

## Zestaw 3

**Zadanie 1.** Niech  $X_1, X_2, \dots$  będzie ciągiem niezależnych scentrowanych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie i niech  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$ . Oznaczmy  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ . Pokaż, że  $(S_n, \mathcal{F}_n)$  jest martyngealem.

**Zadanie 2.** Niech  $X$  będzie całkowalną zmienną losową i niech  $(\mathcal{F}_n)$  będzie dowolną filtracją. Pokaż, że proces zdefiniowany jako  $X_n = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$  jest martyngealem względem filtracji  $(\mathcal{F}_n)$ .

**Zadanie 3.** Niech  $Z_n = X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n$ , gdzie  $X_i$  są mierzalne względem niezależnych  $\sigma$ -ciał  $\mathcal{G}_n$ ,  $\mathbb{E}X_i = 1$ . Oznaczmy  $\mathcal{F}_n = \sigma(\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n)$ . Pokaż, że  $(Z_n, \mathcal{F}_n)$  jest martyngealem.

**Zadanie 4.** Niech  $(X_n, \mathcal{F}_n)$  będzie martyngealem, zaś ciąg  $(V_n)$  będzie procesem prognozowalnym, czyli takim, że zmienna losowa  $V_n$  jest  $\mathcal{F}_{n-1}$  mierzalna, (przyjmujemy  $\mathcal{F}_{-1} = \{\emptyset, \Omega\}$ ). Zakładamy ponadto, że zmienne losowe  $V_n$  są ograniczone i definiujemy

$$Z_n = V_0 X_0 + V_1(X_1 - X_0) + V_2(X_2 - X_1) + \dots + V_n(X_n - X_{n-1}).$$

Pokaż, że  $(Z_n, \mathcal{F}_n)$  jest martyngealem.

**Zadanie 5.** Wykazać, że przy odpowiednich założeniach co do całkowalności funkcja wypukła martyngały względem pewnej filtracji jest submartyngealem względem tej filtracji oraz że funkcja wypukła i niemalejąca przekształca submartyngał w submartyngał.

**Zadanie 6.** Udowodnij, że przyrosty martyngału są parami nieskorelowane.

**Zadanie 7.** Określmy proces  $Z(n)$  w następujący sposób

$$Z(n) = Z(n-1) + L(n), Z(0) = 0, \mathbb{P}(L(n) = 1) = \mathbb{P}(L(n) = -1),$$

gdzie zmienne  $L(n)$  są niezależne między sobą.

Udowodnij, że następujące procesy są martyngealami względem filtracji  $\mathcal{F}_n = \sigma(Z(0), Z(1), \dots, Z(n))$ :

- $Z(n)$ ,  $n = 0, 1, \dots$
- $Z(n)^2 - n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ,
- $(-1)^n \cos(\pi Z(n))$ ,  $n = 0, 1, \dots$

**Zadanie 8.** Niech  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$  będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie  $\mathcal{N}(-a, 1)$ ,  $a > 0$ .

- Dla jakiej wartości  $h \in \mathbb{R}$  proces  $Y_n = \exp(h \sum_{i=1}^n X_i)$  jest martyngealem względem swojej filtracji naturalnej?
- Dla jakich wartości  $h$  proces ten jest sub- lub supermartyngealem?
- Niech  $h = 2a$  i niech  $x > 0$ . Określmy  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ . Udowodnij, że zachodzi

$$\mathbb{P}\left(\sup_n S_n > x\right) \leq e^{-2ax}.$$

**Zadanie 9.** Niech  $X_1, X_2, X_3, \dots$  będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, odpowiednio całkowalnych i o średniej zero. Niech  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ . Pokaż, że proces  $S_n^2 - n\mathbb{E}X_1^2$  jest martyngealem. Czy proces  $S_n^3$  jest martyngealem? Jaką postać komensacji  $A_n$  należy zaproponować, by proces  $S_n^3 - A_n$  był martyngealem? Co gdy  $S_n^3$  zastąpimy przez  $S_n^m$ ?

**Zadanie 10.** Niech  $X_1, X_2, X_3, \dots$  będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie zadany przez

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - q$$

oraz niech  $\{\mathcal{F}_n\}$  będzie filtracją generowaną przez zmienne losowe  $X_i$ . Niech  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ . Udowodnij

- $M_n = (q/p)^{S_n}$  jest martyngałem względem  $\{\mathcal{F}_n\}$ ,
- dla  $\lambda > 0$  wyznacz stałą  $C = C(\lambda)$  taką, że proces  $Z_n^\lambda = C^n \lambda^{S_n}$  jest martyngałem względem  $\{\mathcal{F}_n\}$ .

**Zadanie 11.** Udowodnij, że suma procesów będących martyngałem względem tej samej filtracji jest martyngałem względem tej filtracji. Co gdy procesy te są martyngalami względem różnych filtracji?

**Zadanie 12.** Udowodnij, że wartość oczekiwana martyngału względem zadanej filtracji jest stała w czasie.

**Zadanie 13.** Niech  $\Omega = [0, 1]$ . Znajdź postać filtracji generowanej przez proces  $X(n, \omega) = 2\omega \chi_{[0, 1-1/n]}(\omega)$ .

**Zadanie 14.** Pokaż, że filtracja naturalna jest najmniejszą filtracją taką, że dany proces jest do niej adaptowany.

**Zadanie 15.** Niech  $\{\xi_n\}$  będzie martyngałem względem pewnej filtracji  $\{\mathcal{F}_n\}$ . Udowodnij, że  $\{\xi_n\}$  jest również martyngałem względem swojej filtracji naturalnej.