# SVD i obcięte SVD

Grzegorz Mika

5 listopada 2017

## 1 Wstęp

Niech $H, G$ będą przestrzeniami Hilberta, $A\colon H \to G$ niech będzie liniowym i ograniczonym operatorem między tymi przestrzeniami. Naszym zadaniem jest, mając dany $g \in G$, znaleźć taki $f \in H$, że

$$Af = g.$$

Problem nazwiemy dobrze postawionym (well- posed) wg Hadamarda, gdy:

- dla dowolnego $g \in G$ istnieje $f \in H$ spełniający zadane równanie,
- rozwiązanie jest jedyne,
- rozwiązanie jest stabilne, czyli zależy w sposób ciągły od prawej strony równania.

Jeżeli choć jeden z warunków nie jest spełniony problem nazywamy źle postawionym (ill- posed). W przypadku braku stabilności, operator odwrotny $A^{-1}$ jest nieograniczony, co może prowadzić do eksplozji rozwiązania nawet w przypadku niewielkiego zaburzenia wartości $g$, czyli rozpatrując lekko zaburzoną wersję $g$ oznaczoną jako $g_\epsilon$, dostajemy, że $f_\epsilon = A^{-1}g_\epsilon$ może być bardzo odległe od prawdziwej wartości $f$.

W przypadku stochastycznych problemów odwrotnych możemy rozpatrzeć następujący problem

$$Y = Af + \epsilon\xi,$$

gdzie $\epsilon$ jest pewną liczbą determinującą poziom szumu, natomiast $\xi$ jest losowym zaburzeniem mierzonej wartości. Podsumowując, przy rozwiązywaniu stochastycznych problemów odwrotnych spotykamy następujące problemy:

- jak poradzić sobie z losowym szumem w obserwacji?
- w jaki sposób "delikatnie" odwrócić operator $A$?
- jak wydajnie zaimplementować numeryczne rozwiązanie?

# 2 Teoria operatorów

Rozważmy liniowy operator ograniczony $A$ między dwoma przestrzeniami Hilberta $H, G$. Założymy, że $D(A) = \{f \in H \colon \exists_{g \in G}\ Af = g\} = H$.

Operatorem sprzężonym do operatora $A$ nazywamy operator $A^*$ taki, że $\forall_{f \in H} \forall_{g \in G}\ \langle Af, g \rangle = \langle f, A^* g \rangle$.

Operator $A$ nazwiemy samosprzężonym, jeżeli $A = A^*$.

Operator $A \colon H \to H$ jest nieujemny, gdy $\forall_{f \in H}\ \langle Af, f \rangle \geqslant 0$ (odpowiednio dodatni).

**Twierdzenie 1.** *Niech $A \in L(H, G)$. Wtedy*

- $KerA = (RangeA^*)^\perp$ *oraz* $\overline{RangeA} = (KerA^*)^\perp$,
- *jeśli $A$ jest iniektywny, to $A^* A$ też,*
- $A^* A \in L(H)$ *oraz $A^* A$ jest dodatni i samosprzężony.*

*Dowód.* Zauważmy, że $RangeA^\perp = \{g \in G \colon \langle Ag, g \rangle = 0\ \forall f \in H\}$.

Wtedy dla dowolnych $f \in KerA$ i $g \in G$ mamy, że $0 = \langle Af, g \rangle = \langle f, A^* g \rangle$ a stąd $KerA = (RangeA^*) \perp$. Zamieniając $A$ z $A^*$ otrzymujemy, że $(KerA^*)^\perp = RangeA^\perp$, czyli $(KerA^*)^\perp = (RangeA^\perp)^\perp = \overline{RangeA}$, jako że rozpatrujemy przestrzenie Hilberta.

Korzystając z równości $\langle A^* Af, f \rangle = \langle Af, Af \rangle = ||Af||^2$, widzimy, że $KerA = KerA^* A$.

Analogicznie otrzymujemy, że $\langle A^* Af, f \rangle = \langle Af, Af \rangle = \langle f, A^* Af \rangle$ oraz $\langle A^* Af, f \rangle = ||Af||^2 \geqslant 0$, zatem operator $A^* A$ jest samosprzężony i dodatni. □

**Wniosek 1.**

- $H = KerA \oplus KerA^\perp = KerA \oplus \overline{RangeA^*}$,
- $G = \overline{RangeA} \oplus RangeA^\perp = \overline{RangeA} \oplus KerA^*$.

