Zad. 1. W prążku widma spektrometrycznego zmierzono następujące liczby zliczeń:

energia [keV]	liczba zliczeń
60	1
61	3
62	8
63	16
64	25
65	31
66	26
67	17
68	5
69	2
70	1

wyznaczyć przedziały ufności, w którym na poziomie ufności 1-α=90%, 1-α=95% oraz 1-α=99% zawarta jest energia prążka. Zadanie rozwiązać dwoma metodami (korzystając z rozkładu t-Studenta oraz stosując przybliżenie rozkładem Gaussa) i porównać wyniki.

Liczba wszystkich zliczeń:

$$N = \sum_i N_i = 135$$

Średnia z próby:

$$\bar{E} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} N_i \cdot E_i$$

$$\bar{E} = \frac{8765}{135} = 64{,}9259\ keV$$

Odchylenie standardowe:

$$\hat{\sigma}_E = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} N_i (E_i - \bar{E})^2}$$

$$\hat{\sigma}_E = \sqrt{\frac{429{,}259}{134}} \cong 1{,}78981$$

Estymacja odchylenia standardowego z oszacowania wartości oczekiwanej:

$$\hat{\sigma}_{\bar{E}} = \frac{\hat{\sigma}_E}{\sqrt{N}}$$

$$\hat{\sigma}_{\bar{E}} = \frac{1{,}78981}{\sqrt{135}} \cong 0{,}15404$$

<u>Rozkład t-Studenta:</u>

$$\bar{E} - t_{\frac{\alpha}{2},N-1}\frac{\hat{\sigma}_{\bar{E}}}{\sqrt{N}} < E < \bar{E} + t_{\frac{\alpha}{2},N-1}\frac{\hat{\sigma}_{\bar{E}}}{\sqrt{N}}$$

Stopnie swobody:

$N - 1 = 134$ → przyjmujemy 120

Dla 1-α=90%:

$$\alpha = 0{,}1$$

$$t_{0{,}05\,,134} \cong t_{0{,}05\,,120} = 1{,}658$$

$$E = 64{,}9259 \pm 1{,}658 \cdot 0{,}15404$$

$$E = 64{,}9259 \pm 0{,}2554$$

Dla 1-α=95%:

$$\alpha = 0{,}05$$

$$t_{0{,}025\,,134} \cong t_{0{,}025\,,120} = 1{,}980$$

$$E = 64{,}9259 \pm 1{,}980 \cdot 0{,}15404$$

$$E = 64{,}9259 \pm 0{,}305$$

Dla 1-α=99%:

$$\alpha = 0{,}01$$

$$t_{0{,}005\,,134} \cong t_{0{,}005\,,120} = 2{,}617$$

$$E = 64{,}9259 \pm 2{,}617 \cdot 0{,}15404$$

$$E = 64{,}9259 \pm 0{,}40312$$

<u>Rozkład Gaussa:</u>

Dla 1-α=90%:

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}95$$

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = -1{,}64$$

$$E = 64{,}9259 \pm 1{,}64 \cdot 0{,}15404$$

$$E = 64{,}9259 \pm 0{,}25263$$

Dla 1-α=95%:

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}975$$

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = -1{,}96$$

$$E = 64{,}9259 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}15404$$

$$E = 64{,}9259 \pm 0{,}30192$$

Dla 1-α=99%:

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}995$$

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = -2{,}58$$

$$E = 64{,}9259 \pm 2{,}58 \cdot 0{,}15404$$

$$E = 64{,}9259 \pm 0{,}39742$$

	Rozkład t-Studenta	**Rozkład Gaussa**
1-α=90%	$E \in (64{,}6705; 65{,}1813)$	$E \in (64{,}6733; 65{,}1785)$
1-α=95%	$E \in (64{,}6209; 65{,}2309)$	$E \in (64{,}624; 65{,}2278)$
1-α=99%	$E \in (64{,}5228; 65{,}329)$	$E \in (64{,}5285; 65{,}3233)$

Wnioski:
Jak widać na powyższym zestawieniu wyników poziomy ufności otrzymane przy użyciu rozkładu t-Studenta i rozkładu normalnego wyszły bardzo podobne (pomijalnie mniejsze wartości niepewności dla rozkładu Gaussa). Głównym tego powodem jest duża liczba zliczeń N dla których przeprowadzaliśmy badanie, ponieważ rozkład t-Studenta dla N>30 zaczyna pokrywać się z rozkładem Gaussa.

Zad. 2. Badano stężenia ołowiu we krwi oraz w tkance kostnej i uzyskano następujące wyniki:

krew [ppm]	5,0	6,1	5,2	3,6	4,2
kość [ppm]	26	30	27	18	21

Wyznaczyć współczynnik korelacji między stężeniem ołowiu we krwi i w tkance kostnej oraz na poziomie istotności α=0,01; 0,02; 0,05 zweryfikować hipotezę H_0: ρ= 0, przy hipotezie H_1: ρ≠0. Wyznaczyć proste regresji (zm. Y względem X oraz zm. X względem Y) i razem z danymi przedstawić je na jednym wykresie.

