

# Procesy stochastyczne

## Zestaw zadań nr 7

**Zadanie 1.** Pokaż, że następujące procesy są martingalami

- $W_t$ ,
- $W_t^2 - t$ ,
- $\exp\left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2 t}{2}\right)$ ,  $\sigma > 0$ .

**Zadanie 2.** Oblicz

- $\mathbb{P}(W_s < W_t)$ ,
- $\mathbb{P}(0 < W_2 < W_3)$
- $\mathbb{E}W_1W_2^2$
- $\mathbb{E}(W_2^2(W_3 - W_1))$ .

**Zadanie 3.** Niech proces  $X$  będzie określony jako  $X_t = tW_t - \int_0^t W_s ds$ . Czy proces  $X$  jest martingalem?

**Zadanie 4.** Wyznacz gęstość zmiennej losowej  $X = W(s) + W(t)$ , gdzie  $0 \leq s \leq t$ .

**Zadanie 5.** Określmy następujący proces (most Browna)

$$B_t = W_t - tW_1, \quad t \in [0, 1].$$

Sprawdź, czy jest on martingalem i znajdź jego funkcję kowariancji.

**Zadanie 6.** Udowodnij, że zachodzi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{t} = 0 \text{ p.n.}$$

**Zadanie 7.** Niech  $W_t = (W_t^1, W_t^2)$ , gdzie  $\{W_t^1\}, \{W_t^2\}$  są niezależnymi procesami Wienera. Dla  $R > 0$  i  $t > 0$  znajdź  $\mathbb{P}(\|W_t\| < R)$ , gdzie  $\|\cdot\|$  jest normą euklidesową w  $\mathbb{R}^2$ . Oblicz  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\|W_t\| < R)$ .

**Zadanie 8.** Niech  $\{L_n\}$  będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że  $\mathbb{P}(L_n = 1) = \mathbb{P}(L_n = -1)$  dla każdego  $n \in \mathbb{N}$ . Określmy  $h = \frac{1}{N}$  oraz proces  $X_n = h^\alpha L_n$ . Pokaż, że dla  $\alpha \in (0, 1/2)$   $\sum_{k=1}^N X_k \rightarrow 0$  w  $L_2$ , natomiast dla  $\alpha \in (1/2, \infty)$   $\sum_{k=1}^N X_k \rightarrow \infty$  w  $L_2$ . Co dostajemy dla  $\alpha = 1/2$ ?

**Zadanie 9.** Udowodnij, że proces Winera ma własność Markowa.

**Zadanie 10.** Niech  $T_a$  będzie czasem, jaki upłynie zanim proces Wienera  $WW$  dotknie poziomu  $a \in \mathbb{R}$ .

- Znajdź  $\mathbb{P}(T_2 \leq 8)$ .
- Wyznacz medianę  $T_2$ .

**Zadanie 11.** Niech proces  $M$  będzie zadany jako  $M_t = \sup_{0 \leq s \leq t} W(s)$ . Wyznacz

- $\mathbb{P}(M_4 \leq 2)$ ,
- gęstość  $M_4$ ,
- średnią oraz medianę  $M_4$ .

**Zadanie 12.** Pokaż, że proces określony jako  $Z_t = \sqrt{t}N(0, 1)$  nie jest procesem Wienera.

**Zadanie 13.** Udowodnij, że dla prawie wszystkich trajektorii procesu Wienera, zachodzi

$$\sup_t W_t = +\infty \quad \inf_t W_t = -\infty.$$

**Zadanie 14.** Procesem Wienera z dryftem  $\mu$  i wariancją  $\sigma^2$  nazywamy proces  $X_t = \mu t + \sigma W(t)$ .

- Wykaż, że proces  $X$  ma niezależne i stacjonarne przyrosty.
- Znajdź rozkład  $X(t)$ .
- Sprawdź, czy proces  $X$  jest martyngałem.