1	$X_1 < X_2 < Z$	+
2	$Z < X_1 < X_2$	−
3	$X_2 < Z < X_1$	+
4	$Z < X_2 < X_1$	+
5	$X_2 < X_1 < Z$	−
6	$X_1 < Z < X_2$	+

Uporządkowania 1 i 5, 2 i 4, oraz 3 i 6 mają równe prawdopodobieństwa, skąd wynika wzór (1).

Jeśli wszystkie trzy zmienne losowe mają ten sam rozkład, szansa wygranej wynosi 2/3.

5.9. Różne rodzaje zbieżności zmiennych losowych

1. *Wsk.* Skorzystać z tego, że granica funkcji mierzalnych jest mierzalna lub wprost

$$\{\omega\colon \lim_n X_n(\omega) = X(\omega)\} = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}\{|X_n - X| \leqslant 1/k\}.$$

3. *Wsk.* Zastosować lemat Borela–Cantelliego.

4. *Wsk.* $P(|X_n - X| \leqslant \varepsilon) \geqslant P(\bigcap_{k=n}^{\infty}\{|X_k - X| \leqslant \varepsilon\})$.

5. *Rozw.* Jeśli $X_n \xrightarrow{P} X$, $X_n \xrightarrow{P} Y$, to dla każdego $\varepsilon > 0$

$$P(|X - Y| > \varepsilon) \leqslant P(|X_n - X| > \varepsilon/2) + P(|Y - X_n| > \varepsilon/2) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Wobec tego $P(|X - Y| > 0) = 0$.

9. *Wsk.* Skorzystać z twierdzenia 8.

11. *Rozw.* Jeśli w pierwszym rzucie wypadł orzeł, łączna wygrana wyniesie co najmniej 2/3, jeśli wypadnie reszka — co najwyżej 1/3. Wobec tego dystrybuanta F_X przyjmuje na przedziale $(1/3, 2/3)$ wartość 1/2. Rozpatrując drugi, trzeci i dalsze rzuty widzimy, że dystrybuanta jest stała na wszystkich przedziałach wyłączonych podczas konstrukcji zbioru Cantora. Ponieważ łączna miara tych przedziałów jest równa 1, dystrybuanta rośnie na zbiorze miary zero i nie istnieje gęstość.

Żeby wyznaczyć dystrybuantę w pozostałych punktach, czyli na zbiorze Cantora $\mathcal{C}$, przypomnimy znaną funkcję φ przekształcającą $\mathcal{C}$ na odcinek $[0,1]$: jeśli $t \in \mathcal{C}$ i $t = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{2u_i}{3^i}$, gdzie $u_i = 0$ lub $u_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots$, to

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{u_i}{2^i}.$$

Tak zdefiniowana funkcja jest jednostajnie ciągła i rosnąca na C. Mamy teraz

$$P(X \leqslant t) = P(\varphi(X) \leqslant \varphi(t)) = \varphi(t),$$

ponieważ $\varphi(X)$ ma rozkład jednostajny na $[0,1]$.

Dalej,

$$\mathcal{E}X = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{2\mathcal{E}U_i}{3^i} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{3^i} = \frac{1}{2},$$

gdzie zmienne losowe po prawej są niezależne, $P(U_i = 1) = P(U_i = 0) = \frac{1}{2}$, $i = 1, 2, \ldots$. Wymaga to jednak uzasadnienia; prościej zauważyć, że

$$X \sim \frac{2}{3}U_1 + \frac{1}{3}X,$$

gdzie U_1 jest niezależna od X. Stąd otrzymujemy nie tylko $\mathcal{E}X = \frac{1}{2}$, ale i $\mathcal{D}^2X = \frac{1}{8}$, bowiem $\mathcal{D}^2X = \frac{4}{9}\mathcal{D}^2U_1 + \frac{1}{9}\mathcal{D}^2X$.

12. *Rozw.* Gdy teza nie zachodzi, to istnieje $a \neq \mathcal{E}Y$ i podciąg (n_k) taki, że $\mathcal{E}Y_{n_k} \to a$. Wybierając podciągi możemy bez straty ogólności założyć, że $X_{n_k} \xrightarrow{\text{p.n.}} X$, $Y_{n_k} \xrightarrow{\text{p.n.}} Y$ i $Z_{n_k} \xrightarrow{\text{p.n.}} Z$. Z lematu Fatou

$$\mathcal{E}(Y - X) \leqslant \liminf \mathcal{E}(Y_{n_k} - X_{n_k}) = \liminf \mathcal{E}Y_{n_k} - \mathcal{E}X$$

tzn. $\mathcal{E}Y \leqslant \liminf \mathcal{E}Y_n$. Podobnie $\mathcal{E}(Z - Y) \leqslant \mathcal{E}Z - \liminf \mathcal{E}Y_{n_k}$, zatem $\mathcal{E}Y \geqslant \liminf \mathcal{E}Y_n$. Czyli $\mathcal{E}Y = \liminf \mathcal{E}Y_n = a$, sprzeczność.

13. *Rozw.* Z założenia $\sqrt{X_n} \xrightarrow{L^2} Y$. Niech $X = Y^2$. Z nierówności Schwarza

$$\mathcal{E}|X_n - X| \leqslant (\mathcal{E}|\sqrt{X_n} - \sqrt{X}|^2)^{\frac{1}{2}}(\mathcal{E}\left(\sqrt{X_n} + \sqrt{X}\right)^2)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

bo $\mathcal{E}\left(\sqrt{X_n} + \sqrt{X}\right)^2 \leqslant K < \infty$.

14. *Rozw.* Wystarczy pokazać, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$

$$\lim_n P(\max_{i\leqslant n}|X_i| \geqslant \varepsilon n) = 0.$$

Faktycznie,

$$P(\max_{i\leqslant n}|X_i| \geqslant \varepsilon n) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(|X_i| \leqslant \varepsilon n) = nP(|X_1| \geqslant \varepsilon n) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{E}\left(|X_1|\mathbf{1}_{\{|X_1|\geqslant\varepsilon n\}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

bo $\mathcal{E}|X_1| < \infty$.

15. *Rozw.* $\sup_t \mathcal{E}\left(|X_t|\mathbf{1}_{\{|X_t|>C\}}\right) \leqslant \mathcal{E}\left(Y\mathbf{1}_{\{Y>C\}}\right) \to 0$, gdy $C \to \infty$ (z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej).

16. *Rozw.* Niech $\varepsilon > 0$. Weźmy C takie, by dla $z \geqslant C$ zachodziło

$$\frac{G(z)}{z} \geqslant \frac{M}{\varepsilon},$$

tzn. $z \leqslant \varepsilon M^{-1}G(z)$. Wtedy

$$\mathcal{E}\left(|X_t|\mathbf{1}_{\{|X_t|>C\}}\right) \leqslant \varepsilon M^{-1}\mathcal{E}\left(G(X_t\mathbf{1}_{\{|X_t|>C\}})\right) \leqslant \varepsilon.$$