Kolokwium 1
Grupa A

Zadanie 1. *Niech T, S będą momentami stopu z czasem dyskretnym względem tej samej filtracji. Udowodnij, że momentem stopu jest zmienna losowa $T + S$.*

Zadanie 2. *Niech proces X będzie submartyngałem względem pewnej filtracji z czasem dyskretnym o wartości oczekiwanej stałej w czasie. Udowodnij, że proces X jest martyngałem względem tej filtracji.*

Zadanie 3. *Niech X_i będą niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że dla każdego k naturalnego dodatniego zachodzi $\mathbb{P}(X_k = k) = \frac{1}{k}$ oraz $\mathbb{P}(X_k = 0) = \frac{k-1}{k}$. Niech $M_n = \prod_{i=1}^{n} X_i,\ M_0 = 0$. Udowodnij, że proces M jest martyngałem względem filtracji genereowanej przez zmienne X_i.*

Zadanie 4. *Niech $A_1, A_2, \ldots$ będzie ciągiem zdarzeń niezależnych zdzrzeń i niech $S_n = \sum_{i=1}^{n}(1 - \mathbf{1}_{A_i})$. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem deterministycznym. Jaką postać musi mieć ciąg $\{a_n\}$ by proces $\{S_n + a_n\}$ był martyngałem względem filtracji generowanej przez zmienne $\mathbf{1}_{A_i}$?*

Zadanie 5.
- *Podaj definicję filtracji generowanej przez proces stochastyczny.*
- *Podaj definicję submartyngału.*