Laboratorium grafiki i multimediów

Przekształcenia geometryczne 3D

Bartosz Ziemkiewicz

Wydział Matematyki i Informatyki
UMK, Toruń

7 maja 2013

Współrzędne jednorodne

- Współrzędne jednorodne to sposób reprezentacji punktów n-wymiarowych za pomocą $n+1$ współrzędnych.
- W przestrzeni trójwymiarowej punkt (x, y, z) we współrzędnych jednorodnych jest reprezentowany jako trójka (x, y, z, W).
- Mówimy, że dwie trójki (x, y, z, W) i (x', y', z', W') reprezentują ten sam punkt wtedy i tylko wtedy gdy jeden jest wielokrotnością drugiego (np. $(1, 3, 5, 4)$ i $(2, 6, 10, 8)$. Każdy punkt przestrzeni ma więc nieskończenie wiele reprezentacji we współrzędnych jednorodnych.
- Jeżeli $W \neq 0$ to możemy przez nią podzielić pozostałe współrzędne. (x, y, z, W) reprezentuje ten sam punkt co $(x/W, y/W, z/W, 1)$. Liczby x, y, z są wówczas współrzędnymi kartezjańskimi punktu jednorodnego. W dalszych rozważaniach zwykle przyjmować będziemy, że $W = 1$, czyli punkt (x, y, z) zapisywać będziemy jako $(x, y, z, 1)$.

Przesunięcie (translacja)

- Przesunięcie w 3D jest zwykłym rozszerzeniem przesunięcia w 2D.
- W wyniku przesunięcia punktu $P = (x, y, z, 1)$ o wektor $T = [t_x, t_y, t_z]$ otrzymujemy punkt $P' = (x', y', z', 1)$, którego współrzędne są określone wzorem

$$
\begin{aligned}
x' &= x + t_x \\
y' &= y + t_y \\
z' &= z + t_z
\end{aligned}
$$

- W zapisie macierzowym otrzymujemy

$$
\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}.
$$

Skalowanie (względem punktu $(0, 0, 0)$)

- Skalowanie w 3D jest również zwykłym rozszerzeniem skalowania w 2D.
- W wyniku tej operacji punkt $P = (x, y, z, 1)$ przechodzi na punkt $P' = (x', y', z', 1)$, którego współrzędne są określone wzorem

$$\begin{aligned} x' &= s_x \cdot x \\ y' &= s_y \cdot y \\ z' &= s_z \cdot z \end{aligned}$$

- W zapisie macierzowym otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Obrót względem osi OX

- W wyniku obrotu o kąt α względem osi OX punkt $P = (x, y, z, 1)$ przechodzi na punkt $P' = (x', y', z')$, którego współrzędne są określone wzorem

$$
\begin{aligned}
x' &= x \\
y' &= y \cos\alpha - z \sin\alpha \\
z' &= y \sin\alpha + z \cos\alpha
\end{aligned}
$$

- W zapisie macierzowym otrzymujemy

$$
\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}.
$$

Obrót względem osi OY

- W wyniku obrotu o kąt α względem osi OY punkt $P = (x, y, z, 1)$ przechodzi na punkt $P' = (x', y', z')$, którego współrzędne są określone wzorem

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + z\sin\alpha \\ y' &= y \\ z' &= -x\sin\alpha + z\cos\alpha \end{aligned}$$

- W zapisie macierzowym otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Obrót względem osi OZ

- W wyniku obrotu o kąt α względem osi OZ punkt $P = (x, y, z, 1)$ przechodzi na punkt $P' = (x', y', z')$, którego współrzędne są określone wzorem

$$\begin{aligned} x' &= x \cos\alpha - y \sin\alpha \\ y' &= x \sin\alpha + y \cos\alpha \\ z' &= z \end{aligned}$$

- W zapisie macierzowym otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pochylenie (shearing)

- W przestrzeni 3D można określić 3 operacje pochylenia (wzdłuż każdej z osi).
- W wyniku operacji pochylenia wzdłuż osi OZ punkt $P = (x, y, z, 1)$ przechodzi na punkt $P' = (x', y', z', 1)$, którego współrzędne są określone wzorem

$$x' = x + z \cdot sh_x$$
$$y' = y + z \cdot sh_y$$
$$z' = z$$

  gdzie (sh_x, sh_y) są współczynnikami pochylenia.
- W zapisie macierzowym otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & sh_x & 0 \\ 0 & 1 & sh_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}.$$

  Pozostałe operacje pochylenia określamy analogicznie.

Do wszystkich opisanych przekształceń można łatwo wyznaczyć przekształcenia odwrotne (i macierze tych przekształceń).

- Dla przesunięcia wystarczy postawić znak minus przed współczynnikami t_x, t_y, t_z.
- Dla skalowania zastępujemy s_x, s_y i s_z ich odwrotnościami $1/s_x, 1/s_y$ i $1/s_z$.
- Dla obrotów zastępujemy kąt α kątem $-\alpha$.

Składanie przekształceń

- Jeżeli musimy wykonać kilka kolejnych przekształceń na tym samym obiekcie możemy oczywiście przemnożyć punkty obiektu najpierw przez macierz pierwszego przekształcenia potem przez macierz drugiego itd.
- Możemy też jednak wyznaczyć najpierw macierz złożenia wszystkich przekształceń i dopiero potem przemnożyć przez nią punkty przekształcanego obiektu.
- Macierz złożenia przekształceń uzyskujemy mnożąc przez siebie macierze wszystkich składanych przekształceń. Uwaga: operacje różnego typu zwykle nie są przemienne.
- Macierz przekształcenia odwrotnego to macierz odwrotna do macierzy danego przekształcenia.