Zestaw 3

Zadanie 1. *Niech A będzie zdarzeniem losowym takim, że $\mathbb{P}(A) > 0$ i niech X będzie zmienną losową taką, że $\mathbb{E}X < \infty$. Wykaż, że wtedy $\mathbb{E}(X|A) = \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \int_A X d\mathbb{P}$.*

Zadanie 2. *Niech $\{A_i\}_{i\in I}$ będzie przeliczalnym rozbiciem przestrzeni Ω i takim, że dla dowolnego i $\mathbb{P}(A_i) > 0$. Wykaż, że wtedy $\mathbb{E}X = \sum_{i\in I} \mathbb{E}(X|A_i)\mathbb{P}(A_i)$.*

Zadanie 3. *Niech $\Omega = [0, 1]$ i niech $\mathbb{P}$ będzie miarą Lebesgue'a na tym odcinku. Znajdź $\mathbb{E}(f|\mathcal{F})$ jeśli*
— *$f(x) = \sqrt{x}$ i $\mathcal{F}$ jest generowane przez zbiory $[0, 1/4)$ i $[1/4, 1]$,*
— *$f(x) = -x$ i $\mathcal{F}$ jest generowane przez zbiory $[0, 1/4)$ i $[1/3, 1]$.*

Zadanie 4. *Niech zmienna losowa X będzie całkowalna z kwadratem. Określmy $Var(X|\mathcal{F}) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}))|\mathcal{F}\right)$. Udowodnij, że*

$$\begin{aligned} VarX =& \mathbb{E}\left(Var(X|\mathcal{F})\right) + Var\left(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})\right) \\ (\mathbb{E}(X|\mathcal{F}))^2 &\leq \mathbb{E}(X^2|\mathcal{F}) \\ VarX &\geq Var\left(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})\right). \end{aligned}$$

Zadanie 5. *Niech $X_1, X_2, \dots, X_n$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie i takim, że $\mathbb{E}X_1 < \infty$. Wyznacz $\mathbb{E}(X_1|\sum_{i=1}^n X_i)$.*

Zadanie 6. *Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$. Wyznacz $\mathbb{E}(X|X^2 + Y^2)$.*

Zadanie 7. *Niech $\{X_i\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie i takim, że $\mathbb{E}|X_i| < \infty$. Niech $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ i niech $\mathcal{F}_n = \sigma\left(S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, \dots\right)$. Wyznacz*
— *$\mathbb{E}(X_1|\mathcal{F}_n)$,*
— *$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i|\mathcal{F}_n\right)$, gdzie $\sum_{i=1}^n a_i = 1$.*

Zadanie 8. *Niech Y będzie całkowalną zmienną losową i niech X, Z będą zmiennymi losowymi takimi, że (X, Y) jest niezależne od Z. Pokaż, że wtedy $\mathbb{E}(Y|X, Z) = \mathbb{E}(Y|X)$.*

Zadanie 9. *Niech X, Y będą całkowalnymi z kwadratem zmiennymi losowymi. Udowodnij, że zachodzi*

$$\mathbb{E}\left(X\mathbb{E}(Y|\mathcal{F})\right) = \mathbb{E}\left(Y\mathbb{E}(X|\mathcal{F})\right).$$

Zadanie 10. *Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem λ. Znajdź warunkową wartość oczekiwaną tej zmiennej losowej pod warunkiem, że przyjmuje ona wartość parzystą.*

Zadanie 11. *Niech zmienne losowe X, Y mają ten sam rozkład. Przy jakim dodatkowym założeniu zachodzi*

$$\mathbb{E}\left(\frac{X}{X+Y}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{Y}{X+Y}\right)?$$

Przy tym założeniu oblicz tą wartość.

Zadanie 12. *Niech X, Y będą zmiennymi losowymi o standardowym rozkładzie normalnym i kowariancji równej ρ. Znajdź $\mathbb{E}(X|Y)$.*

Zadanie 13. *Niech zmienne losowe* X, Y *będą określone na pewnej przestrzeni probabilistycznej w następujący sposób*

— $X(x) = 2x^2, \quad Y(x) = 1 - |2x - 1|,$
— $X(x) = 2x^2, \quad Y(x) = 1 - \frac{1}{2}|3x - 1|,$
— $X(x) = x^2, \quad Y(x) = 2\mathbf{1}_{[0,1/2)} + x\mathbf{1}_{[1/2,1]}.$

Znajdź $\mathbb{E}(X|Y)$.

Zadanie 14. *Niech* $(\Omega = [0,1], \mathcal{F} = \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$ *będzie przestrzenią probabilistyczną. Niech* $Y(\omega) = \omega(1-\omega)$. *Udowodnij, że dla dowolnej zmiennej losowej* X *określonej na tej przestrzeni zachodzi*

$$\mathbb{E}(X|Y)(\omega) = \frac{X(\omega) + X(1-\omega)}{2}.$$