

Procesy stochastyczne

Zestaw zadań nr 1

Zadanie 1. Niech $X_i: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Omega_i, \mathcal{F}_i), i = 1, 2, \dots, n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi i niech $g_i: (\Omega_i, \mathcal{F}_i) \rightarrow (\Omega'_i, \mathcal{F}'_i), i = 1, 2, \dots, n$ będą mierzalne. Co można powiedzieć na temat niezależności $g_i \circ X_i$?

Zadanie 2. Niech f, g będą mierzalnymi funkcjami borelowskimi. Udowodnij, że są one niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ zachodzi:

$$\mu(f^{-1}[a, b] \cap g^{-1}[c, d]) = \mu(f^{-1}[a, b]) \cap \mu(g^{-1}[c, d])$$

Zadanie 3. Niech X będzie dyskretną zmienną losową przyjmującą wartości $1, 2, 3, \dots$ z prawdopodobieństwami odpowiednio p_1, p_2, p_3, \dots . Niech Y będzie taką zmienną losową, że gdy $X = n$, Y przyjmuje nieujemne wartości zgodnie z rozkładem o gęstości f_n . Znajdź prawdopodobieństwo, że $1 \leq X + Y \leq 3$.

Zadanie 4. Niech X będzie zmienną losową przyjmującą tylko skończenie wiele wartości x_1, x_2, \dots, x_n i niech Y będzie taką zmienną losową, że $Y \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ (tzn. $\mathbb{E}Y < +\infty$). Udowodnij, że zachodzi równość

$$\mathbb{E}(Y|X = x_i) = \frac{1}{\mathbb{P}(X = x_i)} \int_{\{X=x_i\}} Y d\mathbb{P}.$$

Co można powiedzieć na temat $\mathbb{E}(Y|B)$, gdzie B jest pewnym mierzalnym zbiorem o dodatniej mierze?

Zadanie 5. Niech $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ będzie rodziną wzajemnie rozłącznych zbiorów takich, że $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$ i niech $X \in \mathcal{L}_1(\Omega)$. Udowodnij, że zachodzi równość

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i) \mathbb{E}(X|B_i).$$

Zadanie 6. Niech σ -ciało \mathcal{F} będzie generowane przez skończoną rodzinę rozłącznych zbiorów B_i i niech $X \in \mathcal{L}_1(\Omega)$. Znajdź postać $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$.

Zadanie 7. Niech X będzie nieujemną zmienną losową o skończonym pierwszym momencie. Pokaż, że zachodzi

1. $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t) dt,$
2. $\mathbb{P}(X > \alpha) \leq \alpha^{-1} \mathbb{E}(X|\mathcal{G}).$

Zadanie 8. Niech $X \in \mathcal{L}_2(\Omega)$. Zdefiniujmy warunkową wariancję względem σ -ciała \mathcal{G} w następujący sposób

$$\mathbb{V}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X|\mathcal{G}))^2 | \mathcal{G}\right).$$

Wykaż, że zachodzi

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{V}(X|\mathcal{G})) + \mathbb{V}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})).$$

Zadanie 9. Niech $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ i niech \mathbb{P} będzie miarą Lebesgue'a na tej przestrzeni. Wyznacz warunkową wartość oczekiwaną $\mathbb{E}(f|\mathcal{G})$, jeśli:

1. $f(x, y) = x, \mathcal{G} = \sigma(y),$
2. $f(x, y) = x - y, \mathcal{G} = \sigma(x + y).$

Zadanie 10. Niech $\Omega = [0, 1]$ i niech \mathbb{P} będzie miarą Lebesgue'a na tej przestrzeni. Niech $f(x) = x^2$ i $g(x) = 2\mathbf{1}_{[0, 1/2)} + x\mathbf{1}_{[1/2, 1]}$. Znajdź $\mathbb{E}(f|g)$.

Zadanie 11. Niech $(\Omega = [0, 1], \mathcal{F} = \mathcal{B}_{[0, 1]}, \lambda)$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Niech $Y(\omega) = \omega(1 - \omega)$. Udowodnij, że dla dowolnej zmiennej losowej X określonej na tej przestrzeni zachodzi

$$\mathbb{E}(X|Y)(\omega) = \frac{X(\omega) + X(1 - \omega)}{2}.$$

Zadanie 12. Niech X_1, X_2, \dots będzie ciągiem niezależnych i całkowalnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie normalnym $(\mathcal{N}(\mu, \sigma))$ i niech τ będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem λ niezależną od tego ciągu. Znajdź wartość oczekiwaną zmiennej losowej

$$\xi \stackrel{d}{=} \sum_{n=1}^{\tau} X_n.$$

Zadanie* 13. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną i niech \mathcal{G} będzie pod- σ -ciałem ciała \mathcal{F} . Niech $Y \in \mathcal{L}_1(\Omega)$. Wtedy mamy, że $\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}) \in \mathcal{L}_1(\Omega)$, a zatem $A(Y) = \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ definiuje liniowy operator na przestrzeni $\mathcal{L}_1(\Omega)$. Wykaż, że

1. $\|A\| = 1$,
2. Definiując iloczyn skalarny jako $[X, Y] = \int_{\Omega} XY d\mathbb{P}$ wykaż, że A jest samo-sprzężony.