Procesy stochastyczne

16 grudnia 2019

1. Wyznacz $E(\xi|\eta)$ gdzie $\eta(x) = 1 - \frac{1}{2}|3x-1|$ oraz $\xi(x) = 2x^2$.
2. Wyznacz $E(\xi|\eta)$ gdzie
$$f_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x^2+y^2) & x,y \in [0,1] \\ 0 & \text{poza} \end{cases}.$$
3. Kiedy $E(\xi\eta|\mathcal{G}) = \xi E(\eta|\mathcal{G})$?
4. Kiedy $E(\xi|\mathcal{G}) \geq 0$?
5. Kiedy $E(E(\xi|\mathcal{G})) = E(\xi)$?
6. Kiedy $E(\xi|\eta) = h(\eta)$?
7. Wykaż nierówność Jensena dla warunkowej wartości oczekiwanej.
8. Kiedy $E(\xi|\mathcal{G})$ jest ortogonalną projekcją ξ na podprzestrzeń $L^2(\mathcal{F})$?
9. Podaj przykład ciągu zmiennych niezależnych $\{X_n\}$ takiego, że $X_n \xrightarrow{P} X$ oraz $X_n \xrightarrow{L^q} X$ dla $q > 0$, ale nie $X_n \xrightarrow{p.n.} X$.
10. Podaj przykład ciągu $\{X_n\}$ takiego, że $X_n \xrightarrow{p.n.} X$ oraz $X_n \xrightarrow{P} X$, ale nie $X_n \xrightarrow{L^q} X$ dla $q > 0$.
11. Kiedy $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$ dla dowolnej funkcji ciągłej f?
12. Kiedy $X_n \xrightarrow{p.n.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$?
13. Kiedy $X_n \xrightarrow{L^p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$?
14. Kiedy $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{L^p} X$?
15. Czy $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow \exists \{n_k\} : X_{n_k} \xrightarrow{p.n.} X$?
16. Czy $X_n \xrightarrow{P} X \iff \forall \{n_k\} \exists \{n_{k_r}\} : X_{n_{k_r}} \xrightarrow{p.n.} X$?
17. Kiedy $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{D} X$?
18. Niech $\xi_n = \eta_1 + \ldots + \eta_n$. Kiedy $E(\xi|F_n)$ jest martyngałem względem filtracji $F_n = \sigma(\eta_1, \ldots \eta_n)$?
19. Niech $\xi_n = \eta_1 + \ldots + \eta_n$. Kiedy $\xi_n^2 - n$ jest martyngałem względem filtracji $F_n = \sigma(\eta_1, \ldots \eta_n)$?
20. Kiedy $X_n = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{i+1}(\xi_{i+1} - \xi_i)$ jest martyngałem?
21. Opisz strategię wygrywającą przy nieskończonym kapitale.
22. Niech τ będzie zmienną loswą a ξ_n martyngałem. Kiedy $\xi_{\tau \wedge n}$ jest martyngałem?
23. Wykaż tożsamość Walda.
24. Niech $\xi_n = \eta_1 + \ldots + \eta_n$ symetryczny spacer losowy oraz $\tau = \inf\{n : \xi_n = 1\}$. Oblicz $E\tau$.
25. Niech $\xi_n = \eta_1 + \ldots + \eta_n$ symetryczny spacer losowy oraz $\tau = \inf\{n : |\xi_n| = K\}$. Oblicz $E\tau$.
26. Wykaż twierdzenie o opcjonalnym stopowaniu.
27. Oszacuj wartość oczekiwaną liczby przekroczeń.
28. Wykaż twierdzenie Dooba o zbieżności nadmartyngałów.
29. Kiedy $E(\xi|F_n)$ jest jednostajnie całkowalnym martyngałem?
30. Wykaż, że każdy jednostajnie całkowalny nadmartyngał jest zbieżny w L^1.