# 3 Operatory zwarte

**Definicja 1.** *Operator* $A\colon H \to G$ *nazywamy zwartym (compact), jeżeli dla każdego ograniczonego zbioru w* $H$*, jego obraz przez operator* $A$ *jest względnie zwarty w* $G$*, czyli jego domknięcie jest zwarte w* $G$*. Przez* $K(H,G)$ *będziemy oznaczać zbiór operatorów zwartych między przestrzeniami* $H$ *i* $G$*.*

**Uwaga 1.** *Jeżeli* $A \in K(H,G)$ *oraz* $dim H = \infty$ *to operator* $A^{-1}$ *jest nieograniczony.*

**Twierdzenie 2** (Reprezentacja spektralna)**.** *Niech* $A$ *będzie samosprzężonym operatorem zwartym na przestrzeni Hilberta* $H$*. Wtedy istnieje zupełny układ funkcji własnych* $E = \{f_j, j \in I\} \subset H$*. Niech* $J = \{j \in I \colon \lambda_j \neq 0\}$ *oznacza zbiór tych indeksów dla których odpowiednie wartości własne są niezerowe, wtedy zbiór* $J$ *jest przeliczalny oraz*

$$\forall_{f \in H}\ Af = \sum_{j \in J} \lambda_j \langle f, f_j \rangle f_j.$$

*Ponadto dla każdego* $\delta > 0$ *zbiór* $J_\delta = \{j \in I \colon |\lambda_j| \geqslant \delta\}$ *jest skończony a jedynym mozliwym punktem skupienia zbioru wartości własnych jest zero.*

*Dowód.* Bez dowodu. □

Powyższe twierdzenie można stosować tylko do przypadku operatorów samosprzężonych i zwartych. O ile w dalszym ciągu będziemy zakładać zwartość operatora $A$, o tyle warunek samosprzężenia zostanie usunięty dzięki zamienieniu reprezentacji spektralnej na reprezentację singularną.

**Twierdzenie 3.** *Niech* $A\colon H \to G$ *będzie operatorem zwartym na przestrzeniach Hilberta* $H, G$*. Wtedy istnieją skończony lub zbieżny do zera ciąg liczb dodatnich* $\{b_n\}_{n \in I}$ *oraz układy ortonormalne* $\{v_n\}_{n \in I} \subset H$*,* $\{u_n\}_{n \in I} \subset G$ *takie, że*

- $Ker A^{\perp} = \overline{span\{v_n,\ n \in I\}}$,
- $\overline{Range A} = \overline{span\{u_n,\ n \in I\}}$,
- $Af = \sum_n b_n \langle f, v_n \rangle u_n$ *oraz* $A^* g = \sum_n b_n \langle g, u_n \rangle v_n$.

*Ponadto* $g \in RangeA$ *wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest tzw. warunek Picarda*

$$\sum_n b_n^{-2}|\langle g, u_n\rangle|^2 < \infty \ \textit{oraz}\ g = \sum_n \langle g, u_n\rangle u_n$$

*Wtedy rozwiązania równania* $Af = g$ *mają postać*

$$f = f_0 + \sum_n b_n^{-1}\langle g, u_n\rangle v_n$$

*przy czym* $f_0 \in KerA$ *jest dowolne.*

Układ $(u_n, v_n, b_n)$ nazywamy układem singularnym operatora $A$ a jego reprezentację w postaci $Af = \sum_n \lambda_n\langle f, v_n\rangle u_n$ nazywamy dekompozycją według wartości osobliwych (singular value decomposition– SVD) operatora $A$.

*Dowód.* Dowód twierdzenia opiera się na wykorzystaniu twierdzenia spektralnego do operatora $A^*A$.

