Procesy stochastyczne
Zestaw zadań nr 1

Zadanie 1. *Dana jest funkcja*

$$F(x) = 0 \cdot \mathbf{1}_{x \leqslant 0} + (ax^2 + bx) \cdot \mathbf{1}_{0<x<1} + 1 \cdot \mathbf{1}_{x \geqslant 1}.$$

Znajdź wszystkie pary liczb a, b dla których funkcja ta jest dystrybuantą. Dla jakich wartości dystrybuanta ta jest ciągła?

Zadanie 2. *Dodatnia liczba naturalna I jest losowana zgodnie z rozkładem $\mathbb{P}(I = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n, n = 1, 2, \ldots$. Jeśli liczba I przyjmie wartość n, wtedy rzucana jest moneta z prawdopodobieństwem wyrzucenia orła równym e^{-n}. Znajdź prawdopodobieństwo, że otrzymano orła.*

Zadanie 3. *Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie z gęstością f i dystrybuntą F. Niech T_k będzie k-tą najmniejszą obserwacją. Znajdź rozkład T_k i wektora $(T_1, T_2, \ldots, T_n)$.*

Zadanie 4. *Niech X będzie zmienną losową przyjmującą dodatnie wartości oraz o gęstości f. Znajdź postać gęstości zmiennej losowej X^{-1}.*

Zadanie 5. *Niech X będzie zmienną losową przyjmująca nieujemne wartości i niech ϕ będzie rosnącą i różniczkowalną funkcją taką, że $\phi(0) = 0$. Udowodnij*

1. $\mathbb{E}X = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant t)dt$
2. $\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n) \leqslant \mathbb{E}X \leqslant 1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n)$ *(jaki stąd wniosek na temat całkowalności X?)*
3. $\mathbb{E}\phi(X) = \int_0^{+\infty} \phi'(t)\mathbb{P}(X \geqslant t)dt$

Zadanie 6. *Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowym o jednosatjnym rozkładzie na odcinku $(0, 1)$. Udowodnij, że zmienne $U = \sqrt{-2\log X}\cos(2\pi Y)$, $V = \sqrt{-2\log X}\sin(2\pi Y)$ są niezależne i mają standardowy rozkład normalny. Czy widzisz jakieś zastosowanie tego twierdzenia?*

Zadanie 7. *Rozkład Cauchy'ego ma następującą gęstość*

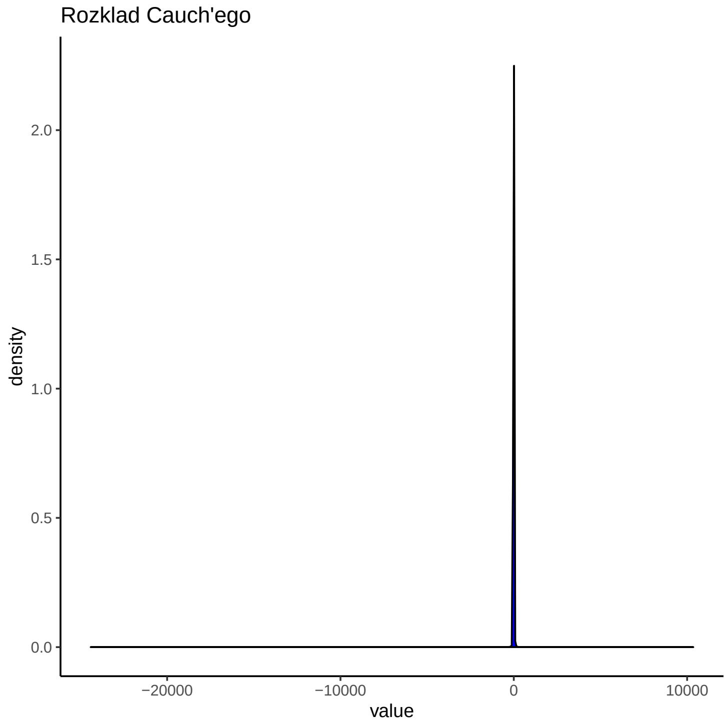
$$c_u(x) = \frac{1}{\pi}\frac{u}{u^2 + x^2}, x \in \mathbb{R}, u > 0.$$

1. *Znajdź wartość oczekiwaną rozkładu Cauchy'ego.*
2. *Wykaż, że $c_u * c_v = c_{u+v}$.*
3. *Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie c_u. Wykaż, że $(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n$ również ma rozkład c_u.*
4. *Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o standardowym rozkładzie normalnym. Wykaż, że X/Y ma rozkład c_1.*
5. *Niech X ma rozkład jednostajny na przedziale $(-\pi/2, \pi/2)$. Wykaż, że $\tan X$ ma rozkład Cauch'ego c_1.*

Zadanie 8. *Niech dany będzie wielowymiarowy rozkład normlny z gęstością $g(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{x^2-2xy+3y^2}{2}\right)$. Znajdź parametry tego rozkładu.*

