

Zestaw 3

Zadanie 1. Niech A będzie zdarzeniem losowym takim, że $\mathbb{P}(A) > 0$ i niech X będzie zmienną losową taką, że $\mathbb{E}X < \infty$. Wykaż, że wtedy $\mathbb{E}(X|A) = \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \int_A X d\mathbb{P}$.

Zadanie 2. Niech $\{A_i\}_{i \in I}$ będzie przeliczalnym rozbić przestrzeni Ω i takim, że dla dowolnego i $\mathbb{P}(A_i) > 0$. Wykaż, że wtedy $\mathbb{E}X = \sum_{i \in I} \mathbb{E}(X|A_i)\mathbb{P}(A_i)$.

Zadanie 3. Niech $\Omega = [0, 1]$ i niech \mathbb{P} będzie miarą Lebesgue'a na tym odcinku. Znajdź $\mathbb{E}(f|\mathcal{F})$ jeśli

- $f(x) = \sqrt{x}$ i \mathcal{F} jest generowane przez zbiory $[0, 1/4]$ i $[1/4, 1]$,
- $f(x) = -x$ i \mathcal{F} jest generowane przez zbiory $[0, 1/4]$ i $[1/3, 1]$.

Zadanie 4. Niech zmienna losowa X będzie całkowalną z kwadratem. Określmy $\text{Var}(X|\mathcal{F}) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}))^2|\mathcal{F})$. Udowodnij, że

$$\begin{aligned}\text{Var}X &= \mathbb{E}(\text{Var}(X|\mathcal{F})) + \text{Var}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})) \\ (\mathbb{E}(X|\mathcal{F}))^2 &\leq \mathbb{E}(X^2|\mathcal{F}) \\ \text{Var}X &\geq \text{Var}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})).\end{aligned}$$

Zadanie 5. Niech X_1, X_2, \dots, X_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie i takim, że $\mathbb{E}X_1 < \infty$. Wyznacz $\mathbb{E}(X_1 | \sum_{i=1}^n X_i)$.

Zadanie 6. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$. Wyznacz $\mathbb{E}(X|X^2 + Y^2)$.

Zadanie 7. Niech $\{X_i\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie i takim, że $\mathbb{E}|X_i| < \infty$. Niech $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ i niech $\mathcal{F}_n = \sigma(S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, \dots)$. Wyznacz

- $\mathbb{E}(X_1|\mathcal{F}_n)$,
- $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^n a_i X_i|\mathcal{F}_n)$, gdzie $\sum_{i=1}^n a_i = 1$.

Zadanie 8. Niech Y będzie całkowalną zmienną losową i niech X, Z będą zmiennymi losowymi takimi, że (X, Y) jest niezależne od Z . Pokaż, że wtedy $\mathbb{E}(Y|X, Z) = \mathbb{E}(Y|X)$.

Zadanie 9. Niech X, Y będą całkowalnymi z kwadratem zmiennymi losowymi. Udowodnij, że zachodzi

$$\mathbb{E}(X\mathbb{E}(Y|\mathcal{F})) = \mathbb{E}(Y\mathbb{E}(X|\mathcal{F})).$$

Zadanie 10. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem λ . Znajdź warunkową wartość oczekiwaną tej zmiennej losowej pod warunkiem, że przyjmuje ona wartość parzystą.

Zadanie 11. Niech zmienne losowe X, Y mają ten sam rozkład. Przy jakim dodatkowym założeniu zachodzi

$$\mathbb{E}\left(\frac{X}{X+Y}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{Y}{X+Y}\right)?$$

Przy tym założeniu oblicz tę wartość.

Zadanie 12. Niech X, Y będą zmiennymi losowymi o standardowym rozkładzie normalnym i kowariancji równej ρ . Znajdź $\mathbb{E}(X|Y)$.

Zadanie 13. Niech zmienne losowe X, Y będą określone na pewnej przestrzeni probabilistycznej w następujący sposób

- $X(x) = 2x^2, \quad Y(x) = 1 - |2x - 1|,$
- $X(x) = 2x^2, \quad Y(x) = 1 - \frac{1}{2} |3x - 1|,$
- $X(x) = x^2, \quad Y(x) = 2\mathbf{1}_{[0,1/2)} + x\mathbf{1}_{[1/2,1]}.$

Znajdź $\mathbb{E}(X|Y)$.

Zadanie 14. Niech $(\Omega = [0, 1], \mathcal{F} = \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Niech $Y(\omega) = \omega(1 - \omega)$. Udowodnij, że dla dowolnej zmiennej losowej X określonej na tej przestrzeni zachodzi

$$\mathbb{E}(X|Y)(\omega) = \frac{X(\omega) + X(1 - \omega)}{2}.$$

Zadanie 15. Niech X_1, X_2, \dots będzie ciągiem niezależnych i całkowalnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie normalnym $(\mathcal{N}(\mu, \sigma))$ i niech τ będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem λ niezależną od tego ciągu. Znajdź wartość oczekiwaną zmiennej losowej

$$\xi \stackrel{d}{=} \sum_{n=1}^{\tau} X_n.$$