie teraz będziemy chcieli skonstruować coś, co będzie uogólniać bazę pojedynczej przestrzeni liniowej.

Definicja 5.5. Gładkim układem współrzędnych w wiązce wektorowej (M, π, E) r -tego rzędu nad zbiorem otwartym U nazywamy układ cięć nad U : s_1, \dots, s_r , takich że

$$\forall p \in U \quad \{s_j(p)\}_{j=1}^r$$

jest bazą włókna $E_p \equiv \pi^{-1}(\{p\})$

Twierdzenie 5.1. Niech (M, π, E) to wiązka wektorowa r -tego rzędu, $U \in \tau_M$ oraz $\{s_j\}_{j=1}^r$ to gładki układ współrzędnych.

Cięcie wiązki $s : M \rightarrow E$

$$s = \sum_{j=1}^r c^j s_j$$

nad U jest gładkie wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie funkcje $c^j : U \rightarrow \mathbb{R}$ są gładkie, tzn. $\forall j \quad c^j \in \mathcal{C}^\infty(U; \mathbb{R})$

Dowód. Później, muszę jeszcze się wyspać □

Od tej pory rozważać będziemy głównie pola wektorowe. Tym bardziej jest zatem istotne zrozumienie, jak można rozumieć ich gładkość.

Twierdzenie 5.2. Pole wektorowe X jest gładkie na rozmaitości M wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej funkcji gładkiej $f \in \mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{R})$ gładka jest również funkcja będąca wynikiem działania X na f

$$X \in \Gamma^\infty(TM) \iff \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{R}) \quad Xf \in \mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{R})$$

Dowód.

\implies : Niech $X \in \Gamma^\infty(TM)$ oraz $f \in \mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{R})$. Weźmy mapę (U, φ) w otoczeniu punktu $p \in M, p \in U$. Wówczas:

$$\begin{aligned} Xf &= \left(\sum_{j=1}^m a^j \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right) \right) f \\ &= \sum_{j=1}^m a^j \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right) f \end{aligned}$$

Wiemy również, że zachodzi:

$$f \in \mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{R}) \implies \forall j \in \{1, \dots, m\} \quad \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right) f \in \mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{R})$$

Z założenia o gładkości pola funkcje a^j również są gładkie. Zatem wynikiem działania pola na funkcję gładką jest skończona suma iloczynów funkcji gładkich - a tym samym funkcja gładka

⇐ Ponownie weźmy mapę (U, φ) w otoczeniu punktu $p \in M, p \in U$. Ponieważ pracujemy na rozmaitości gładkiej, zatem $\forall j \in \{1, \dots, m\} \quad \varphi^j \in C^\infty(M; \mathbb{R})$. Chcemy teraz zmodyfikować te funkcje mapowe, tak aby pozostały gładkie, ale aby pokrywały całą rozmaitość. Weźmy zatem zbiór otwarty $V \subset U, V \in \tau_M$. Wprowadzamy nowe funkcje, tak aby:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}^j|_V &= \varphi^j \\ \tilde{\varphi}^j|_{U^c} &= 0\end{aligned}$$

Zaś na obrzeżu $U \setminus V$ gładko przechodziła pomiędzy tymi funkcjami. Zachodzi wówczas:

$$\begin{aligned}X_p \tilde{\varphi}^j &= \left(\sum_{k=1}^m a^k(p) \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^k} \right)_p \right) \tilde{\varphi}^j \\ &= \sum_{k=1}^m a^k(p) \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^k} \right)_p \tilde{\varphi}^j \\ &= \sum_{k=1}^m a^k(p) \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^k} \right)_p \varphi^j \\ &= \sum_{k=1}^m a^k(p) \delta_k^j \\ &= a^j(p)\end{aligned}$$

Ponieważ rozważania są przeprowadzone dla dowolnego j , zatem z założenia $Xf \in C^\infty(M; \mathbb{R})$ wynika, że współrzędne pola wektorowego są gładkie - a tym samym gładkie jest pole wektorowe

□

Krzywe całkowe - wprowadźmy pewną intuicję: wyobraźmy sobie sferę dwuwymiarową, zanurzoną w trójwymiarowej przestrzeni rzeczywistej. Jeśli narysujemy na niej krzywą, możemy w trójwymiarze poprzyczepiać do niej wektory, które będą wskazywały kierunek tej krzywej. Wektory te prowadzą krzywą, cały czas jednak są wektorami stycznymi do sfery. Jak już wiemy, takie rozumowanie nie na wiele się zdaje w przypadku rozmaitości - chociaż w przypadku zanurzeń wyobrażamy sobie wektory funkcjonujące w połączeniu ze sferą, jednak wektory styczne do rozmaitości funkcjonują w zupełnie innej przestrzeni. Chcemy zatem zdefiniować jakoś krzywe powiązane z wektorami stycznymi - konkretnie, będą one powiązane z polami wektorowymi.

Definicja 5.6. Niech M - rozmaitość gładka, $p \in M$, zaś X - gładkie pole na tej rozmaitości. Krzywą całkową pola X przechodzącą przez p nazwiemy:

$$\gamma : (a, b) \longrightarrow M$$

taką że:

$$a < 0 < b \tag{1}$$

$$\gamma(0) = p \tag{2}$$

$$\gamma'(t) = X_{\gamma(t)} \tag{3}$$

Krzywą nazwiemy maksymalną, gdy nie można jej rozszerzyć na większy przedział.

Przykład 5.4. Poniższy przykład będzie wielokrotnie powtarzany, jako że jest prosty, a przy tym intuicyjny i dobrze obrazuje zagadnienia. Niech naszą rozmaitością będzie dwuwymiarowa przestrzeń rzeczywista, $M = \mathbb{R}^2$. Korzystając z macierzowej reprezentacji punktów przestrzeni zapiszemy:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Omawianym polem wektorowych niech będzie

$$X \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

Krzywą całkową tego pola przedstawiamy jako:

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad \gamma(0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

Z definicji krzywej całkowej zachodzi

$$\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}$$

Zatem, ponieważ pochodną wektora bierzemy po składowych, otrzymujemy układ dwóch równań różniczkowych:

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(t) \\ x(t) \end{bmatrix}$$

Widzimy zatem, że znalezienie krzywej całkowej dla zadanego pola sprowadza się w tym przypadku do rozwiązania zagadnienia różniczkowego. Ogólnym rozwiązaniem powyższego zagadnienia jest:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{bmatrix}$$

Zatem korzystając z warunków brzegowych otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

Oczywiście tak zadana krzywa jest okręgiem o środku w centrum układu współrzędnych.

Jak widzieliśmy w powyższym przykładzie, krzywa zależy od wyboru punktu początkowego - w zależności od wybranego punktu otrzymalibyśmy (w ogólności) różne okręgi. Chcielibyśmy zobaczyć zatem, jak powiązane są krzywe o różnych, lecz bliskich punktach zaczepienia. Takie rozważania doprowadzą nas do zdefiniowania potoków lokalnych - uogólnienia krzywej na funkcję dwóch argumentów, czasu i punktu zaczepienia. O potokach można myśleć jako o zbiorze krzywych całkowych konkretnego pola wektorowego, które podobnie zależą od czasu, ale są zaczepione w nieznacznie różnych punktach.

Definicja 5.7. Homeomorfizm $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \text{Diff}(M)$ nazywamy jednoparametrową grupą dyfeomorfizmów na rozmaitości M .

Twierdzenie 5.3. *Krzywe całkowite pochodzące od gładkiego pola wektorowego są gładkie.*

Dowód. Rozważmy rozmaitość M , $\dim M = m$ oraz gładkie pole wektorowe X . Niech γ to krzywa całkowita pola X . Wybierzmy mapę (U, φ) , $\varphi = (\varphi^k)_{k=1}^m$. Realizacją krzywej całkowej w mapie jest

$$\varphi \circ \gamma(t) = (\varphi^k \circ \gamma(t))_{k=1}^m =: (\gamma^k(t))_{k=1}^m$$

Gładkie pole wektorowe X przedstawiamy w bazie pochodzącej od mapy:

$$X = \sum_{k=1}^m a^k(p) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^k} \right)_p$$

gdzie $a^k \in C^\infty(M; \mathbb{R})$ Wówczas:

$$\gamma'(t) = \sum_{k=1}^m (\gamma^k)'(t) \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^k} \right)_{\gamma(t)}$$

Wiadomo, że:

$$X_{\gamma(t)} = \gamma'(t)$$

Z tego wynika, że dla każdego $k \in \{1, \dots, m\}$ zachodzi:

$$(\gamma^k)'(t) = a^k(\gamma(t))$$

Zaś a^k są gładkie

□

W przypadku takich zagadnień, przyda nam się twierdzenie pochodzące z teorii równań różniczkowych, mówiące o jednoznaczności rozwiązań. Twierdzenie to zostanie przedstawione tutaj bez dowodu. Studentów odsyła się do kursu i odpowiedniej literatury.

Twierdzenie 5.4. Niech $V \subseteq \mathbb{R}^m$ będzie otwartym podzbiorem zawierającym punkt $\vec{q} \in V$. Niech zadana będzie funkcja gładka $f \in C^\infty(V; \mathbb{R}^m)$. Wówczas równanie różniczkowe wraz z warunkami brzegowymi:

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = f(\vec{y}), \quad \vec{y}(0) = \vec{q}$$

ma jednoznaczne rozwiązanie:

$$\vec{y}: (a(\vec{q}), b(\vec{q})) \longrightarrow V$$

gdzie przedział $(a(\vec{q}), b(\vec{q}))$ jest maksymalnym przedziałem zawierającym 0

Jednoznaczność rozumiana jest jako:

Jeśli istnieje przedział $(\epsilon_1, \epsilon_2) \subset (a(\vec{q}), b(\vec{q}))$ oraz funkcja $\vec{z}: (\epsilon_1, \epsilon_2) \longrightarrow V$ spełniająca:

$$\frac{d\vec{z}}{dt} = f(\vec{z}), \quad \vec{z}(0) = \vec{q}$$

wówczas zachodzi:

$$\vec{z} = \vec{y} \Big|_{(\epsilon_1, \epsilon_2)}$$

Przechodzimy teraz do definiowania potoków lokalnych. Możemy je rozważać same, jednak najczęściej interesować nas będą potoki związane bezpośrednio z polami wektorowymi.

Definicja 5.8. Potokiem lokalnym na rozmaitości M wokół punktu $p \in U \in \tau_M$ nazywamy gładką funkcję, która dla pewnego $\epsilon > 0$ oraz otwartego $W \subseteq U$:

$$F: (-\epsilon, \epsilon) \times W \longrightarrow U$$

taką że:

$$* \quad \forall q \in W \quad F_0(q) = q$$

$$* \quad F_t(F_s(q)) = F_{t+s}(q), \text{ o ile obie strony mają sens}$$

przy czym w indeksie dolnym piszemy argument rzeczywisty, o którym myślimy najczęściej jako o czasie.

Definicja 5.9. Potok lokalny nazywamy potokiem lokalnym pola wektorowego X (i oznaczamy $F_t^X(q)$), gdy zachodzi

$$\left. \frac{\partial F_t^X(q)}{\partial t} \right|_{t=0} = X_{F_0(t)} = X_q$$

Definicja 5.10. Jeśli potok lokalny ma dziedzinę czasową równą całej osi rzeczywistej, tzn. zadany jest:

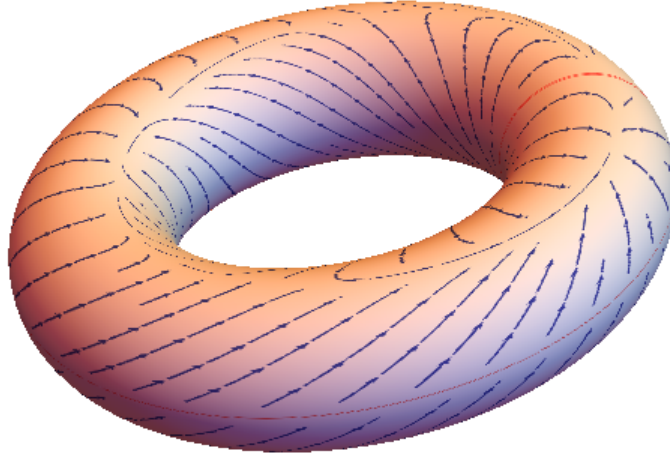
$$F: (-\infty, \infty) \times X \longrightarrow U$$

wówczas nazywamy go potokiem maksymalnym

Potoki są bardzo wygodnym narzędziem, które charakteryzuje w pewien sposób pola wektorowe.

Definicja 5.11. Pole wektorowe posiadające potok globalny nazywamy polem zupełnym.

