Procesy stochastyczne
Zestaw zadań nr 1

Zadanie 1. *Dana jest funkcja*

$$F(x) = 0 \cdot \mathbf{1}_{x \leqslant 0} + (ax^2 + bx) \cdot \mathbf{1}_{0<x\leqslant 1} + 1 \cdot \mathbf{1}_{x \geqslant 1}.$$

Znajdź wszystkie pary liczb a, b dla których funkcja ta jest dystrybuantą. Dla jakich wartości dystrybuanta ta jest ciągła?

Zadanie 2. *Dodatnia liczba naturalna I jest losowana zgodnie z rozkładem $\mathbb{P}(I = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n, n = 1, 2, \dots$. Jeśli liczba I przyjmie wartość n, wtedy rzucana jest moneta z prawdopodobieństwem wyrzucenia orła równym e^{-n}. Znajdź prawdopodobieństwo, że otrzymano orła.*

Zadanie 3. *Niech $X_1, X_2, \dots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie z gęstością f i dystrybuntą F. Niech T_k będzie k-tą najmniejszą obserwacją. Znajdź rozkład T_k i wektora $(T_1, T_2, \dots, T_n)$.*

Zadanie 4. *Niech X będzie zmienną losową przyjmującą dodatnie wartości oraz o gęstości f. Znajdź postać gęstości zmiennej losowej X^{-1}.*

Zadanie 5. *Rozkład Cauchy'ego ma następującą gęstość*

$$c_u(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{u^2 + x^2}, x \in \mathbb{R}, u > 0.$$

1. *Znajdź wartość oczekiwaną rozkładu Cauchy'ego.*
2. *Wykaż, że $c_u * c_v = c_{u+v}$.*
3. *Niech $X_1, X_2, \dots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie c_u. Wykaż, że $(X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n$ również ma rozkład c_u.*
4. *Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o standardowym rozkładzie normalnym. Wykaż, że X/Y ma rozkład c_1.*
5. *Niech X ma rozkład jednostajny na przedziale $(-\pi/2, \pi/2)$. Wykaż, że $\tan X$ ma rozkład Cauch'ego c_1.*

Zadanie* 6. *Zbiór Cantora C to zbiór wszystkich liczb t postaci*

$$t = \frac{t_1}{3} + \frac{t_2}{3^2} + \dots + \frac{t_n}{3^n} + \dots,$$

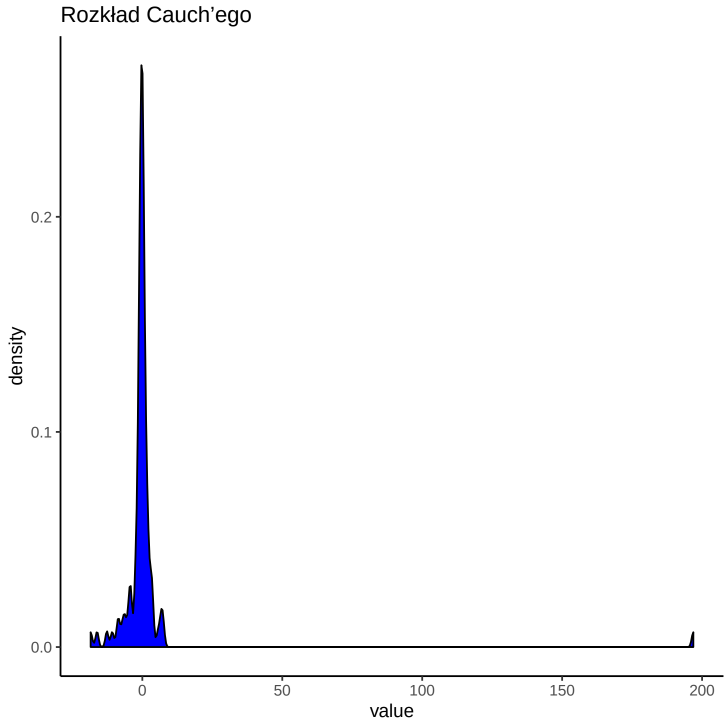
gdzie $t_i \in \{0, 2\}$. Zauważmy, że każda liczba ze zbioru C ma jednoznaczną reprezentację. Określmy funkcję schodkową przekształcającą zbiór Cantora na odcinek $[0, 1]$. Dla liczb t ze zbioru C połóżmy

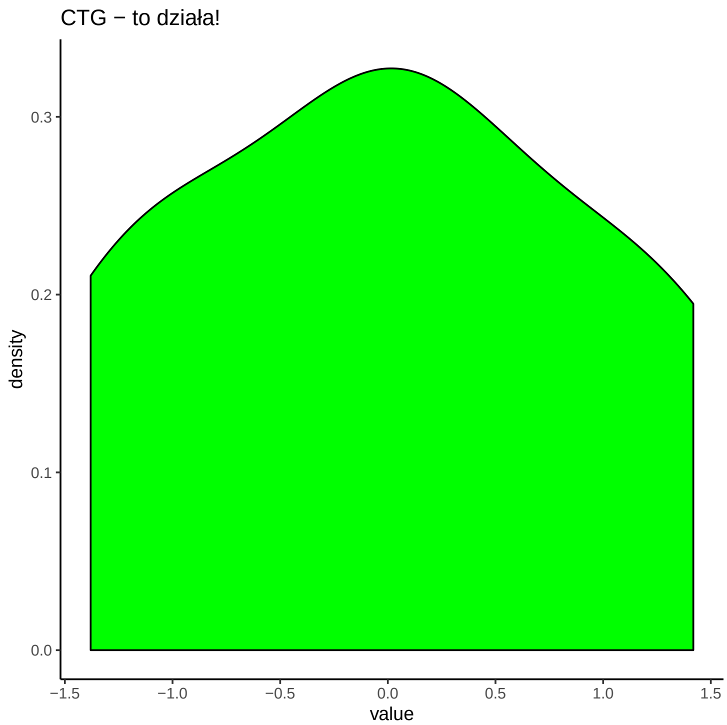
$$\phi(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{t_1}{2} + \frac{t_2}{2^2} + \dots + \frac{t_n}{2^n} + \dots \right).$$

Poza zbiorem Cantora kładziemy odpowiednie stałe tak, aby funkcja, o dziedzinie rozszerzonej z C do $[0, 1]$ była niemalejąca.

1. *Wykazać, że jest to dystrybuanta ciągła, ale nie absolutnie ciągła (nie posiada gęstości).*
2. *Obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej o tej dystrybuancie.*

Zadanie* 7. *Udowodnij, że każde σ-ciało, jeśli jest nieskończone to musi być nieprzeliczalne.*


Rozkład Cauch'ego
density
0.0
0.1
0.2
0
50
100
150
200
value


CTG − to działa!
density
0.0
0.1
0.2
0.3
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
value

Zadanie 8. *Od jakiej wartość (ilości sumownaych składników) można powiedzieć, że działa centralne twierdzenie graniczne? Zaprojektuj eksperyment numeryczny, który dla kilku rodzin rozkładów pozwoli ocenić tą wartość.*

Zadanie 9. *Niech* $X_1, X_2, \ldots$ *będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że* $X_n \tilde{B}(n, p_n)$, *gdzie* $p_n = \lambda/n$ *dla pewnego* $\lambda > 0$. *Przy pomocy eksperymentu numerycznego zaproponuj rozkład graniczny tego ciągu.*