

Procesy stochastyczne

Zestaw zadań nr 1

Zadanie 1. Dana jest funkcja

$$F(x) = 0 \cdot \mathbf{1}_{x \leq 0} + (ax^2 + bx) \cdot \mathbf{1}_{0 < x \leq 1} + 1 \cdot \mathbf{1}_{x \geq 1}.$$

Znajdź wszystkie pary liczb a, b dla których funkcja ta jest dystrybucją. Dla jakich wartości dystrybucja ta jest ciągła?

Zadanie 2. Dodatnia liczba naturalna I jest losowana zgodnie z rozkładem $\mathbb{P}(I = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $n = 1, 2, \dots$. Jeśli liczba I przyjmie wartość n , wtedy rzuca się monetą z prawdopodobieństwem wyrzucenia orła równym e^{-n} . Znajdź prawdopodobieństwo, że otrzymano orła.

Zadanie 3. Niech X_1, X_2, \dots, X_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie z gęstością f i dystrybucją F . Niech T_k będzie k -tą najmniejszą obserwacją. Znajdź rozkład T_k i wektora (T_1, T_2, \dots, T_n) .

Zadanie 4. Niech X będzie zmienną losową przyjmującą dodatnie wartości oraz o gęstości f . Znajdź postać gęstości zmiennej losowej X^{-1} .

Zadanie 5. Niech X będzie zmienną losową przyjmującą nieujemne wartości i niech ϕ będzie rosnącą i różniczkowalną funkcją taką, że $\phi(0) = 0$. Udowodnij

1. $\mathbb{E}X = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq t) dt$
2. $\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n) \leq \mathbb{E}X \leq 1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$ (jaki stąd wniosek na temat całkowalności X ?)
3. $\mathbb{E}\phi(X) = \int_0^{+\infty} \phi'(t) \mathbb{P}(X \geq t) dt$

Zadanie 6. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednostajnym rozkładzie na odcinku $(0, 1)$. Udowodnij, że zmienne $U = \sqrt{-2 \log X} \cos(2\pi Y)$, $V = \sqrt{-2 \log X} \sin(2\pi Y)$ są niezależne i mają standardowy rozkład normalny. Czy widzisz jakieś zastosowanie tego twierdzenia?

Zadanie 7. Rozkład Cauchy'ego ma następującą gęstość

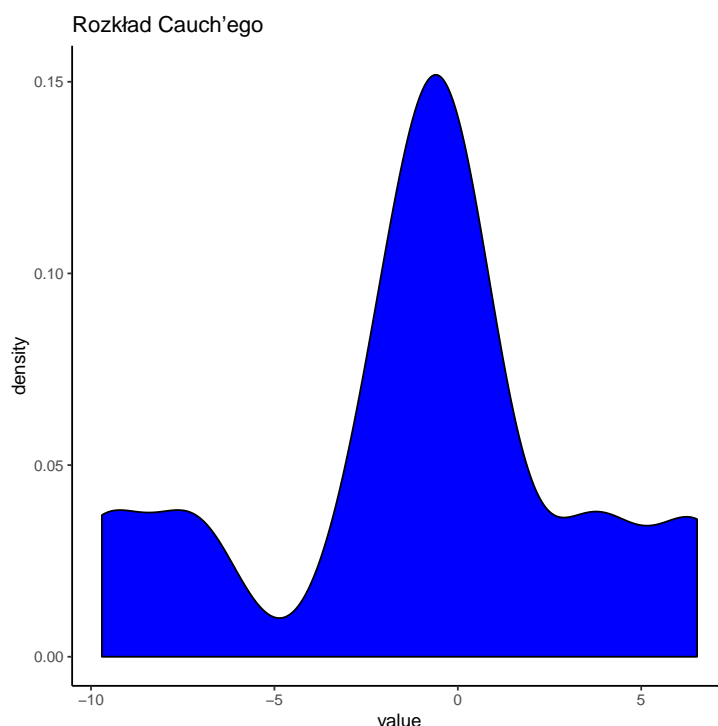
$$c_u(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{u^2 + x^2}, x \in \mathbb{R}, u > 0.$$