Jak sama nazwa wskazuje, o potoku pola wektorowego można myśleć jak o nurcie rzeki - wpadając w pewnym początkowym punkcie, jesteśmy niesieni z prądem do kolejnych punktów. Pojedynczy punkt, w miarę upływu czasu zakreśli zakreśli krzywą całkową, lecz jeśli wrzucimy do potoku garść pyłu, każde ziarenko będzie podróżowało inaczej. W zależności od miejsca początkowego możemy wylądować w różnych punktach, jednak zaczynając stosunkowo blisko, przez pewien czas podróżujemy razem.



Rysunek 9: Graficzna wizualizacja potoków pola wektorowego, zadanego na torusie. Strzałki pochodzą niejako z pola wektorowego - jako wektory styczne wskazują ścieżki. Gdy patrzymy na wszystkie ścieżki, widzimy potok - gdy tylko na jedną, na pojedynczy ciąg strzałek, widzimy krzywą całkową pola wektorowego.

Przykład 5.5. Ponownie rozważmy przykład pola na dwuwymiarowej przestrzeni rzeczywistej:

$$M = \mathbb{R}^2$$

$$X \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

Wówczas potokiem tego pola nazywamy

$$F : (-\infty, \infty) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$F : \left(t, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) \mapsto \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} = X \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Widzimy, że jest to pole zupełne.

6 Algebra Liego

Algebra Liego jest zagadnieniem szerokim, które znalazło zastosowanie w wielu dziedzinach matematyki i fizyki. W wielu sytuacjach, na uprzednich kursach fizyczno-matematycznych, już się z nią spotkaliśmy, nie była jednak ona wyraźnie nazwana. Na krótko przed jej zdefiniowaniem obejrzymy pewien przykład, który uzmysłowi nam, dlaczego w ogóle pojawia się ona podczas naszych rozważań na temat różniczkowalności. Dotyczyć on będzie nakładania kolejno pól wektorowych.

Do tej pory zrozumieliśmy już, że chociaż pole definiowane jest jako odwzorowanie

$$X : M \longrightarrow TM$$

to najczęściej interesuje nas już sam wynik (wektor) w działaniu na określonej funkcji (jako derywacja). Formalnie zapiszemy to jako:

$$\forall p \in M \quad X_p : \mathcal{C}^\infty(U) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(U)$$

$$X_p : f(p) \mapsto (X_p f)(p)$$

Jednak powyższe zależności obowiązują, jak już zaznaczono, dla każdego punktu rozmaitości, zatem dla uogólnienia zapisu w rozważaniach pomija się argument, pisząc:

$$X : \mathcal{C}^\infty(U) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(U)$$

i rozumiejąc go jak wyżej.

Przykład 6.1. Rozważmy rozmaitość M oraz jej podzbiór, $U \in \tau_M$. Niech zadane będą dwa pola wektorowe $X, Y \in \Gamma^\infty(U)$. Ze względu na charakter pól jako derywacji, potrzebujemy również testowej funkcji, zatem niech $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Wiemy, że:

$$\begin{aligned} Xf &\in \mathcal{C}^\infty(U) \\ Yf &\in \mathcal{C}^\infty(U) \end{aligned}$$

Zatem zachodzi też

$$XYf \in \mathcal{C}^\infty(U)$$

Czy jednak XY jest derywacją? Liniowość jest oczywista, co jednak z regułą Leibniza?

$$\begin{aligned} XY(fg) &= X(Y(fg)) = X(Y(f) \cdot g + f \cdot Y(g)) \\ &= XY(f) \cdot g + Y(f) \cdot X(g) + X(f) \cdot Y(g) + f \cdot XY(g) \end{aligned}$$

Widzimy zatem, że XY nie jest derywacją liniową, ponieważ w powyższym rozwinięciu występują człony mieszane. Są one jednak symetryczne na zamianę $XY \leftrightarrow YX$.

Definicja 6.1. Nawiasem Liego (komutatorem) pól wektorowych $X, Y \in \Gamma^\infty(U)$ nazywamy działanie zadane dla każdej funkcji gładkiej f i każdego punktu $p \in U$ postaci:

$$[X, Y]_p f(p) = (X_p Y_p - Y_p X_p) f(p)$$

Zauważmy, że komutator definiuje się jako działanie na funkcję, jednak z dowolności wyboru funkcji kluczowej dla nas jest sam komutator. Podobnie, komutator definiowany jest punktowo, jednak dla dowolnego punktu ze zbioru U .

Twierdzenie 6.1. Niech (U, φ) to mapa na rozmaitości M , $\dim M = m$, $X, Y \in \Gamma^\infty(U)$. Pola wektorowe przedstawiają się jako

$$X = \sum_{k=1}^m X^k \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^k} \right) \quad Y = \sum_{j=1}^m Y^j \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right)$$

gdzie $X^k, Y^j \in \mathcal{C}^\infty(U; \mathbb{R})$

Wówczas komutator ma postać:

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^m (XY^i - YX^i) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right)$$

Dowód. Dowód twierdzenia pozostawiony jest jako zadanie na ćwiczenia □

Tak zdefiniowany komutator ma wiele własności.

Fakt: Niech $X, Y, Z \in \Gamma^\infty(U)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Wówczas zachodzi:

- * $[X, Y] \in \Gamma^\infty$, zatem jest derywacją liniową
- * $[X, Y] = -[Y, X]$
- * komutator spełnia tożsamość Jacobiego, tzn.:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

- * komutator jest \mathbb{R} -liniowy w pierwszym argumentcie:

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$$

Zauważmy że antysymetryczność i liniowość w pierwszym argumencie implikują również liniowość w drugim argumencie.

Powyższe własności uogólnia się na działanie dwuargumentowe, które definiuje algebrę Liego.

Definicja 6.2. Niech zadana będzie przestrzeń wektorowa \mathbb{V} z działaniem dwuargumentowym:

$$[\cdot, \cdot] : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$$

takim że działanie to:

- * jest liniowe w pierwszym argumencie
- * jest antysymetryczne
- * spełnia tożsamość Jacobiego

Wówczas dwójkę $(\mathbb{V}, [\cdot, \cdot])$ nazywamy algebrą Liego.

Przykład 6.2. Przykładowe algebry Liego:

- * macierze rzeczywiste wymiaru $n \times n$ ze standardowym komutatorem
- * macierze zespolone wymiaru $n \times n$ ze standardowym komutatorem
- * iloczyn wektorowy wektorów w \mathbb{R}^3

W algebrze Liego można zdefiniować kolejne działanie, określane derywacją.

Definicja 6.3. Derywacją algebry Liego $(\mathbb{V}, [\cdot, \cdot])$ nazywamy działanie

$$D : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$$

takie że $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{V}$ zachodzi

$$D[\alpha, \beta] = [D\alpha, \beta] + [\alpha, D\beta]$$

Przykładową derywacją algebry Liego jest tzw. odwzorowanie dołączone. Warto mieć je na uwadze w przyszłości:

Przykład 6.3. Dla algebry Liego $(\mathbb{V}, [\cdot, \cdot])$ ustalmy $X \in \mathbb{V}$. Odwzorowaniem dołączonym ad_X nazwiemy odwzorowanie postaci

$$ad_X := [X, \cdot]$$

Istotnie, takie odwzorowanie jest derywacją algebry Liego. Wybierzmy dowolne $X, Y \in \mathbb{V}$. Wówczas

$$\begin{aligned} ad_X[Y, Z] &= [X, [Y, Z]] \stackrel{J}{=} \\ &\stackrel{J}{=} -[Z, [X, Y]] - [Y, [Z, X]] \\ &= [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]] \\ &= [ad_X Y, Z] + [Y, ad_X Z] \end{aligned}$$

przy czym w momencie $\stackrel{J}{=}$ skorzystaliśmy z tożsamości Jacobiego.

Komutator jest bardzo przydatnym narzędziem, względnie łatwym do obliczeń i zastosowań. Jednak formalna definicja niewiele mówi nam o jego znaczeniu, ani czym tak naprawdę jest. Na szczęście, w przypadku pól wektorowych na rozmaitościach możemy nadać komutatorowi pewnej intuicyjnej interpretacji, dzięki jego powiązaniu z pochodnymi Liego. Aby jednak do tego dojść, musimy wrócić do pól wektorowych

7 Pola wektorowe, cz.2.

Często rozważamy rozmaitości, pomiędzy którymi umiemy przechodzić dzięki funkcjom. Podobne przejścia chcielibyśmy realizować również na polach wektorowych. W tym krótkim rozdziale omówimy powiązanie pól, czyli operację/własność, która umożliwia właśnie niejako przenoszenie pól między rozmaitościami.

Definicja 7.1. Niech zadana będzie funkcja gładka między rozmaitościami M i N , $h \in \mathcal{C}^\infty(M; N)$, oraz pola wektorowe $X \in \Gamma^\infty(TM)$, $Y \in \Gamma^\infty(N)$. Pole wektorowe X nazwiemy h -powiązanym z polem Y , gdy dla dowolnego punktu $p \in M$ zachodzi

$$d_p h(X) = Y_{h(p)}$$

Fakt: Pole wektorowe X na M jest h -powiązane z Y na N wtedy, i tylko wtedy gdy $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(N; \mathbb{R})$ zachodzi

$$X(f \circ h) = (Yf) \circ h$$

Dowód. Niech $f \in \mathcal{C}^\infty(N; \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} d_p h(X) f &= Y_{h(p)} f \\ &\Downarrow \\ X_p(f \circ h) &= (Yf)_{h(p)} \\ &\Downarrow \\ (X(f \circ h))(p) &= (Yf \circ h)(p) \\ &\Downarrow \\ X(f \circ h) &= Yf \circ h \end{aligned}$$

□

Twierdzenie 7.1. Niech zadana będzie funkcja gładka $h \in \mathcal{C}^\infty(M; N)$.

Niech pola wektorowe $X, Y \in \Gamma^\infty(TM)$ będą h -powiązane odpowiednio z polami $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \Gamma^\infty(N)$. Wówczas komutator $[X, Y]$ jest h -powiązany z komutatorem $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$, tzn.:

$$d_p h[X, Y]_p = [\tilde{X}, \tilde{Y}]_{h(p)}$$

Dowód. Niech $f \in \mathcal{C}^\infty(N; \mathbb{R})$. Wówczas

$$\begin{aligned} XY(f \circ h) &= X(Y(f \circ h)) = X((\tilde{Y}f) \circ h) \\ &= (\tilde{X}(\tilde{Y}f)) \circ h \\ &= (\tilde{X}\tilde{Y}f) \circ h \end{aligned}$$

Tak samo spełnione jest

$$YX(f \circ h) = (\tilde{Y}\tilde{X}f) \circ h$$

Zatem

$$\begin{aligned} [X, Y](f \circ h) &= (XY - YX)(f \circ h) \\ &= (XY)(f \circ h) - (YX)(f \circ h) \\ &= (\tilde{X}\tilde{Y}f) \circ h - (\tilde{Y}\tilde{X}f) \circ h \\ &= (\tilde{X}\tilde{Y}f - \tilde{Y}\tilde{X}f) \circ h \\ &= ((\tilde{X}\tilde{Y} - \tilde{Y}\tilde{X})f) \circ h \\ &= ([\tilde{X}, \tilde{Y}]f) \circ h \end{aligned}$$

□

Twierdzenie 7.2. Niech funkcja h będzie dyfeomorfizmem pomiędzy dwoma rozmaitościami, $h \in \text{Diff}(M; N)$. Wówczas dla każdego gładkiego pola wektorowego na M istnieje dokładnie jedno h -powiązane z nim pole wektorowe na N .

$$h \in \text{Diff}(M; N) \implies \forall X \in \Gamma^\infty(TM) \exists! Y \in \Gamma^\infty(TN) : dh(X) = Y$$

Dowód. Twierdzenie wynika bezpośrednio z własności dyfeomorfizmu h , jako że:

$$Y_q = d_{h^{-1}(q)}h(X) \equiv (h_*X)_{h^{-1}(q)}$$

Co w praktyce oznacza, że poniższy diagram komutuje:

$$\begin{array}{ccc} & h & \\ M & \xleftarrow{\quad} & N \\ & \xrightarrow{\quad} & \\ & h^{-1} & \\ X \downarrow & & \downarrow h_*X = Y \\ & h_* & \\ TM & \xleftarrow{\quad} & TN \\ & \xrightarrow{\quad} & \\ & h_*^{-1} & \end{array}$$

□

8 Pochodne na rozmaitościach

Do tej pory nasze rozważania skupione były na rozmaitości oraz przestrzeniach stycznych do niej. Wygodnym było przy tym wykorzystanie pewnych intuicji związanych z pochodnymi, wiążącymi się z wektorami stycznymi. Jednak formalnie nie wprowadziliśmy struktur różniczkowych - można przypuszczać, że będziemy je konstruować nie tylko dla funkcji, ponieważ dla nich formalizm derywacji był w pełni wystarczający. Postaramy się teraz wprowadzić ogólniejsze pojęcie pochodnej - będą one związane z polami wektorowymi, omawianymi we wcześniejszych rozdziałach. Wprowadzane w tym rozdziale pochodne traktować można analogicznie do pochodnych kierunkowych w przestrzeni \mathbb{R}^n .

