Zestaw 8

Zadanie 1. *Oblicz*
— $\mathbb{P}(W_s < W_t)$,
— $\mathbb{P}(0 < W_2 < W_3)$
— $\mathbb{E}W_1 W_2^2$
— $\mathbb{E}\left(W_2^2(W_3 - W_1)\right)$.

Zadanie 2. *Niech W będzie procesem Winera z wariancją 9. Oblicz*
— $\mathbb{P}(W_2 \leq 15)$,
— $Var(3W_2 - 2W_5)$,
— $\mathbb{P}(W_2 - 2W_3 \leq 4)$,
— $\mathbb{P}(|W_4 - W_2| > 10)$,
— $Var(3 + W_4 - 2W_2 + W_3)$,
— $Cov(3 + W_4 - 2W_2, 5 - W_3)$.

Zadanie 3. *Niech W będzie procesem Wienera. Pokaż, że:*
— $\mathbb{E}(W_s W_t) = \min(s,t)$,
— $\mathbb{E}(|W_t - W_s|^2) = |t - s|$,
— $\mathbb{E}W_t^4$.

Zadanie 4. *Niech W będzie procesem Wienera na odcinku $[0,T]$ i niech proces X będzie określony jako $X_t = tW_t - \int_0^t W_s ds$. Czy proces X jest martyngałem względem filtracji naturalnej procesu Wienera?*

Zadanie 5. *Określmy następujący proces (most Browna)*

$$B_t = W_t - tW_1,\ t \in [0,1].$$

Sprawdź, czy jest on martyngałem względem swojej filtracji naturalnej i znajdź jego funkcję kowariancji.

Zadanie 6. *Niech $W = (W^1, W^2)$ będzie dwuwymiarowym procesem Wienera. Oblicz prawdopodobieństwo, że $|W_t| < R$ dla pewnego $R > 0$, gdzie $|x|$ jest normą euklidesową.*

Zadanie 7. *Procesem Wienera z dryftem μ i wariancją σ^2 nazywamy proces $X_t = \mu t + \sigma W(t)$.*
— *Wykaż, że proces X ma niezależne i stacjonarne przyrosty.*
— *Znajdź rozkład $X(t)$.*
— *Sprawdź, czy proces X jest martyngałem.*

Zadanie 8. *Pokaż, że proces określony jako $Z_t = \sqrt{t}N(0,1)$ nie jest procesem Wienera.*

Zadanie 9. *Sprawdź, czy następujące procesy są procesami Wienera:*
— $-W_t$,
— $c^{-1/2}W_{ct},\ c > 0$,
— $Y_t = tW_{1/t},\ t > 0$ *i* $Y_0 = 0$,
— $W_{T+t} - W_T,\ T > 0$.

Zadanie 10. *Niech $(W_t)_{\{t \geq 0\}}$ będzie procesem Winera, $(B_t)_{t\in[0,1]}$ będzie mostem Browna i niech Z będzie zmienną losową o standardowym rozkładzie normalnym. Udowodnij*
— *$X_t = B_t + tZ$ jest procesem Winera na odcinku $[0,1]$,*
— *$X_t = (t+1)B_{t/(t+1)}$ jest procesem Wienera na odcinku $[0,\infty)$,*

Zadanie 11. *Niech W będzie procesem Winera. Znajdź postać funkcji gęstości zmiennej losowej $X = W(a) + W(b)$, gdzie $0 \leq a < b$.*