AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Stochastyczne problemy odwrotne

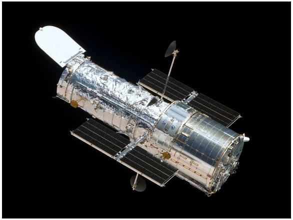
Definicje i zastosowania

Grzegorz Mika

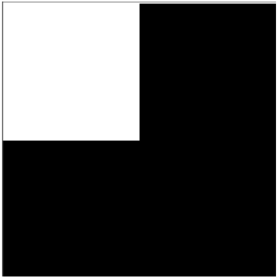
Wydział Matematyki Stosowanej

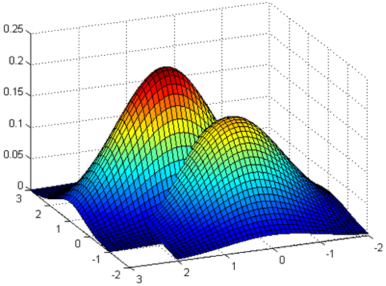
9 czerwca 2018

Początki



Początki





Stochastyczny problem odwrotny

$$Y = Kf + \epsilon\xi$$

$$K\colon \mathbb{H} \to \mathbb{G}, \epsilon > 0$$

Hubble

$$Y = \int_D h(\cdot - x) f(x) dx + \epsilon\xi$$

$$\mathbb{H} = \mathbb{G} = L_2(\mathbb{R}^2), h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

Naiwne podejście

Stochastyczny problem odwrotny

$$Y = Kf + \epsilon\xi$$

$$K\colon \mathbb{H} \to \mathbb{G}, \epsilon > 0$$

Naiwne podejście

Stochastyczny problem odwrotny

$$Y = Kf + \epsilon\xi$$

$$K\colon \mathbb{H} \to \mathbb{G}, \epsilon > 0$$

- skonstruować estymator $\hat{g}$ dla $g = Kf$ na bazie obserwacji Y

Naiwne podejście

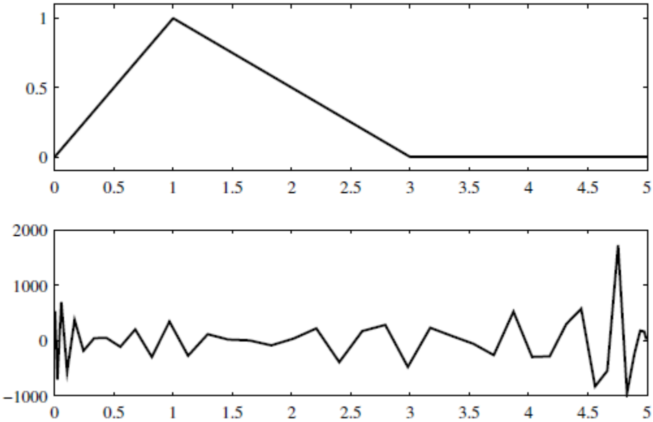
Stochastyczny problem odwrotny

$$Y = Kf + \epsilon\xi$$

$$K \colon \mathbb{H} \to \mathbb{G}, \epsilon > 0$$

- skonstruować estymator $\hat{g}$ dla $g = Kf$ na bazie obserwacji Y,
- estymować f przez $K^{-1}\hat{g}$.

Naiwne podejście



Uwarunkowanie problemu

Problem nazwiemy dobrze postawionym w sensie Hadamarda, gdy:

- dla dowolnego $g \in \mathbb{G}$ istnieje $f \in \mathbb{H}$ spełniający zadane równanie,
- rozwiązanie jest jedyne,
- rozwiązanie jest stabilne, czyli zależy w sposób ciągły od prawej strony równania.

Uwarunkowanie problemu

Problem $Kf = g$ nazwiemy dobrze postawionym w sensie Hadamarda, gdy:

- dla dowolnego $g \in \mathbb{G}$ istnieje $f \in \mathbb{H}$ spełniający zadane równanie,
- rozwiązanie jest jedyne,
- rozwiązanie jest stabilne, czyli zależy w sposób ciągły od prawej strony równania.

Problem

Większość "naturalnie występujących" problemów jest źle uwarunkowana!

Rozwiązaniem w sensie średniokwadratowym nazywamy f^* takie, że

$$\|Af^* - g\| = \inf \{\|Au - g\|, u \in \mathbb{H}\}.$$

Prekondycjonowanie

f^* jest rozwiązaniem w sensie średniokwadratowym wtedy i tylko wtedy, gdy

$$A^*Y = A^*Af + \epsilon A^*\xi,$$

gdzie A^* jest sprzężeniem operatora A.

Regularyzacja

"Delikatne" odwrócenie

$$\hat{f}_\alpha = \Phi_\alpha(A^* A) A^* Y,$$

$$\sup_{t \geqslant 0} \Phi_\alpha(t) < \infty \ \forall \alpha > 0$$

$$\sup_{\alpha > 0, t \geqslant 0} t\Phi_\alpha(t) < \infty$$

$$\Phi_\alpha(t) \rightarrow t^{-1}, \ gdy \ \alpha \rightarrow 0, \ \forall t > 0$$

Przyjazna postać

Twierdzenie spektralne w wersji Halomsa

Niech A będzie operatorem samosprzężonym na ośrodkowej przestrzeni Hilberta H. Wtedy istnieje przestrzeń mierzalna $(S, \mathcal{S}, \mu)$, rzeczywista funkcja mierzalna b określona na S i operator unitarny $U\colon H \to L_2(S, \mathcal{S}, \mu)$, takie, że

$$A = U^{-1} M_b U,$$

gdzie M_b jest operatorem mnożenia przez funkcję b zdefiniowanym jako $(M_b g)(x) = b(x)g(x)$.