Przypomnijmy, że pochodna w klasycznym rozumieniu, określona dla funkcji $f \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, zadana jest jako iloraz różniczkowy:

$$\frac{df}{dt}(t) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

Chcielibyśmy zastosować podobną metodą - jednak na rozmaitości nie mamy zadanego działania dodawania. Należy znaleźć inny sposób, aby w kontrolowany sposób przesunąć się z punktu p do innego, znajdującego się w jego otoczeniu punktu q . Znamy już narzędzie, które może temu służyć - są to potoki lokalne pól wektorowych. Przy niewielkich zmianach parametru przesuwać one bowiem punkty. Będziemy chcieli zatem liczyć pochodne z funkcji, jak również z pól wektorowych. W przyszłości, w rozdziale poświęconym formom różniczkowym, wprowadzona zostanie dodatkowo pochodna pola kowektorowego (na tym kursie jej znaczenie jest mniejsze, wzmiankowana jest jedynie na potrzeby ćwiczeń - aby studenci nabrali praktyki).

Definicja 8.1. Niech M - rozmaitość gładka, X - gładkie pole wektorowe, zadające potok F^X , f - gładka funkcja. Pochodną Liego funkcji f wzdłuż pola wektorowego X w punkcie $p \in M$ nazywamy:

$$(\mathcal{L}_X f)_p := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(F_t^X(p)) - f(p)}{t}$$

Oczywiście, podobnie jak w przypadku klasycznych pochodnych, formalna definicja nie jest szczególnie przydatna w przypadku liczenia pochodnych.

Twierdzenie 8.1. Niech X - gładkie pole wektorowe na rozmaitości M , f - funkcja gładka na M . Wówczas zachodzi:

$$\mathcal{L}_X f = Xf$$

Powyższe twierdzenie nie powinno nas szczególnie dziwić - to właśnie pole wektorowe dyktuje potokowi (a tym samym - pochodnej) jak bardzo „odległe” są kolejne punkty. Podróżując z potokiem, podążamy za wektorami pola. W celu głębszego zrozumienia zagadnienia, dowód twierdzenia pozostawia się studentowi.

Niestety, podobna intuicja nie umożliwia wprowadzenia definicji pochodnej pola wektorowego Y wzdłuż pola X . Dzieje się tak, ponieważ formalnie skonstruowana wiązka styczna do rozmiatości jest tak naprawdę zbiorem zupełnie odizolowanych, różnych przestrzeni - przestrzeni stycznych w punktach. Nie jesteśmy w stanie porównać obiektów znajdujących się w różnych przestrzeniach.

$$Y_a \in T_a M \quad Y_b \in T_b M$$

Rozwiązaniem tego problemu jest przejście przez rozmiatość. Będziemy chcieli zatem:

- * wyjść z naszego początkowego punktu p
- * przejść kawałek wzdłuż potoku, aż do punktu $F_t^X(p)$
- * wejść do przestrzeni stycznej, zobaczyć jak wygląda tutaj pole Y , zapamiętać je
- * wrócić do rozmiatości i cofnąć się wzdłuż potoku, wracając do punktu p
- * wejść do przestrzeni stycznej w punkcie p , odwzorować zapamiętany wektor i wtedy dopiero porównać go z polem Y_p

Procedurę powtarzamy dla coraz krótszych odcinków. Formalny zapis powyższego wyobrażenia przedstawia poniższa definicja.

Definicja 8.2. Niech M - rozmiatość gładka, X - gładkie pole wektorowe zadające potok F^X , Y - gładkie pole wektorowe (którego zmiany chcemy zmierzyć). Pochodną Liego pola wektorowego Y wzdłuż pola wektorowego X nazywamy:

$$(\mathcal{L}_X Y)_p := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(F_{-t}^X)_* Y_{F_t^X(p)} - Y_p}{t}$$

Pochodna pola wektorowego wzdłuż innego pola mówi nam, jak bardzo jedno zmienia się względem drugiego.

Podobnie jak w przypadku pochodnej Liego z funkcji, tutaj też definicja formalna nie jest przydatna podczas częstych obliczeń (w tym przypadku może być nawet mniej zrozumiała).

Twierdzenie 8.2. Niech X, Y to gładkie pola wektorowe na M . Wówczas:

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$$

Twierdzenie to nadaje całkowicie abstrakcyjnemu komutatorowi pewien sens praktyczny.

Dowód. Na początku chciałem zaznaczyć, że wykorzystane w dowodzie rozwinięcie w szereg budzi pewien niepokój, ponieważ choć wydaje się logiczne, nie stosowaliśmy tego wcześniej. Przydałaby się wcześniej jakaś wzmianka o zbieżnościach na rozmiatościach, dowód rozwinięcia w szereg?

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X Y)_p f &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (dF_{-t}^X Y_{F_t^X(p)} - Y_p) f \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (dF_{-t}^X Y_{F_t^X(p)} f - Y_p f) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y_{F_t^X(p)} (f \circ F_{-t}^X) - Y_p f) \\ &\stackrel{\clubsuit}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y_{F_t^X(p)} f - t \cdot Y_{F_t^X(p)} X f + O(t^2) f - Y_p f) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y_{F_t^X(p)} f - Y_p f) + \lim_{t \rightarrow 0} O(t) f - \lim_{t \rightarrow 0} Y_{F_t^X(p)} X f \\ &\stackrel{\clubsuit}{=} (\mathcal{L}_X (Y f))_p + 0 - Y_p X f \\ &\stackrel{\clubsuit}{=} X_p Y f - Y_p X f \\ &= [X, Y]_p f \end{aligned}$$

Przy czym:

♠ -skorzystaliśmy z rozwinięcia funkcji w szereg względem $(-t)$ w otoczeniu zera:

$$f \circ F_t^X = f + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \cdot X^k f$$

♣ - wykorzystaliśmy definicję pochodnej Liego funkcji, traktując $Y_{F_t^X(p)}f$ jako funkcję wyjściową

♦ - wykorzystaliśmy twierdzenie o interpretacji pochodnej Liego funkcji rzeczywistej

□

Fakt: Z powyższego twierdzenia nasuwają się pewne wnioski:

Dla gładkich pól wektorowych $X, Y \in \Gamma^\infty(TM)$ zachodzi:

$$\ast \mathcal{L}_X Y \in \Gamma^\infty(TM)$$

$$\ast \mathcal{L}_Y X = -\mathcal{L}_X Y$$

$$\ast \text{ dla } h \in Diff(M; M) \text{ zachodzi}$$

$$h_*(\mathcal{L}_X Y) = \mathcal{L}_{h_* X} (h_* Y)$$

Dodajmy jeszcze jedno twierdzenie, udowodnienie którego pozostawimy studentowi jako ćwiczenie:

Twierdzenie 8.3. Niech $X, Y \in \Gamma^\infty(TM)$. Wówczas:

$$\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X = \mathcal{L}_{[X, Y]}$$

W dalszej części rozdziału będziemy dociekać, jakie wnioskowania można prowadzić na podstawie pochodnych pól wektorowych.

Definicja 8.3. Jeśli dla pól wektorowych X, Y zachodzi:

$$\forall f \in C^\infty(M; \mathbb{R}) \quad [X, Y]f = 0$$

wówczas mówimy, że X i Y komutują i piszemy $[X, Y] = 0$

Przykład 8.1. Pola wektorowe zadane poprzez współrzędne mapy (U, φ) , tzn. pola postaci:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi^i}, \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right\}$$

komutują.

Definicja 8.4. Niech zadane będzie pole wektorowe $X \in \Gamma^\infty(TM)$ generujące potok F^X .

Pole wektorowe $Y \in \Gamma^\infty(TM)$ nazywamy niezmienniczym względem potoku pola X , gdy

$$(F_t^X)_* Y_p = Y_{F_t^X(p)}$$

dla każdego (t, p) należących do dziedziny potoku.

Twierdzenie 8.4. Niech dana będzie funkcja $h \in C^\infty(M; N)$ oraz pola wektorowe $X \in \Gamma^\infty(TM)$, $Y \in \Gamma^\infty(TN)$, generujące potoki odpowiednio F^X , F^Y .

Pola X, Y są h -powiązane, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu (t, p) dziedziny potoku F^X zachodzi:

$$F_t^Y \circ h = h \circ F_t^X$$

Równoważnie, gdy poniższy diagram komutuje:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{h} & N \\ F_t^X \downarrow & & \downarrow F_t^Y \\ M & \xrightarrow{h} & N \end{array}$$

Dowód.

\implies

Rozważmy krzywą $\gamma : (a, b) \rightarrow N$ zadaną jako:

$$\gamma(t) = h(F_t^X(p))$$

Rozważmy wektory styczne do tej krzywej:

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (h \circ F^X(p))'(t) \\ &\stackrel{\clubsuit}{=} h_* (F^X(p))'(t) \\ &\stackrel{\spadesuit}{=} h_* X_{F_t^X(p)} \\ &\stackrel{\blacklozenge}{=} Y_{h(F_t^X(p))} \\ &= Y_{\gamma(t)}\end{aligned}$$

Gdzie:

\clubsuit - wykorzystaliśmy definicję odwzorowania stycznego do wektora zadanego przez krzywą:

$$h_*[\gamma] \equiv dh[\gamma] := [h \circ \gamma]$$

\spadesuit - korzystamy z własności potoku pola wektorowego

\blacklozenge - wykorzystaliśmy h -powiązanie pól X oraz Y

Oznacza to, że γ jest krzywą całkową pola Y , co dowodzi tezy

\impliedby

Przeprowadzamy bardzo analogicznie:

$$\begin{aligned}h_* X_p &= h_* \left((F^X(p))'(0) \right) \\ &= (h \circ F^X(p))'(0) \\ &\stackrel{\blacklozenge}{=} (F^Y \circ h(p))'(0) \\ &= (F^Y(h(p)))'(0) \\ &= Y_{h(p)}\end{aligned}$$

Gdzie w momencie \blacklozenge wykorzystujemy założenie dotyczące potoków □

Warto teraz zobaczyć, jak powyższe twierdzenia i definicje łączą się ze sobą.

Twierdzenie 8.5. Niech $X, Y \in \Gamma^\infty(TM)$ to pola wektorowe generujące odpowiednio potoki F^X, F^Y . Wówczas poniższe stwierdzenia są równoważne:

$$* [X, Y] = 0$$

$$\clubsuit \mathcal{L}_X Y = 0$$

\clubsuit pole X jest niezmiennicze względem potoku F^Y

$$\circledast F_t^X \circ F_s^Y = F_s^Y \circ F_t^X$$

Oczywiście powyższe warunki są symetryczne.

Dowód.

$* \iff \clubsuit$ wynika bezpośrednio z twierdzenia o interpretacji pochodnej Liego pola wektorowego

$\clubsuit \implies \spadesuit$: Niech

$$\tilde{Y}(t) = (F_{-t}^Y)_* X_{F_t^Y(p)}$$

Wówczas $\tilde{Y}(0) = X_p$. Przedstawmy $t = t_0 + s$

$$\begin{aligned} \tilde{Y}'(t_0) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \left\{ (F_{-t}^Y)_* X_{F_t^Y(p)} \right\} \\ &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \left\{ (F_{-t_0-s}^Y)_* X_{F_{t_0+s}^Y(p)} \right\} \\ &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \left\{ (F_{-t_0}^Y)_* (F_{-s}^Y)_* X_{F_{t_0}^Y(F_s^Y(p))} \right\} \\ &= (F_{-t_0}^Y)_* \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \left\{ (F_{-s}^Y)_* X_{F_s^Y(F_{t_0}^Y(p))} \right\} \\ &= (F_{-t_0}^Y)_* (\mathcal{L}_Y X)_{F_{t_0}^Y(p)} \\ &= (F_{-t_0}^Y)_* 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

zatem badane pole nie ewoluje w czasie.

$\spadesuit \implies \clubsuit$: Ponieważ

$$(F_t^Y)_* X_p = X_{F_t^Y(p)}$$

zatem:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_Y X)_p &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left((F_{-t}^Y)_* X_{F_t^Y(p)} - X_p \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(X_{F_{-t}^Y \circ F_t^Y(p)} - X_p \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(X_{id(p)} - X_p \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(X_p - X_p \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\spadesuit \iff \clubsuit$ wynika z faktu, że pola te są powiązane poprzez wzajemne potoki. □

Chcielibyśmy teraz wykorzystać jeszcze w jakiś sposób komutację pól wektorowych. Dwa następne twierdzenia nam je zilustrują.

