

## Zestaw 2

**Zadanie 1.** Zmienne losowe  $X$  i  $Y$  są niezależne i mają gęstości odpowiednio  $f_1, f_2$ . Udowodnij, że gęstość zmiennej losowej  $Z = X/Y$  wyraża się wzorem  $g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| f_1(yu) f_2(y) dy$ .

**Zadanie 2.** Podać przykłady:

- zmiennych losowych  $X_1, X_2$  zależnych i skorelowanych,
- zmiennej losowej  $X$  i takich funkcji  $f, g$ , że zmienne  $f(X)$  i  $g(X)$  są niezależne.

**Zadanie 3.** Niech  $Z = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} U_n$ , gdzie  $(U_n)$  jest ciągiem Bernoulliego. Wykaż, że  $U \sim [0, 1]$ .

**Zadanie 4.** Niech  $X, Y$  będą niezależnymi wektorami losowymi. Wykaż, że  $\mathbb{P}(X \in A, (X, Y) \in B) = \int_A \mathbb{P}((u, Y) \in B) d\mu_X$ .

**Zadanie 5.** Niech  $\mathbb{P}(B) > 0$ . Udowodnij, że  $\mathbb{P}(A|B)$  jako funkcja  $A$ , przy ustalonym  $B$  jest prawdopodobieństwem.

**Zadanie 6.** Jest  $n$  monet, ale  $k$  z nich jest asymetrycznych i orzeł wypada na nich z prawdopodobieństwem  $1/3$ . Wybrano losowo monetę i w wyniku rzutu wypadł orzeł. Jaka jest szansa, że moneta jest asymetryczna?

**Zadanie 7.** W zbiorze 100 monet, jedna ma po obu stronach orły, natomiast pozostałe są prawidłowe. W wyniku 10 rzutów losowo wybraną monetą, otrzymaliśmy 10 orłów. Oblicz prawdopodobieństwo, że była to moneta z dwoma orłami.

**Twierdzenie 1** (Nierówność Bernsteina). Niech  $S_n$  oznacza liczbę sukcesów w schemacie Bernoulliego z prawdopodobieństwem  $p$ . Wtedy dla dowolnego  $\epsilon > 0$ ,  $\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - p| > \epsilon) \leq 2 \exp(-n\epsilon^2/4)$ .

**Zadanie\* 8.** Udowodnij nierówność Bernsteina.

**Zadanie 9.** Korzystając z nierówności Bernsteina, udowodnij, że w schemacie Bernoulliego z prawdopodobieństwem  $p$ ,  $\frac{S_n}{n} \rightarrow p$  prawie na pewno.

**Zadanie 10.** Jeśli  $\text{Var} X_n \leq C < \infty$  dla dowolnego  $n$  oraz współczynniki korelacji  $\rho(X_i, X_j) \rightarrow 0$ , gdy  $|i - j| \rightarrow \infty$ , to ciąg  $(X_n)$  spełnia SPWL.

**Zadanie 11.** Wykaż, że jeśli  $(X_n)$  jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie takich, że  $\mathbb{E}X_1^- < \infty, \mathbb{E}X_1^+ = \infty$ , to  $\mathbb{P}(\lim_n \frac{S_n}{n} = \infty) = 1$ .

**Zadanie 12.** Niech  $X_1, X_2, \dots \in L^2(\Omega)$  będą nieskorelowanymi zmiennymi losowymi o wspólnie ograniczonej wariancji. Udowodnij, że wtedy  $\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - \mathbb{E}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)}{n} \xrightarrow{P} 0$ .

**Zadanie 13.** Niech  $(A_n)$  będą niezależnymi zdarzeniami losowymi i niech  $p_n = \mathbb{P}(A_n)$ . Wykaż, że wtedy  $\frac{\mathbf{1}_{A_1} + \mathbf{1}_{A_2} + \dots + \mathbf{1}_{A_n}}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{n} \xrightarrow{P} 0$ .

**Zadanie 14.** Niech  $(X_n)$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że  $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = p_n$  i  $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - 2p_n$ . Znajdź warunek konieczny i wystarczający, by ciąg  $(X_n)$  spełniał MPWL.

**Zadanie 15.** Niech  $X_n \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$  oraz  $Y_n x \xrightarrow{P} \sigma$ . Udowodnij, że wtedy  $X_n Y_n \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

**Zadanie 16.** Niech  $(X_n), (Y_n)$  będzie ciągiem niezależnych wektorów losowych. Udowodnij, że jeżeli  $X_n \rightsquigarrow X$  i  $Y_n \rightsquigarrow Y$ , to  $(X_n, Y_n) \rightsquigarrow (X, Y)$ .

**Zadanie 17.** Niech dla dowolnego  $n$   $X_n$  i  $X$  posiadają rozkład dyskretny skupiony na liczbach całkowitych. Udowodnij, że  $X_n \rightsquigarrow X$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mathbb{P}(X_n = x) \rightarrow \mathbb{P}(X = x)$  dla każdego całkowitego  $x$ .

**Zadanie 18.** Niech  $\sqrt{n}(T_n - \theta)$  ma granicę według rozkładu. Udowodnij, że  $T_n$  zbiega według prawdopodobieństwa do  $\theta$ .

**Zadanie 19.** Niech  $\mathbb{E}X_n \rightarrow \mu$  i  $\text{Var}X_n \rightarrow 0$ . Udowodnij, że wtedy  $X_n$  zbiega według prawdopodobieństwa do  $\mu$ .