# Kolokwium 1
# Grupa B

**Zadanie 1.** *Niech* $\xi_n = \eta_1 + \cdots + \eta_n$. *Kiedy* $\xi_n^2 - n$ *jest martyngałem względem filtracji* $\mathcal{F}_n = \sigma(\eta_1, \ldots, \eta_n)$*?*

**Zadanie 2.** *Niec* $X$ *będzie supermartyngałem względem pewnej filtracji takim, że jego wartość oczekiwana jest stała w czasie. Udowodnij, że proces ten jest martyngałem.*

**Zadanie 3.** *Niech* $(Y_n)_{n=0}^{\infty}$ *będzie ciągiem całkowalnych zmiennych losowych adaptowanym do filtracji* $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$. *Załóżmy, że istnieją ciągi liczb* $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, $n \geq 0$ *takie, że* $\mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) = u_n Y_n + v_n$. *Znajdź ciągi liczbowe* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $n \geq 0$ *takie, że ciąg zmiennych losowych* $M_n = a_n Y_n + b_n$, $n > 1$ *jest martyngałem względem filtracji* $\{\mathcal{F}_n\}$.

**Zadanie 4** (Druga tożsamość Wald'a)**.** *Niech* $T$ *będzie ograniczonym momentem stopu względem pewnej filtracji i niech* $(X_n)$ *będzie ciągiem zmiennych losowych adaptowanym do tej filtracji. Załóżmy, że dla dowolnego* $i \geq 0$ *zachodzi* $(X_1, X_2, \ldots, X_i, T \wedge (i+1)) \perp X_{i+1})$ *i niech* $\mathbb{E}T < \infty$, $\mathbb{E}X_i = 0$ *oraz* $\mathbb{E}X_i^2 = \mathbb{E}X_1^2 < \infty$ *dla dowolnego* $i$. *Oznaczmy ponadto* $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. *Udowodnij, że* $\mathbb{E}S_n^2 = \mathbb{E}X_1^2 \mathbb{E}T$.