Procesy stochastyczne
Zestaw zadań nr 5

18 grudnia 2018

Zadanie 1. *Mamy rurę długości* 30 *centymetrów i z jej lewego końca stawiamy pchłę. Pchła co sekundę wykonuje skok, przy czym pierwszy skok zawsze jest wgłąb rury, jeśli pchła dojdzie do prawego końca rury, to zawsze skacze w lewo, zaś jeśli jest gdzieś w środku, to skacze w lewo lub w prawo z równym prawdopodobieństwem. Skok pchły ma długość* 1*cm. Gdy pchła wróci na lewy koniec, łapiemy ją. Ile średnio będzie musieli czekać? W jakich stanach może znaleźć się mucha (z punktu widzenia teorii łańcuchów Markowa oczywiście).*

Zadanie 2. *Student raz w tygodniu bierze udział w zajęciach z procesów stochastycznych. Na każde zajęcia przychodzi przygotowany lub nie. Jeśli w danym tygodniu jest przygotowany, to w następnym jest przygotowany z prawdopodobieństwem* 0.7. *Jeśli natomiast w danym tygodniu nie jest przygotowany, to w następnym jest przygotowany z prawdopodobieństwem* 0.2. *Opisz stany w jakich może znaleźć się student i wyznacz macierz przejścia. Na dłuższą metę (bardzo długą), jak często student jest przygotowany?*

Zadanie 3. *Niech N_t będzie procesem Poissona z intensywnością λ. Udowodnij*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = \lambda \ p.n.$$

Zadanie 4. *Udowodnij, że suma niezależnych procesów Poissona jest procesem Poissona.*

Zadanie 5. *Niech N_t będzie procesem Poissona z intensywnością λ. Znajdź postać funkcji kowariancji tego procesu*

$$C_N(t, s) = Cov(N_t, N_s)$$

oraz funkcję autokorelacji tego procesu

$$A_N(t,s) = \rho\left(N_t, N_s\right).$$

Zadanie 6. *Niech N_t będzie procesem Poissona z intensywnością λ i niech X_1 będzie czasem pierwszego przybycia. Pokaż, że warunkowo względem zdarzenia $N(t) = 1$, X_1 ma rozkład jednostajny na odcinku $(0,t]$, czyli*

$$\mathbb{P}\left(X_1 \leqslant x | N(t) = 1\right) = \frac{x}{t},\ 0 \leqslant x \leqslant t.$$

Zadanie 7. *Załóżmy, że N_t jest procesem Poissona, a $Y_1, Y_2, \dots$ jest ciągiem nizelażenych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie niezależnym od N. Niech*

$$X_t \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{N_t} Y_k,\ N_t > 0.$$

Wykaż, że $\{X_t\}_t$ jest procesem o niezależnych i stacjonarnych przyrostach.