Operator $A^*A$ jest samosprzężony, zwarty i dodatni, a zatem istnieją liczby $b_1^2 \geqslant b_2^2 \geqslant \cdots \geqslant 0$ oraz funkcje ortonormalne $v_n$ takie, że $A^*Av_n = b_n^2 v_n$. Niech $I = \{n\colon b_n > 0\}$ oraz przez $u_n$ oznaczmy znormalizowane obrazy wektorów $v_n$, czyli $u_n = b_n^{-1}Av_n$ dla $n \in I$. Zauważmy, że $\langle u_k, u_l\rangle = b_k^{-1}b_l^{-1}\langle Av_k, Av_l\rangle = b_k^{-1}b_l^{-1}\langle v_k, A^*Av_l\rangle = b_k^{-1}b_l^{-1}\langle v_k, b_l^2 v_l\rangle = \delta_{kl}$.

Korzystając w wykazanego wcześniej twierdzenia dostajemy, że $KerA^{\perp} = (KerA^*A)^{\perp} = \overline{RangeA^*A} = \overline{span\{v_n,\ n \in I\}}$.

Analogicznie rozpatrując operator $AA^*$ z rozkładem spektralnym $AA^*u_n = b_n^2 u_n$ dostajemy, że $\overline{RangeA} = \overline{span\{u_n,\ n \in I\}}$.

Tożsamości $Af = \sum_n b_n\langle f, v_n\rangle u_n$ oraz $A^*g = \sum_n b_n\langle g, u_n\rangle v_n$ otrzymujemy, zauważając, że $Af = \sum_n\langle Af, u_n\rangle u_n = \sum_n\langle Af, b_n^{-1}Av_n\rangle u_n = \sum_n\langle f, b_n^{-1}A^*Av_n\rangle u_n = \sum_n\langle f, b_n^{-1}b_n^2 v_n\rangle u_n = \sum_n b_n\langle f, v_n\rangle u_n$ oraz drugą analogicznie.

Z nierówności Bessela dostajemy, że $\sum_n |\langle f, v_n\rangle|^2 < \infty$, bo $f \in H$ a stąd $\sum_n |\langle f, v_n\rangle|^2 = \sum_n b_n^{-4}|\langle f, b_n^2 v_n\rangle|^2 = \sum_n b_n^{-4}|\langle f, A^*Av_n\rangle|^2 = \sum_n b_n^{-4}|\langle Af, Av_n\rangle|^2 = \sum_n b_n^{-2}|\langle g, b_n^{-1}Av_n\rangle|^2 = \sum_n b_n^{-2}|\langle g, u_n\rangle|^2 < \infty$. W drugą stronę wnioskujemy, że jeśli spełniony jest warunek Picarda to możemy wypisać jawny wzór na rozwiązanie, gdyż odpowiedni szereg norm współczynników jest zbieżny i $g$ jest sumą swojego szeregu Fouriera..

Ostatecznie możemy wnioskować, że $f = f_0 + \sum_n b_n^{-1}\langle g, u_n\rangle v_n$, gdzie $f_0 \in KerA$. □

Udało nam się zaprezentować działanie zwartego operatora w postaci jego rozwinięcia według wartości osobliwych w postaci $Af = \sum_n b_n\langle f, v_n\rangle u_n$ oraz uzyskać postać szukanych rozwiązań w postaci $f = f_0 + \sum_n b_n^{-1}\langle g, u_n\rangle v_n$. Jednak takie rozwiązanie sytuacji stawia przed nami nowe problemy. Po pierwsze zauważmy, że jeżeli tylko $g$ posiada niezerowe składowe w przestrzeni ortogonalnej do domknięcia obrazu operatora $A$ równanie $Af = g$ nie może być spełnione dokładnie. Niech $P\colon G \to \overline{RangeA}$ będzie rzutem ortogonalnym, czyli $\forall_{g\in G}\ Pg = \sum_n \langle g, u_n\rangle u_n$. Wtedy dla dowolnego elementu $f \in H$ mamy, że $||Af - g||^2 = ||Af - Pg||^2 + ||(1-P)g||^2 \geqslant ||(1-P)g||^2$.

Drugi problem związany jest ze zbieżnością szeregu w warunku Picarda. Z twierdzenia o reprezentacji spektralnej operatora zwartego samosprzężonego wiemy, że liczby $b_n \to 0$ gdy $n \to \infty$ a zatem liczby $b_n^{-2} \to \infty$ gdy $n \to \infty$ a nie mamy żadnej gwarancji, że liczby $\langle g, u_n\rangle$ zbiegają do zera odpowiednio szybko by zrównoważyć ten przyrost szczególnie w przypadku zaburzonej wartości $y$.

