Grupa A

Zadanie 1. *(10 pkt)*
Rozważmy przestrzeń probabilistyczną $\left([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda\right)$*, gdzie* λ *jest miarą Lebesgue'a. Niech* $Y_n(\omega) = \ln(\omega+1) \cdot \mathbf{1}_{[0,1-1/n)} + 2\mathbf{1}_{[1-1/n,1]}$ *oraz niech* $X(\omega) = 2\omega^2$.

- *Wyznacz postać filtracji generowanej przez proces* $\{Y_n\}$.
- *Wyznacz postać procesu* $X_n = \mathbb{E}\,(X|Y_n)$.
- *Czy proces* $Y_n = X_n^2$ *jest martyngałem względem filtracji generowanej przez proces* X*?*

Zadanie 2. *(10 pkt)*
Niech X_i *będą niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że dla każdego* k *naturalnego dodatniego zachodzi* $\mathbb{P}(X_k = k) = \frac{1}{k}$ *oraz* $\mathbb{P}(X_k = 0) = \frac{k-1}{k}$*. Niech* $M_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$*,* $M_0 = 0$*. Udowodnij, że proces* M *jest martyngałem względem filtracji genereowanej przez zmienne* X_i.

Zadanie 3. *(10 pkt)*
Niech (X_i) *będzie ciągiem całkowalnych zmiennych losowych i niech* $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$*. Załóżmy, że dla dowolnego* $n \geq 1$ *zachodzi* $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = aX_n + bX_{n-1}$*, gdzie* $a \in (0,1)$ *i* $a + b = 1$*. Dla jakich wartości parametru* α $S_n = \alpha X_n + X_{n-1}$ *jest martyngałem względem filtracji* $\{\mathcal{F}_n\}$*?*

Zadanie 4. *(10 pkt)*
Niech S, T *będą momentami stopu względem pewnej filtracji z czasem* $[0, +\infty)$*. Sprawdź, czy momentem stopu jest zmienna losowa:*

1. $S + T/2$,
2. $\min(S,T) + \max(S,T)$.

Zadanie 5. *(5 pkt)*
Podaj definicje podmartyngału.

Grupa B

Zadanie 1. *(10 pkt)*
Rozważmy przestrzeń probabilistyczną $\left([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda\right)$*, gdzie* λ *jest miarą Lebesgue'a. Niech* $Y_n(\omega) = 2\omega^2 \cdot \mathbf{1}_{[0,1-1/n^2)} + \mathbf{1}_{[1-1/n^2,1]}$ *oraz niech* $X(\omega) = \sqrt{\omega}$.

- *Wyznacz postać filtracji generowanej przez proces* $\{Y_n\}$.
- *Wyznacz postać procesu* $X_n = \mathbb{E}\,(X|Y_n)$.
- *Czy proces* $Y_n = X_n^3$ *jest martyngałem względem filtracji generowanej przez proces* X*?*

Zadanie 2. *(10 pkt)*
Niech $\{X_n\}$ *będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o średniej* 0*, całkowalnych w* 2 *potędze. Niech* $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ *oraz* $T_n^2 = \sum_{k=1}^{n} Var[X_k]$*. Udowodnij, że* $(S_n^2 - T_n^2)$ *jest martyngałem względem filtracji naturalnej procesu* X.

Zadanie 3. *(10 pkt)*
Niech $(Y_n)_{n=0}^{\infty}$ *będzie ciągiem całkowalnych zmiennych losowych adaptowanym do filtracji* $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$*. Załóżmy, że istnieją ciągi liczb* $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, $n \geq 0$ *takie, że* $\mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) = u_n Y_n + v_n$*. Znajdź ciągi liczbowe* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $n \geq 0$ *takie, że ciąg zmiennych losowych* $M_n = a_n Y_n + b_n$, $n > 1$ *jest martyngałem względem filtracji* $\{\mathcal{F}_n\}$.

Zadanie 4. *(10 pkt)*
Niech S, T *będą momentami stopu względem pewnej filtracji z czasem* $[0, +\infty)$*. Sprawdź, czy momentem stopu jest zmienna losowa:*

1. $(S + T)/2$,
2. $\min(S,T) + T$.

Zadanie 5. *(5 pkt)*
Podaj definicję warunkowej wartości oczekiwanej.