

## Zestaw 1

**Zadanie 1.** Wykazać, że jeżeli  $(X_a)_{a \in A}$  jest ciągiem zmiennych losowych,  $A$  jest zbiorem nieprzeliczalnym, to  $\sup_A X_a$  nie musi być zmienną losową.

**Zadanie 2.** Niech  $\mu$  będzie rozkładem prawdopodobieństwa o dystrybuancie  $F$ , gdzie  $F$  jest dana wzorem

$$F(x) = (0.1 + x)\mathbf{1}_{x \in [0; 0.5)} + (0.4 + x)\mathbf{1}_{x \in [0.5; 0.55)} + \mathbf{1}_{x \in [0.55; \infty)}.$$

Znajdź  $\mu(\{0.5\})$ ,  $\mu([0; 0.5])$ ,  $\mu((0; 0.55))$ .

**Zadanie 3.** Niech  $\mu$  będzie rozkładem prawdopodobieństwa na  $\mathbb{R}$ . Pokaż, że  $x_0 \in \mathbb{R}$  jest punktem skoku rozkładu  $\mu$  wtedy i tylko wtedy, gdy dystrybuantu rozkładu  $\mu$  jest nieciągła w  $x_0$ .

**Zadanie 4.** Pokazać, że dowolny rozkład prawdopodobieństwa  $\mu$  może mieć co najwyżej przeliczalną liczbę punktów skoku.

**Zadanie 5.** Niech  $X$  będzie zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem  $\alpha$ . Wyznacz rozkład zmiennej losowej  $Y$  zdanej jako  $Y = 3X - 5$ .

**Zadanie 6.** Niech zmienna losowa  $U$  ma rozkład jednostajny na odcinku  $[0, 2]$ . Wyznacz rozkład zmiennych  $Y = \min(X, X^2)$  i  $Z = \max(1, X)$ .

**Zadanie 7.** Niech zmienna losowa  $X$  ma standardowy rozkład normalny. Wyznacz dystrybuantę i gęstość zmiennych losowych  $Y = \exp X$  i  $Z = X^2$ .

**Zadanie 8.** Niech  $X$  będzie nieujemną zmienną losową. Udowodnij, że  $\mathbb{E}X = \int_0^\infty \mathbb{P}(X \geq t) dt$

**Zadanie 9.** Niech  $X$  będzie zmienną losową o nośniku na liczbach dodatnich całkowitych. Wykaż, że  $\mathbb{E}X = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(X \geq n)$ .

**Zadanie 10.** Oblicz wartość oczekiwaną zmiennej losowej o rozkładzie geometrycznym z parametrem  $p$ .