Procesy stochastyczne
Zestaw zadań nr 3

Zadanie 1. *Znajdź postać filtracji generowanej przez proces* $X(n,\omega) = \omega^2 \mathbf{1}_{[0,2+1/n]}$.

Zadanie 2. *Niech dana będzie filtracja* $\{\mathcal{F}_n\}$ *i całkowalna zmienna losowa* X. *Udowodnij, że martyngałem względem tej filtracji jest proces określony następująco*

$$\mathbb{E}\left(X|\mathcal{F}_m\right),\ m > 0.$$

Zadanie 3. *Określmy proces* $Z(n)$ *w następujący sposób*

$$Z(n) = Z(n-1) + L(n), Z(0) = 0,\ \mathbb{P}(L(n) = 1) = \mathbb{P}(L(n) = -1),$$

gdzie zmienne $L(n)$ *są niezależne między sobą.*
Udowodnij, że następujące procesy są martyngałami względem filtracji $\mathcal{F}_n = \sigma\left(Z(0), Z(1), \ldots, Z(n)\right)$:
— $Z(n),\ n = 0, 1, \ldots$
— $Z(n)^2 - n,\ n = 0, 1, \ldots,$
— $(-1)^n \cos\left(\pi Z(n)\right),\ n = 0, 1, \ldots.$

Zadanie 4. *Niech* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie* $\mathcal{N}\left(-a, 1\right),\ a > 0$.
— *Dla jakiej wartości* $h \in \mathbb{R}$ *proces* $Y_n = \exp\left(h \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$ *jest martyngałem względem swojej filtracji naturalnej?*
— *Dla jakich wartości* h *proces ten jest sub- lub supermartyngałem?*
— *Niech* $h = 2a$ *i niech* $x > 0$. *Określmy* $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. *Udowodnij, że zachodzi*

$$\mathbb{P}\left(\sup_n S_n > x\right) \le e^{-2ax}.$$

Zadanie 5. *Niech* $X_1, X_2, X_3, \ldots$ *będą niezależnymi, całkowalnymi zmiennymi losowymi o wartości oczekiwanej równej 1. Niech* $S_n = X_1 \cdot X_2 \cdot \cdots \cdot X_n$. *Udowodnij, że* S_n *jest martyngałem względem filtracji generowanej przez zmienne* X_i .

Zadanie 6. *Niech* $X_1, X_2, X_3, \ldots$ *będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, odpowiednio całkowalnych i o średniej zero. Niech* $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. *Pokaż, że proces* $S_n^2 - n\mathbb{E}X_1^2$ *jest martyngałem. Czy proces* S_n^3 *jest martyngałem? Jaką postać komensacji* A_n *należy zaproponować, by proces* $S_n^3 - A_n$ *był martyngałem? Co gdy* S_n^3 *zastąpimy przez* S_n^m*?*

Zadanie 7. *Niech* $X_1, X_2, X_3, \ldots$ *będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie zadanym przez*

$$\mathbb{P}\left(X_i = 1\right) = p = 1 - \mathbb{P}\left(X_i = -1\right) = 1 - q$$

oraz niech $\{\mathcal{F}_n\}$ *będzie filtracją generowaną przez zmienne losowe* X_i. *Niech* $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. *Udowowdnij*
— $M_n = (q/p)^{S_n}$ *jest martyngałem względem* $\{\mathcal{F}_n\}$,
— *dla* $\lambda > 0$ *wyznacz stałą* $C = C(\lambda)$ *taką, że proces* $Z_n^{\lambda} = C^n \lambda^{S_n}$ *jest martyngałem względem* $\{\mathcal{F}_n\}$.

Zadanie 8. *Udowodnij, że suma procesów będących martyngałem względem tej samej filtracji jest martyngałem względem tej filtracji. Co gdy procesy te są martyngałami względem różnych filtracji?*

Zadanie 9. *Udowodnij, że wartość oczekiwana martyngału względem zadanej filtracji jest stała w czasie.*

Definicja 1. *Proces X nazywamy przewidywalnym względem filtracji $\{\mathcal{F}_t\}_{n\in\mathbb{N}}$, jeżeli dla dowolonego n X_{n+1} jest $\mathcal{F}_n$ mierzalna.*

Zadanie 10. *Niech M_t będzie martyngałem całkowalnym z kwadratem względem filtracji $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$. Niech proces Y_t będzie skonstruowany na tej samej przestrzeni probabilistycznej co proces M_t i niech będzie procesem przewidywalnym. Określmy proces N jako*

$$N_t = N_0 + \sum_{k=1}^{t} Y_k \left(M_k - M_{k-1}\right)$$

jest martyngałem pod warunkiem, że N_0 jest $\mathcal{F}_0$-mierzalna.
Co trzeba założyć na temat całkowalności procesu Y?

Definicja 2. *Proces X nazyway submartyngałem (supermartyngałem) względem filtracji $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$, gdy $\forall_{s<t}\ X_s \leq\ (\geq)\ \mathbb{E}\left(X_t|\mathcal{F}_s\right)$.*

Zadanie 11. *Wykazać, że przy odpowiednich założeniach co do całkowalności funkcja wypukła martyngały względem pewnej filtracji jest submartyngałem względem tej filtracji oraz że funkcja wypukła i niemalejąca przekształca submartyngał w submartyngał.*

Zadanie 12. *Udowodnij, że przyrosty martyngału są parami nieskorelowane.*

Zadanie* 13. *Pokaż, że filtracja naturalna jest najmniejszą filtracją taką, że dany proces jest do niej adaptowany.*