Zestaw 2

Zadanie 1. *Niech A, B będą zbiorami mierzalnymi i niech $\mathbb{P}(B) > 0$. Pokaż, że $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A|B) = \mathbb{P}(A|B)$.*

Zadanie 2. *Niech g będzie funkcją stałą i niech f będzie funkcją całkowalną. Pokaż, że $\mathbb{E}(f|g)$ jest funkcją stałą i równą $\mathbb{E}(f)$.*

Zadanie 3. *Niech $\{A_i\}_{i\in I}$ będzie przeliczalnym rozbiciem przestrzeni Ω i takim, że dla dowolnego i $\mathbb{P}(A_i) > 0$. Wykaż, że wtedy $\mathbb{E}X = \sum_{i\in I} \mathbb{E}(X|A_i)\mathbb{P}(A_i)$.*

Zadanie 4. *Niech $\Omega = [0,1]$ i niech $\mathbb{P}$ będzie miarą Lebesgue'a na tym odcinku. Znajdź $\mathbb{E}(f|\mathcal{F})$ jeśli*
— *$f(x) = \sqrt{x}$ i $\mathcal{F}$ jest generowane przez zbiory $[0,1/4)$ i $[1/4,1]$,*
— *$f(x) = -x$ i $\mathcal{F}$ jest generowane przez zbiory $[0,1/4)$ i $[1/3,1]$.*

Zadanie 5. *Niech zmienne losowe X, Y będą określone na pewnej przestrzeni probabilistycznej w następujący sposób*
— $X(x) = 2x^2, \quad Y(x) = 1 - |2x-1|$,
— $X(x) = 2x^2, \quad Y(x) = 1 - \frac{1}{2}|3x-1|$,
— $X(x) = x^2, \quad Y(x) = 2\mathbf{1}_{[0,1/2)} + x\mathbf{1}_{[1/2,1]}$.
Znajdź $\mathbb{E}(X|Y)$.

Zadanie 6. *Niech $(\Omega = [0,1], \mathcal{F} = \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Niech $Y(\omega) = \omega(1-\omega)$. Udowodnij, że dla dowolnej zmiennej losowej X określonej na tej przestrzeni zachodzi*

$$\mathbb{E}(X|Y)(\omega) = \frac{X(\omega) + X(1-\omega)}{2}.$$

Zadanie 7. *Niech $X_1, X_2, \dots$ będzie ciągiem niezależnych i całkowalnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie normalnym $(\mathcal{N}(\mu,\sigma))$ i niech τ będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem λ niezależną od tego ciągu. Znajdź wartość oczekiwaną zmiennej losowej*

$$\xi \stackrel{d}{=} \sum_{n=1}^{\tau} X_n.$$

Zadanie 8. *Niech $\{X_i\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie i takim, że $\mathbb{E}|X_i| < \infty$. Niech $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ i niech $\mathcal{F}_n = \sigma(S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, \dots)$. Wyznacz*
— $\mathbb{E}(X_1|\mathcal{F}_n)$,
— $\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i|\mathcal{F}_n\right)$, *gdzie* $\sum_{i=1}^n a_i = 1$.

Zadanie 9. *Niech zmienna losowa X będzie całkowalna z kwadratem. Określmy $Var(X|\mathcal{F}) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}))^2|\mathcal{F}\right)$. Udowodnij, że*

$$\begin{aligned} VarX =& \mathbb{E}\left(Var(X|\mathcal{F})\right) + Var\left(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})\right) \\ (\mathbb{E}(X|\mathcal{F}))^2 &\leq \mathbb{E}(X^2|\mathcal{F}) \\ VarX &\geq Var\left(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})\right). \end{aligned}$$

Zadanie 10. *Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną i niech $B \in \mathcal{F}$ będzie taki, że $\mathbb{P}(B) > 0$. Udowodnij, że $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B)$ jest rozkładem prawdopodobieństwa na B z σ-ciałem $\mathcal{F}_B$ składającym się ze wszystkich $A \in \mathcal{F}$ takich, że $A \subset B$.*

Zadanie 11. *Co to znaczy, że σ-ciała $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ są niezależne? Co można powiedzieć o σ-ciele, które jest niezależne od siebie samego?*