Zestaw 2

Zadanie 1. *Zmienne losowe X i y są niezależne i mają geśtośći odpowiednio f_1, f_2. Udowodnij, że gęstość zmiennej losowej $Z = X/Y$ wyraża się wzorem $g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| f_1(yu) f_2(y) dy$.*

Zadanie 2. *Podać przykłady:*
— *zmiennych losowych X_1, X_2 zależnych i skorelowanych,*
— *zmiennej losowej X i takich funkcji f, g, że zmienne $f(X)$ i $g(X)$ są niezależne.*

Zadanie 3. *Niech $Z = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} U_n$, gdzie (U_n) jest ciągiem Bernoulliego. Wykaż, że $U \sim [0,1]$.*

Zadanie 4. *Niech X, Y będą niezależnymi wektorami losowymi, Wykaż, że $\mathbb{P}(X \in A,\ (X,Y) \in B) = \int_A \mathbb{P}((u,Y) \in B)\, d\mu_X$.*

Zadanie 5. *Niech $\mathbb{P}(B) > 0$. Udowodnij, że $\mathbb{P}(A|B)$ jako funkcja A, przy ustalonym B jest prawdopodobieństwem.*

Zadanie 6. *Jest n monet, ale k z nich jest asymetrycznych i orzeł wypada na nich z prawdopodobieństwem $1/3$. Wybrano losowo monetę i w wyniku rzutu wypadł orzeł. Jaka jest szansa, że moneta jest asymetryczna?*

Zadanie 7. *W zbiorze 100 monet, jedna ma po obu stronach orły, natomiast pozostałe są prawidłowe. W wyniku 10 rzutów losowo wybraną monetą, otrzymaliśmy 10 orłów. Oblicz prawdopodobieństwo, że była to moneta z dwoma orłami.*

Twierdzenie 1 (Nierówność Bernsteina)**.** *Niech S_n oznacza liczbę sukcesów w schemacie Bernoulliego z prawdopodobieństwem p. Wtedy dla dowolnego $\epsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \epsilon\right) \leq 2\exp(-n\epsilon^2/4)$.*

Zadanie* 8. *Udowodnij nierówność Bernsteina.*

Zadanie 9. *Korzystając z nierówności Bernsteina, udowodnij, że w schemacie Bernoulliego z prawdopodobieństwem p, $\frac{S_n}{n} \to p$ prawie na pewno.*

Zadanie 10. *Jeśli $VarX_n \leq C < \infty$ dla dowolnego n oraz współczynniki korelacji $\rho(X_i, X_j) \to 0$, gdy $|i-j| \to \infty$, to ciąg (X_n) spełnia SPWL.*

Zadanie 11. *Niech (X_n) będzie ciągiem zmiennych losowych takim, że dla dowolnego n $VarX_n \leq C < \infty$ oraz X_n zależy tylko od X_{n-1} i X_{n+1} a niezależy od innych elementów. Udowodnij, że ciąg ten spełnia SPWL.*

Zadanie 12. *Wykaż, że jeśli (X_n) jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie takich, że $\mathbb{E}X_1^- < \infty$, $\mathbb{E}X_1^+ = \infty$, to $\mathbb{P}\left(\lim_n \frac{S_n}{n} = \infty\right) = 1$.*

Zadanie 13. *Niech $X_1, X_2, \dots \in L^2(\Omega)$ będą nieskorelowanymi zmiennymi losowymi o wspólnie ograniczonej wariancji. Udowodnij, że wtedy $\frac{X_1+X_2+\dots X_n - \mathbb{E}(X_1+X_2+\dots X_n)}{n} \xrightarrow{P} 0$.*

Zadanie 14. *Niech (A_n) będą niezależnymi zdarzeniami losowymi i niech $p_n = \mathbb{P}(A_n)$. Wykaż, że wtedy $\frac{\mathbf{1}_{A_1}+\mathbf{1}_{A_2}+\dots+\mathbf{1}_{A_n}}{n} - \frac{p_1+p_2+\dots p_n}{n} \xrightarrow{P} 0$.*

Zadanie 15. *Niech (X_n) będą niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = p_n$ i $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - 2p_n$. Znajdź warunek konieczny i wystarczający, by ciąg (X_n) spełniał MPWL.*

Zadanie 16. *Niech* $X_n \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$ *oraz* $Y_n \xrightarrow{P} \sigma$. *Udowodnij, że wtedy* $X_n Y_n \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,\sigma^2)$

Zadanie 17. *Niech* (X_n), (Y_n) *będzie ciągiem niezależnych wektorów losowych. Udowodnij, że jeżeli* $X_n \rightsquigarrow X$ *i* $Y_n \rightsquigarrow Y$, *to* $(X_n, Y_n) \rightsquigarrow (X, Y)$.

Zadanie 18. *Niech dla dowolnego* n X_n *i* X *posiadają rozkład dyskretny skupiony na liczbach całkowitych. Udowodnij, że* $X_n \rightsquigarrow X$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathbb{P}(X_n = x) \to \mathbb{P}(X = x)$ *dla każdego całkowitego* x.

Zadanie 19. *Niech* $\sqrt{n}(T_n - \theta)$ *ma granicę według rozkładu. Udowodnij, że* T_n *zbiega według prawdopodobieństwa do* θ.

Zadanie 20. *Niech* $\mathbb{E}X_n \to \mu$ *i* $VarX_n \to 0$. *Udowodnij, że wtedy* X_n *zbiega według prawdopodobieństwa do* μ.