Twierdzenie 8.6. Niech M to gładka rozmaitość wymiaru $\dim M = m$.

Niech $\{v_j\}_{j=1}^k$, $k \leq m$ to układ pól wektorowych, liniowo niezależnych w każdym punkcie rozmaitości. Wówczas poniższe stwierdzenia są równoważne:

\ast w otoczeniu dowolnego punktu $p \in M$ istnieją współrzędne mapy $\varphi = (\varphi^i)$, takie że:

$$v_{j,p} = \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right)_p$$

\ast $[v_i, v_j] = 0$

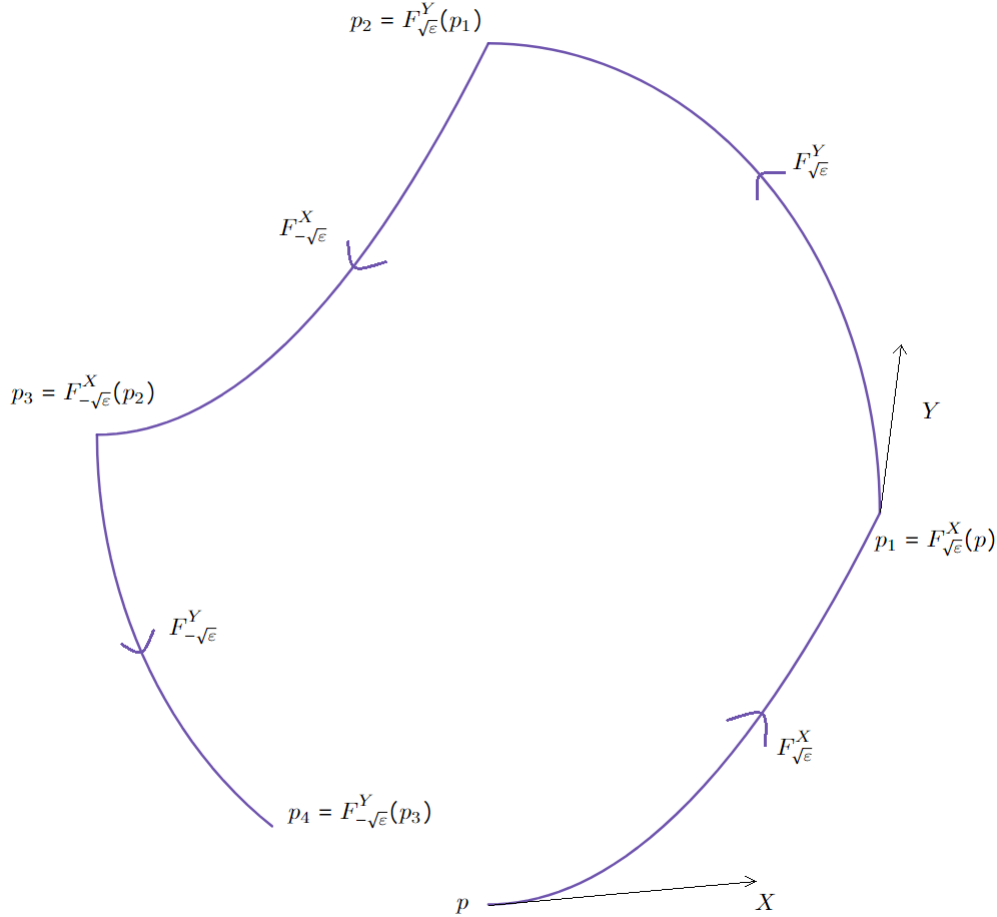
Dowód powyższego twierdzenia jest bardzo techniczny, jednak nie odnosi się do zainteresowań kursu, stąd zostanie pominięty.

Twierdzenie 8.7. Niech M to m -wymiarowa rozmaitość gładka, $X, Y \in \Gamma^\infty(TM)$. Wówczas dla dowolnego punktu $p \in M$ krzywa zadana jako:

$$\gamma_p(\varepsilon) := F_{-\sqrt{\varepsilon}}^Y \circ F_{-\sqrt{\varepsilon}}^X \circ F_{\sqrt{\varepsilon}}^Y \circ F_{\sqrt{\varepsilon}}^X(p)$$

jest dobrze określona dla odpowiednio małego $\varepsilon > 0$ oraz zachodzi:

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \gamma_p(\varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} = [X, Y]_p$$



Dowód. Dla wystarczająco małego $\varepsilon > 0$ cały opis mieści się w jednej mapie (U, φ) . Podobnie, jak w dowodzie twierdzenia 8.2 wykorzystamy rozwinięcie w szereg:

$$f \in C^\infty(M; \mathbb{R}) \wedge X \in \Gamma^\infty(TM) \implies f \circ F_t^X = f + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \cdot X^k f$$

□

9 Dystrybucje na rozmaitościach

W matematyce i fizyce hasło „dystrybucja” znajduje wiele definicji. W naszym przypadku będzie jednak oznaczało uogólnienie pojęcia pola na wiele wymiarów. Rozumowania prowadzone będą analogicznie do wprowadzania pól

wektorowych. Również, podobnie jak pola wektorowe zadają krzywe całkowe - jednowymiarowe, „powyginane” krzywe przebiegające przez rozmaitość, dystrybucje będą zadawały wielowymiarowe płaszczyzny, ułożone jedna na drugiej.

Definicja 9.1. Niech M to m -wymiarowa gładka rozmaitość, zaś $k \in \{1, 2, \dots, m\}$. k -wymiarową dystrybucją D na rozmaitości M nazywamy odwzorowanie

$$\begin{aligned} D : M &\rightarrow TM \\ D : p &\mapsto D_p \end{aligned}$$

takie że dla każdego punktu $p \in M$ D_p jest k -wymiarową podprzestrzenią liniową w $T_p M$.

Oczywiście, dystrybucje można dzielić ze względu na różne kryteria. Poniższe definicje przedstawiają kilka takich specjalnych grup. Nas, jak w przypadku większości zagadnień, interesować będzie tylko specyficzna grupa dystrybucji: dystrybucje gładkie.

Definicja 9.2. Dystrybucję nazywamy gładką, w punkcie $p \in M$, gdy istnieje podzbiór otwarty $U \subset M$, $p \in U$ $\in \tau_M$ oraz gładkie pola wektorowe $X_i \in \Gamma^\infty(U)$, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, takie że:

$$\forall q \in U \quad D_q = \text{Span} \left(\{X_i(q)\}_{i=1}^k \right)$$

Definicja 9.3. Pole $Y \in \Gamma^\infty(U)$ nazywamy stycznym do dystrybucji D gdy $\forall p \in U \quad Y_p \in D_p$. Zbiór pól stycznych do dystrybucji D oznaczamy $\mathcal{X}(D)$.

Przykład 9.1. Dystrybucje mogą być rozpinane przez pola wektorowe. Najprostrzym przykładem będzie $\dim D = 1$

$$D_p = \text{Span}(X_p) = \{\lambda X_p : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Wówczas polem stycznym będzie

$$Y \in \mathcal{X}(D) \iff Y = fX, \quad f \in C^\infty(M; \mathbb{R})$$

Dystrybucję mogą charakteryzować powiązania dziedziny z jej obrazem.

Definicja 9.4. Rozmaitością całkową dystrybucji D na rozmaitości M nazywamy spójną podrozmaitość $N \subset M$, taką że

$$\forall p \in N \quad D_p = T_p N$$

Zrobimy teraz pewien wtęret topologiczny. W powyższej definicji pada określenie „spójna” podrozmaitość. Ogólniej można mówić o przestrzeniach topologicznych spójnych - jak nazwa wskazuje, są to przestrzenie które tworzą niejako jedną całość. Definicja przestrzeni spójnej jest specyficzna - polega na określeniu, czym przestrzeń spójna *nie* jest:

Definicja 9.5. Przestrzeń topologiczną nazwiemy spójną, jeśli nie można przedstawić jej jako sumy dwóch rozłącznych zbiorów otwartych.

Fakt: Przestrzeń topologiczna jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy jedyne zbiory będące zarazem otwarte, jak i domknięte, to zbiór pusty i cała przestrzeń.

W przyszłości przyda nam się jeszcze jedno określenie: przestrzeń drogowo spójna.

Definicja 9.6. Przestrzeń topologiczną M nazwiemy drogowo spójną, jeśli dla dowolnych punktów $p, q \in M$ istnieje funkcja ciągła:

$$f : [0, 1] \longrightarrow M$$

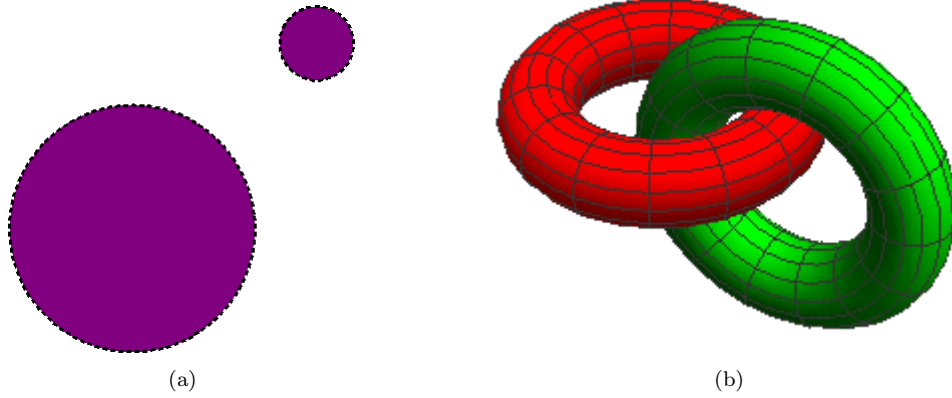
taka że $f(0) = p$ i $f(1) = q$.

Funkcję taką nazywamy drogą

Fakt: Jeśli przestrzeń topologiczna jest drogowo spójna, to jest spójna.

W przypadku rozmaitości, możemy pójść o krok dalej:

Ciekawostka: Rozmaitość różniczkowalna jest spójna, wtedy i tylko wtedy, gdy jest drogowo spójna.



Rysunek 10: Przykłady przestrzeni topologicznych (z naturalną topologią), które nie są spójne.

Definicja 9.7. Dystrybucję D na rozmaitości M nazywamy całkowalną, gdy dla każdego punktu $p \in M$ istnieje rozmaitość całkowa dystrybucji D zawierająca p

Innym aspektem dystrybucji może być charakteryzowanie jej ze względu na stycznej do niej pola wektorowe. Oczywiście wygodnie jest, gdy dystrybucja jest zamknięta na komutację pól - jest to w końcu jedno z podstawowych działań, którymi operujemy.

Definicja 9.8. Dystrybucję D nazywamy inwolucyjną, gdy dla dowolnych pól stycznych $X, Y \in \mathcal{X}(D)$ zachodzi

$$\mathcal{L}_X Y \in \mathcal{X}(D)$$

Przy czym należy pamiętać, że z twierdzenia 8.2 zachodzi $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$

Warto zauważyć, że dystrybucje całkowalne są podzbiorem inwolucji:

Fakt: Każda całkowalna dystrybucja jest inwolucją.

Dowód. Skoro dystrybucja D jest całkowalna, gdzie N - rozmaitość całkowa dla D , to

$$X, Y \in \mathcal{X}(D) \implies X, Y \in \Gamma^\infty(TN)$$

zaś wiemy, że dla dowolnej rozmaitości M zachodzi:

$$\forall A, B \in \Gamma^\infty(TM) \implies [A, B] \in \Gamma^\infty(TM)$$

Zatem

$$[X, Y] \in \Gamma^\infty(TN)$$

□

Intuicyjnie, skoro D jest całkowalna, to daje nam ona całą TN , zaś $(TN, [\cdot, \cdot])$ jest algebrą Liego.

Gdy jednak rozważamy dystrybucje gładkie, powyższy fakt umacnia się poniższym twierdzeniem:

Twierdzenie 9.1 (Frobeniusa). *Gładka dystrybucja jest całkowalna, wtedy i tylko wtedy gdy jest inwolucją.*

Dowód. \implies z powyższego faktu.

