Procesy stochastyczne
Zestaw zadań nr 7

Zadanie 1. *Pokaż, że następujące procesy są martyngałami*
— W_t,
— $W_t^2 - t$,
— $\exp\left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2 t}{2}\right)$, $\sigma > 0$.

Zadanie 2. *Oblicz*
— $\mathbb{P}(W_s < W_t)$,
— $\mathbb{P}(0 < W_2 < W_3)$
— $\mathbb{E}W_1 W_2^2$
— $\mathbb{E}\left(W_2^2(W_3 - W_1)\right)$.

Zadanie 3. *Określmy następujący proces (most Browna)*

$$B_t = W_t - tW_1,\ t \in [0,1].$$

Sprawdź, czy jest on martyngałem i znajdź jego funkcję kowariancji.

Zadanie 4. *Udowodnij, że zachodzi*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{W_t}{t} = 0 \ p.n.$$

Zadanie 5. *Niech* $W_t = (W_t^1, W_t^2)$, *gdzie* $\{W_t^1\}, \{W_t^2\}$ *są niezależnymi procesami Wienera. Dla* $R > 0$ *i* $t > 0$ *znajdź* $\mathbb{P}\left(||W_t|| < R\right)$, *gdzie* $||\cdot||$ *jest normą euklidesową w* $\mathbb{R}^2$. *Oblicz* $\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(||W_t|| < R\right)$.

Zadanie 6. *Sprawdź, czy następujące procesy są procesami Wienera:*
— $-W_t$,
— $c^{-1/2}W_{ct}$, $c > 0$,
— $Y_t = tW_{1/t}$, $t > 0$ *i* $Y_0 = 0$,
— $W_{T+t} - W_T$, $T > 0$.

Zadanie 7. *Niech* $\{L_n\}$ *będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że* $\mathbb{P}\left(L_n = 1\right) = \mathbb{P}\left(L_n = -1\right)$ *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$. *Określmy* $h = \frac{1}{N}$ *oraz proces* $X_n = h^\alpha L_n$. *Pokaż, że dla* $\alpha \in (0, 1/2)$ $\sum_{k=1}^N X_k \to 0$ *w* L_2, *natomiast dla* $\alpha \in (1/2, \infty)$ $\sum_{k=1}^N X_k \to \infty$ *w* L_2. *Co dostajemy dla* $\alpha = 1/2$?

Zadanie 8. *Pokaż, że proces określony jako* $Z_t = \sqrt{t}N(0,1)$ *nie jest procesem Wienera.*

Zadanie 9. *Udowodnij, że dla prawie wszystkich trajektorii procesu Wienera, zachodzi*

$$\sup_t W_t = +\infty \ \inf_t W_t = -\infty.$$