

Procesy stochastyczne

Zestaw zadań nr 3

Zadanie 1. Znajdź postać filtracji generowanej przez proces $X(n, \omega) = \omega^2 \mathbf{1}_{[0, 2+1/n]}$.

Zadanie 2. Niech dana będzie filtracja $\{\mathcal{F}_n\}$ i całkowalna zmienna losowa X . Udowodnij, że martyngałem względem tej filtracji jest proces określony następująco

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_m), \quad m > 0.$$

Zadanie 3. Określmy proces $Z(n)$ w następujący sposób

$$Z(n) = Z(n-1) + L(n), \quad Z(0) = 0, \quad \mathbb{P}(L(n) = 1) = \mathbb{P}(L(n) = -1),$$

gdzie zmienne $L(n)$ są niezależne między sobą.

Udowodnij, że następujące procesy są martyngalami względem filtracji $\mathcal{F}_n = \sigma(Z(0), Z(1), \dots, Z(n))$:

- $Z(n)$, $n = 0, 1, \dots$
- $Z(n)^2 - n$, $n = 0, 1, \dots$,
- $(-1)^n \cos(\pi Z(n))$, $n = 0, 1, \dots$

Zadanie 4. Niech $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie $\mathcal{N}(-a, 1)$, $a > 0$.

- Dla jakiej wartości $h \in \mathbb{R}$ proces $Y_n = \exp(h \sum_{i=1}^n X_i)$ jest martyngałem względem swojej filtracji naturalnej?
- Dla jakich wartości h proces ten jest sub- lub supermartyngałem?
- Niech $h = 2a$ i niech $x > 0$. Określmy $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Udowodnij, że zachodzi

$$\mathbb{P}\left(\sup_n S_n > x\right) \leq e^{-2ax}.$$

Zadanie 5. Niech X_1, X_2, X_3, \dots będą niezależnymi, całkowalnymi zmiennymi losowymi o wartości oczekiwanej równej 1. Niech $S_n = X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n$. Udowodnij, że S_n jest martyngałem względem filtracji generowanej przez zmienne X_i .

Zadanie 6. Niech X_1, X_2, X_3, \dots będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, odpowiednio całkowalnych i o średniej zero. Niech $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Pokaż, że proces $S_n^2 - n\mathbb{E}X_1^2$ jest martyngałem. Czy proces S_n^3 jest martyngałem? Jaką postać kompensacji A_n należy zaproponować, by proces $S_n^3 - A_n$ był martyngałem? Co gdy S_n^3 zastąpimy przez S_n^m ?

Zadanie 7. Niech X_1, X_2, X_3, \dots będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie zadany przez

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - q$$

oraz niech $\{\mathcal{F}_n\}$ będzie filtracją generowaną przez zmienne losowe X_i . Niech $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Udowodnij

- $M_n = (q/p)^{S_n}$ jest martyngałem względem $\{\mathcal{F}_n\}$,
- dla $\lambda > 0$ wyznacz stałą $C = C(\lambda)$ taką, że proces $Z_n^\lambda = C^n \lambda^{S_n}$ jest martyngałem względem $\{\mathcal{F}_n\}$.

Zadanie 8. Udowodnij, że suma procesów będących martyngałem względem tej samej filtracji jest martyngałem względem tej filtracji. Co gdy procesy te są martyngalami względem różnych filtracji?

Zadanie 9. Udowodnij, że wartość oczekiwana martyngału względem zadanej filtracji jest stała w czasie.

Definicja 1. Proces X nazywamy przewidywalnym względem filtracji $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{N}}$, jeżeli dla dowolnego n X_{n+1} jest \mathcal{F}_n mierzalna.

Zadanie 10. Niech M_t będzie martyngałem całkowalnym z kwadratem względem filtracji $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^\infty$. Niech proces Y_t będzie skonstruowany na tej samej przestrzeni probabilistycznej co proces M_t i niech będzie procesem przewidywalnym. Określmy proces N jako

$$N_t = N_0 + \sum_{k=1}^t Y_k (M_k - M_{k-1}).$$

Udowodnij, że proces N jest martyngałem pod warunkiem, że N_0 jest \mathcal{F}_0 -mierzalna. Co trzeba założyć na temat całkowalności procesu Y ?

Definicja 2. Proces X nazywamy submartyngałem (supermartyngałem) względem filtracji $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$, gdy $\forall_{s < t} X_s \leq (\geq) \mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s)$.

Zadanie 11. Wykazać, że przy odpowiednich założeniach co do całkowalności funkcja wypukła martyngały względem pewnej filtracji jest submartyngałem względem tej filtracji oraz że funkcja wypukła i niemalejąca przekształca submartyngały w submartyngały.

Zadanie 12. Udowodnij, że przyrosty martyngału są parami nieskorelowane.

Zadanie* 13. Pokaż, że filtracja naturalna jest najmniejszą filtracją taką, że dany proces jest do niej adaptowany.