Kolokwium 1
Grupa B

Zadanie 1. *Rozważmy przestrzeń probabilistyczną* $\big([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda\big)$, *gdzie* λ *jest miarą Lebesgue'a. Niech* $Y_n(\omega) = \omega^2 \cdot \mathbf{1}_{[0,1-1/n)} + \mathbf{1}_{[1-1/n,1]}$ *oraz niech* $X(\omega) = 2\omega$.

— *Wyznacz postać filtracji generowanej przez proces* $\{Y_n\}$.
— *Wyznacz postać procesu* $X_n = \mathbb{E}\left(X|Y_n\right)$.
— *Czy proces* $Y_n = X_n^2$ *jest martyngałem?*

Zadanie 2. *Niech proces* $\{X_n\}$ *będzie procesem symetrycznego błądzenia losowego z czasem dyskretnym i niech* $\{\mathcal{F}_n\}$ *oznacza filtrację naturalną tego procesu. Znajdź deterministyczny ciąg* $a_n \in \mathbb{R}$ *taki, że proces zadany jako* $Z_n = X_n^3 + a_n X_n$ *jest martyngałem względem filtracji* $\{\mathcal{F}_n\}$.

Zadanie 3. *Niech* $X_i \in \mathcal{L}^2\left(\Omega\right)$, $\mathcal{F}_n = \sigma\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$. *Załóżmy, że* $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ *jest martyngałem względem filtracji* $\{\mathcal{F}_n\}$. *Udowodnij, że* $\mathbb{E}X_iX_j = 0$ *dla* $i \neq j$.

Zadanie 4. *Niech* S, T *będą momentami stopu względem tej samej filtracji. Udowodnij, że zachodzi* $\mathcal{F}_{\min\{T,S\}} = \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_S$.

Zadanie 5. — *Podaj definicję warunkowej wartości oczekiwanej zmiennej losowej względem* σ*- ciała.*
— *Co to jest trajektoria procesu stochastycznego?*