Zadanie 9. *Niech $X \sim \mathcal{N}_p(\mu, \Sigma)$ i niech A będzie macierzą symetryczną. Udowodnij, że $\mathbb{E}X^T AX = tr(A\Sigma) + \mu^T A\mu$.*

Zadanie 10. *Załóżmy, że zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_{20}$ są niezależne, o jednakowym rozkładzie $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Niech $Y_5 = X_1 + \cdots + X_5$, $Y_{20} = X_1 + \cdots + X_{20}$. Wyznaczyć warunkową wartość oczekiwaną $\mathbb{E}(Y_5|Y_{20})$.*



Zadanie 11. *W grupie studenckiej przeprowadzono test z analizy, w którym można uzyskać od 0 do 100 punktów. Przeciętna liczba punktów uzyskiwanych przez studenta wynosi 40, a odchylenie standardowe 20. Zakładając, że wyniki studentów są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie prawdopodobieństwa, obliczyć prawdopodobieństwo tego, że średnia liczba punktów w 150 osobowej grupie studenckiej będzie większa od 45.*

Zadanie 12. *Załóżmy, że przy składaniu książki w drukarni każda litera ma prawdopodobieństwo 0.0001, że zostanie złożona błędnie. Po złożeniu książki szpalty czyta korektor, który znajduje każdy błąd z prawdopodobieństwem 0.5. Znaleźć prawdopodobieństwo, że w książce o stu tysiącach znaków drukarskich pozostaną po korekcie nie więcej niż dwa błędy.*

Zadanie* 13. *Zbiór Cantora C to zbiór wszystkich liczb t postaci*

$$t = \frac{t_1}{3} + \frac{t_2}{3^2} + \cdots + \frac{t_n}{3^n} + \ldots,$$

gdzie $t_i \in \{0, 2\}$. Zauważmy, że każda liczba ze zbioru C ma jednoznaczną reprezentację. Określmy funkcję schodkową przekształcającą zbiór Cantora na odcinek $[0, 1]$. Dla liczb t ze zbioru C połóżmy

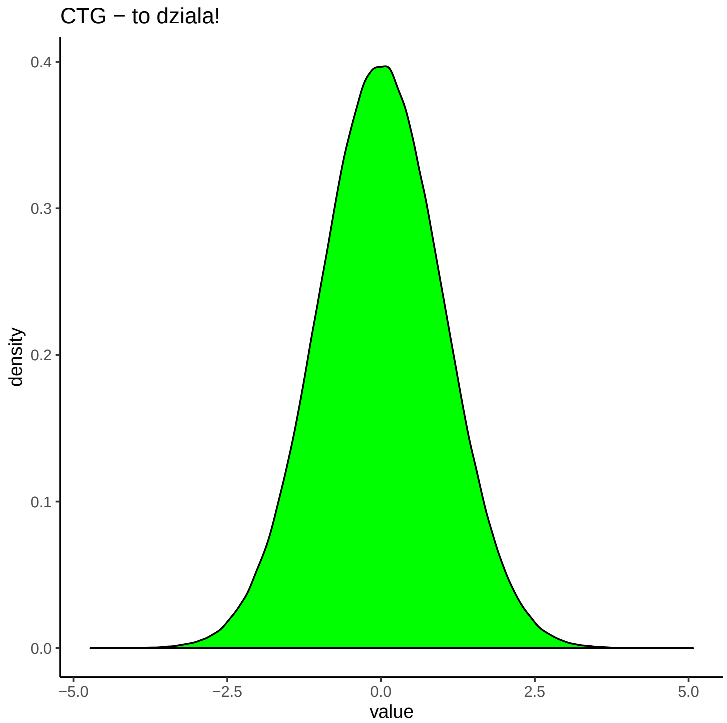
$$\phi(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{t_1}{2} + \frac{t_2}{2^2} + \cdots + \frac{t_n}{2^n} + \ldots\right).$$

Poza zbiorem Cantora kładziemy odpowiednie stałe tak, aby funkcja, o dziedzinie rozszerzonej z C do $[0, 1]$ była niemalejąca.

1. *Wykazać, że jest to dystrybuanta ciągła, ale nie absolutnie ciągła (nie posiada gęstości).*
2. *Obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej o tej dystrybuancie.*

Zadanie* 14. *Udowodnij, że każde σ-ciało, jeśli jest nieskończone to musi być nieprzeliczalne.*

Zadanie 15. *Od jakiej wartość (ilości sumownaych składników) można powiedzieć, że działa centralne twierdzenie graniczne? Zaprojektuj eksperyment numeryczny, który dla kilku rodzin rozkładów pozwoli ocenić tą wartość.*


CTG − to dziala!
density
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
−5.0
−2.5
0.0
2.5
5.0
value