# 4 Przykłady

**Przykład 1.** *Należy zauważyć i nie mylić wartości własnych operatora zwartego, które mogą nie istnieć, z jego wartościami osobliwymi. Rozważmy następujący przykład. Niech $H = G$ i niech $\{e_n\}$ będzie zupełnym układem ortonormalnym w tej przestrzeni oraz rozważmy operator zadany następująco $Af = \sum_k \frac{1}{k}\langle f, e_k\rangle e_{k+1}$. Pokażemy teraz, że operator ten nie ma wartości własnych. Gdyby miał musiałoby być spełnione dla pewnych $\lambda, f$ równanie $Af = \lambda f$. Korzystając z zupełności ukłądu $\{e_n\}$ możemy prawą stronę równania zapisać jako $\lambda \sum_{k=1}^{\infty}\langle f, e_k\rangle e_k$ i porównując odpowiednie współczynniki dostajemy, że $\forall_k\ \frac{1}{k}\langle f, e_k\rangle = \lambda\langle f, e_{k+1}\rangle$. Jeżeli $\lambda = 0$ to $f = 0$, jeżeli natomiast $\lambda \neq 0$, to dostajemy, że $\forall_k\ \langle f, e_{k+1}\rangle = \frac{1}{k!\lambda^k}\langle f, e_1\rangle$ i pozostaje zagadnienie znalezienia wartości $\langle f, e_1\rangle$. Licząc iloczyn skalarny $\langle Af, e_1\rangle = 0 = \langle \lambda f, e_1\rangle$, czyli $\langle f, e_1\rangle$ musi być zerem, czyli $f = 0$, czyli operator $A$ nie może mieć wartości własnych. Widać jednak od razu, że układ $(\frac{1}{k}, e_k, e_{k+1})$ tworzy jego układ singularny.*

# 5 Stochastyczny problem odwrotny

Powróćmy do sformułowania problemu z zaburzonymi pomiarami wyrażonymi w języku stochastyki, czyli niech $A\colon H \to G$ będzie zwartym operatorem między dwoma przestrzeniami Hilberta. Obserwując pewną zaburzoną informację $Y$ naszym zadaniem jest poznać $f \in H$ według modelu

$$Y = Af + \epsilon\xi$$

gdzie $\epsilon$ oznacza wielkość szumu.

Podamy teraz założenia jakie będzie musiał spełniać losowy szum.

**Definicja 2.** *Stochastycznym błędem $\xi$ nazwiemy Hilbert– space process, czyli ograniczony liniowy operator $\xi\colon G \to L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ taki, że dla dowolnych elementów $g_1, g_2 \in G$ mamy zdefiniowane zmienne losowe $\langle \xi, g_i \rangle$ takie, że $\mathbb{E}\langle \xi, g_i \rangle = 0$ oraz możemy zdefiniować kowariancję $Cov_\xi$ jako ograniczony liniowy operator ($||Cov_\xi|| \leqslant 1$) z przestrzeni $G$ w przestrzeń $G$ taki, że $\langle Cov_\xi g_1, g_2 \rangle = Cov(\langle \xi, g_1 \rangle, \langle \xi, g_2 \rangle)$.*

Często wykorzystywanym modelem będącym idealizacją pewnych innych modeli jest model białego szumu.

**Definicja 3.** *Powiemy, że losowy błąd $\xi$ jest białym szumem, jeśli $Cov_\xi = I$ oraz indukowane zmienne losowe są gaussowskie, czyli dla dowolnych elementów $g_1, g_2 \in G$ mamy, że $\langle \xi, g_i \rangle \sim \mathcal{N}(0, ||g_i||^2)$ oraz $Cov(\langle \xi, g_1 \rangle, \langle \xi, g_2 \rangle) = \langle g_1, g_2 \rangle$.*

