Zestaw 4

Zadanie 1. *Niech τ, τ_1 i τ_2 będą momentami stopu. Udowodnij*
— $\mathcal{F}_\tau$ *jest* σ- *ciałem,*
— *jeśli* $\tau \equiv t$, *to* $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_t$,
— $A \in \mathcal{F}_\tau$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $A \in \mathcal{F}$ *i* $\{\tau = t\} \cap A \in \mathcal{F}_t$ *dla dowolnego* t,
— *jeśli* $\tau_1 \leq \tau_2$, *to* $\mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2}$.

Zadanie 2. *Niech $T = [0, \infty)$ oraz niech τ będzie momentem stopu. Czy momentem stopu jest*
— τ^2,
— $\tau - 1$,
— $\tau + 1$,
— $\tau + c$, $c > 0$,
— $\tau - c$, $c > 0$.

Zadanie 3. *Niech T, S będą momentami stopu. Czy momentem stopu jest zmienna losowa $T + S$ lub $T - S$?*

Zadanie 4. *Niech będzie dana przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ z filtracją zupełną $\{\mathcal{F}_n\}$. Niech τ, σ będą dwoma momentami Markowa o skończonych wartościach takimi, że istnieje $t_0 \geq 0$, takie, że $\mathbb{P}(\tau \geq t_0) = \mathbb{P}(\sigma \geq t_0) = 1$. Niech $A \in \mathcal{F}_{t_0}$. Sprawdź, czy momentem stopu jest zmienna losowa*

$$U = \tau \cdot \mathbf{1}_A + \sigma \cdot \mathbf{1}_{A'}$$

względem podanej filtracji.

Zadanie 5. *Niech τ, σ będą momentami stopu. Udowodnij, że $\tau \wedge \sigma$ i $\tau \vee \sigma$ są momentami stopu.*

Zadanie 6. *Niech S, T będą momentami stopu. Udowodnij, że zachodzi $\mathcal{F}_{\min\{T,S\}} = \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_S$.*

Zadanie 7. *Niech (X_i) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie $U[0,1]$. Niech $\tau = \inf\{n \colon X_1 + X_2 + \cdots + X_n \geq 1\}$. Wyznacz $\mathbb{E}\tau$.*

Zadanie 8. *Niech (X_n) będzie ciągiem Bernoulliego, zaś $\tau = \inf\{n \colon S_n = 1\}$. Wykaż, że $\mathbb{E}\tau = \infty$.*

Zadanie 9. *Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie ze skończonym drugim momentem i nich τ będzie całkowalnym momentem stopu. Udowodnij zmodyfikowaną tożsamość Wald'a postaci $\mathbb{E}\left(S_n - \tau \mathbb{E} X_1\right)^2 = \mathbb{E}\tau Var X_1$.*

Zadanie 10. *Niech τ będzie zmienną losową, a $(X_n, \mathcal{F}_n)$ martyngałem. Kiedy $(X_{n \wedge \tau}, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem?*

Zadanie 11. *Niech $0 < T_1 < T_2 < \cdots < T_n < \ldots$ będzie rosnącym do nieskończoności ciągiem momentów stopu o skończonych wartościach. Niech $N_t = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{i \geq T_i\}}$. Niech ponadto $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takim, że jest on niezależny od procesu N. Załóżmy, że $\sup_i \mathbb{E}|U_i| < \infty$ oraz $\mathbb{E}U_i = 0$ dla dowolnego i. Udowodnij, że wtedy proces*

$$Z_t = \sum_{i=1}^{\infty} U_i \mathbf{1}_{\{t \geq T_i\}}$$

jest martyngałem.

Zadanie 12. *Niech X będzie symetrycznym błądzeniem losowym z czasem dyskretnym postaci $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ i niech filtracja $\{\mathcal{F}_n\}$ będzie genereowana przez zmienne Y_i. Weźmy dowolne $K \in \mathbb{N}$ i określmy $T = \inf\{n\colon |X_n| = K\}$. Udowodnij:*
- — *T jest momentem stopu,*
- — *proces $Z_n = (-1)^n \cos(\pi \cdot (X_n + K))$ jest martyngałem,*
- — *proces Z spełnia założenia twierdzenia o opcjonalnym stopowaniu,*
- — *znajdź $\mathbb{E}(-1)^T$.*

Zadanie 13. *Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie i niech ϕ oznacza funkcję generującą momenty dla X_i. Niech ponadto T będzie ograniczonym momentem stopu. Oznaczmy przez $S_T = \sum_{i=1}^{T} X_i$. Udowodnij, że*

$$\mathbb{E}\left(\frac{\exp(\theta S_T)}{\phi(\theta)^T}\right) = 1.$$

Zadanie 14. *Niech proces X będzie martyngałem i niech τ będzie momentem stopu.*
- — *Niech σ będzie momentem stopu takim, że $\sigma \le \tau$ i niech τ, σ będą ograniczone. Udowodnij, że $\mathbb{E}(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma$ prawie na pewno.*
- — *Przypuśćmy, że istnieje całkowalna zmienna losowa Y taka, że dla dowolnego t, $|X_t| \le Y$ i niech τ będzie momentem stopu skończonym prawie wszędzie. Udowodnij, że $\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_0$.*
- — *Niech X będzie procesem takim, że istnieje stała M taka, że $|X_{n-1} - X_n| \le M$ dla dowolnego n i niech τ będzie momentem stopu takim, że $\mathbb{E}\tau < \infty$. Udowodnij, że wtedy $\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_0$.*

Zadanie 15. *Niech $(X_k)_{k=1}^n$ będzie podmartyngałem oraz niech $\lambda > 0$. Udowodnij, że zachodzi wtedy*

$$\lambda \mathbb{P}(\min_{k \le n} X_k \le -r) \le \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{\{\min_{k\le n} X_k \ge -r\}}) - \mathbb{E}X_0 \le \mathbb{E}X_n^+ - \mathbb{E}X_0 \le \mathbb{E}|X_n| - \mathbb{E}X_0.$$

Zadanie 16 (Nierówność Doob'a w L^p)**.** *Niech $(X_k)_{k=1}^n$ będzie odpowiednio całkowalnym podmartyngałem i niech $p > 1$. Udowodnij, że zachodzi wtedy*

$$\mathbb{E}\sup_{k \le n} |X_k|^p \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}|X_n|^p.$$