\impliedby : ustalmy $p \in M$ oraz jego otoczenie $p \in U \in \tau_M$, takie że (U, φ) jest mapą.

$$D \Big|_U = \text{Span} \{Y_i\}_{i=1}^k$$

gdzie pola wektorowe $Y_i \in \Gamma^\infty(TM)$ są liniowo niezależne. Wówczas:

$$Y_i = \sum_{l=1}^m a_{il} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^l} \right)$$

Konstruujemy macierz $A = [a_{il}]$ Ponieważ kolejność numeracji jest naszym wyborem, zatem ustawiamy nieosobliwą klatkę $k \times k$ na początku (fakt, że taka klatka istnieje, wynika z niezależności pól wektorowych Y_i).

$$B = [b_{ij}] \quad A = \left[\begin{array}{c} B^{-1} \\ reszta_1 \end{array} \right]$$

Wówczas:

$$BA = \left[\begin{array}{c} id \\ reszta_2 \end{array} \right]$$

Uzyskujemy zatem nowe wektory ($i = 1, \dots, k$):

$$X_i = \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right) + \sum_{l=k+1}^m c_{il} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^l} \right) \quad c_{il} \in \mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{R})$$

Należy zauważyć, że:

$$D \Big|_U = Span \{X_i\}_{i=1}^k = Span \{Y_i\}_{i=1}^k$$

W praktyce zatem zastosowana przez nas modyfikacja obróciła i potencjalnie przeskalowała pola wektorowe. Następnie zauważamy, że:

$$\begin{aligned} [X_i, X_j] &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right), \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right) \right] + \left[\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right), \sum_{l=k+1}^m c_{jl} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^l} \right) \right] \\ &\quad + \left[\sum_{l=k+1}^m c_{il} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^l} \right), \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right) \right] + \left[\sum_{l=k+1}^m c_{il} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^l} \right), \sum_{r=k+1}^m c_{jr} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^r} \right) \right] \\ &= \sum_{l=k+1}^m d_{ijl} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^l} \right) \end{aligned}$$

Istotne jest, że pozostają jedynie wyrazy o indeksach wyższych niż k . Możemy bowiem o tym komutatorze powiedzieć coś więcej - skoro D jest inwolutywne, zatem:

$$[X_i, X_j] \in D \Big|_U = Span \{X_a\}_{a=1}^k$$

Wynika stąd, że

$$d_{ijl} \equiv 0$$

Co oznacza, że:

$$[X_i, X_j] = 0$$

Zatem potoki tych pól komutują. Tym samym dla kolejnych $t_i \in \mathbb{R}$:

$$F_{t_1}^{X_1} \circ F_{t_2}^{X_2} \circ \dots \circ F_{t_k}^{X_k}(p)$$

rozpina rozmaiłość całkowalną □

Przykład 9.2. Niech naszą rozmaiłością będzie trójwymiarowa przestrzeń: $M = \mathbb{R}^3$, $T_p M \simeq \mathbb{R}^3$ Zadamy pola wektorowe w postaci:

$$\begin{aligned} X &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) + g(x, y) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \\ Y &= \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) + h(x, y) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

oraz dystrybucję:

$$D = Span \{X, Y\}$$

Zauważmy, że komutator tych pól ma postać:

$$[X, Y] = \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Do obliczenia komutatora najwygodniej wykorzystać twierdzenie 6.1.

W reprezentacji w przestrzeni \mathbb{R}^3 pola wektorowe mają postać:

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ g(x, y) \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ h(x, y) \end{bmatrix}$$

Chcielibyśmy, aby naszą rozmaitością całkową była powierzchnia zadana równaniem:

$$z - f(x, y) = 0$$

Wówczas:

$$\begin{aligned} X(z - f(x, y)) &= -\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + g(x, y) = 0 \\ Y(z - f(x, y)) &= -\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + h(x, y) = 0 \end{aligned}$$

Powyższe równania zadają nam funkcje g, h wykorzystane do stworzenia pól wektorowych. Jednak, z oczekiwanego zerowania się komutatora otrzymamy warunek, jaką funkcję musimy wybrać aby uzyskać rozmaitość całkowalną:

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f$$

10 Foliacje

Zostawimy teraz dystrybucje na rozmaitości i zajmiemy się analogiem krzywych całkowych w wyższych wymiarach. Krzywa całkowa była funkcją, która przenosiła odcinek osi rzeczywistej (czasu) na rozmaitość. W przypadku foliacji chcemy uzyskać k -wymiarowe „powierzchnie”, które nałożone jedna na drugiej utworzą całą rozmaitość. Dodatkowo będziemy chcieli, aby takie „powierzchnie” realizowały się jako podzbiory powierzchni k -wymiarowych w jakiejś mapie. Możemy myśleć o tym następująco: ryza papieru zbudowana jest z pojedynczych, dwuwymiarowych kartek. Jeśli umiejętnie taką ryzę skręcimy, możemy uzyskać torus z wnętrzem. Pojedyncze kartki mogą być bardzo pogięte, pogniecione - ale wypełniają całe wnętrze torusa. Naszą mapą w tym przypadku będzie wyprostowanie kartek tak, aby ponownie uzyskać ryzę papieru.

Obecny rozdział rozpoczniemy od kilku prostych przykładów - oprzemy się na powyższym opisie, aby zbudować pewną intuicję. Zapomnijmy na razie o wymogu „realizowania podzbiorów k -wymiarowych powierzchni”, cokolwiek by to nie znaczyło. Spróbujmy po prostu skonstruować pojedyncze warstwy - tzw. liście, które w ciekawy sposób łączą się, tworząc znane nam rozmaitości. Później dopiero wprowadzona zostanie definicja, a po niej - dokładniejsze przykłady.

Przykład 10.1. Torus dwuwymiarowy T^2 może zostać zdefiniowany na różne sposoby. Większość z nich prowadzi do pewnej intuicyjnej foliacji.

- * wybierzmy continuum wiele kopii jednego okręgu - jeśli ustawimy je wszystkie pionowo w okręgu, otrzymamy torus
- * jeśli wybierzemy ponownie okręgi, jednak różnego rozmiaru (nie dowolne), możemy je ułożyć poziomo na sobie tak, aby ponownie skonstruować torus

Obie powyższe intuicje faktycznie tworzą foliacje. Ich genezą jest definicja torusa poprzez iloczyn kartezjański dwóch okręgów:

$$T^2 = S^1 \times S^1$$

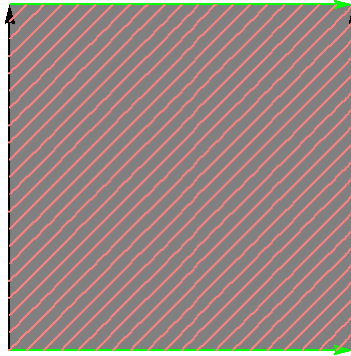
Wówczas powyższe foliacje można zapisać jako:

$$\bigcup_{p \in T^2} \{p\} \times S^1 \quad \bigcup_{p \in T^2} S^1 \times \{p\}$$

Torus jednak można przedstawić jako prostokąt o utożsamionych brzegach. Wtedy powyższe foliacje są zbiorem pionowych i poziomych prostych. Zastanówić się można, co się stanie gdy zadane proste będą pochylone pod pewnym kątem. Prowadzi to do kolejnych rodzin foliacji, zależnych od kąta α :

$$\tan(\alpha) \in \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{- wówczas krzywe się zamkną} \\ \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} & \text{- wówczas krzywe się nie zamkną} \end{cases}$$

Rodzi to pewien problem - podczas rozpatrywania torusa jako rozmaitości różniczkowej, patrzymy tylko na pewien



Rysunek 11: Różowe (jaśniejsze) dcinki zawarte w kwadracie tworzącym torus - ich zagęszczenie tworzy foliację

mały zbiór otwarty. Możemy widzieć na nim wiele linii pochodzących z tego samego liścia, zatem podczas definicji w jakiś sposób należy to uwzględnić.

Przykład 10.2. Foliacja Reeba - ponownie dotyczy torusa, jednak tym razem rozważamy torus wypełniony. Należy przy okazji przypomnieć, że nazwa ta może być myląca - torus z wnętrzem/torus wypełniony w naszym rozumieniu nie zawiera w sobie oryginalnego torusa. Zewnętrzna warstwa, którą stanowiłby taki torus, jest brzegiem wypełnionego torusa - uwzględnienie brzegu stanowiłoby to problem podczas rozważań rozmaitości, ponieważ wymagałoby uwzględnienia zbioru domkniętego. Jak wiemy, wszystkie operacje, które omawiamy tylko w kontekście zbiorów otwartych.

Foliację torusa z wnętrzem skonstruujemy w oparciu o funkcję analityczną:

$$f(x) = \exp\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)$$

Rozważamy tę funkcję w przedziale $x \in (-1, 1)$. Jeśli teraz wykres tej funkcji obrócimy wokół osi rzędnych, uzyskamy:

$$\tilde{f}(x, y) = \exp\left(\frac{x^2 + y^2}{1 - x^2 - y^2}\right)$$

Stworzymy docelowe liście poprzez przesuwanie takich wykresów o liczby rzeczywiste:

$$L_\alpha = \alpha + \tilde{f}(x, y) \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

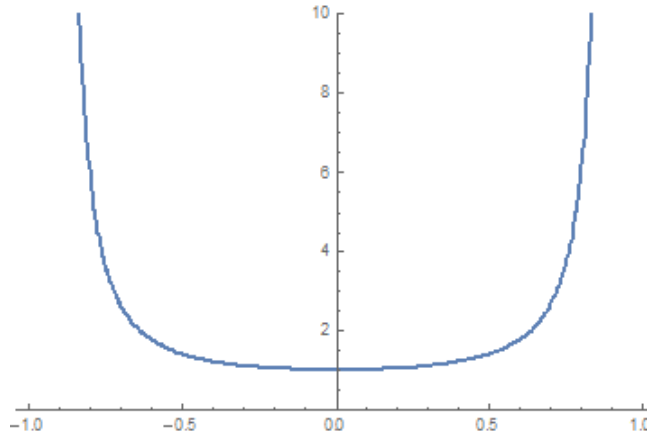
Oczywiście powyższy zapis ma charakter czysto symboliczny i intuicyjny, nie zaś ściśle matematyczny. Niemniej takie powierzchnie wypełniają walec $(-1, 1) \times (-1, 1) \times \mathbb{R}$. Aby zakończyć foliację, musimy zwinąć takie liście i je skleić ze sobą, uzyskując torus wypełniony.

Definicja 10.1. Niech M to m -wymiarowa rozmaitość gładka. Rodzinę drogowo spójnych podzbiorów:

$$\mathcal{F} = \{L_\alpha \subset M : \alpha \in B\}$$

nazywamy k -wymiarową foliacją⁴, gdy zachodzą następujące warunki:

⁴Tłumacząc na polski: foliacja \equiv rozliśnienie



Rysunek 12: Wykres funkcji $f(x) = \exp\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)$, będącej podstawą foliacji Reeba

$$* M = \bigcup_{\alpha \in B} L_\alpha$$

$$* \forall \alpha \neq \beta \quad L_\alpha \cap L_\beta = \emptyset$$

* dla każdego punktu rozmaitości $p \in M$ istnieje taka mapa (U, φ) , $p \in U$, że jeśli dla pewnego $\alpha \in B$ przecina się ona z L_α , to składowe obrazu $\varphi[U \cap L_\alpha]$ są podzbiórmi układu płaszczyzn zadanych jako:

$$\{\vec{x} \in \varphi[U] : \forall j > k \quad x_j = \text{const} \in \mathbb{R}\}$$

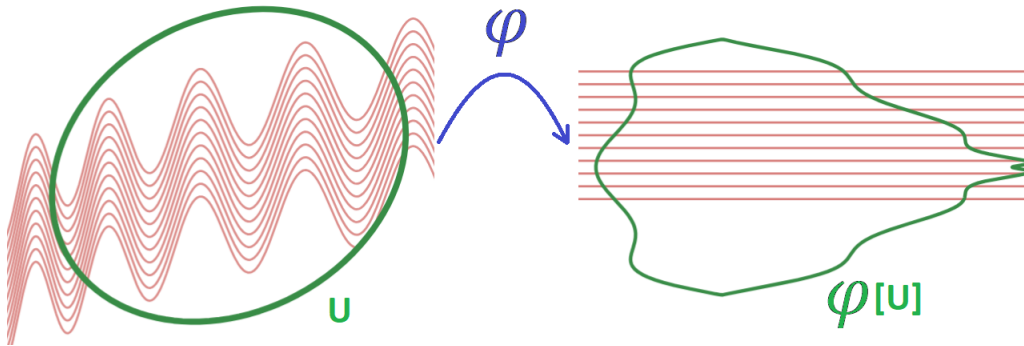
Zbiory L_α nazywamy liśćmi foliacji.

Zbiory $(U \cap L_\alpha)_p$ nazywamy plakietkami foliacji w mapie (U, φ) .

Mapy, spełniające ostatni warunek, nazywamy mapami foliacji.

Ostatni warunek powyższej definicji może wydawać się bardzo nienaturalnym (przynajmniej w takim sformułowaniu) - stąd rozpoczęliśmy od opisu oraz przykładów. Wygodnie jest rozważyć ponownie te przykłady, zadając jednak foliacje poprzez równania różniczkowe - łączą się one przecież z polami wektorowymi.