W źle uwarunkowanych problemach $b \to 0$.

Przyjazna postać

Problem

$$A^* Y = A^* A f + \epsilon A^* \xi$$

ma przedstawienie

$$U A^* Y = b\theta + \epsilon\eta$$

lub równoważnie

$$X = \theta + \epsilon\sigma\eta$$

$$\sigma = \frac{1}{b},\ \theta = Uf,\ \eta = UA^*\xi.$$

Czy to ma sens?

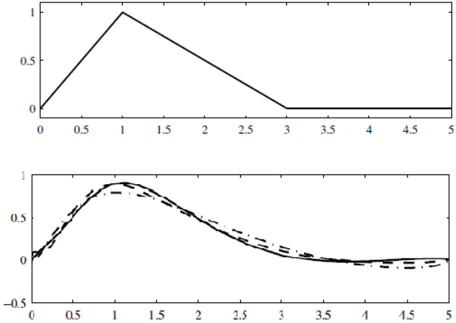
Najprostsza regularyzacja

$$\Phi_\alpha(t) = \frac{1}{t}\mathbf{1}_{[\alpha,\infty)}$$

Czy to ma sens?

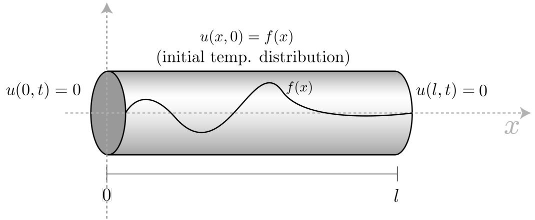
Najprostsza regularyzacja

$$\Phi_\alpha(t) = \frac{1}{t}\mathbf{1}_{[\alpha,\infty)}$$



Zastosowania

Zastosowania



Równanie ciepła

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t), \;\; u(x,0) = f(x), \;\; u(0,t) = u(1,t) = 0$$

$$Af = \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} 2\exp(-\pi^2 k^2 T)\sin(k\pi x)\sin(k\pi y)f(y)dy$$

Zastosowania

Zastosowania

Zmienne ukryte

$$(\tilde{y}, z, w) \sim F$$

$$\begin{cases} \tilde{y} = x_0(z) + U \\ \mathbb{E}(U|w) = 0 \end{cases}$$

$$A\colon x \to \mathbb{E}(x(z)|w), \;\; y = \mathbb{E}(\tilde{y}|w)$$

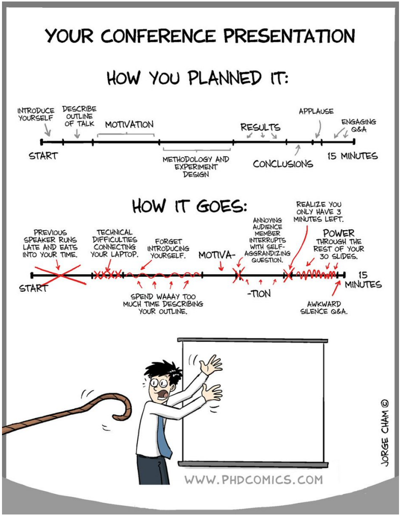
$$y = \hat{A}x_0 + \left[Ax_0 - \hat{A}x_0\right] = \hat{A}x_0 + \epsilon\xi$$

Bibligrafia

- Strona *forsal.pl*,
- Strona *phdcomics.com*,
- Strona *crazynauka.pl*,
- Strona *nauklove.pl*,
- J.- M. Loubes, V. Rivoirard, *Review of rates pf convergance and reularity conditions for inverse problems*, technical report,
- J. Kaipio, E. Somersalo, *Statistical and Computational Inverse Problems*, Springer, 2004,
- P. Alquier, E. Gautier, G. Stoltz, *Inverse Problems and High-Dimensional Estimation* Springer-Verlag, 2011, wydanie zbiorowe,

Dziękuję za uwagę!

Rezultaty


YOUR CONFERENCE PRESENTATION
HOW YOU PLANNED IT:
INTRODUCE YOURSELF
DESCRIBE OUTLINE OF TALK
MOTIVATION
RESULTS
APPLAUSE
ENGAGING Q&A
START
METHODOLOGY AND EXPERIMENT DESIGN
CONCLUSIONS
15 MINUTES
HOW IT GOES:
PREVIOUS SPEAKER RUNS LATE AND EATS INTO YOUR TIME.
TECHNICAL DIFFICULTIES CONNECTING YOUR LAPTOP.
FORGET INTRODUCING YOURSELF.
MOTIVA-
ANNOYING AUDIENCE MEMBER INTERRUPTS WITH SELF-AGGRANDIZING QUESTION.
REALIZE YOU ONLY HAVE 3 MINUTES LEFT.
POWER THROUGH THE REST OF YOUR 30 SLIDES.
START
SPEND WAAAY TOO MUCH TIME DESCRIBING YOUR OUTLINE.
-TION
15 MINUTES
AWKWARD SILENCE Q&A.
JORGE CHAM ©
WWW.PHDCOMICS.COM