Zestaw 3

Zadanie 1. *Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych scentrowanych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie i niech $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Oznaczmy $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_n$. Pokaż, że $(S_n, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem.*

Zadanie 2. *Niech X będzie całkowalną zmienną losową i niech $(\mathcal{F}_n)$ będzie dowolną filtracją. Pokaż, że proces zdefiniowany jako $X_n = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$ jest martyngałem względem filtracji $(\mathcal{F}_n)$.*

Zadanie 3. *Niech $Z_n = X_1 \cdot X_2 \cdot \cdots \cdot X_n$, gdzie X_i są mierzalne względem niezależnych σ- ciał $\mathcal{G}_n$, $\mathbb{E}X_i = 1$. Oznaczmy $\mathcal{F}_n = \sigma(\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_n)$. Pokaż, że $(Z_n, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem.*

Zadanie 4. *Niech $(X_n, \mathcal{F}_n)$ będzie martyngałem, zaś ciąg (V_n) będzie procesem prognozowalnym, czyli takim, ze zmienna losowa V_n jest $\mathcal{F}_{n-1}$ mierzalna, (przyjmujemy $\mathcal{F}_{-1} = \{\emptyset, \Omega\}$). Zakladamy ponadto, ze zmienne losowe V_n, sa ograniczone i definiujemy*

$$Z_n = V_0 X_0 + V_1(X_1 - X_0) + V_2(X_2 - X_1) + \cdots + V_n(X_n - X_{n-1}).$$

Pokaż, że $(Z_n, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem.

Zadanie 5. *Wykazać, że przy odpowiednich założeniach co do całkowalności funkcja wypukła martyngały względem pewnej filtracji jest submartyngałem względem tej filtracji oraz że funkcja wypukła i niemalejąca przekształca submartyngał w submartyngał.*

Zadanie 6. *Udowodnij, że przyrosty martyngału są parami nieskorelowane.*

Zadanie 7. *Określmy proces $Z(n)$ w następujący sposób*

$$Z(n) = Z(n-1) + L(n), Z(0) = 0,\ \mathbb{P}(L(n) = 1) = \mathbb{P}(L(n) = -1),$$

gdzie zmienne $L(n)$ są niezależne między sobą.
Udowodnij, że następujące procesy są martyngałami względem filtracji $\mathcal{F}_n = \sigma\left(Z(0), Z(1), \ldots, Z(n)\right)$:

- $Z(n),\ n = 0, 1, \ldots$
- $Z(n)^2 - n,\ n = 0, 1, \ldots,$
- $(-1)^n \cos\left(\pi Z(n)\right),\ n = 0, 1, \ldots.$

Zadanie 8. *Niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie $\mathcal{N}(-a, 1)$, $a > 0$.*

- *Dla jakiej wartości $h \in \mathbb{R}$ proces $Y_n = \exp\left(h \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$ jest martyngałem względem swojej filtracji naturalnej?*
- *Dla jakich wartości h proces ten jest sub- lub supermartyngałem?*
- *Niech $h = 2a$ i niech $x > 0$. Określmy $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Udowodnij, że zachodzi*
$$\mathbb{P}\left(\sup_n S_n > x\right) \le e^{-2ax}.$$

Zadanie 9. *Niech $X_1, X_2, X_3, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, odpowiednio całkowalnych i o średniej zero. Niech $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Pokaż, że proces $S_n^2 - n\mathbb{E}X_1^2$ jest martyngałem. Czy proces S_n^3 jest martyngałem? Jaką postać komensacji A_n należy zaproponować, by proces $S_n^3 - A_n$ był martyngałem? Co gdy S_n^3 zastąpimy przez S_n^m?*

Zadanie 10. *Niech* $X_1, X_2, X_3, \dots$ *będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie zadanym przez*

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - q$$

oraz niech $\{\mathcal{F}_n\}$ *będzie filtracją generowaną przez zmienne losowe* X_i. *Niech* $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. *Udowowdnij*
— $M_n = (q/p)^{S_n}$ *jest martyngałem względem* $\{\mathcal{F}_n\}$,
— *dla* $\lambda > 0$ *wyznacz stałą* $C = C(\lambda)$ *taką, że proces* $Z_n^\lambda = C^n \lambda^{S_n}$ *jest martyngałem względem* $\{\mathcal{F}_n\}$.

Zadanie 11. *Udowodnij, że suma procesów będących martyngałem względem tej samej filtracji jest martyngałem względem tej filtracji. Co gdy procesy te są martyngałami względem różnych filtracji?*

Zadanie 12. *Udowodnij, że wartość oczekiwana martyngału względem zadanej filtracji jest stała w czasie.*

Zadanie 13. *Niech* $\Omega = [0, 1]$. *Znajdź postać filtracji generowanej przez proces* $X(n, \omega) = 2\omega\chi_{[0,1-1/n]}(\omega)$.

Zadanie 14. *Pokaż, że filtracja naturalna jest najmniejszą filtracją taką, że dany proces jest do niej adaptowany.*

Zadanie 15. *Niech* $\{\xi_n\}$ *będzie martyngałem względem pewnej filtracji* $\{\mathcal{F}_n\}$. *Udowodnij, że* $\{\xi_n\}$ *jest również martyngałem względem swojej filtracji naturalnej.*