Przykład 10.3. Foliacja na krzywe



Rysunek 13: Krzywe na rozmaitości przechodzą na odcinki zawarte w nieprzecinających się prostych

Przykład 10.4 (foliacja Reeba). Naszym równaniem będzie:

$$\frac{dy}{dx} = \tan(x)$$

Wówczas liście są określone równaniem:

$$y = \ln \left| \frac{1}{\cos(x)} \right| + c$$

gdzie $c \in \mathbb{R}$ jest indeksem numerującym liście. Dalej postępujemy zgodnie z opisem w przykładzie przed definicją.

Przykład 10.5 (torus). Równaniem, które zada nam foliację będzie:

$$\frac{dy}{dx} = \alpha \in \mathbb{R}$$

Wówczas, dla każdego ustalonego α uzyskujemy:

$$y = \alpha x + c$$

gdzie ponownie $c \in \mathbb{R}$ jest indeksem numerującym liście. Taki zapis jest dorby, gdy myślimy o torusie w postaci:

$$T^2 = \mathbb{R}^2 / (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$$

Powyższy zapis może nie być jasny dla wszystkich: dzielimy przestrzeń \mathbb{R}^2 w szachownicę i utożsamiamy te punkty, do których możemy dojść poprzez skoki o liczby całkowite wzdłuż osi.

11 Formy różniczkowe

Definicja 11.1. Polem kowektorowym na rozmaitości M nazwiemy gładkie cięcie wiązki kostycznej:

$$\omega : M \longrightarrow T^*M$$

Uwaga! Alternatywnie pole kowektorowe nazywane jest 1-formą różniczkową lub 1-formą na rozmaitości. Przypomnijmy, jak zadane są różne odwzorowania związane:

$$\begin{aligned} M &\xrightarrow{h} N \\ TM &\xrightarrow{h_*} TN \\ T^*M &\xleftarrow{h^*} T^*N \end{aligned}$$

W naszych rozważaniach będziemy chcieli, aby $N = \mathbb{R}$. Wówczas stosujemy notację: $h_* = dh$, przy czym odczytujemy dh jako pole kowektorowe, zaś $d_p h$ jako konkretny kowektor, będący realizacją pola kowektorowego w punkcie $p \in M$. Taka notacja przyda się podczas definiowania naturalnej bazy, powiązanej z mapą. Weźmy bowiem mapę $(U\varphi)$, $\varphi = (\varphi^k)_{k=1}^m$, gdzie oczywiście $m = \dim M$. Wiemy, że $\varphi^k \in C^\infty(M; \mathbb{R})$. Zbiór:

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^k} \right)_p \right\}_{k=1}^m \subset T_p M$$

jest bazą przestrzeni stycznej w punkcie. Chcielibyśmy mieć podobną bazę w przestrzeni dualnej, również indukowaną przez mapę. Na ćwiczeniach studenci będą dokładniej rozważać bazę przestrzeni dualnej, na potrzeby wykładu baza ta zadana jest jako zbiór $\{d_p \varphi^j\}_{j=1}^m$ i jest to baza jak najbardziej naturalna, tzn:

$$d_p \varphi^j \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^k} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^k} \right)_p \varphi^j(p) = \delta_k^j$$

Zapis ten przedstawia definicję działania, sposób postępowania podczas podstawowych obliczeń. Często wygodnym jest jednak powyższe działanie zapisać inaczej. Przypomnijmy, że działanie kowektora $\omega \in T^*M$ na wektor $v \in TM$ określamy naturalnym parowaniem i zapisujemy często jako:

$$\langle \omega, v \rangle := \omega(v)$$

Uznając powyższą bazę, zapiszemy:

$$df = \sum_{j=1}^m a_j d\varphi^j$$

Ponieważ zachodzi:

$$\left\langle df, \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right\rangle = a_j$$

Zatem zapiszemy to szybciej:

$$df = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial \varphi^j} \cdot d\varphi^j$$

Oczywiście jest to tylko przykład. W ogólności, na 1-formy będziemy najczęściej patrzeć w oderwaniu od zadających je funkcji.

$$\omega = \sum_{j=1}^m \omega_j \cdot d\varphi^j$$

Ponownie, najbardziej interesujące są 1-formy gładkie:

Twierdzenie 11.1. *1-forma ξ jest gładka, wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego punktu rozmaitości $p \in M$ istnieje mapa pokrywająca ten punkt (U, ϕ) , $p \in U$, taka że*

$$\xi = \sum_{j=1}^m \xi_j \cdot d\phi^j \quad \xi_j \in C^\infty(M; \mathbb{R})$$

Innymi słowy, jak w każdym poprzednim przypadku, interesujący nas obiekt jest gładki wtedy i tylko wtedy, gdy jego współrzędne są gładkie.

Dowód. Dowód przebiega nalogicznie do poprzednich. □

Takie rozumowanie jest bardzo naturalne, intuicja jest wprowadzana od początku kursu - jednak ciężko się na tym pracuje. Mamy jednak jeszcze jedno narzędzie, które możemy wykorzystać: naturalne parowanie. Samo naturalne parowanie może być traktowane jako odwzorowanie dwuliniowe:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : T^*M \times TM \longrightarrow \mathbb{R}$$

Powyższy zapis jednak nie jest ścisły: naturalne parowanie definiuje się dla wektora i kowektora zaczepionych w tym samym punkcie. Dlatego możemy rozważać parę dualną w sposób trochę inny. Otóż, jeśli za argumenty naturalnego parowania przyjmujemy kolejno pole kowektorowe i pole wektorowe, wówczas otrzymamy funkcję zależną od punktu początkowego:

$$M \ni p \longmapsto (\omega(p), X(p)) \longmapsto \langle \omega(p), X(p) \rangle =: \langle \omega, X \rangle_p \in \mathbb{R}$$

Oznacza to, że w przypadku całych przestrzeni, naturalne parowanie traktować należy jako:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \text{Map}(M; T^*M) \times \text{Map}(M; TM) \longrightarrow \text{Map}(M; \mathbb{R})$$

Ponieważ takie działanie jest definiowane punktowo, zatem zachowuje swoją własność dwuliniowości. W szczególności, dla ustalonych ω , X odwzorowanie zadane naturalnym parowaniem jest funkcją rzeczywistą:

$$\langle \omega, X \rangle : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

Twierdzenie 11.2. *1-forma ξ jest gładka, wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego pola gładkiego $Z \in \Gamma^\infty(TM)$ następujące odwzorowanie jest gładkie $\langle \xi, Z \rangle \in C^\infty(M; \mathbb{R})$*

Gładkie pola kostyczne oznaczamy:

$$\xi \in \Gamma^\infty(T^*M)$$

Dowód. content... □

Chcemy teraz przejść do k-form, jednak zanim to nastąpi wprowadzimy pochodną Liego z pola kostycznego. Jej własności będziemy badać w ramach ćwiczeń, na razie podajmy jedynie definicję. Nasze postępowanie w tym przypadku jest bardzo podobne do postępowania w przypadku pochodnej pola wektorowego, jednak nasze działanie działa w drugą stronę, stąd nie ma potrzeby niejako „wracania”.

Definicja 11.2. Niech zadane będzie pole kowektorowe $\omega \in \Gamma^\infty(T^*M)$ oraz pole wektorowe $X \in \Gamma^\infty(TM)$. Pochodną Liego pola kowektorowego w punkcie $p \in M$ nazwiemy:

$$(\mathcal{L}_X \omega)(p) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left((F_t^X)^* \omega \right)_p - \omega_p}{t}$$

Przedstawimy też dwa twierdzenia, udowodnienie których stanowi zadanie dla studenta:

Twierdzenie 11.3. *Niech $X \in \Gamma^\infty(TM)$, $f \in C^\infty(M; \mathbb{R})$, $\omega \in \Gamma^\infty(T^*M)$. Wówczas:*

$$\mathcal{L}_X(f\omega) = \mathcal{L}_X f \cdot \omega + f \cdot \mathcal{L}_X \omega$$

Twierdzenie 11.4. *Niech $X, Y \in \Gamma^\infty(TM)$, $\omega \in \Gamma^\infty(T^*M)$. Wówczas:*

$$\mathcal{L}_X \langle \omega, Y \rangle = \langle \mathcal{L}_X \omega, Y \rangle + \langle \omega, \mathcal{L}_X Y \rangle$$

Zadanie: Udowodnij powyższe twierdzenia.

Zadanie: Znajdź współrzędne $\mathcal{L}_X \omega$ w bazie indukowanej przez mapę.

Przejdźmy teraz do k -form na rozmaitościach. Rozpocznijmy od wprowadzenia notacji, którą będziemy od tej pory stosowali. Do opisu struktury, na której będziemy pracować, przydadzą się informacje przedstawione w rozdziale 1. Antysymetrycznym iloczynem tensorowym k -tego stopnia przestrzeni kostycznej w punkcie $p \in M$ będziemy określać:

$$\bigwedge^k T_p^* M := \Pi \left(\bigotimes_{j=1}^k T_p^* M \right)$$

przy czym według konwencji dla $k = 0$ rozpatrujemy elementy ciała.

Kolejnym oznaczeniem będzie:

$$\bigwedge T_p^* M := \bigoplus_{j=0}^m \bigwedge^j T_p^* M \quad m = \dim M = \dim T_p^* M$$

Oznacza to zebranie wszystkich poszczególnych zbiorów form razem. Wówczas:

$$\dim \bigwedge T_p^* M = 2^m$$

Z takim wstępem notacyjnym rozpoczniemy wprowadzenie k -form na rozmaitościach. Pierwsza przedstawiona definicja ma charakter bardziej roboczy - zaczynamy od niej, aby móc prowadzić pewne rozważania. Te rozważania pokażą nam m.in. kolejne aspekty notacyjne, jak również dlaczego pewne funkcje definiujemy tak, a nie inaczej.

Definicja 11.3 (k -forma - wersja robocza). k -formą na rozmaitości M nazwiemy odwzorowanie:

$$\omega : M \longrightarrow \bigwedge^k T_p^* M$$

Uwaga: czasami, dla zaznaczenia stopnia formy, nad literą piszemy stopień, tzn. jeśli ω jest k -formą, możemy zapisać ją jako $\overset{k}{\omega}$.

Pamiętajmy również, że przy zadanej mapie (U, φ) mamy naturalną bazę różniczek: $\{d\varphi^j\}_{j=1}^m$ zadaną na T^*M . Chcemy przedstawić dowolną k -formę w bazie powiązanej z mapą. Ponieważ nasze rozważania, póki co, są czysto matematyczne, wprowadzimy tzw. wieloindeks (multiindeks) uporządkowany, dzięki któremu nasz zapis będzie krótszy. Indeksami takim nazwiemy

$$I_k = (i_1, \dots, i_k)$$

gdzie

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m$$

Możemy ograniczyć się do takich, uporządkowanych wieloindeksów, ponieważ podczas rozpatrywania k -form wprowadziliśmy iloczyn antysymetryczny - właśnie ta antysymetria pozwala ograniczyć się do oczekiwanego porządku. Zatem nasza k -forma będzie zapisana jako:

$$\overset{k}{\omega}(p) = \sum_{I_k} \omega_{I_k}(p) \cdot d\varphi^{I_k}$$

gdzie ω_{I_k} to funkcja rzeczywista, zaś różniczka zadaną jest tzw. iloczynem zewnętrznym, który zdefiniujemy za moment.

$$d\varphi^{I_k} := d\varphi^{i_1} \wedge d\varphi^{i_2} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_k}$$

Czym zatem jest iloczyn zewnętrzny?

