

Procesy stochastyczne

Zestaw zadań nr 3

Zadanie 1. Znajdź postać filtracji generowanej przez proces $X(n, \omega) = \omega^2 \mathbf{1}_{[0, 2+1/n]}$.

Zadanie 2. Niech dana będzie filtracja $\{\mathcal{F}_n\}$ i całkowalna zmienna losowa X . Udowodnij, że martyngałem względem tej filtracji jest proces określony następująco

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_m), \quad m > 0.$$

Zadanie 3. Niech X_1, X_2, X_3, \dots będą niezależnymi, całkowalnymi i o wartości oczekiwanej równej 1. Niech $S_n = X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n$. Udowodnij, że S_n jest martyngałem względem filtracji generowanej przez zmienne X_i .

Zadanie 4. Niech X_1, X_2, X_3, \dots będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, odpowiednio całkowalnych i o średniej zero. Niech $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Pokaż, że proces $S_n^2 - n\mathbb{E}X_1^2$ jest martyngałem. Czy proces S_n^3 jest martyngałem? Jaką postać komensacji A_n należy zaproponować, by proces $S_n^3 - A_n$ był martyngałem? Co gdy S_n^3 zastąpimy przez S_n^m ?

Zadanie 5. Niech X_1, X_2, X_3, \dots będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie zadany przez

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - q$$

oraz niech $\{\mathcal{F}_n\}$ będzie filtracją generowaną przez zmienne losowe X_i . Niech $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Udowodnij

- $M_n = (q/p)^{S_n}$ jest martyngałem względem $\{\mathcal{F}_n\}$,
- dla $\lambda > 0$ wyznacz stałą $C = C(\lambda)$ taką, że proces $Z_n^\lambda = C^n \lambda^{S_n}$ jest amrtyngełem względem $\{\mathcal{F}_n\}$.

Zadanie 6. Udowodnij, że suma martyngatów jest martyngałem.

Zadanie 7. Udowodnij, że wartość oczekiwana martyngatu względem zadanej filtracji jest stała w czasie.

Zadanie 8. Niech M_t będzie martyngałem całkowalnym z kwadratem względem filtracji $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^\infty$. Niech proces Y_t będzie skonstruowany na tej samej przestrzeni probabilistycznej co proces M_t i niech będzie procesem przewidywalnym. Określmy proces N jako

$$N_t = N_0 + \sum_{k=1}^t Y_k (M_k - M_{k-1})$$

jest martyngałem pod warunkiem, że N_0 jest \mathcal{F}_0 -mierzalna. Co trzeba założyć na temat całkowalności procesu Y ?

Zadanie 9. Wykazać, że przy odpowiednich założeniach co do całkowalności funkcja wypukła martyngaty względem pewnej filtracji jest submartyngałem względem tej filtracji oraz że funkcja wypukła i niemalejąca przekształca submartyngał w submartyngał.

Zadanie 10. Udowodnij, że przyrosty martyngatu są parami nieskorelowane.

Zadanie* 11. Pokaż, że filtracja naturalna jest najmniejszą filtracją taką, że dany proces jest do niej adaptowany.