

Zestaw 7

Zadanie 1. Niech $(N_t)_{\{t \geq 0\}}$ będzie procesem Poissona z intensywnością 1.5. Oblicz:

- $\mathbb{P}(N_1 = 2, N_4 = 6)$,
- $\mathbb{P}(N_5 - N_2 = 3)$,
- $\mathbb{P}(N_2 + N_5 = 4)$,
- $\mathbb{P}(N_4 = 6 | N_1 = 2)$,
- $\mathbb{P}(N_1 = 2 | N_4 = 6)$.

Zadanie 2. Niech $(N_t)_{\{t \geq 0\}}$ będzie procesem Poissona z intensywnością 2. Oblicz:

- $\mathbb{E}(N_3 N_4)$,
- $\mathbb{E}(S_3 S_4)$,
- $\text{Var}(N_5 - 2N_6 + 3N_{10})$,
- $\mathbb{E}(N_5 - 2N_6 + 3N_{10})$,
- $\text{Cov}(N_5 - 2N_6, 3N_{10})$,

gdzie S_n jest n -tym czasem przybycia.

Zadanie 3. Niech N_t będzie procesem Poissona z intensywnością λ . Znajdź postać funkcji kowariancji tego procesu

$$C_N(t, s) = \text{Cov}(N_t, N_s)$$

oraz funkcję autokorelacji tego procesu

$$A_N(t, s) = \rho(N_t, N_s).$$

Zadanie 4. Niech $(N_t)_{\{t \geq 0\}}$ będzie jednorodnym procesem Poissona z intensywnością λ . Dla $s > 0$ niech $\tilde{N}_t = N_{t+s} - N_s$ dla $t \geq 0$. Udowodnij, że $(\tilde{N}_t)_{\{t \geq 0\}}$ jest procesem Poissona z intensywnością λ .

Zadanie 5. Niech $(N_t^1)_{\{t \geq 0\}}, (N_t^2)_{\{t \geq 0\}}, \dots, (N_t^k)_{\{t \geq 0\}}$ będą niezależnymi procesami Poissona z intensywnościami odpowiednio $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^k$. Niech $N_t = N_t^1 + N_t^2 + \dots + N_t^k$ dla $t \geq 0$. Udowodnij, że wtedy $(N_t)_{\{t \geq 0\}}$ jest procesem Poissona o intensywności $\lambda = \lambda^1 + \lambda^2 + \dots + \lambda^k$.

Zadanie 6. W kraninie Oz spotkania z lwami, tygrysami i niedźwiedziami opisywane są procesami Poissona z intensywnościami odpowiednio λ_l, λ_t i λ_n , gdzie jednostką czasu jest godzina. Spotkanie z każdym z gatunków jest niezależne od spotkania z pozostałymi.

- Jakie jest prawdopodobieństwo, że Dorotka nie spotka żadnego zwierzęcia w ciągu pierwszych 24 godzin od przybycia do krainy Oz?
- Dorotka widziała 3 zwierzęta jednego dnia. Jakie jest prawdopodobieństwo, że widziała każdy z gatunków?

Zadanie 7. Niech N_t będzie procesem Poissona z intensywnością λ i niech X_1 będzie czasem pierwszego przybycia. Pokaż, że warunkowo względem zdarzenia $N(t) = 1$, X_1 ma rozkład jednostajny na odcinku $(0, t]$, czyli

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x | N(t) = 1) = \frac{x}{t}, \quad 0 \leq x \leq t.$$

Zadanie* 8 (Niejednorodny proces Poissona). Studenci przybywają do stołówki zgodnie z niejednorodnym procesem Poissona. Częstość przybyć rośnie liniowo od 100 do 200 studentów między 11 a 12, następnie utrzymuje się na stałym

poziomie do godziny 14, a następnie zmniejsza się liniowo do 100 między 14 a 15. Jakie jest prawdopodobieństwo, że między 11:30 a 13:30 w stołówce będzie co najmniej 400 osób?

