Zestaw 8

Zadanie 1. *Oblicz*
— $\mathbb{P}(W_s < W_t)$,
— $\mathbb{P}(0 < W_2 < W_3)$
— $\mathbb{E}W_1 W_2^2$
— $\mathbb{E}\left(W_2^2(W_3 - W_1)\right)$.

Zadanie 2. *Niech W będzie procesem Winera z wariancją 9. Oblicz*
— $\mathbb{P}(W_2 \leq 15)$,
— $Var(3W_2 - 2W_5)$,
— $\mathbb{P}(W_2 - 2W_3 \leq 4)$,
— $\mathbb{P}(|W_4 - W_2| > 10)$,
— $Var(3 + W_4 - 2W_2 + W_3)$,
— $Cov(3 + W_4 - 2W_2, 5 - W_3)$.

Zadanie 3. *Niech W będzie procesem Wienera na odcinku $[0, T]$ i niech proces X będzie określony jako $X_t = tW_t - \int_0^t W_s ds$. Czy proces X jest martyngałem względem filtracji naturalnej procesu Wienera?*

Zadanie 4. *Określmy następujący proces (most Browna)*

$$B_t = W_t - tW_1, \ t \in [0, 1].$$

Sprawdź, czy jest on martyngałem względem swojej filtracji naturalnej i znajdź jego funkcję kowariancji.

Zadanie 5. *Procesem Wienera z dryftem μ i wariancją σ^2 nazywamy proces $X_t = \mu t + \sigma W(t)$.*
— *Wykaż, że proces X ma niezależne i stacjonarne przyrosty.*
— *Znajdź rozkład $X(t)$.*
— *Sprawdź, czy proces X jest martyngałem.*

Zadanie 6. *Pokaż, że proces określony jako $Z_t = \sqrt{t}N(0, 1)$ nie jest procesem Wienera.*

Zadanie 7. *Sprawdź, czy następujące procesy są procesami Wienera:*
— $-W_t$,
— $c^{-1/2}W_{ct}$, $c > 0$,
— $Y_t = tW_{1/t}, \ t > 0$ *i* $Y_0 = 0$,
— $W_{T+t} - W_T, \ T > 0$.

Zadanie 8. *Niech $(W_t)_{\{t \geq 0\}}$ będzie procesem Winera, $(B_t)_{t \in [0,1]}$ będzie mostem Browna i niech Z będzie zmienną losową o standardowym rozkładzie normalnym. Udowodnij*
— $X_t = B_t + tZ$ *jest procesem Winera na odcinku* $[0, 1]$,
— $X_t = (t + 1)X_{t/(t+1)}$ *jest procesem Wienera na odcinku* $[0, \infty)$,

Zadanie 9. *Niech W będzie procesem Winera. Znajdź postać funkcji gęstości zmiennej losowej $X = W(a) + W(b)$, gdzie $0 \leq a < b$.*

```
> library(tidyverse)
> library(foreach)
> steps <- 1000
> interval <- 1
> n_sim <- 10
```

```
> simulate_path <- function(steps, interval, simulation_nr = NA) {
+   dt <- sqrt(interval/steps)
+   increments <- rnorm(steps-1)
+   return(data.frame(simulation = rep(simulation_nr, length(steps)),
+                     values = cumsum(c(0, dt*increments)),
+                     time = seq(0, interval, length.out = steps)))
+ }
> plot <- function(data) {
+   data %>%
+   ggplot(aes(x = time, y = values, col = as.factor(simulation))) +
+   geom_step(size = 1) +
+   theme(legend.position = "none") +
+   labs(title = "Wiener proces")
+ }
> data <- foreach(n = 1:n_sim, .combine = rbind) %do% {
+   simulate_path(steps = steps, interval = interval, simulation_nr = n)
+ }
> plot(data)
```