Procesy stochastyczne
Zestaw zadań nr 2

5 listopada 2018

Definicja 1. *Niech* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *będzie przestrzenią probabilistyczną. Procesem stochastycznym z czasem dyskretnym nazywamy ciąg zmiennych losowych*

$$X(n)\colon \Omega \to \mathbb{R},\ n > 0.$$

Przyjmujemy, że $X(0)$ *jest stałe.*

Definicja 2. *Niech* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *będzie przestrzenią probabilistyczną. Filtracją (z czasem dyskretnym) nazywamy ciąg pod-*σ*-ciał* $\{\mathcal{F}_n\}$ *takich, że dla dowolnego* $n > 0$ *zachodzi*

$$\mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n.$$

Definicja 3. *Filtracją generowaną przez proces* $(X(n))$ *(naturalną) nazywamy filtrację zadana następująco*

$$\mathcal{F}_n^X = \sigma\left(\left\{X^{-1}(k)(B),\ B \in \mathcal{B}, k = 0, 1, 2, \ldots, n\right\}\right).$$

Definicja 4. *Proces* $(X(n))$ *nazywamy adaptowanym do filtracji* $(\mathcal{F}_n)$*, jeżeli dla dowolnego* n $X(n)$ *jest* $\mathcal{F}_n$ *mierzalna.*

Zadanie 1. *Niech* $\Omega = [0, 1]$*. Znajdź postać filtracji generowanej przez proces* $X(n, \omega) = 2\omega\chi_{[0,1-1/n]}(\omega)$*.*

Zadanie 2. *Pokaż, że filtracja naturalna jest najmniejszą filtracją taką, że dany proces jest do niej adaptowany.*

Zadanie 3. *Niech* $\{\xi_n\}$ *będzie martyngałem względem pewnej filtracji* $\{\mathcal{F}_n\}$*. Udowodnij, że* $\{\xi_n\}$ *jest również martyngałem względem swojej filtracji naturalnej.*

Definicja 5. *Proces* $(X(n))$ *nazywamy martyngałem względem filtracji* $(\mathcal{F}_n)$, *gdy*

$$\mathbb{E}\left(X(m)|\mathcal{F}_{m-1}\right) = X(m-1),\ m > 0.$$

Zadanie 4. *Określmy proces* $Z(n)$ *w następujący sposób*

$$Z(n) = Z(n-1) + L(n), Z(0) = 0,\ \mathbb{P}(L(n) = 1) = \mathbb{P}(L(n) = -1),$$

gdzie zmienne $L(n)$ *są niezależne między sobą.*
Udowodnij, że następujące procesy są martyngałami względem filtracji $\mathcal{F} = \sigma\left(Z(0), Z(1), \dots, Z(n)\right)$:

- $Z(n),\ n = 0, 1, \dots$
- $Z(n)^2 - n,\ n = 0, 1, \dots,$
- $(-1)^2 \cos\left(\pi Z(n)\right),\ n = 0, 1, \dots.$

Zadanie 5. *Udowodnij, że wartość oczekiwana martyngału względem zadanej filtracji jest stała w czasie.*

Zadanie 6. *Niech dana będzie filtracja* $(\mathcal{F}_n)$ *i całkowalna zmienna losowa* X. *Udowodnij, że martyngałem względem tej filtracji jest proces określony następująco*

$$\mathbb{E}\left(X|\mathcal{F}_m\right) = X(m),\ m > 0.$$

Zadanie 7. *Niech* $\xi_1, \xi_2, \dots$ *będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, całkowalnych z kwadratem i o średniej zero. Niech* $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$. *Pokaż, że martyngałem względem filtracji generowanej przez zmienne* ξ_i *jest proces*

$$Y(n) = S_n^2 - n\mathbb{E}\xi_1^2.$$

Zadanie 8. *Niech* $\xi_1, \xi_2, \dots$ *będą niezależnymi, całkowalnymi i scentrowanymi zmiennymi losowymi. Niech* $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$. *Udowodnij,* S_n *jest martyngałem względem swojej filtracji naturalnej.*

Zadanie 9. *Niech* $\xi_1, \xi_2, \dots$ *będą niezależnymi, całkowalnymi i o wartości oczekiwanej równej* 1. *Niech* $S_n = \xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \dots \cdot \xi_n$. *Udowodnij,* S_n *jest martyngałem względem filtracji generowanej przez zmienne* ξ_i.

Zadanie 10. *Niech* $\{\xi_t\}$ *będzie supermartynagałem względem pewnej filtracji, którego wartość oczekiwana jest stała w czasie. Udowodnij, że jest on martyngałem. Czy to samo zachodzi dla submartyngałów?*

Zadanie 11. *Udowodnij, że przyrosty martyngału są parami nieskorelowane.*

Zadanie 12. *Niech proces* X *będzie martyngałem względem pewnej filtracji. Zbadać (w razie potrzeby zakładając odpowiednią całkowalność) czy proces* $|X|^p,\ p \geqslant 1$ *jest sub- czy supermartyngałem.*

Zadanie 13. *Wykazać, że przy odpowiednich założeniach co do całkowalności funkcja wypukła martyngały względem pewnej filtracji jest submartyngałem względem tej filtracji oraz że funkcja wypukła i niemalejąca przekształca submartyngał w submartyngał.*