

Zestaw 5

Zadanie 1. Niech τ, τ_1 i τ_2 będą momentami stopu. Udowodnij

- \mathcal{F}_τ jest σ -ciałem,
- jeśli $\tau \equiv t$, to $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_t$,
- $A \in \mathcal{F}_\tau$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \in \mathcal{F}$ i $\{\tau = t\} \cap A \in \mathcal{F}_t$ dla dowolnego t ,
- jeśli $\tau_1 \leq \tau_2$, to $\mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2}$.

Zadanie 2. Niech $T = [0, \infty)$ oraz niech τ będzie momentem stopu. Czy momentem stopu jest

- τ^2 ,
- $\tau - 1$,
- $\tau + 1$,
- $\tau + c$, $c > 0$,
- $\tau - c$, $c > 0$.

Zadanie 3. Niech T, S będą momentami stopu. Czy momentem stopu jest zmienna losowa $T + S$ lub $T - S$?

Zadanie 4. Niech będzie dana przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ z filtracją zupełną $\{\mathcal{F}_n\}$. Niech τ, σ będą dwoma momentami Markowa o skończonych wartościach takimi, że istnieje $t_0 \geq 0$, takie, że $\mathbb{P}(\tau \geq t_0) = \mathbb{P}(\sigma \geq t_0) = 1$. Niech $A \in \mathcal{F}_{t_0}$. Sprawdź, czy momentem stopu jest zmienna losowa

$$U = \tau \cdot \mathbf{1}_A + \sigma \cdot \mathbf{1}_{A^c}$$

względem podanej filtracji.

Zadanie 5. Niech τ, σ będą momentami stopu. Udowodnij, że $\tau \wedge \sigma$ i $\tau \vee \sigma$ są momentami stopu.

Zadanie 6. Niech S, T będą momentami stopu. Udowodnij, że zachodzi $\mathcal{F}_{\min\{T, S\}} = \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_S$.

Zadanie 7. Niech (X_i) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie $U[0, 1]$. Niech $\tau = \inf\{n: X_1 + X_2 + \dots + X_n \geq 1\}$. Wyznacz $\mathbb{E}\tau$.

Zadanie 8. Niech (X_n) będzie ciągiem Bernoulliego, zaś $\tau = \inf\{n: S_n = 1\}$. Wykaż, że $\mathbb{E}\tau = \infty$.

Zadanie 9. Niech X_1, X_2, \dots będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie ze skończonym drugim momentem i niech τ będzie całkowalnym momentem stopu. Udowodnij zmodyfikowaną tożsamość Wald'a postaci $\mathbb{E}(S_n - \tau \mathbb{E}X_1)^2 = \mathbb{E}\tau \text{Var}X_1$.

Zadanie 10. Niech τ będzie zmienną losową, a (X_n, \mathcal{F}_n) martyngałem. Kiedy $(X_{n \wedge \tau}, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem?

Zadanie 11. Niech $0 < T_1 < T_2 < \dots < T_n < \dots$ będzie rosnącym do nieskończoności ciągiem momentów stopu o skończonych wartościach. Niech $N_t = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{t \geq T_i\}}$. Niech ponadto $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takim, że jest on niezależny od procesu N . Załóżmy, że $\sup_i \mathbb{E}|U_i| < \infty$ oraz $\mathbb{E}U_i = 0$ dla dowolnego i . Udowodnij, że wtedy proces

$$Z_t = \sum_{i=1}^{\infty} U_i \mathbf{1}_{\{t \geq T_i\}}$$

jest martyngelem.

Zadanie* 12. Niech proces X będzie martyngelem i niech τ będzie momentem stopu.

- Udowodnij, że proces zastopowany $X_t^\tau = X(\min\{t, \tau\})$ jest martyngelem.
- Niech σ będzie momentem stopu takim, że $\sigma \leq \tau$ i niech τ, σ będą ograniczone. Udowodnij, że $\mathbb{E}(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma$ prawie na pewno.
- Przypuśćmy, że istnieje całkowalna zmienna losowa Y taka, że dla dowolnego t , $|X_t| \leq Y$ i niech τ będzie momentem stopu skończonym prawie wszędzie. Udowodnij, że $\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_0$.
- Niech X będzie procesem takim, że istnieje stała M taka, że $|X_{n-1} - X_n| \leq M$ dla dowolnego n i niech τ będzie momentem stopu takim, że $\mathbb{E}\tau < \infty$. Udowodnij, że wtedy $\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_0$.