Procesy stochastyczne
Zestaw zadań nr 1

Zadanie 1. *Niech* $X_i \colon (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega_i, \mathcal{F}_i)\,, i = 1, 2, \dots, n$ *będą niezależnymi zmiennymi losowymi i nich* $g_i \colon (\Omega_i, \mathcal{F}_i) \to (\Omega_i', \mathcal{F}_i')\,, i = 1, 2, \dots, n$ *będą mierzalne. Co można powiedzieć na temat niezależności* $g_i \circ X_i$*?*

Zadanie 2. *Niech* f, g *będą mierzalnymi funkcjami borelowskimi. Udowodnij, że są one niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolonych* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *zachodzi:*

$$\mu\left(f^{-1}[a,b) \cap g^{-1}[c,d)\right) = \mu\left(f^{-1}[a,b)\right) \cap \mu\left(g^{-1}[c,d)\right)$$

Zadanie 3. *Niech* X *będzie dyskretną zmienną losową przyjmującą wartości* $1, 2, 3, \dots$ *z prawdopodobieństwami odpowiednio* $p_1, p_2, p_3, \dots$. *Niech* Y *będzie taką zmienną losową, że gdy* $X = n$, Y *przyjmuje nieujemne wartości zgodnie z rozkładem o gęstości* f_n. *Znajdź prawdopodobieństwo, że* $1 \leqslant X + Y \leqslant 3$.

Zadanie 4. *Niech* X *będzie zmienną losową przyjmującą tylko skończenie wiele wartości* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *i niech* Y *będzie taką zmienną losową, że* $Y \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ *(tzn.* $\mathbb{E}Y < +\infty$*). Udowodnij, że zachodzi równość*

$$\mathbb{E}\left(Y | X = x_i\right) = \frac{1}{\mathbb{P}\left(X = x_i\right)} \int_{\{X = x_i\}} Y d\mathbb{P}.$$

Co można powiedziec na temat $\mathbb{E}\left(Y | B\right)$, *gdzie* B *jest pewnym mierzalnym zbiorem o dodatniej mierze?*

Zadanie 5. *Niech* $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ *będzie rodziną wzajemnie rozłącznych zbiorów takich, że* $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$ *i niech* $X \in \mathcal{L}_1(\Omega)$. *Udowodnij, że zachodzi równość*

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i) \mathbb{E}\left(X | B_i\right).$$

Zadanie 6. *Niech* σ*-ciało* $\mathcal{F}$ *będzie generowane przez skończoną rodzinę rozłącznych zbiorów* B_i *i niech* $X \in \mathcal{L}_1(\Omega)$. *Znajdź postać* $\mathbb{E}\left(X | \mathcal{F}\right)$.

Zadanie 7. *Niech* X *będzie nieujemną zmienną losową o skonczonym pierwszym momencie. Pokaż, że zachodzi*

1. $\mathbb{E}\left(X | mathcalG\right) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(X > t\right) dt$,
2. $\mathbb{P}\left(X > \alpha\right) \leqslant \alpha^{-1} \mathbb{E}\left(X \mathcal{G}\right)$.

Zadanie 8. *Niech* $X \in \mathcal{L}_2(\Omega)$. *Zdefinujmy warunkową wariancję względem* σ*-ciała* $\mathcal{G}$ *w nastepujący sposób*

$$\mathbb{V}\left(X | \mathcal{G}\right) = \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}\left(X | \mathcal{G}\right)\right)^2 | \mathcal{G}\right).$$

Wykaż, że zachodzi

$$\mathbb{V}\left(X\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{V}\left(X | \mathcal{G}\right)\right) + \mathbb{V}\left(\mathbb{E}\left(X | \mathcal{G}\right)\right).$$

Zadanie 9. *Niech* $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ *i niech* $\mathbb{P}$ *będzie miarą Lebesgue'a na tej przestrzeni. Wyznacz warunkową wartość oczekiwaną* $\mathbb{E}\left(f | \mathcal{G}\right)$, *jeśli:*

1. $f(x,y) = x,\ \mathcal{G} = \sigma(y)$,
2. $f(x,y) = x - y,\ \mathcal{G} = \sigma(x + y)$.

Zadanie 10. *Niech* $\Omega = [0,1]$ *i niech* $\mathbb{P}$ *będzie miarą Lebesgue'a na tej przestrzeni. Niech* $f(x) = x^2$ *i* $g(x) = 2\mathbf{1}_{[0,1/2)} + x\mathbf{1}_{[1/2,1]}$. *Znajdź* $\mathbb{E}(f|g)$.

Zadanie 11. *Niech* $(\Omega = [0,1], \mathcal{F} = \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$ *będzie przestrzenią probabilistyczną. Niech* $Y(\omega) = \omega(1-\omega)$. *Udowodnij, że dla dowolnej zmiennej losowej* X *określonej na tej przestrzeni zachodzi*

$$\mathbb{E}(X|Y)(\omega) = \frac{X(\omega) + X(1-\omega)}{2}.$$

Zadanie 12. *Niech* $X_1, X_2, \ldots$ *będzie ciągiem niezależnych i całkowalnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie normalnym* ($\mathcal{N}(\mu,\sigma)$) *i niech* τ *będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem* λ *niezależną od tego ciągu. Znajdź wartość oczekiwaną zmiennej losowej*

$$\xi \stackrel{d}{=} \sum_{n=1}^{\tau} X_n.$$

Zadanie* 13. *Niech* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *będzie przestrzenią probabilistyczną i niech* $\mathcal{G}$ *będzie pod-*σ*-ciałem ciała* $\mathcal{F}$. *Niech* $Y \in \mathcal{L}_1(\Omega)$. *Wtedy mamy, że* $\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}) \in \mathcal{L}_1(\Omega)$, *a zatem* $A(Y) = \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ *definiuje liniowy operator na przestrzeni* $\mathcal{L}_1(\Omega)$. *Wykaż, że*

1. $||A|| = 1$,
2. *definiując iloczyn skalarny jako* $[X,Y] = \int_\Omega XY d\mathbb{P}$ *wykaż, że* A *jest samosprzężony.*