

Procesy stochastyczne

Zestaw zadań nr 6

Zadanie 1. Niech N_t będzie procesem Poissona z intensywnością λ . Udowodnij

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t}{t} = \lambda \text{ p.n.}$$

Zadanie 2. Udowodnij, że suma niezależnych procesów Poissona jest procesem Poissona. Jaką intensywność ma otrzymany proces?

Zadanie 3. Niech N_t będzie procesem Poissona z intensywnością λ . Znajdź postać funkcji kowariancji tego procesu

$$C_N(t, s) = \text{Cov}(N_t, N_s)$$

oraz funkcję autokorelacji tego procesu

$$A_N(t, s) = \rho(N_t, N_s).$$

Zadanie 4. Niech N_t będzie procesem Poissona z intensywnością λ i niech X_1 będzie czasem pierwszego przybycia. Pokaż, że warunkowo względem zdarzenia $N(t) = 1$, X_1 ma rozkład jednostajny na odcinku $(0, t]$, czyli

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x | N(t) = 1) = \frac{x}{t}, \quad 0 \leq x \leq t.$$

Zadanie 5. Udowodnij, że jednorodny proces Poissona ma własność Markowa.

Zadanie 6. Niech N będzie jednorodnym procesem Poissona z intensywnością λ . Dla pewnego $s > 0$ określmy $\tilde{N}_t = N_{t+s} - N_s$. Udowodnij, że \tilde{N} jest procesem Poissona z tą samą intensywnością λ .