**Lemat 1.** *Niech $\xi$ będzie białym szumem w przestrzeni $G$ oraz niech $\{u_n\}$ będzie ortonormalną bazą tej przestrzeni. Oznaczając $\xi_k = \langle \xi, u_k \rangle$ dostajemy, że $\{\xi_n\}$ niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym standardowym rozkładzie gaussowskim.*

*Dowód.* Z definicji $\xi_k = \langle \xi, u_k \rangle \sim \mathcal{N}(0, ||u_k||^2) = \mathcal{N}(0, 1)$ oraz $Cov(\langle \xi, u_n \rangle, \langle \xi, u_k \rangle) = \langle u_n, u_k \rangle = \delta_{nk}$. □

Zauważmy, że gdy $\xi$ jest białym szumem, $Y$ nie jest elementem przestrzeni $G$ a staje się operatorem działającym na przestrzeni $G$ w następujący sposób

$$\forall_{g \in G}\ \langle Y, g \rangle = \langle Af, u_n \rangle + \epsilon\langle \xi, g \rangle$$

gdzie $\langle \xi, g \rangle \sim \mathcal{N}(0, ||g||^2)$.

Rozważmy teraz układ singularny $(u_n, v_n, b_n)$ operatora zwartego $A$ oraz niech $\xi$ będzie białym szumem. Możemy wtedy zapisać rozpatrując projekcję $Y$ na układ $\{u_n\}$, że

$$\langle Y, u_n \rangle = \langle Af, u_n \rangle + \epsilon\langle \xi, u_n \rangle = \langle Af, b_n^{-1} A v_n \rangle + \epsilon\xi_n = b_n^{-1}\langle A^* Af, v_n \rangle + \epsilon\xi_n =$$

$$b_n^{-1}\langle \sum_k b_k^2 \langle f, v_k\rangle v_k, v_n\rangle + \epsilon\xi_n = b_n\theta_n + \epsilon\xi_n$$

gdzie $\theta_n = \langle f, v_n\rangle$ są współczynnikami w rozwinięciu Fouriera funkcji $f$ w bazie $\{v_n\}$.

Oznaczając przez $y_n = \langle Y, u_n\rangle$ możemy wyjściowy problem $Y = Af + \epsilon\xi$ zapisać w równoważnej postaci sequence space model jako

$$y_n = b_n\theta_n + \epsilon\xi_n, \ n = 1, 2, \ldots .$$

W tej postaci widać dokładnie trudności związane ze stochastycznymi problemami odwrotnymi. Jako że $b_n$ są wartościami osobliwymi operatora zwartego mamy, że $b_n \to 0$ gdy $n \to \infty$, czyli widać, że wraz ze wzrostem $n$ sygnał $b_n\theta_n$ staje się coraz słabszy i coraz trudniej estymować $\theta_n$. Dodatkową trudnością jest fakt, że naszym celem jest estymacja współczynników $\theta_n$ a nie współczynników $b_n\theta_n$, dlatego możemy zapisać równoważną postać problemu

$$x_n = \theta_n + \epsilon\sigma_n\xi_n, \ n = 1, 2, \ldots$$

gdzie $x_n = y_n/b_n$ oraz $\sigma_n = b_n^{-1}$, czyli $\sigma_n \to \infty$ gdy $n \to \infty$. Widzimy zatem, że wraz ze wzrostem $n$ szum zaczyna dominować nad sygnałem czyniąc estymację $\theta_n$ trudną.

Zależnie od szybkości ucieczki wartości $b_n$ do nieskończoności można podzielić problemy odwrotne na pewne kategorie

- direct, gdy $\sigma_n \asymp 1$,
- mildly ill– posed, gdy $\sigma_n \asymp n^\beta$,
- severely ill– posed, gdy $\sigma_n \asymp \exp(\beta n)$.

Poszczególne kategorie problemów charakteryzują się coraz większą trudnością z uwagi na tempo "gubienia" sygnału pośród szumu.