Definicja 11.4. Iloczynem zewnętrznym (unormowanym) nazywamy iloczyn postaci:

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k := S(k!) \cdot \Pi \left(\bigotimes_{j=1}^k \omega_j \right)$$

gdzie funkcja $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia następujący warunek:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad S(\alpha) \cdot S(\beta) = S(\alpha \cdot \beta)$$

Funkcja S nazywana jest normowaniem

Normowania mogą być zadane różnymi funkcjami. Przykładowe, najprostsze z nich to:

- * $S(\alpha) = 1$
- * $S(\alpha) = \alpha$
- * $S(\alpha) = \sqrt{|\alpha|}$

Wybór normowania zależy od autora, którego pracę czytamy. Zauważmy pewne własności normowania:

$$S(\alpha) = S(1 \cdot \alpha) = S(1) \cdot S(\alpha) \implies S(1) = 1$$

$$1 = S(1) = S(\alpha \cdot \alpha^{-1}) = S(\alpha) \cdot S(\alpha^{-1}) \implies S\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{S(\alpha)}$$

Zastanówmy się, jaką konwencję my powinniśmy przyjąć - konwencja ta wynikać bowiem powinna z zastosowań iloczynu zewnętrznego. Rozważmy następujące formy:

$$\overset{k}{a} = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k = S(k!) \cdot \Pi \left(\bigotimes_{j=1}^k \omega_j \right)$$

$$\overset{r}{b} = \omega_{k+1} \wedge \dots \wedge \omega_{k+r} = S(r!) \cdot \Pi \left(\bigotimes_{j=k+1}^{k+r} \omega_j \right)$$

Czym będzie $\overset{k}{a} \wedge \overset{r}{b}$? Zauważmy, że:

$$\begin{aligned} \overset{k}{a} \wedge \overset{r}{b} &= \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k \wedge \omega_{k+1} \wedge \dots \wedge \omega_{k+r} \\ &= S((k+r)!) \Pi \left(\bigotimes_{j=1}^{k+r} \omega_j \right) \\ &= \frac{S((k+r)!)}{S(k!)S(r!)} \cdot \Pi \left(S(k!) \Pi \left(\bigotimes_{j=1}^k \omega_j \right) \otimes S(r!) \Pi \left(\bigotimes_{j=k+1}^{k+r} \omega_j \right) \right) \\ &= S \left(\binom{k+r}{k} \right) \cdot \Pi \left(\overset{k}{a} \otimes \overset{r}{b} \right) \end{aligned}$$

Przy czym oczywiście skorzystaliśmy z własności antysymetryzacji. Rozważmy zatem bardziej konkretny przykład: chcemy ustalić czynnik mnożący przy działaniu:

$$(a_1 \wedge a_2)(Y_1 \wedge Y_2)$$

Uczynimy to krok za krokiem:

$$\overset{2}{a} \propto dx^1 \otimes dx^2 - dx^2 \otimes dx^1$$

I zadziałajmy tym na dwa pola wektorowe, Y_1, Y_2 :

$$\overset{2}{a}(Y_1, Y_2) \propto dx^1(Y_1) \cdot dx^2(Y_2) - dx^2(Y_1) \cdot dx^1(Y_2)$$

Czym jest działanie pojedynczego wyrazu?

$$(dx^1 \otimes dx^2)(Y_1 \otimes Y_2 - Y_2 \otimes Y_1) = 2! (dx^2(Y_1) \cdot dx^2(Y_2) - dx^2(Y_1) \cdot dx^1(Y_2))$$

gdzie czynnik $2!$ pojawia się z powodów kombinatorycznych. Tej właśnie kombinatorycznej części chemy się pozbyć, wprowadzając normowanie. Zatem:

$$(a_1 \wedge a_2)(Y_1 \wedge Y_2) = 2! \cdot S(2!) \cdot S(2!) \cdot \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2!} \cdot (dx^2(Y_1) \cdot dx^2(Y_2) - dx^2(Y_1) \cdot dx^1(Y_2))$$

Gdzie kolejne czynniki:

$2!$ - jest to wspomniany wcześniej czynnik kombinatoryczny

$S(2!)$ - pochodzi od normowania formy $a_1 \wedge a_2$

$S(2!)$ - pochodzi od normowania pól wektorowych $Y_1 \wedge Y_2$

$\frac{1}{2!}$ - pochodzi od rzutowania (antysymetryzacji) Π w formie

$\frac{1}{2!}$ - pochodzi od rzutowania (antysymetryzacji) Π w polach wektorowych

Oczywiście, skoro funkcja S nosi nazwę normowania, oczekujemy że w powyższym równaniu nastąpi uproszczenie:

$$2! \cdot S(2!) \cdot S(2!) \cdot \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2!} = \frac{1}{2!} \cdot (S(2!))^2 = 1$$

Stąd uzyskujemy:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} : S(\alpha) = \sqrt{|\alpha|}$$

Oczywiście, wielu autorów korzysta z inaczej zdefiniowanych normowań, w zależności od wybranego tematu i interesujących zagadnień. Zatem należy bardzo uważać.

Wniosek: przy unormowaniu kontrakcji iloczynu zewnętrznego otrzymamy:

$${}^k_a \wedge {}^r_b = \sqrt{\binom{k+r}{k}} \cdot \Pi \left({}^k_a \otimes {}^r_b \right)$$

Określiliśmy już, w jakiej postaci będziemy używać iloczynu zewnętrznego, wypada teraz zastanowić się nad jego własnościami.

Twierdzenie 11.5. *Iloczyn zewnętrzny \wedge ma następujące własności:*

$$\ast (a + b) \wedge c = a \wedge c + b \wedge c$$

$$\ast {}^k_a \wedge {}^r_b = (-1)^{k \cdot r} \cdot {}^r_b \wedge {}^k_a$$

\ast *niech \mathbb{V} to f -wymiarowa przestrzeń liniowa. Wówczas:*

$$\forall \omega \in \bigwedge^f \mathbb{V} \quad \forall a \in \mathbb{V} \quad a \wedge \omega \equiv 0$$

Uwaga: Jeśli działanie dodawania odbywa się w obrębie form jednego wymiaru, wówczas nie mamy problemu z określeniem czym dodawanie jest. Jeśli jednak formy są różnego wymiaru, wówczas dodawanie odbywa się w największej, piramidowej przestrzeni konstruowanej ze zbiorów wszystkich możliwych form

Dowód. Szczegrze, ten dowód jest wyjątkowo banalny... □

Skoro już wiemy tyle na temat form, połączmy wszystkie przestrzenie, analogicznie jak wysumowaliśmy przestrzenie styczne w punktach do całkowitej przestrzeni stycznej:

Definicja 11.5. k -tą potęgą zewnętrzną wiązki kostycznej nazywamy

$$\bigwedge^k T^*M := \bigsqcup_{p \in M} \bigwedge^k T_p^*M$$

Przypomnijmy:

$$\bigsqcup_{p \in M} \bigwedge^k T_p^* M := \bigcup_{p \in M} \{p\} \times \bigwedge^k T_p^* M$$

Pamiętamy również, że z takim sumowaniem wiąże się działanie niejako odwrotne: rzutowanie na rozmaitość:

$$\begin{aligned} \pi : \bigwedge^k T^* M &\longrightarrow M \\ \pi : \left(p, \omega_p^k \right) &\longmapsto p \end{aligned}$$

Rozpatrując rozmaitość, wiele jej własności musimy analizować i rozumieć w mapach. Ponownie potrzebujemy, korzystając z zadanych map na rozmaitości, indukować mapę na potędze zewnętrznej wiązki kostycznej. Weźmy zatem mapę na rozmaitości M : (U, φ) . Mapa indukowana będzie miała postać:

$$\begin{aligned} (W, \tilde{\varphi}) : \\ W \subset \bigwedge^k T^* U \\ \tilde{\varphi} : \left(p, \omega_p^k \right) &\longmapsto \left(\varphi(p), \{ \omega_{I_k}(p) \}_{I_k \in \mathcal{I}} \right) \\ \text{dla } \omega \Big|_U &= \sum_{I_k \in \mathcal{I}} \omega_{I_k} \cdot d\varphi^{I_k} \end{aligned}$$

Jesteśmy teraz gotowi, aby zdefiniować poprawnie k -formę. Poniższa definicja nie powinna być zaskoczeniem - jest kolejnym, bardzo naturalnym krokiem po definicji pola wektorowego.

Definicja 11.6. k -formą różniczkową na rozmaitości M nazywamy gładkie cięcie wiązki $\bigwedge^k T^* M$.

Zbiór k -form na rozmaitości M oznaczamy $\Omega^k(M)$ lub $\tilde{\Omega}^k(M)$.

Oczywiście ponownie pojawia się warunek gładkości. Nie powinno dziwić, że to badania gładkości będziemy wykorzystywać twierdzenia.

Twierdzenie 11.6. Niech ω będzie k -formą na rozmaitości M . Wówczas następujące stwierdzenia są równoważne:

$$* \quad \omega \in \Omega^k(M)$$

$$* \quad \text{dla mapy } (U, \varphi):$$

$$\omega = \sum_{I_k} \omega_{I_k} \cdot d\varphi^{I_k} \implies \forall I_k \quad \omega_{I_k} \in \mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{R})$$

$$* \quad \text{dla dowolnych pól wektorowych } X_1, \dots, X_k \in \Gamma^\infty(M) \text{ zachodzi:}$$

$$\omega(X_1, \dots, X_k) \in \mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{R})$$

Chcemy teraz badać zachowania form różniczkowych. Wiemy, jak cofać pola kowektorowe, jak zatem przenieść to na formy różniczkowe?

Niech zadane będzie odwzorowanie gładkie: $h \in \mathcal{C}^\infty(M; N)$, gdzie M, N to rozmaitości gładkie. Wówczas rozpatrujemy diagram:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{h} & N \\ h^* \omega \downarrow & & \downarrow \omega \\ T^* M & \xleftarrow{h^*} & T^* N \end{array}$$

Naturalnym jest uogólnienie działania transponowanego h^* , działającego na k -formach:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{h} & N \\ h^* \downarrow \omega^k & & \downarrow \omega^k \\ \wedge T^* M & \xleftarrow{h^*} & \wedge T^* N \end{array}$$

Tak, że jeśli $\omega^k = dy_1 \wedge \dots \wedge dy_k$, wówczas:

$$h^* f = f \circ h, \quad f \in C^\infty(M; \mathbb{R})$$

jako że funkcje są 0-formami następnie:

$$h^* \omega^k = (h^* dy_1) \wedge \dots \wedge (h^* dy_k)$$

Wniosek: Niech h to gładkie odwzorowanie rozmaitości gładkich $h : M \longrightarrow N$, $\omega, \varrho \in \Omega^k(N)$, $a \in \mathbb{R}$, $f \in C^\infty(N; \mathbb{R})$. Wówczas:

$$* h^*(\omega + \varrho) = h^* \omega + h^* \varrho$$

$$* h^*(a \cdot \omega) = a \cdot h^* \omega$$

$$* h^*(\omega \wedge \varrho) = h^* \omega \wedge h^* \varrho$$

$$* h^*(f \cdot \omega) = h^* f \cdot h^* \omega = (f \circ h) h^* \omega$$

Uwaga:

$$(h^* \omega)_p(X_1, \dots, X_k)_p = \omega_{h(p)}(h_* X_1, \dots, h_* X_k)_{h(p)}$$

Rozważmy teraz własności iloczynu zewnętrznego, w kontekście form różniczkowych. Rozważmy formy

$$\omega^k \in \Omega^k(M) \quad \varrho^r \in \Omega^r(M)$$

Wówczas:

$$\omega^k \wedge \varrho^r \in \Omega^{k+r}(M)$$

Jaką taką formę będzie miała postać? Weźmy mapę (U, φ) :

$$\omega^k = \sum_{I_k} \omega_{I_k} \cdot d\varphi^{I_k} \quad \varrho^r = \sum_{J_r} \varrho_{J_r} \cdot d\varphi^{J_r}$$

Wówczas:

$$\omega^k \wedge \varrho^r = \left(\sum_{I_k} \omega_{I_k} \cdot d\varphi^{I_k} \right) \wedge \left(\sum_{J_r} \varrho_{J_r} \cdot d\varphi^{J_r} \right) = \sum_{I_k, J_r} \omega_{I_k} \varrho_{J_r} \cdot d\varphi^{I_k} \wedge d\varphi^{J_r}$$

Jednak tkwi w tym pewien szczegół: otóż nowe indeksy nie muszą być uporządkowane. Co więcej, możliwe że natrafimy w nich na czynniki powtarzające się. Trzeba zatem rozważyć wszystkie możliwe wyniki. Zastosujemy teraz pewną konwencję:

$$d\varphi^I \wedge d\varphi^J = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } I \cap J \neq \emptyset \\ (-1)^{\sigma(I \cup J)} d\varphi^{L_{I \cup J}}, & \text{jeśli } I \cap J = \emptyset \end{cases}$$

przy czym $L_{I \cup J}$ to rezultat uporządkowania zbioru $I \cup J$, zaś $\sigma(I \cup J)$ to liczba parzystości permutacji zadanego zbioru (2, gdy permutacja parzysta, 1 - gdy nieparzysta). Wówczas wynik działania ma postać:

$$\omega^k \wedge \varrho^r = \sum_{I_k \cup J_r} \omega_{I_k} \varrho_{J_r} \cdot (-1)^{\sigma(I_k \cup J_r)} d\varphi^{L_{I_k \cup J_r}}$$

achęca się studentów do szczególnie uważnego przeanalizowania powyższej notacji, ponieważ pozornie prosta operacja kryje w sobie dużo uproszczeń i założeń.

Fakt: Dla form ω^k, ϱ^r zachodzi:

$$\omega^k \wedge \varrho^r = (-1)^{k \cdot r} \cdot \varrho^r \wedge \omega^k$$

Działanie to omawialiśmy w ogólnym przypadku iloczynu zewnętrznego potęgi zewnętrznej dowolnych przestrzeni liniowych, tutaj jest jedynie sformułowany w kontekście form różniczkowych.