1. Znajdź wartość oczekiwaną rozkładu Cauchy'ego.
2. Wykaż, że $c_u * c_v = c_{u+v}$.
3. Niech X_1, X_2, \dots, X_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie c_u . Wykaż, że $(X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n$ również ma rozkład c_u .
4. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o standardowym rozkładzie normalnym. Wykaż, że X/Y ma rozkład c_1 .
5. Niech X ma rozkład jednostajny na przedziale $(-\pi/2, \pi/2)$. Wykaż, że $\tan X$ ma rozkład Cauchy'ego c_1 .

Zadanie 8. Niech dany będzie wielowymiarowy rozkład normalny z gęstością $g(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2xy + 3y^2}{2}\right)$. Znajdź parametry tego rozkładu.

Zadanie 9. Niech $X \sim \mathcal{N}_p(\mu, \Sigma)$ i niech A będzie macierzą symetryczną. Udowodnij, że $\mathbb{E}X^T A X = \text{tr}(A\Sigma) + \mu^T A \mu$.

Zadanie 10. Załóżmy, że zmienne losowe X_1, X_2, \dots, X_{20} są niezależne, o jednakowym rozkładzie $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Niech $Y_5 = X_1 + \dots + X_5$, $Y_{20} = X_1 + \dots + X_{20}$. Wyznacz wartość oczekiwaną $\mathbb{E}(Y_5 | Y_{20})$.



Zadanie 11. W grupie studenckiej przeprowadzono test z analizy, w którym można uzyskać od 0 do 100 punktów. Przeciętna liczba punktów uzyskiwanych przez studenta wynosi 40, a odchylenie standardowe 20. Zakładając, że wyniki studentów są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie prawdopodobieństwa, obliczyć prawdopodobieństwo tego, że średnia liczba punktów w 150 osobowej grupie studenckiej będzie większa od 45.

Zadanie 12. Załóżmy, że przy składaniu książki w drukarni każda litera ma prawdopodobieństwo 0.0001, że zostanie złożona błędnie. Po złożeniu książki szpalty czyta korektor, który znajduje każdy błąd z prawdopodobieństwem 0.5. Znaleźć prawdopodobieństwo, że w książce o stu tysiącach znaków drukarskich pozostaną po korekcie nie więcej niż dwa błędy.

Zadanie* 13. Zbiór Cantora C to zbiór wszystkich liczb t postaci

$$t = \frac{t_1}{3} + \frac{t_2}{3^2} + \dots + \frac{t_n}{3^n} + \dots,$$

gdzie $t_i \in \{0, 2\}$. Zauważmy, że każda liczba ze zbioru C ma jednoznaczną reprezentację. Określmy funkcję schodkową przekształcającą zbiór Cantora na odcinek $[0, 1]$. Dla liczb t ze zbioru C połóżmy

$$\phi(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{t_1}{2} + \frac{t_2}{2^2} + \dots + \frac{t_n}{2^n} + \dots \right).$$

Poza zbiorem Cantora kładziemy odpowiednie stałe tak, aby funkcja, o dziedzinie rozszerzonej z C do $[0, 1]$ była niemalejąca.

1. Wykazać, że jest to dystrybuenta ciągła, ale nie absolutnie ciągła (nie posiada gęstości).
2. Obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej o tej dystrybucji.

Zadanie* 14. Udowodnij, że każde σ -ciało, jeśli jest nieskończone to musi być nieprzeliczalne.

Zadanie 15. Od jakiej wartości (ilości sumowalnych składników) można powiedzieć, że działa centralne twierdzenie graniczne? Zaprojektuj eksperyment numeryczny, który dla kilku rodzin rozkładów pozwoli ocenić tą wartość.