# 6 Przykłady 2

**Przykład 2.** *Rozważmy problem estymacji $l-$ tej pochodnej funkcji. Niech $H = G = \mathcal{L}^2([0,1])$, $f \in C^k([0,1])$ będzie $1-$ periodyczną funkcją i zdefiniujmy model $Y = f + \epsilon\xi$, gdzie $\xi$ jest białym szumem a naszym celem jest estymacja $f^{(l)} = D^l f$. Używając bazy trygonometrycznej $\{\phi_k = e^{2\pi ikx}\}$*

*możemy zapisać współczynniki funkcji $f$ w tej bazie jako $\theta$. Jest znane, że wtedy $f^{(l)} = \sum_{-\infty}^{\infty}(2\pi ik)^l\theta_k\phi_k$. Problem ten jest równoważny następującemu modelowi:*
*Obserwujemy $y_k = \theta_k + \epsilon\xi_k$ i próbujemy estymować współczynniki $\nu_k(2\pi ik)^l\theta$ co jest równoważne modelowi $y_k = (2\pi ik)^{-l}\nu_k + \epsilon\xi_k$ i próbie estymacji współczynników $\theta_k$. Widać zatem, że problem ten jest mildly ill– posed.*

**Przykład 3.** *Rozważmy problem dekonwolucji. Niech $H = G = \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ oraz niech operator $A\colon H \to H$ będzie zdefiniowany następująco*

$$(Af)(x) = \phi * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-y)f(y)dy.$$

*Rozwiązanie tego problemu możemy znaleźć stosując transformatę Fouriera. Przypomnijmy, że dla całkowalnej funkcji $f$ jej transformata Fouriera wyraża się wzorem $\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-ixt)dx$. Stosując ją do naszego operatora otrzymujemy, że $\mathcal{F}(Af)(t) = \hat{\phi}(t)\hat{f}(t)$ a stąd rozwiązaniem jest funkcja $f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{\phi}^{-1}g)(x)$ jednak mamy problem ze zbieżnością tego rozwiązania! Jako, że transformata Fouriera jądra gaussowskiego wyraża się wzorem $\hat{\phi}(t) = e^{-t^2/2}$ jej odwrotność rośnie w tempie wykładniczym.*

# 7 Obcięte SVD

Na początek rozważmy problem estymacji w nieparametrycznym modelu regresji

$$y_n = f(x_n) + \sigma\epsilon_n.$$

Naszym celem jest znalezienie funkcji $f$. W tym celu możemy posłużyć się metodą rzutowania na pewną bazę, na przykład trygonometryczną lub falkową. Funkcję $f$ możemy wtedy zapisać w postaci szeregu $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n$ i wtedy zadanie estymacji sprowadzi się do znalezienia współczynników rozwinięcia $a_n$. W przypadku obserwowania skończonej liczby pomiarów ciężko oczekiwać by udało się wyestymować nieskończoną liczbę parametrów (ciężko oczekiwać zbieżności tak otrzymanego szeregu), dlatego możemy zastosować następującą metodę: pierwsze $N$ współczynników oszacujemy na podstawie posiadanych danych natomiast pozostałe współczynniki oszacujemy przez 0. Metoda ta znajduje swoje uzasadnienie w tym, że w przypadku gładkich funkcji $f$ o jej kształcie decydują początkowe współczynniki, natomiast pozostałe stają się zaniedbywalne. Metoda ta posiada także pewne swoje modyfikacje (hard tresholding, soft tresholding) polegające na zastąpieniu przez zero współczynników w pewnym sensie małych, szczególnie dobrze sprawujące się w przypadku funkcji posiadających sparse przedstawienie w pewnej bazie falkowej.

Podobną metodologię możemy spróbować zastosować w przypadku stochastycznych problemów odwrotnych z operatorami zwartymi posiadającymi dekompozycję według wartości osobliwych.

Rozważmy problem w postaci

$$x_n = \theta_n + \epsilon\sigma_n\xi_n,\ n = 1, 2, \ldots\ .$$

Wtedy możemy zaproponować następujący estymator dla współczynników $\theta_n$

$$\hat{\theta}(N) = \begin{cases} x_k,\ k \leqslant N \\ 0,\ k > N \end{cases}.$$

Wtedy estymatorem elementu $f$ staje się $\hat{f} = \sum_{k=1}^{N} x_k v_k$.

Liczbę $N$ nazywamy bandwidth.

