Zestaw 7

Zadanie 1. Niech $(N_t)_{\{t\geq 0\}}$ będzie procesm Poissona z instensywnością 1.5. Oblicz:

- $\mathbb{P}(N_1 = 2, N_4 = 6),$
- $\mathbb{P}(N_5 N_2 = 3),$
- $\mathbb{P}(N_2 + N_5 = 4),$
- $\mathbb{P}(N_4 = 6 | N_1 = 2),$
- $-\mathbb{P}(N_1=2|N_4=6).$

Zadanie 2. Niech $(N_t)_{\{t>0\}}$ będzie procesm Poissona z instensywnością 2. Oblicz:

- $-\mathbb{E}(N_3N_4),$
- $-\mathbb{E}(S_3S_4),$
- $-Var(N_5-2N_6+3N_{10}),$
- $-\mathbb{E}(N_5-2N_6+3N_{10}),$
- $-Cov(N_5-2N_6,3N_{10}),$

 $gdzie S_n jest n-tym czasem przybycia.$

Zadanie 3. Niech N_t będzie procesem Poissona z intensywnością λ . Znajdź postać funkcji kowariancji tego procesu

$$C_N(t,s) = Cov(N_t, N_s)$$

oraz funkcję autokorelacji tego procesu

$$A_N(t,s) = \rho(N_t, N_s)$$
.

Zadanie 4. Niech $(N_t)_{\{t\geq 0\}}$ będzie jednorodnym procesem Poissona z intensywnością λ . Dla s>0 niech $\tilde{N}_t=N_{t+s}-N_s$ dla $t\geq 0$. Udowodnij, że $(\tilde{N}_t)_{\{t\geq 0\}}$ jest procesem Poissona z intensywnością λ .

Zadanie 5. Niech $(N_t^1)_{\{t\geq 0\}}, (N_t^2)_{\{t\geq 0\}}, \ldots, (N_t^k)_{\{t\geq 0\}}$ będą niezależnymi procesami Poissona z intensywnościami odpowiednio $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^k$. Niech $N_t = N_t^1 + N_t^2 + \cdots + N_t^k$ dla $t \geq 0$. Udowodnij, że wtedy $(N_t)_{\{t\geq 0\}}$ jest procesm Poissona o intensywności $\lambda = \lambda^1 + \lambda^2 + \cdots + \lambda^k$.

Zadanie 6. W kranine Oz spotkania z lwami, tygrysami i niedźwiedzami opisywane są procesami Poissona z intensywnościami odpowiednio λ_l , λ_t i λ_n , gdzie jednostką czasu jest godzina. Spotaknie z każdym z gatunków jest niezależne od spotkania z pozostałymi.

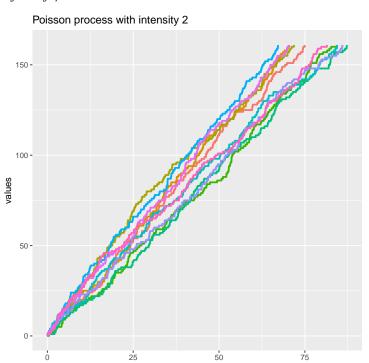
- Jakie jest prowdopodobieństwo, że Dorotka nie spotka żadnego zwierzęcia w ciągu pierwszych 24 godzin od przybycia do krainy Oz?
- Dorotka widziała 3 zwierzęta jednego dnia. Jakie jest prawdopodobieństwo, że widziała każdy z gatunków?

Zadanie 7. Niech N_t będzie procesem Poissona z intensywnością λ i niech X_1 będzie czasem pierwszego przybycia. Pokaż, że warunkowo względem zdarzenia N(t) = 1, X_1 ma rozkład jednostajny na odcinku (0,t], czyli

$$\mathbb{P}(X_1 \le x | N(t) = 1) = \frac{x}{t}, \ 0 \le x \le t.$$

Zadanie* 8 (Niejednorodny proces Poissona). Studenci przybywają do stołówki zgodnie z niejednorodnym procesem Poissona. Częstość przybyć rośnie liniowo od 100 do 200 studentów między 11 a 12, następnie utrzymuje się na stałym

poziomie do godziny 14, a następnie zmieniejsza się liniowo do 100 między 14 a 15. Jakie jest prawdopodobieństwo, że między 11:30 a 13:30 w stołówce będzie co najmniej 400 osób?



time