Procesy stochastyczne
Zestaw zadań nr 5

Zadanie 1. *Niech* $X_1, X_2, \ldots$ *będzie ciągiem niezależnych i całkowalnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie normalnym* ($\mathcal{N}(\mu,\sigma)$) *i niech* τ *będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem* λ *niezależną od tego ciągu. Znajdź wartość oczekiwaną zmiennej losowej*

$$\xi \stackrel{d}{=} \sum_{n=1}^{\tau} X_n.$$

Zadanie 2. *Niech* $X_1, X_2, \ldots$ *będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, nieujemnymi z wartością oczekiwaną równą* 1*. Niech* T *będzie ograniczonym momentem stopu. Udowodnij, że*

$$\mathbb{E}\prod_{i=1}^{T} X_i = 1.$$

Zadanie 3. *Niech* $X_1, X_2, \ldots$ *będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie i niech* ϕ *oznacza funkcję generującą momenty dla* X_i*. Niech ponadto* T *będzie ograniczonym momentem stopu. Oznaczmy przez* $S_T = \sum_{i=1}^{T} X_i$*. Udowodnij, że*

$$\mathbb{E}\left(\frac{\exp\left(\theta S_T\right)}{\phi(\theta)^T}\right) = 1.$$

Zadanie 4. *Niech* $X_1, X_2, \ldots$ *będą niezależnymi zmiennymi losowymi o dystrybuancie* F*. Oznaczmy* $\tau = \inf\{n : X_n > X_0\}$*. Wyznacz rozkład* τ *oraz jego wartość oczekiwaną.*

Zadanie 5. *Niech* X *będzie symetrycznym błądzeniem losowym z czasem dyskretnym postaci* $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ *i niech filtracja* $\{\mathcal{F}_n\}$ *będzie genereowana przez zmienne* Y_i*. Weźmy dowolne* $K \in \mathbb{N}$ *i określmy* $T = \inf\{n \colon |X_n| = K\}$*. Udowdnij:*
— *T jest momentem stopu,*
— *proces* $Z_n = (-1)^n \cos\left(\pi \cdot (X_n + K)\right)$ *jest martyngałem,*
— *proces* Z *spełnia założenia twierdzenia o opcjonalnym stopowaniu,*
— *znajdź* $\mathbb{E}(-1)^T$*.*

Zadanie 6. *Niech* M *będzie nieujemnym martyngałem takim, że dla dowolnego* n $M_n \in L^p$ *dla pewnego* $p > 1$ *i niecch* $\lambda > 0$*. Udwodnij, że zachodzi*

$$\mathbb{P}\left(\max_{k\le n} M_k \ge \lambda\right) \le \frac{1}{\lambda^p}\int_{\max_{k\le n} M_k \ge \lambda} M_n^p d\mathbb{P} \le \frac{1}{\lambda^p}\mathbb{E}M_n^p.$$

Zadanie 7. *Nierówność Doob'a w* L^p*.*
— *Niech* X, Y *będą nieujemnymi zmiennymi losowymi i niech* $Y \in L^p$ *dla* $p > 1$*. Ponadto niech dla dowolnego* $x > 0$ *zachodzi*

$$x\mathbb{P}\left(X \ge x\right) \le \int_{X \ge x} Y d\mathbb{P}.$$

Udowodnij, że $X \in L^p$ *oraz* $||X||_p \le \frac{p}{p-1}||Y||_p$*.*

— *Korzystając z faktu wykazanego powyżej udowodnij, że dla dowolnego nieujemnego submartyngału M takiego, że dla dowolnego n $\mathbb{E}M_n < \infty$ zachodzi*

$$\left(\mathbb{E}\left(\max_{k\leq n} M_k\right)^p\right)^{1/p} \leq \frac{p}{p-1}\left(\mathbb{E}M_n^p\right)^{1/p}$$

Zadanie 8. *Niech ciągi $\{X_n\}, \{Y_n\}$ oraz zmienna losowa Y bądą określone na tej samej przestrzeni probabilistycznej. Niech ponadto zachodzi $|X_n - Y_n| \xrightarrow{P} 0$ oraz $Y_n \xrightarrow{d} Y$. Udowodnij, że $X_n \overset{d}{Y}$.*

Zadanie 9. *Rozważmy ciąg dystrybuant $\{F_n\}$ oraz pewną dystrybunatę F. Udowdonij, że ciąg $\{F_n\}$ zbiega słabo do F wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $\epsilon > 0, h > 0$ oraz $t \in suppF$ istniej $N = N(t, h, \epsilon)$ takie, że dla dowlonego $n > N$ zachodzi*

$$F(t-h) - \epsilon \leq F_n(t) \leq F(t+h) + \epsilon.$$