Na tak zaproponowaną metodę estymacji możemy również spojrzeć w następujący sposób. Niech $P_k \colon G \to span\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ będzie skończenie wymiarową projekcją ortogonalną $P_k g = \sum_{n=1}^{k} \langle g, u_n \rangle u_n$. Jako że $P_k$ jest skończenie wymiarowe $P_k g \in RangeA$ dla dowolnego $k$ oraz $P_k g \to Pg$ gdy $k \to \infty$, gdzie $P$ oznacza projekcję ortogonalna na $\overline{RangeA}$ (czyli to, co w zasadzie rozwiązujemy rozpatrując dekompozycję operatora według wartości osobliwych). Możemy wtedy rozpatrywać następującą modyfikację problemu

$$Af = P_k g,\ k \in \mathbb{N}.$$

Równanie to zawsze posiada rozwiązanie oraz biorąc iloczyn skalarny z wektorami $u_n$ otrzymujemy, że

$$b_n \langle f, v_n \rangle = \begin{cases} \langle g, u_n \rangle,\ n \leqslant k \\ 0,\ n > k \end{cases}.$$

A zatem poszukiwane rozwiązanie możemy zapisać w postaci

$$f_k = f_0 + \sum_{n=1}^{k} b_n^{-1} \langle g, u_n \rangle v_n$$

dla pewnego $f_0 \in KerA$. Zauważmy również, że $||Af_k - Pg||^2 = ||(P - P_k)g||^2 \to 0$ gdy $k \to \infty$, czyli błąd popełniany przy zastąpieniu $P$ przez $P_k$ może być dowolnie mały.

Wybierając $f_0 = 0$ możemy zapisać następującą definicję

**Definicja 4.** *Niech $A\colon H \to G$ będzie zwartym operatorem liniowym z rozkładem według wartości osobliwych $(v_n, u_n, b_n)$. Aproksymacją przez obcięcie SVD (TSVD) problemu $Af = g$ nazwiemy problem znalezienia takiego $f \in H$, że*

$$Af = P_k g,\ f \perp KerA$$

*dla pewnego $k \in \mathbb{N}$.*

Tak postawiony problem posiada jedyne rozwiązanie w postaci obcięcia reprezentacji według wartości osobliwych (TSVD) w postaci

$$f_k = \sum_{n=1}^{k} b_n^{-1} \langle g, u_n \rangle v_n.$$

Problemem jaki pozostał jest dobranie odpowiedniego poziomu obcięcia $k$.

W celu oceny jakości estymatora posłużymy się błędem średniokwadratowym, czyli $R(f, \hat{f}) = \mathbb{E}(||f - \hat{f}||^2)$. Mając do dyspozycji układ wartości osobliwych możemy zapisać estymator uzyskany metodą TSVD w postaci $\hat{f} = \sum_{n=1}^{k} x_n v_n$. Dzięki temu możemy zauważyć, że jest to estymator liniowy z wektorem wag posiadających jedynki na pierwszych $k$ pozycjach i zerach na pozostałych. Ryzyko estymatora możemy wtedy zapisać jako $R(f, \hat{f}) = \mathbb{E}(||f - \hat{f}||^2) = \mathbb{E}(\sum_n (\hat{f}_k - f_k)^2) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \theta_n^2 + \sum_{n=1}^{k} \epsilon^2 \sigma_n^2$, czyli ryzyko estymatora TSVD wyraża się w bardzo prosty sposób.

Możemy teraz zastanowić się jak wybór $k$ będzie wpływał na ryzyko estymatora TSVD

$$R(f, \hat{f}) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \theta_n^2 + \sum_{n=1}^{k} \epsilon \sigma_n.$$

Z uzyskanego wzoru widzimy, że wraz ze wzrostem $k$ zmniejsza się się obciążenie estymatora (ubywa pominiętych współrzędnych), ale rośnie wariancja, odwrotny skutek obserwujemy zmniejszając $k$- rośnie obciążenie, ale maleje wariancja. Optymalny wybór $k$ powinien prowadzić do zbalansowania tych dwóch przeciwstawnych tendencji. Ogólnie wiadomo jednak, że wybór optymalnego poziomu odcięcia wymaga znajomości pewnych parametrów poszukiwanej funkcji (gładkość).

