Procesy stochastyczne
Zestaw zadań nr 4

19 listopada 2018

Zadanie 1. *Niech proces* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *będzie submartyngałem względem pewnej filtracji* $\{\mathcal{F}_n\}$ *oraz niech* τ *będzie momentem stopu względem tej filtracji. Udowodnij, że zastopowany proces* $\{S_n^\tau\}_{n\in\mathbb{N}}$ *jest również submartyngałem. Czy to samo zachodzi dla supermartyngałów?*

Zadanie 2. *Niech* $X_1, X_2, \ldots$ *będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, nieujemnymi z wartością oczekiwaną równą* 1*. Udowodnij, że dla dowolnego ograniczonego momentu stopu* T *zachodzi*

$$\mathbb{E}\prod_{i=1}^{T} X_i = 1.$$

Zadanie 3. *Niech* $X_0, X_1, X_2, \ldots$ *będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych oo tym samym rozkładzie. Niech* F *będzie dystrybuantą tego rozkład oraz niech* $\tau = \inf\{n\colon X_n > X_0\}$*. Wyznacz rozkład* τ *oraz jego wartość oczekiwaną.*

Zadanie 4. *Niech* $\{M_n\}$ *będzie nieujemnym submartyngałem całkowalnym w* p*- tej potędze,* $p > 1$ *i niech* $\lambda > 0$*. Udowodnij, że zachodzi wtedy*

$$\mathbb{P}\left(\max_{k\leqslant n} M_k \geqslant \lambda\right) \leqslant \frac{1}{\lambda^p}\int_{\{\max_{k\leqslant n} M_k \geqslant \lambda\}} M_n^p d\mathbb{P} \leqslant \frac{1}{\lambda^p}\mathbb{E}M_n^p.$$

Zadanie 5. *Nierówność Doob'a w* L^p

- *Niech* X, Y *będą nieujemnymi zmiennymi losowymi i niech* $Y \in {}^p(\Omega)$*,* $p > 1$*. Ponadto niech dla dowolnego* $x > 0$ *zachodzi*

$$x\mathbb{P}(X \geqslant x) \leqslant \int_{\{X\geqslant x\}} Y d\mathbb{P}.$$

Udowodnij, że wtedy $X \in L^p(\Omega)$ oraz

$$||X||_p \leqslant \frac{p}{p-1}||Y||_p.$$

- *Korzystając z faktu wykazanego powyżej udowodnij, że dla dowolnego nieujemnego submartyngału M takiego, że dal dowolnego n $\mathbb{E}M_n^p < \infty$ zachodzi*

$$\left(\mathbb{E}(\max_{k\leqslant n} M_k)^p\right)^{1/p} \leqslant \frac{p}{p-1}\left(\mathbb{E}M_n^p\right)^{1/p}.$$

Zadanie 6. *Niech X będzie symetrycznym błądzeniem losowym postaci $X_n = \sum_{i=1}^n Y_n$ i niech $\{\mathcal{F}_n\}$ będzie filtracją generowaną przez zmienne $Y_1, Y_2, \ldots$. Niech $T = \inf\{n\colon |X_n| = K\}$. Udowodnij*

- *proces $Z_n = (-1)^n \cos\left(\pi \cdot (X_n + K)\right)$ jest martyngałem,*
- *proces Z_n spełnia założenia twierdzenia o opcjonalnym stopowaniu,*
- *znajdź $\mathbb{E}\left[(-1)^T\right]$.*

Zadanie 7. *Udowodnij, że dla dowolnego submartyngału M i dla dowolnego $\lambda > 0$ zachodzi*

$$\mathbb{P}\left(\min_{k\leqslant n} M_k \leqslant -\lambda\right) \leqslant \frac{1}{\lambda}\int_{\{\min_{k\leqslant n} M_k \geqslant -\lambda\}} M_n d\mathbb{P} - \mathbb{E}M_0 \leqslant \frac{1}{\lambda^p}\mathbb{E}M_n^+ - \mathbb{E}M_0 \leqslant \frac{1}{\lambda^p}\mathbb{E}|M_n| - \mathbb{E}M_0.$$

