Procesy stochastyczne
Zestaw zadań nr 4

Definicja 1. *Niech* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ *będzie filtracją. Momentem stopu (momentem Markowa, momentem zatrzymania) nazywamy zmienną losową* $\tau\colon T\to[0,+\infty]$ *taką, że* $\forall_{t\in T}\ \{\tau\le t\}\in\mathcal{F}_t$. *Domknięcie przeciwdziedziny w nieskończoności wyjątkowo nie jest literówką.*

Definicja 2. *Filtrację* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ *nazywamy prawostronnie ciągłą, jeżeli* $\forall_{t\in T}\ \mathcal{F}_{t+}=\bigcap_{s>t}\mathcal{F}_s=\mathcal{F}_t$.

Definicja 3. *Mówimy, że filtracja* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ *spełnia zwykłe (standardowe) warunki, jeżeli :*
— *jest prawostronnie ciągła,*
— $\mathcal{F}_0$ *zawiera wszystkie zbiory miary zero.*
W dalszym ciągu rozważać będziemy tylko filtracje spełniające zwykłe warunki.

Definicja 4. *Niech* τ *będzie momentem stopu względem filtracji* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$. σ-*ciałem zdarzeń obserwowanych do chwili* τ *nazywamy zbiór*

$$\mathcal{F}_\tau=\left\{A\in\mathcal{F}_\infty=\bigcup_t\mathcal{F}_t\colon\forall_t\ A\cap\{\tau\le t\}\in\mathcal{F}_t\right\}$$

Zadanie 1. *Udowodnij*
— σ- *ciało zdarzeń obserwowanych do chwili* τ *jest* σ- *ciałem,*
— *jeżeli* $\sigma\le\tau$, *to* $\mathcal{F}_\sigma\subset\mathcal{F}_\tau$,
— *zmienna losowa* τ *jest* $\mathcal{F}_\tau$- *mierzalna.*

Zadanie 2. *Niech* T *będzie przedziałem. Wykaż, że jeżeli* τ *jest momentem stopu, to* $\{\tau<t\}\in\mathcal{F}_t$ *dla dowolonego* t.

Zadanie 3. *Niech* $T=[0,\infty)$ *oraz niech* τ *będzie momentem stopu. Czy momentem stopu jest*
— τ^2,
— $\tau-1$,
— $\tau+1$,
— $\tau+c,\ c>0$,
— $\tau-c,\ c>0$.

Zadanie 4. *Niech* $\{\tau_n\}$ *będzie ciągiem momentów stopu. Udowodnij, że momentami stopu są również następujące zmienne losowe:*
— $\sup_n\tau_n$,
— $\inf_n\tau_n$,
— $\liminf_n\tau_n$,
— $\limsup_n\tau_n$.

Zadanie 5. *Niech* $T=[0,\infty)$, *a* X_t *procesem* $\mathcal{F}_t$-*adaptowalnym o ciągłych trajektoriach. Wykaż, że dla* A *otwartego* $\tau_A:=\inf\{t\colon X_t\in A\}$ *jest momentem zatrzymania względem* $\mathcal{F}_t$.

Zadanie 6. *Wykaż, że jeśli* τ *i* σ *są momentami zatrzymania, to zdarzenia* $\{\tau<\sigma\},\{\tau=\sigma\}$ *i* $\{\tau\le\sigma\}$ *należą do* $\mathcal{F}_\tau$, $\mathcal{F}_\sigma$ *i* $\mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma}$.

Zadanie 7. *Niech będzie dana przestrzeń probabilistyczna* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ *z filtracją zupełną* $\{\mathcal{F}_n\}$. *Niech* τ,σ *będą dwoma momentami Markowa o skończonych* *wartościach takimi, że istnieje $t_0 \geq 0$, takie, że $\mathbb{P}(\tau \geq t_0) = \mathbb{P}(\sigma \geq t_0) = 1$. Niech $A \in \mathcal{F}_{t_0}$. Sprawdź, czy momentem stopu jest zmienna losowa*

$$U = \tau \cdot \mathbf{1}_A + \sigma \cdot \mathbf{1}_{A'}$$

względem podanej filtracji.

Zadanie 8. *Niech $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n < \ldots$ będzie rosnącym do nieskończoności ciągiem momentów stopu o skończonych wartościach. Niech $N_t = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{t \geq \tau_i\}}$. Niech ponadto $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takim, że jest on niezależny od procesu N. Załóżmy, że $\sup_i \mathbb{E}|U_i| < \infty$ oraz $\mathbb{E}U_i = 0$ dla dowolnego i. Udowodnij, że wtedy proces*

$$Z_t = \sum_{i=1}^{\infty} U_i \mathbf{1}_{\{t \geq \tau_i\}}$$

jest martyngałem.

Zadanie 9. *Niech X będzie procesem adaptowanym. Udowodnij, że X jest martyngałem, jeżeli jest całkowalny i dla każdego ograniczonego momentu stopu τ zachodzi $\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}_0$.*

Zadanie 10. *Niech proces X będzie martyngałem i niech τ będzie momentem stopu.*

— *Udowodnij, że proces zastopowany $X_t^\tau = X(\min\{t, \tau\})$ jest martyngałem.*
— *Niech σ będzie momentem stopu takim, że $\sigma \leq \tau$ i niech τ, σ będą ograniczone. Udowodnij, że $\mathbb{E}\left(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma\right) = X_\sigma$ prawie na pewno.*
— *Przypuśćmy, że istnieje całkowalna zmienna losowa Y taka, że dla dowolnego t, $|X_t| \leq Y$ i niech τ będzie momentem stopu skończonym prawie wszędzie. Udowodnij, że $\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_0$.*
— *Niech X będzie procesem takim, że istnieje stała M taka, że $|X_{n-1} - X_n| \leq M$ dla dowolnego n i niech τ będzie momentem stopu takim, że $\mathbb{E}\tau < \infty$. Udowodnij, że wtedy $\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_0$.*