Cyberbezpieczeństwo, Analiza 2

ZESTAW 5

1. Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcyjnego $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ na zbiorze X, jeśli:

a) $f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}$, $X = \mathbb{R}$,

b) $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$, $X = \mathbb{R}$,

c) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $X = \mathbb{R}$,

d) $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$, $X = \mathbb{R}$,

e) $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$, $X = \langle 2, \infty)$.

2. Korzytając z kryterium Weierstrassa zbadaj zbieżność szeregów funkcyjnych w $\mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!}{n^{2n}} \cos 2nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2x^2}}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx^2}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}}$$

3. Wyznacz promień i zbiór zbieżności danego szeregu oraz oblicz jego sumę w każdym punkcie wyznaczonego zbioru:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(x-2)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+3)4^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+3}{5^n} x^{2n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n x^{3n}}{n+1},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(x+1)^n}{6^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4^n(n+1)(n+2)}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(x-\frac{1}{2})^n}{n+1}$$

4. Oblicz sumy podanych szeregów liczbowych, korzystając ze zbieżności odpowiednich szeregów potęgowych:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{5^n(n+1)}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{4^n}$$

5. Rozwiń w szereg Taylora o środku w x_0 (podaj przedział zbieżności) funkcję f daną wzorem:

a) $f(x) = x \arctan x^2, \; x_0 = 0,$

b) $f(x) = x^3 \arcsin x, \; x_0 = 0,$

c) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \; x_0 = 0,$

d) $f(x) = e^{2x+1}, \; x_0 = 0,$

e) $f(x) = e^x, \; x_0 = 2,$

f) $f(x) = \cos x, \; x_0 = \frac{\pi}{2},$

g) $f(x) = \frac{1}{1-x}, \; x_0 = 2,$

h) $f(x) = \frac{7x+3}{(1-x)(4x+1)}, \; x_0 = 0$

i) $f(x) = \ln|x^2 + 3x + 2|, \; x_0 = 0.$

6. Stosując wzór $\frac{\pi}{6} = \arcsin \frac{1}{2}$ oblicz π z dokładnością $0,0001$.

7. Wykorzystując odpowiedni szereg potęgowy oblicz $\ln 3$ z dokładnością $0,00001$.