12 Różniczka zewnętrzna form

Pracując na formach chcielibyśmy wprowadzić pewną operację różniczkowania. Ponieważ mamy operację mnożenia zewnętrznego, musi być ona z nim uzgodniona. Co więcej, namiastkę takiej pochodnej już mieliśmy, nie wiedząc jeszcze czym ona jest. Wychodzimy od 0-formy, czyli funkcji ciągłej: $f \in C^\infty(M; \mathbb{R})$. Z tej 0-formy możemy uzyskać 1-formę poprzez skonstruowanie odwzorowania stycznego $df \equiv f_*$.

$$f \longmapsto df$$

$$0 - \text{forma} \longrightarrow 1 - \text{forma}$$

Ponieważ potęgowanie gwiazdek w indeksie jest niewygodne, pozostaniemy przy notacji $d\cdot$, ponieważ być może będziemy chcieli rozpatrywać iterowane różniczki. Zauważamy również, że tak zadana różniczka podnosi rząd formy o jeden. Zilustrujmy teraz na przykładzie przestrzeni \mathbb{R}^2 do czego dążymy.

Przykład 12.1. Weźmy funkcję $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$. Wówczas jej różniczką (a tym samym 1-formą jest:

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Chcemy teraz zrobić następny krok:

$$f \longmapsto df \longmapsto d(df) = d^2 f$$

Zgodnie z konwencją, będziemy dokładać kolejne różniczki do formy z lewej strony:

$$d^2 f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} dx \wedge dx + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} dy \wedge dx + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dy$$

Zauważamy jednak, że:

$$dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0 \quad dx \wedge dy = -dy \wedge dx$$

Ponieważ nasza funkcja jest bardzo porządna, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, zatem zachodzi:

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}$$

Ostatecznie zatem

$$d^2 f(x, y) = 0$$

Tę własność chcemy zachować podczas konstruowania różniczki. Okazuje się, że zadanie tylko kilku własności jednoznacznie wyznacza różniczkę na dowolnej rozmaiłości.

Jeśli skonstruujemy już różniczkę, chcemy zobaczyć jak, zachowuje się ona względem mnożenia. Mamy iloczyn zewnętrzny, powiedzmy że wiemy jak działać różniczką na formę, ale co z ich iloczynem? Aby do tego dojść, musimy wykorzystać zamianę miejsc w formie:

$$\begin{aligned} d\left(\binom{k}{\omega} \wedge \binom{r}{\rho}\right) &= d\binom{k}{\omega} \wedge \binom{r}{\rho} + (-1)^{kr} d\binom{r}{\rho} \wedge \binom{k}{\omega} \\ &= d\binom{k}{\omega} \wedge \binom{r}{\rho} + (-1)^{kr} (-1)^{k(r+1)} \binom{k}{\omega} \wedge d\binom{r}{\rho} \\ &= d\binom{k}{\omega} \wedge \binom{r}{\rho} + (-1)^k \binom{k}{\omega} \wedge d\binom{r}{\rho} \end{aligned}$$

Definicja 12.1. Pochodną zewnętrzną na rozmaiłości M nazywamy \mathbb{R} -liniowe odwzorowanie:

$$d : \Omega(M) \longrightarrow \Omega(M)$$

takie że:

$$* \text{ dla } f \in C^\infty(M; \mathbb{R}), X \in \Gamma^\infty(TM) \text{ zachodzi } df(X) = Xf$$

$$* \binom{k}{\omega} \in \Omega^k(M) \implies d\binom{k}{\omega} \in \Omega^{k+1}(M)$$

$$\ast \quad d \circ d = 0$$

Przy czym $\Omega(M)$ zadane jest jako suma prosta:

$$\Omega(M) := \bigoplus_{k=1}^m \Omega^k(M)$$

Rozważania dotyczące pochodnej prowadzone abstrakcyjnie, w oderwaniu od map zadanych na rozmaitości M , prowadzone będą w ramach ćwiczeń. Na razie skoncentrujemy się na dobrym zrozumieniu zagadnienia.

Rozważmy zatem mapę (U, φ) oraz:

$$\begin{aligned} f &\in \mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{R}) & \omega &\in \Omega^k(M) \\ \omega &= \sum_{I_k} \omega_{I_k} d\varphi^{I_k} & \omega_{I_k} &\in \mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Wiemy, że:

$$df = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial \varphi^i} d\varphi^i$$

Zatem zachodzi:

$$\begin{aligned} d\omega &= d\left(\sum_{I_k} \omega_{I_k} d\varphi^{I_k}\right) \\ &= \sum_{I_k} d(\omega_{I_k} d\varphi^{I_k}) \\ &= \sum_{I_k} (d\omega_{I_k} \wedge d\varphi^{I_k} + \omega_{I_k} d^2\varphi^{I_k}) \\ &= \sum_{I_k} \sum_{i=1}^m \frac{\partial \omega_{I_k}}{\partial \varphi^i} d\varphi^i \wedge d\varphi^{I_k} \\ &= \sum_{I_k \cup \{i\}} (-1)^{\sigma(I_k \cup \{i\})} \frac{\partial \omega_{I_k}}{\partial \varphi^i} \cdot d\varphi^{L_{I_k \cup \{i\}}} \end{aligned}$$

Twierdzenie 12.1. Niech M, N to rozmaitości gładkie, zaś h to gładkie odwzorowanie M w N , ω to k -forma gładka nad N . Pochodne zewnętrzne zadane są na rozmaitościach odpowiednio D_M, d_N . Wówczas:

$$d_M(h^*\omega) = h^*(d_N\omega)$$

Dowód. później...

□

Oczywiście nieuzasadnionym byłoby, gdyby taka pochodna zależała od wyboru mapy. Uzasadnia to alternatywna wersja definicji pochodnej zewnętrznej:

Definicja 12.2. Niech $\omega \in \Omega^k(M)$. Pochodną zewnętrzną formy ω nazywamy taką formę η , że dla dowolnej mapy (U, φ) zachodzi:

$$\eta|_U = \varphi^*(d((\varphi^{-1})^*\omega))$$

Intuicyjnie, chcemy wykorzystać dobrze zdefiniowane pochodne na \mathbb{R}^m , i przenieść je na rozmaitość:

$$\begin{array}{ccc} M & \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi} \\ \xleftarrow{\varphi^{-1}} \end{array} & \mathbb{R}^m \\ \omega \downarrow & & \downarrow \tilde{\omega} \\ T^*M & \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi^*} \\ \xleftarrow{(\varphi^{-1})^*} \end{array} & T^*\mathbb{R}^m \end{array}$$

Fakt: Powyższa definicja jest dobra, tzn. nie zależy od wyboru mapy

Dowód. Weźmy dwie mapy:

$$(U, \varphi) \quad (V, \psi)$$

Wówczas:

$$\begin{aligned} \varphi^* (d((\varphi^{-1})^* \omega)) &= (\varphi \circ \psi^{-1} \circ \psi)^* (d((\varphi^{-1})^* \omega)) \\ &= ((\varphi \circ \psi^{-1}) \circ \psi)^* (d((\varphi^{-1})^* \omega)) \\ &\stackrel{(\heartsuit)}{=} \psi^* (\varphi \circ \psi^{-1})^* (d((\varphi^{-1})^* \omega)) \\ &\stackrel{(\star)}{=} \psi^* (d((\varphi \circ \psi^{-1})^* (\varphi^{-1})^* \omega)) \\ &\stackrel{(\heartsuit)}{=} \psi^* (d((\varphi^{-1} \circ \varphi \circ \psi^{-1})^* \omega)) \\ &= \psi^* (d((\psi^{-1})^* \omega)) \end{aligned}$$

Przy czym w momentach:

(\heartsuit) skorzystaliśmy z własności cofania formy, jako działania transponowania, która umożliwia wyjęcie składowych działania, ale w odwrotnej kolejności

(\star) skorzystaliśmy z przemienności cofania i pochodnej

□

13 Pochodna kowariantna, przeniesienie równoległe i koneksje na wiązkach wektorowych

W tym rozdziale poszukujemy alternatywnych rodzajów pochodnych na rozmaitościach. Skupimy się na pochodnych cięć gładkich wiązki wektorowej (a więc rozważania prowadzimy ogólniej, niż do tej pory, ponieważ jak pamiętamy, wiązka styczna jest szczególnym przypadkiem wiązki wektorowej). Podobnie, jak w przypadku pochodnej Liego, będziemy starali się otrzymać coś na kształt „pochodnej kierunkowej” takich cięć.

Definicja 13.1. Niech (M, π_E, E) będzie gładką wiązką wektorową, $q \in E$. Niech zadane będą odpowiednie rzutowania i odwzorowanie styczne:

$$\begin{array}{ccc} q \in E & \xleftarrow{\pi_E} & TE \\ \pi_E \downarrow & & \downarrow d\pi_E \\ \pi(q) \in M & \xleftarrow{\pi} & TM \end{array}$$

E_q jest włóknem punktu q , tzn. $E_q = \pi_E^{-1} [\{\pi(q)\}]$, izomorficzne z przestrzenią liniową \mathbb{V} .

$$d\pi_E \Big|_q : T_q E \rightarrow T_{\pi_E(q)} M$$

Wówczas, dla dowolnego $q \in E$ podprzestrzeń:

$$\ker \left(d\pi_E \Big|_q \right) = \left\{ v \in T_q E : d\pi_E \Big|_q (v) = 0 \right\}$$

nazywamy przestrzenią pionową (wertykalną) w $T_q E$, oznaczamy ją

$$V_q E := \ker \left(d\pi_E \Big|_q \right)$$

Definicja 13.2. Niech (M, π_E, E) będzie gładką wiązką wektorową. Wówczas:

$$VE := \bigsqcup_{q \in E} V_q E$$

Wówczas wiązkę (E, π_E, VE) nazywamy wiązką pionową wiązki E .

Zauważmy, że przestrzeń pionowa w $T_q E$ jest podprzestrzenią liniową w $T_q E$. Z algebraicznych własności przestrzeni liniowych wiemy natomiast, że do podprzestrzeni liniowej istnieje dopełnienie liniowe. W przypadku wiązek wektorowych będziemy określali dopełnienie liniowe mianem przestrzeni horyzontalnej.

Definicja 13.3. Niech zadana będzie gładka wiązka wektorowa (M, π_E, E) z wiązką wertykalną (E, π_{TE}, VE) . Dla punktu $q \in E$ przestrzenią horyzontalną $H_q E$ nazwiemy podprzestrzeń $T_q E$, taką że:

$$\begin{aligned} H_q E &\subset T_q E \\ H_q E \cap V_q E &= \{\vec{0}\} \\ H_q E \oplus V_q E &= T_q E \end{aligned}$$

Wiazką horyzontalną nazwiemy:

$$HE := \bigsqcup_{q \in E} H_q E$$

W celu zaznajomienia się studentów z omawianym materiałem, zachęca się do rozważenia poniższego faktu:

Fakt: Omawiane przestrzenie mają następujące wymiary:

$$\begin{aligned} \dim E_q &= \dim V \\ \dim E &= \dim M + \dim V \\ \dim V_q E &= \dim V \\ \dim VE &= \dim E + \dim V \\ \dim TE &= \dim E + \dim T_q E = 2 \dim E \\ \dim H_q E &= \dim M \end{aligned}$$

Definicja 13.4. Koneksją na wiązce (M, π_E, E) nazywamy gładką dystrybucję HE na E , taką że:

$$HE \oplus VE = TE$$

Twierdzenie 13.1. Niech (M, π_E, E) będzie wiązką wektorową z koneksją HE . Niech $p \in M$ oraz $q \in \pi_E^{-1}[\{p\}]$. Wówczas dla gładkiej krzywej $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$, $\gamma(0) = p$ istnieje jedyna gładka krzywa $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow E$, taka że:

$$\begin{aligned} * \quad \tilde{\gamma}(0) &= q \\ * \quad \dot{\tilde{\gamma}}(t) &\in H_{\tilde{\gamma}(t)} E \\ * \quad \pi_E \circ \tilde{\gamma} &= \gamma \end{aligned}$$

Krzywą $\tilde{\gamma}$ nazywamy podniesieniem krzywej γ względem koneksji HE

14 Czy to koniec?

W dalszej części, nie wynikającej już z wykładu, chciałbym wprowadzać dalsze struktury, takie jak

- ☛ wspomniane w rozdziale 13 koneksje
- ☛ podstawy geometrii zespolonej
- ☛ tensory (pseudo)metryczne i geometrię (pseudo)Riemannowską, wstęp do Ogólnej Teorii Względności
- ☛ podstawy geometrii symplektycznej, formalizm hamiltonowski na rozmaitościach, nawiasy Poissona, może wzmianka o kwantyzacji
- ☛ grupy i algebry Liego
- ☛ geometrię subriemanowską

i dalsze zagadnienia, które przyjdą mi do głowy, a które odważę się przedstawić.