Wyznaczenie współczynnika korelacji

Wzór na współczynnik korelacji z próby:

$$\rho_p = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{s_x^* s_y^*}$$

Obliczamy poszczególne wyrażenia ze wzoru:

$$\overline{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \cdot y_i = \frac{606,4}{5} = 121,28$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{24,1}{5} = 4,82$$

$$\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i = \frac{122}{5} = 24,4$$

$$s_x^* = \sqrt{\frac{1}{N}\sum\nolimits_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{0,7376} \approx 0,8588$$

$$s_y^* = \sqrt{\frac{1}{N}\sum\nolimits_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2} = \sqrt{18,64} \approx 4,3174$$

Teraz obliczone wartości składników podstawiamy do wzoru i obliczamy wartość współczynnika korelacji z próby:

$$\rho_p = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{s_x^* s_y^*} = \frac{121,28 - 4,82 \cdot 24,4}{0,8588 \cdot 4,3174} = \frac{3,672}{0,8588 \cdot 4,3174} \approx 0,9903$$

Weryfikacja hipotezy

Jeżeli prawdziwa jest hipoteza H_0 to zmienna losowa t ma rozkład t-Studenta o N-2 stopniach swobody

$$t = \frac{p_p}{\sqrt{1 - \rho_p^2}}\sqrt{N-2} = \frac{0,9903}{\sqrt{1 - 0,9903^2}}\sqrt{5-2} = \frac{0,9903}{\sqrt{0,01930591}}\sqrt{3} \approx 12,3447$$

Ze względu, ze nasz test jest obustronny sprawdzamy w tabeli wartość $t_{1-\frac{\alpha}{2},\nu}$, dla poszczególnych wartości α wynoszą one:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,01 & t_{0.995,3} &= 5,841 \\ \alpha &= 0,02 & t_{0.990,3} &= 4,541 \\ \alpha &= 0,05 & t_{0.975,3} &= 3,182 \end{aligned}$$

Dla wszystkich wartość α zachodzi poniższa nierówności:

$$|t| > t_{1-\frac{\alpha}{2},\nu}$$

Więc dla każdego z wymienionych poziomów istotności możemy odrzucić hipotezę H_0.

Proste regresji

Wyznaczamy proste regresji II rodzaju, które wyrażają się wzorami:

$$X = a_x\, Y + b_x - regresja\ zmiennej\ losowej\ X\ względem\ zmiennej\ losowej\ Y$$
$$Y = a_y\, X + b_y - regresja\ zmiennej\ losowej\ Y\ względem\ zmiennej\ losowej\ X$$

Obliczamy potrzebne do tego współczynniki:

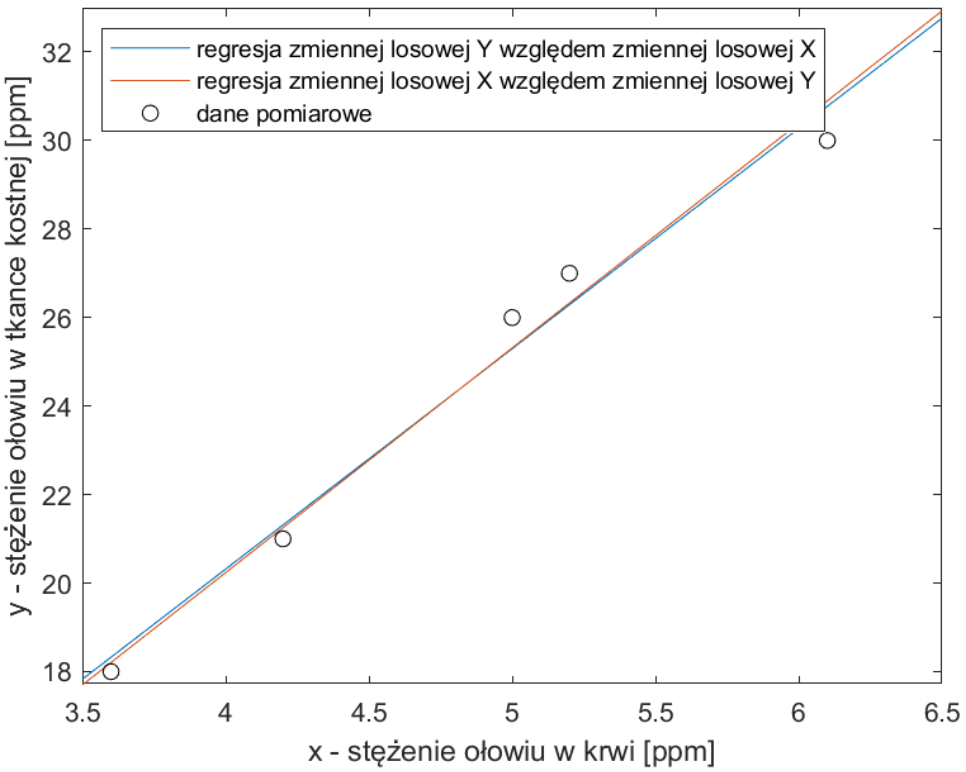
$$a_x = \rho_p \frac{s_x^*}{s_y^*} = 0{,}9903 \cdot \frac{0{,}8588}{4{,}3174} \approx 0{,}1970$$
$$b_x = \bar{x} - a_x \bar{y} = 4{,}82 - 0{,}1970 \cdot 24{,}4 = 0{,}0132$$
$$a_y = \rho_p \frac{s_y^*}{s_x^*} = 0{,}9903 \cdot \frac{4{,}3174}{0{,}8588} \approx 4{,}9785$$
$$b_y = \bar{y} - a_y \bar{x} = 24{,}4 - 4{,}9785 \cdot 4{,}82 = 0{,}4036$$

Ostatecznie nasze równania wyglądają tak:

$$X = 0{,}1970Y + 0{,}0132$$
$$Y = 4{,}9785\, X + 0{,}4036$$

Pierwsze z nich przekształcamy do poniższej postaci, żeby móc je wyświetlić na jednym wykresie:

$$Y = \frac{1}{a_x} X - \frac{b_x}{a_x} \approx 5{,}0761X - 0{,}067$$



Wykres 1 - proste regresji wraz z danymi pomiarowymi