Zestaw 7

Zadanie 1. *Niech* $(N_t)_{\{t\geq 0\}}$ *będzie procesm Poissona z instensywnością 1.5. Oblicz:*
— $\mathbb{P}(N_1 = 2, N_4 = 6)$,
— $\mathbb{P}(N_5 - N_2 = 3)$,
— $\mathbb{P}(N_2 + N_5 = 4)$,
— $\mathbb{P}(N_4 = 6|N_1 = 2)$,
— $\mathbb{P}(N_1 = 2|N_4 = 6)$.

Zadanie 2. *Niech* $(N_t)_{\{t\geq 0\}}$ *będzie procesm Poissona z instensywnością 2. Oblicz:*
— $\mathbb{E}(N_3 N_4)$,
— $\mathbb{E}(S_3 S_4)$,
— $Var(N_5 - 2N_6 + 3N_{10})$,
— $\mathbb{E}(N_5 - 2N_6 + 3N_{10})$,
— $Cov(N_5 - 2N_6, 3N_{10})$,
gdzie S_n *jest* n*-tym czasem przybycia.*

Zadanie 3. *Niech* N_t *będzie procesem Poissona z intensywnością* λ*. Znajdź postać funkcji kowariancji tego procesu*

$$C_N(t, s) = Cov(N_t, N_s)$$

oraz funkcję autokorelacji tego procesu

$$A_N(t, s) = \rho\,(N_t, N_s)\,.$$

Zadanie 4. *Niech* $(N_t)_{\{t\geq 0\}}$ *będzie jednorodnym procesem Poissona z intensywnością* λ*. Dla* $s > 0$ *niech* $\tilde{N}_t = N_{t+s} - N_s$ *dla* $t \geq 0$*. Udowodnij, że* $(\tilde{N}_t)_{\{t\geq 0\}}$ *jest procesem Poissona z intensywnością* λ*.*

Zadanie 5. *Niech* $(N_t^1)_{\{t\geq 0\}}, (N_t^2)_{\{t\geq 0\}}, \ldots, (N_t^k)_{\{t\geq 0\}}$ *będą niezależnymi procesami Poissona z intensywnościami odpowiednio* λ^1*,* λ^2*, …,* λ^k*. Niech* $N_t = N_t^1 + N_t^2 + \cdots + N_t^k$ *dla* $t \geq 0$*. Udowodnij, że wtedy* $(N_t)_{\{t\geq 0\}}$ *jest procesm Poissona o intensywności* $\lambda = \lambda^1 + \lambda^2 + \cdots + \lambda^k$*.*

Zadanie 6. *W kranine Oz spotkania z lwami, tygrysami i niedźwiedzami opisywane są procesami Poissona z intensywnościami odpowiednio* λ_l*,* λ_t *i* λ_n*, gdzie jednostką czasu jest godzina. Spotaknie z każdym z gatunków jest niezależne od spotkania z pozostałymi.*
— *Jakie jest prowdopodobieństwo, że Dorotka nie spotka żadnego zwierzęcia w ciągu pierwszych 24 godzin od przybycia do krainy Oz?*
— *Dorotka widziała 3 zwierzęta jednego dnia. Jakie jest prawdopodobieństwo, że widziała każdy z gatunków?*

Zadanie 7. *Niech* N_t *będzie procesem Poissona z intensywnością* λ *i niech* X_1 *będzie czasem pierwszego przybycia. Pokaż, że warunkowo względem zdarzenia* $N(t) = 1$*,* X_1 *ma rozkład jednostajny na odcinku* $(0, t]$*, czyli*

$$\mathbb{P}\left(X_1 \leq x | N(t) = 1\right) = \frac{x}{t},\ 0 \leq x \leq t.$$

Zadanie* 8 (Niejednorodny proces Poissona)**.** *Studenci przybywają do stołówki zgodnie z niejednorodnym procesem Poissona. Częstość przybyć rośnie liniowo od 100 do 200 studentów między 11 a 12, następnie utrzymuje się na stałym* *poziomie do godziny 14, a następnie zmieniejsza się liniowo do 100 między 14 a 15. Jakie jest prawdopodobieństwo, że między 11:30 a 13:30 w stołówce będzie co najmniej 400 osób?*

```
> library(tidyverse)
> library(foreach)
> lambda <- 2
> tMax <- 50
> n_sim <- 10
> simulate_path <- function(lambda, tMax = 100, simulation_nr = NA) {
+   n <- qpois(1 - 1e-8, lambda = lambda * tMax)
+   X <- rexp(n = n, rate = lambda)
+   S <- c(0, cumsum(X))
+   return(data.frame(simulation = rep(simulation_nr, length(S)),
+                     values = 0:(length(S) - 1), time = S))
+ }
> plot <- function(data, lambda) {
+   data %>%
+   ggplot(aes(x = time, y = values, col = as.factor(simulation))) +
+   geom_step(size = 1) +
+   theme(legend.position = "none") +
+   labs(title = str_c("Poisson process with intensity ", lambda))
+ }
> data <- foreach(n = 1:n_sim, .combine = rbind) %do% {
+   simulate_path(lambda = lambda, tMax = tMax, simulation_nr = n)
+ }
> plot(data, lambda)
```