Zestaw 1

Zadanie 1. *Wykazać, że jeżeli* $(X_a)_{a\in A})$ *jest ciągiem zmiennych losowych,* A *jest zbiorem nieprzeliczalnym, to* $\sup_A X_a$ *nie musi być zmienną losową.*

Zadanie 2. *Pokazać, że dowolny rozkład prawdopodobieństwa* μ *może mieć conajwyżej przeliczalną liczne punktów skoku.*

Zadanie 3. *Niech* μ *będzie rozkładem prawdopodobieństwa o dystrybuancie* F*, gdzie* F *jest dana wzorem*

$$F(x) = (0.1 + x)\mathbf{1}_{x\in[0;0.5)} + (0.4 + x)\mathbf{1}_{x\in[0.5;0.55]} + \mathbf{1}_{x\in[0.55;\inf]}.$$

Znajdź $\mu(\{0.5\})$*,* $\mu([0; 0.5])$*,* $\mu((0; 0.55))$*.*

Zadanie 4. *Niech* μ *będzie rozkładem prawdopodobieństwa na* $\mathbb{R}$*. Pokaż, że* $x_0 \in \mathbb{R}$ *jest punktem skoku rozkładu* μ *wtedy i tylko wtedy, gdy dystrybuantu rozkładu* $]mu$ *jest nieciągła w* x_0*.*

Zadanie 5. *Niech* X *będzie zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem* α*. Wyznacz rozkład zmiennej losowej* Y *zdanej jako* $Y = 3X - 5$*.*

Zadanie 6. *Niech zmienna losowa* U *ma rozkład jednostajny na odcinku* $[0, 2]$*. Wyznacz rozkład zmiennych* $Y = \min(X, X^2)$ *i* $Z = \max(1, X)$*.*

Zadanie 7. *Niech zmienna losowa* X *ma standardowy rozkład normalny. Wyznacz dystrybuantę i gęstośc zmiennych losowych* $Y = \exp X$ *i* $Z = X^2$*.*

Zadanie 8. *Niech* X*będzie nieujemną zminną losową. Udowodnij, że* $\mathbb{E}X = \int_0^\infty \mathbb{P}(X \geq t)\, dt$

Zadanie 9. *Niech* X *będzie zmienną losową o nośniku na liczbach dodatnich całkowitych. Wykaż, że* $\mathbb{E}X = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(X \geq n)$*.*

Zadanie 10. *Oblicz wartość oczekiwaną zmiennej losowej o rozkładzie geometrycznym z parametrem* p*.*