31. Niech ξ_n będzie martyngałem względem filtracji F_n. Kiedy $\xi_n = E(\xi|F_n)$?

32. Wykaż $0-1$ prawo Kołmogorowa.

33. Wykaż, że w nieskończonym ciągu rzutów monetą wypadnie nieskończenie wiele orłów.

34. Wykaż maksymalną nierówność Dooba.

35. Wykaż maksymalną L^2 nierówność Dooba.

36. Rozważ błądzenie losowe po liczbach całkowitych. Kiedy 0 jest stanem powracającym a kiedy chwilowym?

37. Kiedy łańcuch Markowa zapomina z jakiego stanu wystartował?

38. Zdefiniuj proces Poissona $N(t)$. Sprawdź, że $N(t)$ ma rozkład Poissona z parametrem λt.

39. Pokaż, że $N(t+s)-N(t)$ jest niezależne od $N(t)$ dla $t, s \geq 0$.

40. Pokaż, że $N(t+s)-N(t)$ ma rozkład $N(s)$ dla $t, s \geq 0$.

41. Pokaż, że przyrosty procesu Poissona są niezależne.

42. Pokaż, że $N(t)-\lambda t$ jest martyngalem.

43. Wyznacz $\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t}$.

44. Niech $W_t = W(t)$ jest procesem Wienera dla $t \geq 0$. Wyznacz, $E(W_s W_t)$.

45. Niech $0 \leq s < t$. Wyznacz gęstość dla $W(t) - W(s)$.

46. Wyznacz funkcję charakterystyczną dla $W_t - W_s$ oraz oblicz $E\left|W_t - W_s\right|^4$.

47. Zdefiniuj proces Wienera przez gęstości przejścia. Jakie twierdzenia gwarantują istnienie zdefiniowanego procesu?

48. Wykaż niezależność przyrostów procesu Wienera.

49. Wykaż, że $W(t)$ oraz $W(t)^2 - t$ są martyngałami.

50. Niech $t, s > 0$. Wykaż, że $V(s) = W(t+s)-W(t)$ jest procesem Wienera.

51. Niech $c > 0$. Wykaż, że $\frac{1}{c}W(c^2 t)$ jest procesem Wienera.

52. Niech $t \geq 0$. Wykaż, że proces $W(t)$ nie jest różniczkowalny w t (p.n.).

53. Oblicz wariację kwadratową procesu Wienera na przedziale $[0, T]$.

54. Wykaż, że granica sumy stochastycznej zależy od wyboru punktu pośredniego.

55. Wykaż: Jeśli $f \in M^2$, to istnieje całka Ito $I(f)$.

56. Wykaż liniowość całki Ito.

57. Wykaż izometrię Ito.

58. Wykaż własność martyngału dla całki Ito.

59. Wykaż: Jeśli $f(t)$ jest procesem o ciągłych trajektoriach adoptowalnym do $\mathcal{F}_t$ i takim, że $E\int_0^\infty f(t)^2 dt < \infty$, to $f \in M^2$.

60. Wyznacz elementarnie $\int_0^T W(t)dW(t)$.

61. Wykaż elementarnie, że $tW(t)$ jest procesem Ito.

62. Wykaż: $W(t) \in M_t^2$ oraz $W(t)^2 \in M_t^2$.

63. Wykaż, że $\xi(t) = \int_0^t W(s)^2 dW(s) \in M_t^2$ (bez wyznaczania całki).

64. Wykaż maksymalną L^2 nierówność Dooba dla ruchów Browna.

65. Oblicz elementarnie: $d(F(t, W(t)))$ gdy $F \in C^2$ oraz istnieje $C > 0$: $|F_t'|, |F_x'|, |F_{xx}''| < C$.

66. Załóżmy, że jeśli $F \in C^2$ oraz pochodne cząstkowe F są ograniczone, to formuła Ito na $d(F(t, W(t)))$ jest znana. Wykaż formułę Ito gdy $F \in C^2$.