# 8 Przykłady 3

**Przykład 4.** *W następującym przykładzie prześledzimy problemy związane z odwracaniem operatorów (nawet skończenie wymiarowych), poziomem obcięcia i występowaniem szumu.*
*Rozważmy transformację Laplace'a funkcji zdefiniowanej na odcinku* $[0, \infty)$ *zadanej jako*

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

*Uprościmy sytuację rozważając pewną dyskretną aproksymację tej transformaty zadaną na siatce* $0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n < \infty$*, wyrażającą się wzorem*

$$(\mathcal{L}_d f)(s_j) = \sum_{k=1}^{n} w_k e^{-s_j t_k} f(t_k),$$

*gdzie* $w_k, t_k$ *są wybrane według jakiejś metody przybliżonego całkowania.*
*W przykładzie z [2] zastosowano logarytmicznie rozłożone punkty siatki i* 40 *punktową kwadraturę Gaussa- Legendre'a obciętą do przedziału* $(0, 5)$*.*
*Niech funkcja* $f$ *będzie zadana wzorem*

$$f(t) = t\mathbf{1}_{[0,1)} + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}t\right)\mathbf{1}_{[1,3)},$$

*której transformatę można wyrazić jawnym wzorem*

$$(\mathcal{L}f)(s) = \frac{1}{2s^2}\left(2 - 3e^{-s} + e^{-3s}\right).$$

*Zadaniem jest teraz odtworzenie funkcji* $f$ *na podstawie wartości jej transformaty w punktach* $s_j$*.*
*Bezpośrednia próba rozwiązania tego zagadnienia nawet pomijając jakikolwiek błąd addytywny prowadzi do katastrofalnych wyników z powodu fatalnego uwarunkowania tego zadania co wyraża się przez wskaźnik uwarunkowania tego zadania zdefiniowany w tym przypadku jako*

$$\kappa(A) = ||A|| \ ||A^{-1}|| \approx 8,5 \cdot 10^{20}.$$

*Stąd nawet zaokrąglenia numeryczne prowadzą do poważnych zaburzeń wyniku.*

*W przypadku gdy pojawia się problem z odwróceniem macierzy możemy skorzystać z pseudoodwrotności Penrosa– Moora. Każdą macierz* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

*można zdekomponować według wartości osobliwych* $A = U\Lambda V^T$*, gdzie* $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *i* $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *są macierzami ortogonalnymi, a* $\Lambda \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *macierzą diagonalną z elementami* $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{(m,n)}$*. Wtedy rozwiązanie zagadnienia* $Af = g$ *ma rozwiązanie w postaci* $f = f_0 + A^\dagger g$*, gdzie* $A^\dagger$ *jest właśnie pseudoodwrotnością Penrosa– Moora, zdefiniowaną jako* $A^\dagger = V\Lambda^\dagger U^T$*, gdzie* $\Lambda^\dagger \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *jest macierzą diagonalną złożoną z odwrotności wartości singularnych macierzy A. Zauważmy, że gdy któraś z wartości singularnych wyjściowej macierzy jest bardzo mała jej odwrotność bardzo mocno rośnie, co może powodować, że zastosowanie wprost pseudoodwrotności P– M może skutkować niestabilnością wyniku i nawet błędy zaokrągleń mogą powodować eksplozję wyniku. Stąd potrzebne jest obcięcie pewnych najmniejszych wartości singularnych. W tym przypadku można zastosować discrepancy principle. Niech* $y$ *będzie zaburzoną wersją 'czystego'* $y_0$ *i* $||g - g_0|| \approx \epsilon$ *i wtedy wybieramy poziom obcięcia* $k$ *jako największy indeks spełniający* $||g - Af_k|| = ||g - P_k g|| \geqslant \epsilon$*.*

# Literatura


[1] L. Cavalier, *Inverse Problems in Ststistics* in P. Alquier et al., *Inverse problems and high- dimensional estimation*, Springer, 2011,

[2] J. Kaipo, E. Somersalo, *Statistical and computational inverse problems*, Springer, 2004,

[3] Z. Szkutnik, *Statystyczne problemy odwrotne*, notatki do wykładu,

[4] L. Wasserman, *All of nonparmetric statistics*, Springer, 2006.