Zadanie 8. *Pokażemy, że 2 jest najlepszą stałą w nierówności Doob'a dla martyngałów w L^2.*
Niech $\Omega = [0,1], \mathcal{F} = \mathcal{B}_{(0,1)}, \mathbb{P} = \lambda$. Określmy filtrację

$$\mathcal{F}_t = \{A \in \mathcal{F}\colon (t,1) \subset A \text{ lub } A \subset (0,t])\}.$$

- *Pokaż, że dla dowolnego $Y \in L^1(\Omega)$ martyngał $M_t = \mathbb{E}\left(Y|\mathcal{F}_t\right)$ jest dany jako*

$$M_t(\omega) = \begin{cases} Y(\omega), & 0 < \omega \leqslant t \\ \frac{1}{1-t}\int_t^1 Y(s)ds, & t < \omega < 1 \end{cases}$$

- *Niech $Y(\omega) = (1-\omega)^{-a}$ dla $0 < a < 1/2$. Pokaż, że $Y \in L^2(\Omega)$ oraz martyngał zdefiniowany jako $M_t = \mathbb{E}\left(Y|\mathcal{F}_t\right)$ jest postaci*

$$M_t(\omega) = \frac{1}{1-a}\frac{1}{(1-t)^a} = \frac{1}{1-a}Y(t), \ t < \omega < 1.$$

- *Udowodnij, że dla każdego* ω $sup_t M_t = \frac{1}{1-a}$ *oraz*

$$||sup_t M_t||_2 = \frac{1}{1-a}||Y||_2 = \frac{1}{1-a}||M_\infty||_2.$$

- *Rozważmy granicę funkcji* $(1-a)^{-1}$ *przy* $a \to 1/2$. *Jaki stąd wniosek?*

Zadanie 9. *Udowodnij, że jeżeli ciąg zmiennych losowych* $X_1, X_2, \ldots$ *jest dominowany przez pewną dodatnią i całkowalną zmienną losową* Y, *to ciąg ten jest jednostajnie całkowalny.*

Zadanie 10. *Niech ciągi* $X_1, X_2, \ldots,$ $Y_1, Y_2, \ldots$ *oraz zmienna losowa* Y *będzie określona na tej samej przestrzeni probabilistycznej. Niech ponadto zachodzi, że* $|X_n - Y_n| \xrightarrow{P} 0$ *oraz* $Y_n \xrightarrow{d} Y$. *Udowodnij, że wtedy* $X_n \xrightarrow{d} Y$.

Zadanie 11. *Niech* $F_1, F_2, \ldots, F$ *będą dystrybuantami pewnych rozkładów. Udowodnij, że ciąg* $\{F_n\}$ *zbiega słabo do* F *wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego* $\epsilon > 0, h > 0$ *oraz* t *istnieje* $N(\epsilon, h, t)$ *takie, że dla każdego* $n > N(\epsilon, h, t)$ *zachodzi*

$$F(t-h) - \epsilon < F_n(t) < F(t+h) + \epsilon.$$

Zadanie 12. *Niech* F *będzie dystrybuantą pewnego rozkładu o zerowej wartości oczekiwanej i jednostkowej wariancji. Wybierzmy pewien ciąg liczb dodatnich* $\{\sigma_k\}$ *i określmy ciąg dystrybuant* $F_k(x) = F(x/\sigma_k)$. *Przez* s_n^2 *oznaczmy sumę wariancji z* n *pierwszych rozkładów* F_k. *Wykaż, że warunek Lindeberga jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy* $s_n \to \infty$ *oraz* $\sigma_n/s_n \to 0$.

Zadanie 13. *Na przestrzeni probabilistycznej* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ *niech będzie dany ciąg całkowalnych zmiennych losowych* $X_1, X_2, \ldots,$ *całkowalna zmienna losowa* X *oraz pod-*σ*-ciało* $\mathcal{F}$. *Udowodnij*

- $X_n \xrightarrow{p.n.} X$ *to* $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}) \xrightarrow{p.n.} \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$,
- $X_n \xrightarrow{P} X$ *to* $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}) \xrightarrow{P} \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$,
- $X_n \xrightarrow{L^p} X$ *to* $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}) \xrightarrow{L^p} \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$,
- $X_n \xrightarrow{d} X$ *to* $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}) \xrightarrow{d} \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$.